

南昌大学 2018-2019 学年第二学期期末考试 试 卷 A 答 案

一、填空题（每空 3 分，共 15 分）

1、5； 2、 $z = x^2 + y^2 + 2$ ； 3、0； 4、 π ； 5、3

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、A； 2、D； 3、C； 4、C； 5、C

三、计算题（每小题 8 分，共 16 分）

1、解： $F = e^z - z + xy - 3$ ，

$$\vec{n} = (y, x, e^z - 1)$$

$$\vec{n}|_{(2,1,0)} = (1, 2, 0)$$

$$\text{切平面： } x + 2y - 4 = 0$$

$$\text{法线： } \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{0}$$

2、解： $F(x, y, z) = z^2 y - xz^3 - 1$

$$F_x = -z^3; F_y = z^2; F_z = 2zy - 3xz^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-z^3}{2zy - 3xz^2}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z^2}{2zy - 3xz^2}$$

$$x=1, y=0, \text{则 } z=-1$$

$$\text{则 } dz|_{(1,0)} = \frac{1}{3}(dx + dy)$$

四、计算题（每小题 8 分，共 16 分）

1、解： $P = \frac{y}{x^2 + y^2}, Q = \frac{-x}{x^2 + y^2}$ ，则 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$$L_1: x^2 + y^2 = \varepsilon^2 \text{ 顺时针}$$

$$\therefore \oint_{L+L_1} = \iint_D 0 dx dy = 0$$

$$\text{又 } \int_{L_1} = 2\pi$$

$$\therefore \oint_L = \oint_{L+L_1} - \int_{L_1} = \iint_D 0 dx dy - \int_{L_1} = -2\pi$$

2、解： $\therefore \frac{\partial P}{\partial y} = 12xy - 3y^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}$

\therefore 该积分与路径无关。

$$I = \int_0^1 0 dx + \int_0^1 6y - 3y^2 dy \quad \text{或} \quad I = \int_0^1 0 dy + \int_0^1 6x - 1 dy$$

$$= 2$$

五、计算题（每小题 8 分，共 16 分）

1、解：设 $\Sigma_0: z = 0 \quad x^2 + y^2 \leq 1$ ，取下侧

$$\therefore \oiint_{\Sigma+\Sigma_0} = \iiint_{\Omega} x^2 + y^2 + z^2 dv = \frac{2\pi}{5}$$

$$\iint_{\Sigma_0} = - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy = -\pi$$

$$\therefore I = \oiint_{\Sigma+\Sigma_0} - \iint_{\Sigma_0}$$

$$I = \frac{7\pi}{5}$$

2、解： $u_n(x) = (2n+1)x^{2n+1}$ ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = x^2$

$x^2 < 1$ 时收敛； $x^2 > 1$ 时发散。

$x = 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)$ 发散； $x = -1$: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n+1} (2n+1)$ 发散

\therefore 收敛域为 $(-1, 1)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} (x^{2n+1})'$$

$$= x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} \right)' = x \left(\frac{x}{1-x^2} \right)'$$

$$= \frac{x(1+x^2)}{(1-x^2)^2} \quad (-1, 1)$$

六、计算题（每小题 8 分，共 16 分）

1、解： $ds = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{2} dx dy$

$$S_1 = \iint_{\Sigma} ds = \sqrt{2} \iint_D dx dy \quad D: x^2 + y^2 \leq 1$$

$$= \sqrt{2} \pi$$

$$S = \pi + \sqrt{2} \pi = (\sqrt{2} + 1) \pi$$

$$V_{\text{圆锥}} = \frac{1}{3} \pi 1^2 \times 1 = \frac{1}{3} \pi$$

2、解： 设 $z = x^2 + y^2$ 上的点 (x, y, z) 到平面 $x + y - 2z = 2$ 之间的距离

$$d = \frac{|x + y - 2z - 2|}{\sqrt{6}}$$

$$F = (x + y - 2z - 2)^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z)$$

$$F_x = 2(x + y - 2z - 2) + 2\lambda x = 0$$

$$F_y = 2(x + y - 2z - 2) + 2\lambda y = 0$$

$$F_z = -4(x+y-2z-2) - \lambda = 0$$

$$z = x^2 + y^2$$

解方程组可得唯一的驻点 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8})$

易知 $d = \frac{|x+y-2z|}{\sqrt{6}}$ 在条件下存在最大值, 则 $d_{\max} = \frac{7}{4\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{6}}{24}$

七、证明题（6 分）

证：由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{n+1} - u_n}{(u_n - 1)(u_{n+1} - 1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1})$ 收敛

$$\begin{aligned} \text{则 } S_n &= \frac{1}{u_1 - 1} - \frac{1}{u_2 - 1} + \frac{1}{u_2 - 1} - \frac{1}{u_3 - 1} + \cdots + \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \\ &= \frac{1}{u_1 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \quad \text{收敛} \end{aligned}$$

又 $\{u_n\}$ 非无穷大 则 $\{u_n\}$ 收敛, \therefore 不妨设 $|u_n| < M, n$ 充分大时

$\therefore |u_n v_n| \leq M |v_n|, n$ 充分大时, 又已知 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 绝对收敛

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n v_n)$ 绝对收敛