2019-2020 高等数学（I）A 卷参考答案

一．填空题：

1. $y=\dfrac{1}{x}$；　　2. $\sqrt{35}$；　　3. $\{(x,y,z)\big|z=x^2+y^2\}$；

4. πa^2；　　5. $a^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}(x\ln a)^n, x\in R$。

二．选择题：

1.D ；　2.A；　3.A;　4.B;　5.B

三．计算题：

1.解：齐次微分方程的特征方程为 $r^2-4r+3=0$，

特征根 $r_1=3,r_2=1$， 通解为 $y=c_1e^{3x}+c_2e^x$

设非齐次微分方程的一个特解为 $y^*=Ae^{2x}$，

代入方程，得 A=-2，即 $y^*=-2e^{2x}$ ，

所以原方程通解为 $y=c_1e^{3x}+c_2e^x-2e^{2x}$。

2.解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{z}{y}(\dfrac{x}{y})^{z-1}$；$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{zx}{y^2}(\dfrac{x}{y})^{z-1}$；$\dfrac{\partial u}{\partial z}=(\dfrac{x}{y})^z\ln\dfrac{x}{y}$

$du\Big|_{(1,1,1)}=dx-dy$ 。

四．计算题：

1.解：$\dfrac{\partial F}{\partial x}=y\cdot\dfrac{\sin xy}{1+x^2y^2}$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=y\cdot\frac{y\cos(xy)(1+x^2y^2)-2xy^2\sin(xy)}{(1+x^2y^2)^2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=4$$

2.解：拉格朗日函数 $F(x,y,\lambda)=x^2+y^2-3+\lambda(x-y+1)$

解方程组 $\begin{cases} F_x'=2x+\lambda=0 \\ F_y'=2y-\lambda=0 \\ F_\lambda'=x-y+1=0 \end{cases}$

得 $x=-\dfrac{1}{2}, y=\dfrac{1}{2}, \lambda=1$

在驻点（$-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}$)处，$A=F_{xx}''=2, B=F_{xy}''=0, C=F_{yy}''=2, AC-B^2>0$, 且 $A>0$

因此函数在驻点（$-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}$)处取得极小值，极小值为 $Z(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})=-\dfrac{5}{2}$

五．计算题：

1.解：$V=\iiint_{\Omega_1}dv+\iiint_{\Omega_2}dv=\int_2^6(\iint_{D_1(z)}dxdy)dz+\int_0^2(\iint_{D_2(z)}dxdy)dz$

$$=\int_2^6\pi(6-z)dz+\int_0^2\pi z^2dz=\frac{32}{3}\pi$$

2.解：原式 $=\iint_D(1-2x)d\sigma=\int_0^1dy\int_{y^2}^{\sqrt{y}}(1-2x)dx=\dfrac{1}{30}$

六．计算题：

1.解：补 Σ_1：平面 $z=1$, 被 $z=x^2+y^2$ 所截有限部分下侧，

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy=-\iiint_\Omega[3(x-1)^2+3(y-1)^2+1]dv$$

$$=-3\iiint_\Omega(x^2+y^2)dv+6\iiint_\Omega xdv+6\iiint_\Omega ydv-7\iiint_\Omega dv$$

其中:$\iiint_\Omega xdv=\iiint_\Omega ydv=0$, ($\Omega$ 关于 yoz 面和 zox 面对称)

$$\iiint_\Omega(x^2+y^2)dv=\iint\limits_{x^2+y^2\le1}(x^2+y^2)dxdy\int_{x^2+y^2}^1dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1r^2(1-r^2)rdr=2\pi(\frac{1}{4}-\frac{1}{6})=\frac{\pi}{6}$$

$$\iiint_\Omega dv=\int_0^1dz\iint\limits_{x^2+y^2\le z}dxdy=\int_0^1\pi zdz=\frac{\pi}{2}$$

$$\oiint_{\Sigma_1}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy=0$$

$$I=\iint_{\Sigma_1+\Sigma}-\iint_{\Sigma_1}=-3\cdot\frac{\pi}{6}-7\cdot\frac{\pi}{2}-0=-4\pi$$

2.解：$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1$

$x=-1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$收敛；$x=1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，收敛域为$[-1,1)$

设$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},s'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}(-1\le x<1)$

$s(0)=0,s(x)=\int_0^x s'(x)dx=-\ln(1-x)(-1\le x<1)$

$x=\frac{1}{2},\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}=\ln 2.$

六．证明题：

证明：由$\{a_n\}$单调减少，知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在，记为$a,a\ge 0,$

且对$\forall n\in N^+$，有$a_n\ge a$，从而$\frac{1}{a_n+1}\le\frac{1}{a+1},$

又已知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散，故$a>0,$

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a+1})^n$的公比$\frac{1}{a+1}<1,\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a+1})^n$收敛,

由比较审敛法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a_n+1})^n$收敛。