南昌大学 2019～2020 学年秋季学期期末考试试卷

高等数学(I) (上)　参考答案　(A)卷

一. 填空题 (每小题 3 分，共 15 分)

1．$b=3a$　　2．$\cos x\cdot 2^{\sin x}\cdot\ln 2\cdot dx$　　3. $\ln 2$

4. $xf'(x)-f(x)+C$ (其中 C 为任意常数)　　5. $xf(x^2)$

二. 单项选择题 (每小题 3 分，共 15 分)

1. (C)　　2. (A)　　3. (B)　　4. (D)　　5. (D)

三. 计算题 (每小题 7 分,共 14 分)

1. 解： $\because\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+\frac{a}{x}}{1-\frac{a}{x}}\right)^x$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}\cdot a}}{\left(1-\frac{a}{x}\right)^{-\frac{x}{a}\cdot(-a)}}\qquad =e^{2a}.$$

$\therefore\ e^{2a}=9,$　　故 $a=\ln 3.$

2. 解：　原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x]$$

（设$\dfrac{1}{x}=t$），　$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^t-1-t}{t^2}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^t-1}{2t}$

$$=\frac{1}{2}$$

四. 解答题 (每小题 7 分,共 21 分)

. **1. 解：** $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})'$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(x+\sqrt{x}\right)'\right].$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$$

2. 解： $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\sin t}{2t}=-\frac{\sin t}{2t}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{d}{dt}\left(-\frac{\sin t}{2t}\right)\cdot\frac{1}{\left(1+t^2\right)'_t}=-\frac{1}{2}\frac{t\cos t-\sin t}{t^2}\cdot\frac{1}{2t}=\frac{\sin t-t\cos t}{4t^3}$$.

3. 解： 方程两边对 x 求导，得

$$6y^2y'-4yy'+2xy'+2y-2x=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots（*）$$

即 $y'=\frac{x-y}{3y^2-2y+x}$

令 $y'=0$，得 $x=y$．将 $x=y$ 代入原方程得唯一驻点 $x=1$.

为求 $y''(1)$，（*）式两边对 x 求导，得

$$(3y^2-2y+x)y''+y'(6yy'-2y'+1)=1-y'$$

将 $x=1$， $y=1$， $y'=0$ 代入上式得 $y''(1)=\frac{1}{2}>0$

因此， $x=1$ 为 $y=y(x)$ 的极小点，且极小值为 $y=1$.

五. 计算题 (每小题 7 分,共 21 分)

1. 解： 方法一：设 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$， $dx=2tdt$，

故 $\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx=\int\frac{2t}{t(1+t^2)}dt=2\int\frac{1}{1+t^2}dt$

$=2\arctan t+C=2\arctan\sqrt{x}+C$

方法二： $\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx=2\int\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}d\sqrt{x}$

$=2\arctan\sqrt{x}+C$

2. 解： $\int\frac{1}{x(1+x^9)}dx=\int\frac{1+x^9-x^9}{x(1+x^9)}dx$

$=\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{x^8}{1+x^9}dx$

$=\ln|x|-\frac{1}{9}\ln\left|1+x^9\right|+C$

方法二：设 $\frac{1}{x}=t$, $\int\frac{1}{x(1+x^9)}dx=\int\frac{t^{10}}{1+t^9}\cdot(-\frac{1}{t^2})dt=-\int\frac{t^8}{1+t^9}dt$

$=-\frac{1}{9}\ln\left|1+t^9\right|+C=-\frac{1}{9}\ln\left|1+\frac{1}{x^9}\right|+C=\ln|x|-\frac{1}{9}\ln\left|1+x^9\right|+C$

3. 解：

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)d(x-1)=[(x-1)f(x)]_0^1-\int_0^1(x-1)f'(x)dx$$

$$=-\int_0^1(x-1)\arcsin(x-1)^2dx$$

$$\underline{\underline{令x-1=u}}$$

$$=-\int_{-1}^0 u\arcsin u^2du=-\frac{1}{2}\int_{-1}^0\arcsin u^2du^2=-\frac{1}{2}[u^2\arcsin u^2\Big|_{-1}^0-\int_{-1}^0\frac{2u^3}{\sqrt{1-u^4}}du]$$

$$=\frac{\pi}{4}+\int_{-1}^0\frac{u^3}{\sqrt{1-u^4}}du=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{1-u^4}\Big|_{-1}^0=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

六. 应用题与证明题：（每小题 7 分,共 14 分）

1. 解：$S=\int_0^1 (ax-x)dx+\int_1^a (ax-x^2)dx$

$$=\frac{a-1}{2}x^2\Big|_0^1+(\frac{a}{2}x^2-\frac{x^3}{3})\Big|_1^a$$

$$=\frac{a^3-1}{6}$$

令 $\frac{a^3-1}{6}=\frac{7}{6}$ ， 得 $a^3=8$ ， $\therefore a=2$

2. 证明

（存在性）：令 $F(x)=f(x)-x$，则函数 $F(x)$ 在闭区间 $[0,\ 1]$ 上连续，且当 $x\in[0,\ 1]$ 时，由

$$0<f(x)<1\ ,$$

所以，$F(0)=f(0)-0>0$，$F(1)=f(1)-1<0$.

因此由连续函数的零点定理，知至少存在一点 $x\in(0,\ 1)$，使得 $F(x)=f(x)-x=0$．即至少存在一点 $x\in(0,\ 1)$，使得 $f(x)=x$．

（唯一性）：若存在两点 x_1，$x_2\in(0,\ 1)$，$x_1<x_2$，使得 $f(x_1)=x_1$， $f(x_2)=x_2$

由 Lagrange 中值定理，知至少存在一点 $0<x_1<\xi<x_2<1$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{x_2-x_1}{x_2-x_1}=1$$

这与题设中任意 $x\in(0,\ 1)$，$f'(x)\neq 1$ 相矛盾．因此，在开区间 $(0,\ 1)$ 内仅有唯一的一点 x，使得 $f(x)=x$