—南 昌 大 学 考 试 试 卷—

【适用时间：2020～2021 学年秋季学期　　试卷类型：[__A__]卷】

教师填写栏

课程编号：　　　　　　　　试卷编号：

课程名称：高等数学

开课学院：　　　　　　　　考试形式：

适用班级：　　　　　　　　考试时间：　　分钟

试卷说明：
1、本试卷共_6__页。
2、考试结束后，考生不得将试卷、答题纸和草稿纸带出考场。

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分	累分人 签 名
题分	15	15	21	21	14	14					100	
得分												

考生填写栏

考生姓名：　　　　　　　　考生学号：

所属学院：　　　　　　　　所属班级：

所属专业：　　　　　　　　考试日期：

考生须知：
1、请考生务必查看试卷中是否有缺页或破损。如有立即举手报告以便更换。
2、严禁代考，违者双方均开除学籍；
严禁自备草稿纸、携带手机、携带小抄等入场，违者按考试违规处理。

考生承诺：
本人知道考试违纪、作弊的严重性，将严格遵守考场纪律，如若违反则愿意接受学校按有关规定处分！

考生签名：

得 分	评阅人

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，则 $f(x)$ 的间断点为 **x=1**

该间断点为 跳跃 间断点　（填“可去”或“跳跃”或“第二类”）

2、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}=$ **2**

3、$y=e^{x}\cos x$，$y^{(4)}=$ $-4e^{x}\cos x$

4、$\begin{cases}x=\ln\sqrt{1+t^{2}}\\ y=\arctan t\end{cases}$，　求上述参数方程所确定的函数的二阶导数 $\dfrac{d^{2}y}{dx^{2}}=$ $-\dfrac{1+t^{2}}{t^{3}}$

（答案写成自变量为 t 的形式）

5、$y=x^{\frac{1}{x}}$ 的极大值为 $e^{\frac{1}{e}}$

得 分	评阅人

二、填空题（每空 3 分，共 15 分）

1、$f(x)=\begin{cases}e^{x},x<0\\ a+x,x\ge 0\end{cases}$，$f(x)$ 在 R 连续，则 $a=1$

2、$\int x\tan^{2}xdx=$ $-\dfrac{1}{2}x^{2}+x\tan x+\ln|\cos x|+C$

3、$\int_{0}^{2\pi}|\sin(x+1)|dx=$ 4

4、求曲线 $\rho\theta=1$ 相应于 $\dfrac{3}{4}\le\theta\le\dfrac{4}{3}$ 的一段弧长为 $\ln\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{12}$

5、$y=\dfrac{1}{x}$ 与直线 $y=x$ 及 $x=2$ 所围成的图形的面积为 $\dfrac{3}{2}-\ln 2$

得 分	评阅人

三、计算题（每个 7 分，共 21 分）

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)]-[1+(-\frac{x^2}{2})+\frac{(-\frac{x^2}{2})^2}{2}+o(x^4)]}{x^2[x+(-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)]}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{-\frac{x^4}{2}+o(x^4)}=\dfrac{1}{6}$

2、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+xy=e$ 所确定，求 $y''(0)$

解：将上述等式两边同时对 x 求导得：$e^y\bullet y'+y+xy'=0\quad(1)$

令 $x=0$ 得 $y'(0)=-\dfrac{1}{e}$

对等式 (1) 两边再对 x 求导得：$e^y\bullet y'^2+e^y\bullet y''+y'+y'+xy''=0\quad(2)$

对 (2) 式令 $x=0$，由 $y(0)=1,y'(0)=-\dfrac{1}{e}$

得 $y''(0)=\dfrac{1}{e^2}$

3、确定曲线 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 中的 a,b,c,d 使得 $x=-2$ 处曲线有水平切线，$(1,-10)$ 为拐点，且点 $(-2,44)$ 在曲线上。

解：由题设得 $y'(-2)=0\Rightarrow 12a-4b+c=0$

$y(1)=-10\Rightarrow a+b+c+d=-10$

$y''(1)=0\Rightarrow 6a+2b=0$

$y(-2)=44\Rightarrow -8a+4b-2c+d=44$

解得 $a=1,b=-3,c=-24,d=16$

四、计算题（每个 7 分，共 21 分）

得 分	评阅人

1、设 $a>1$，$f(x)=a^x-ax$ 在 R 内的驻点为 $x(a)$，问 a 为何值时，$x(a)$ 最小？并求出最小值

解：令 $f'(x)=a^x\ln a-a=0$，得 $x(a)=1-\dfrac{\ln\ln a}{\ln a}$

令 $x'(a)=\dfrac{\frac{1}{a}(1-\ln\ln a)}{\ln^2 a}=0$，得 $a=e^e$，

易知当 $a=e^e$ 时，$x(a)$ 最小，且最小值为 $1-\dfrac{1}{e}$

2、求 $\displaystyle\int\frac{3}{x^3+1}dx$

解：$\dfrac{3}{x^3+1}=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{-x+2}{x^2-x+1}$

$\dfrac{-x+2}{x^2-x+1}=-\dfrac{1}{2}\bullet\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}+\dfrac{3}{2}\bullet\dfrac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$

从而 $\displaystyle\int\frac{3}{x^3+1}dx=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$

3、$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}dx$

解：原式 $\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos x-\sin x|\,dx$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)dx$

$=(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-(\cos x+\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=2(\sqrt{2}-1)$

得 分	评阅人

五、计算题（每个 7 分，共 14 分）

1.计算下列极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}$

解：原式$=\int_0^1\sqrt{1+x}dx$

$=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}|_0^1$

$=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$

2. 由 $y=x^3, x=2, y=0$ 所围成的图形分别绕 x 轴及 y 轴旋转，计算所得两个旋转体的体积。

设该图形分别绕 x 轴及 y 轴旋转的体积分别为 V_1, V_2

解：$V_1=\pi\int_0^2(x^3)^2dx$

$=\pi\frac{x^7}{7}|_0^2$

$=\frac{128}{7}\pi$

$V_2=2\pi\int_0^2 x\bullet x^3dx$

$=\frac{2}{5}\pi x^5|_0^2$

$=\frac{64}{5}\pi$

得 分	评阅人

六、证明题（每个 7 分，共 14 分）

1 设 $0<a<b$，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$

证明：设 $g(x)=\ln x$，易知 $g'(x)=\frac{1}{x}$，

根据柯西中值定理，

存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}$，

整理即得 $f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$

2. 若 $f(t)$ 是连续的偶函数，证明 $\int_0^x f(t)dt$ 是奇函数。

证明：设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$， $F(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt$，

做换元 $t=-u$，

则 $F(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt=\int_0^u f(-u)(-du)=-\int_0^u f(u)du=-F(x)$

即 $\int_0^x f(t)dt$ 是奇函数。