2021-2022高等数学I(上)期末试卷参考答案

一. 填空题(3'×5=15)

1. $1\le x\le e$　2. $\frac{1}{9}(\ln 5-\ln 2)-\frac{1}{15}$　3. $(n+x)e^{x}dx$

4. $(\frac{1}{2}, e^{\arctan\frac{1}{2}})$　5. $\frac{\pi}{2}$

二. 选择题(3'×5=15)

1. B　2. A　3. D　4. B　5. C

三. 计算题(6'×4=24')

1. 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{3}{6+x}\right)^{-\frac{6+x}{3}}\right]^{-\frac{3(x-1)}{6+x}}$ ……

$= e^{-3}$ ……

2. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{x^2}$ ……

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-2e^{-2x}}{2x}$ ……

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^{2x}+2e^{-2x}}{1}=4$ ……

3. 由于 $[2021(2022)^n]^{\frac{1}{n}}<[2021(2022)^n+2022\cdot(2021)^n]^{\frac{1}{n}}<[2\cdot 2022(2022)^n]^{\frac{1}{n}}$ ……

而 $\lim\limits_{n\to\infty}[2021(2022)^n]^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}2021^{\frac{1}{n}}\cdot 2022=2022$ ……

$\lim\limits_{n\to\infty}[2\cdot 2022(2022)^n]^{\frac{1}{n}}=2022$ ……

由夹逼准则得原式 $=2022$. ……

4. 原式 $=x\ln(1+x^2)-\int x\cdot\frac{2x}{1+x^2}dx$

$=x\ln(1+x^2)-2\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx$

$=x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x+C$

四. 计算题（$6' \times 4 = 24'$）

1. 解：$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^{2022})} dx \overset{x=\frac{1}{t}}{=\!=} \int_{+\infty}^0 \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{(1+\frac{1}{t^2})(1+\frac{1}{t^{2022}})} \cdots$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{t^{2022}}{(1+t^2)(1+t^{2022})} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1+x^{2022}}{(1+x^2)(1+x^{2022})} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

2. 解：$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{1-3t^2}{-2t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{+\frac{1}{2t^2} + \frac{3}{2}}{-2t} = -\frac{1}{4t^3} - \frac{3}{4t}$$

则 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1} = -1$

3. 解. 求导可得 $f'(x) + f(x) = 2x \cdots\cdots\cdots$

$\Rightarrow f(x) = e^{-\int dx}\left(\int 2x e^{\int 1 dx} dx + C\right)$

$\Rightarrow f(x) = e^{-x}(e^{x}(2x-2) + C) = 2x-2+Ce^{-x}$

由于 $f(0)=1 \Rightarrow C=3$

所以 $f(x) = 3e^{-x} + 2x - 2 \cdots$

4. 解：对应齐次的特征方程 $r^2-1=0 \Rightarrow r=\pm 1$

则齐次的通解为 $Y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} \cdots$ ---

因为 $\lambda=2$ 不是特征根，所以设原方程特解 $y^* = (ax+b)e^{2x}$

代入方程 $\Rightarrow a = \frac{1}{3}$，$b = -\frac{4}{9}$ ---- ----

则所求通解为 $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + (\frac{1}{3}x - \frac{4}{9})e^{2x} \cdots$

五. 应用题 $(8' \times 2 = 16')$

1. 解. $y' = 4x^3 - 16x = 4x(x^2-4) = 0$

在 $-1 \le x \le 3$ 中驻点有 $x=0$, $x=2$ ....

因为 $f(-1)=-5$, $f(0)=2$, $f(2)=-14$, $f(3)=11$

所以 $\min f = -14$, $\max f = 11$ ..

2. 解. $V_y = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x \, dx$ ....

$= -2\pi \int_0^{\pi} x \, d\cos x$

$= \left(-2\pi x \cos x \Big|_0^{\pi}\right) + 2\pi \int_0^{\pi} \cos x \, dx$

$= 2\pi^2$ ....

六. 证明题 $(6' \times 1 = 6')$

证: 令 $F(x) = e^{-x} f(x)$ ..

则其在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导

且 $F'(x) = e^{-x}[f'(x) - f(x)]$

又 $F(a) = F(b) = 0$ (因 $f(a)=f(b)=0$)

所以由罗尔定理 $\exists \xi \in (a,b) \ni F'(\xi) = 0$

即得 $f'(\xi) = f(\xi)$