复习课

一、函数与极限
二、导数与微分
三、微分中值定理与导数的应用
四、不定积分
五、定积分
六、定积分的应用
七、微分方程

一、函数与极限

1.映射与函数

映射的概念，逆映射，复合映射

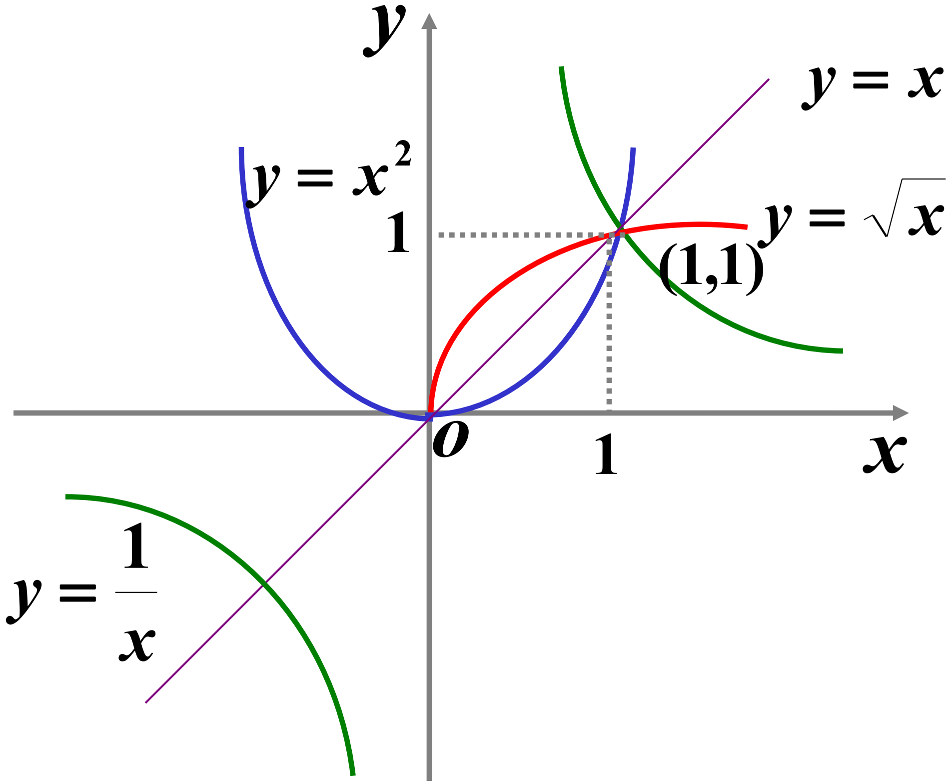
函数的概念（绝对值函数，符号函数，取整函数，分段函数）

函数的性质：有界性，单调性，奇偶性，周期性

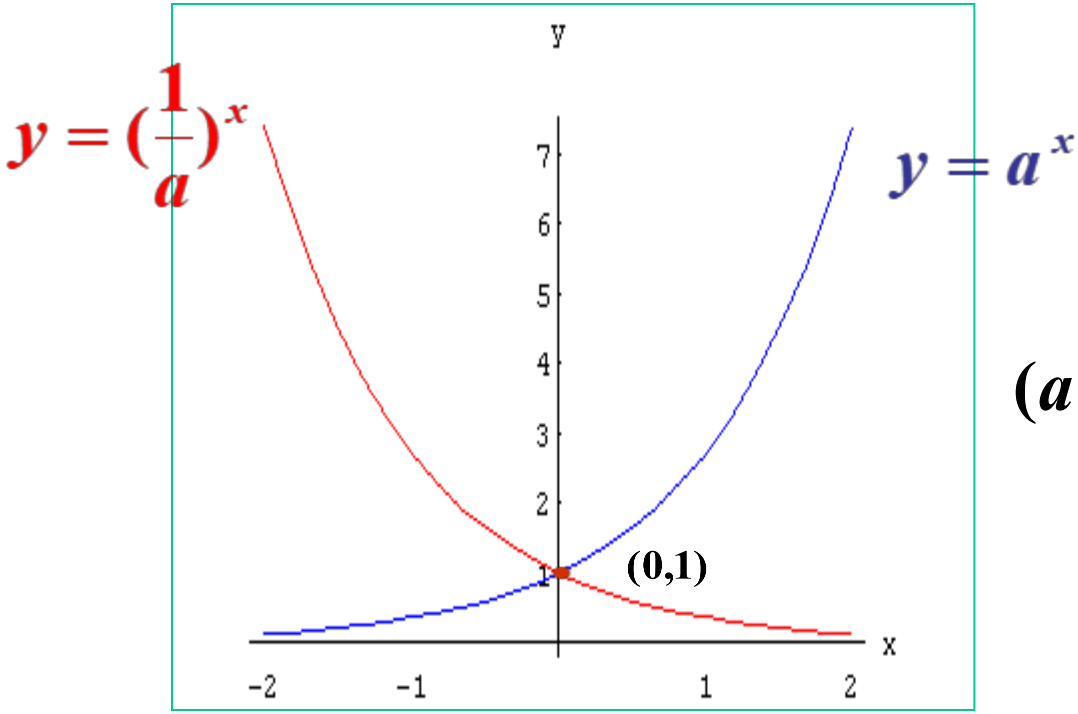
反函数与复合函数

基本初等函数

1、幂函数　　$y = x^{\mu}$　（μ是常数）



2. 指数函数$y=a^x$ ($a>0$,且$a\neq1$)



$y=e^x$

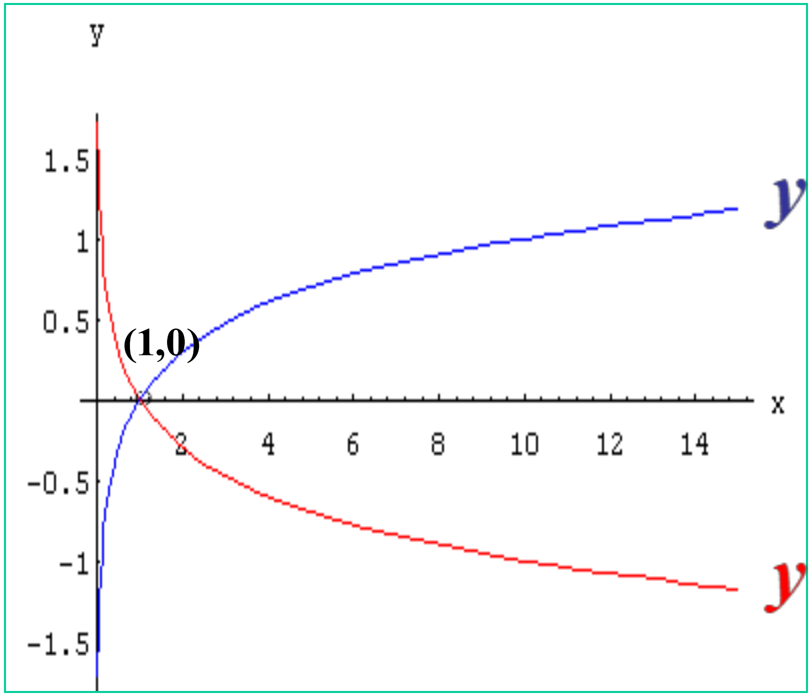
$(a>1)$

定义域为$(-\infty,+\infty)$　　值域为$(0,+\infty)$

图像过点(0,1)

$a>1$时,函数单调增;$a<1$时,函数单调减

3. 对数函数$y=\log_a x$ ($a>0$且$a\neq1$)



自然对数$y=\ln x$

$y=\log_a x$

$(a>1)$

$y=\log_{\frac{1}{a}} x$

定义域为$(0,+\infty)$　　　值域为$(-\infty,+\infty)$

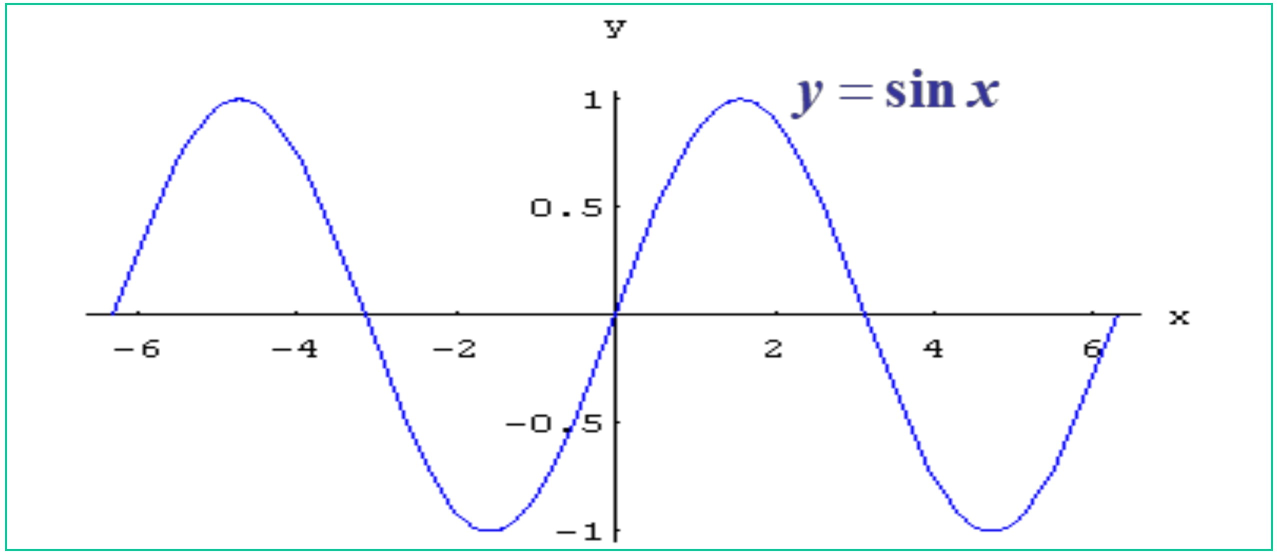
图像过点(1,0)

$a>1$时,函数单调增;$0<a<1$时,函数单调减

4. 三角函数

正弦函数

$y=\sin x$



定义域为$(-\infty,+\infty)$　　值域为$[-1,1]$

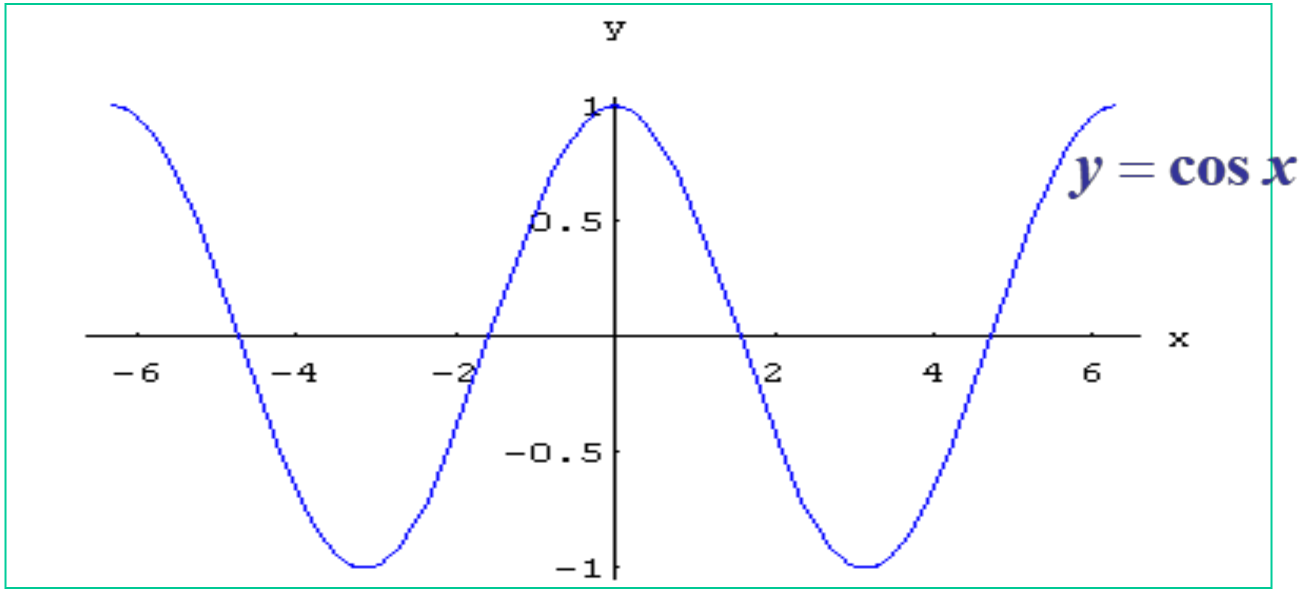
在$[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}]$上单调增 $(k\in Z)$

在$[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3}{2}\pi]$上单调减 $(k\in Z)$

以2π为周期

余弦函数

$y=\cos x$



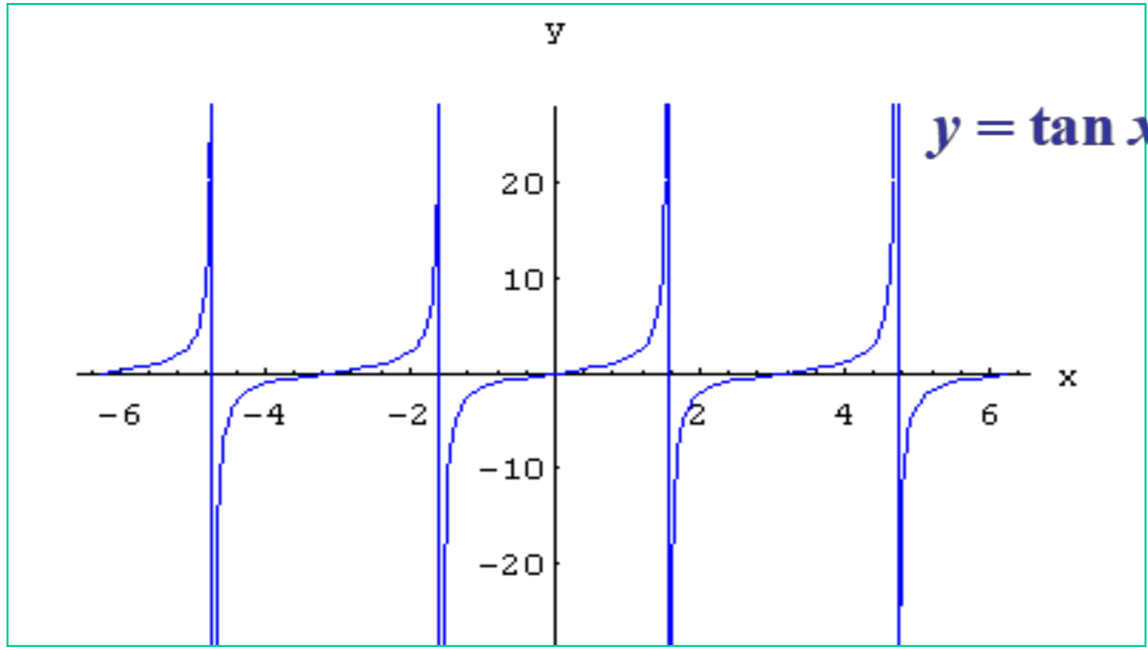
定义域为$(-\infty,+\infty)$　　值域为$[-1,1]$

在$[(2k-1)\pi, 2k\pi]$上单调增 $(k\in Z)$

在$[2k\pi, (2k+1)\pi]$上单调减 $(k\in Z)$

以2π为周期

正切函数
$y=\tan x$



定义域为$(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}) \quad (k\in Z)$

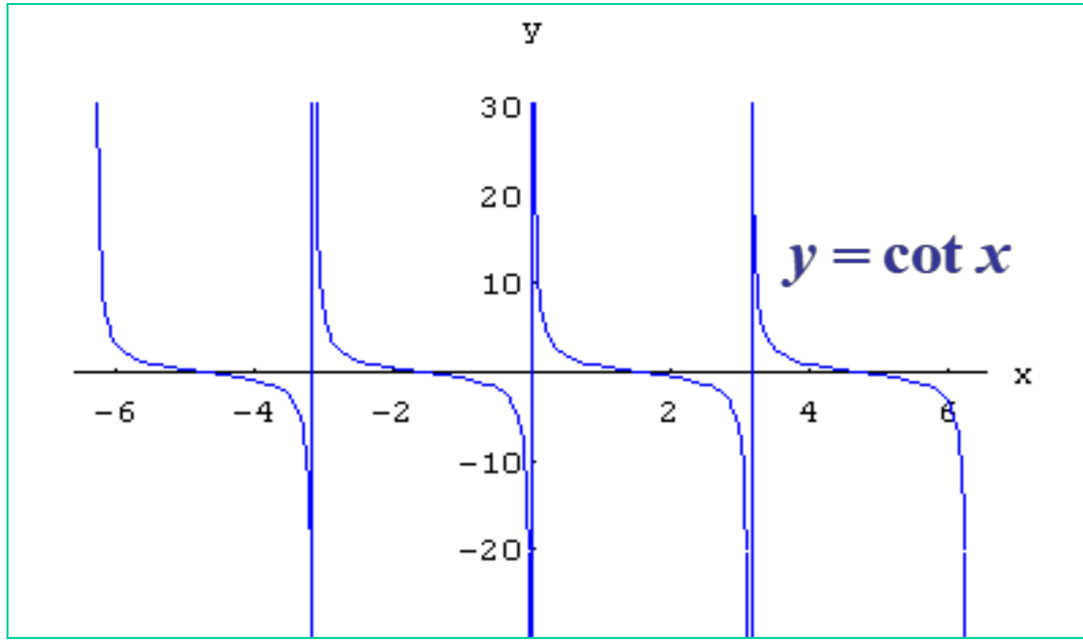
值域为$(-\infty,+\infty)$

在有定义的区间上单调增

以π为周期

余切函数

y=cot$x$



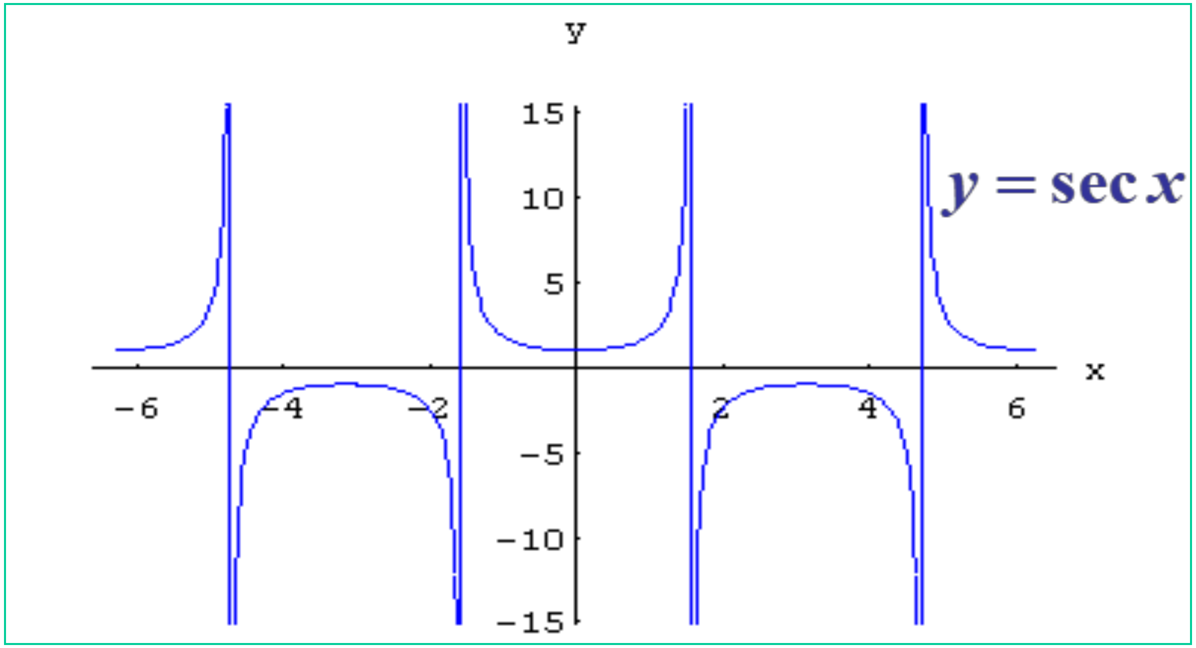
定义域为$(k\pi, (k+1)\pi) \quad (k \in Z)$

值域为$(-\infty, +\infty)$

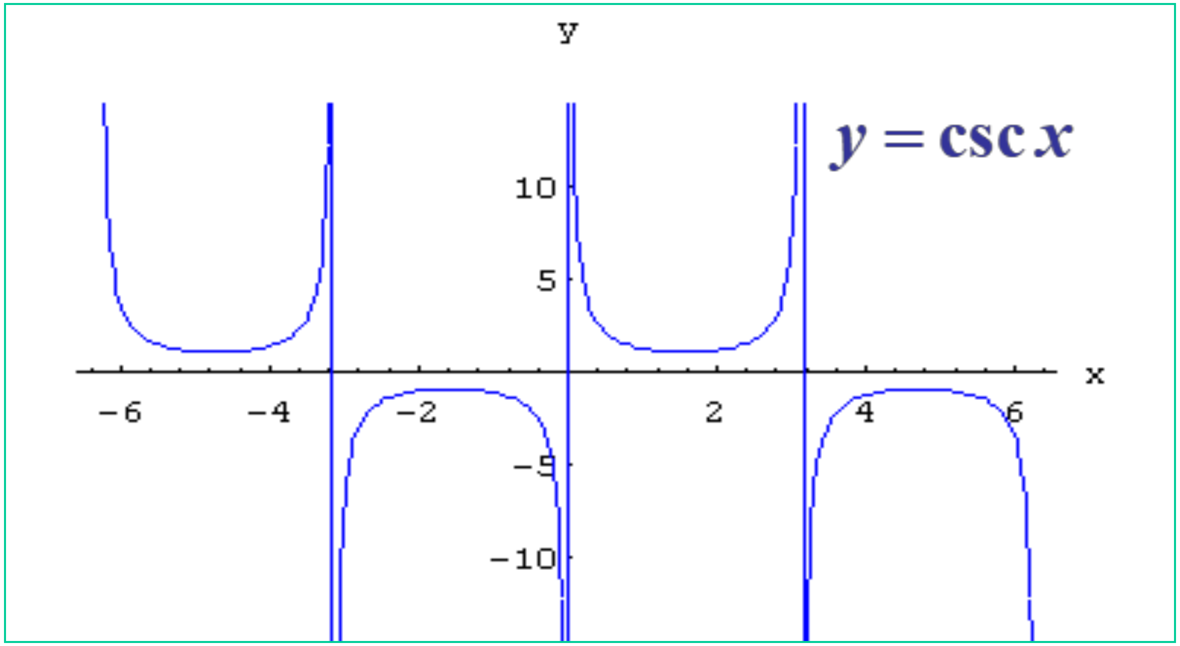
在有定义的区间上单调减

以π为周期

正割函数 $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

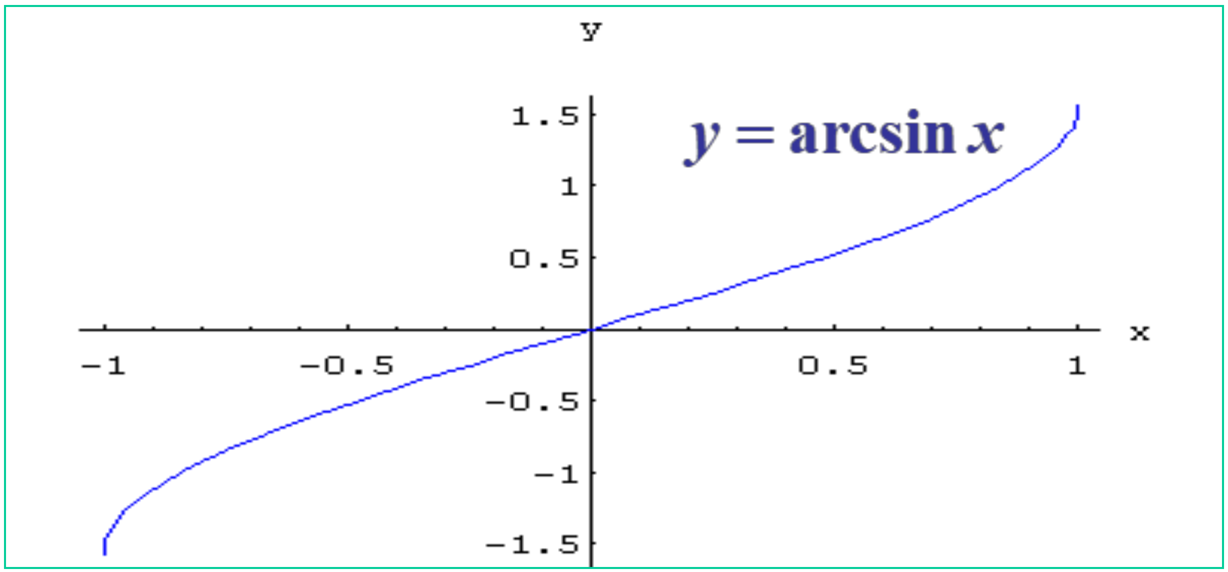


余割函数 $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$



5. 反三角函数

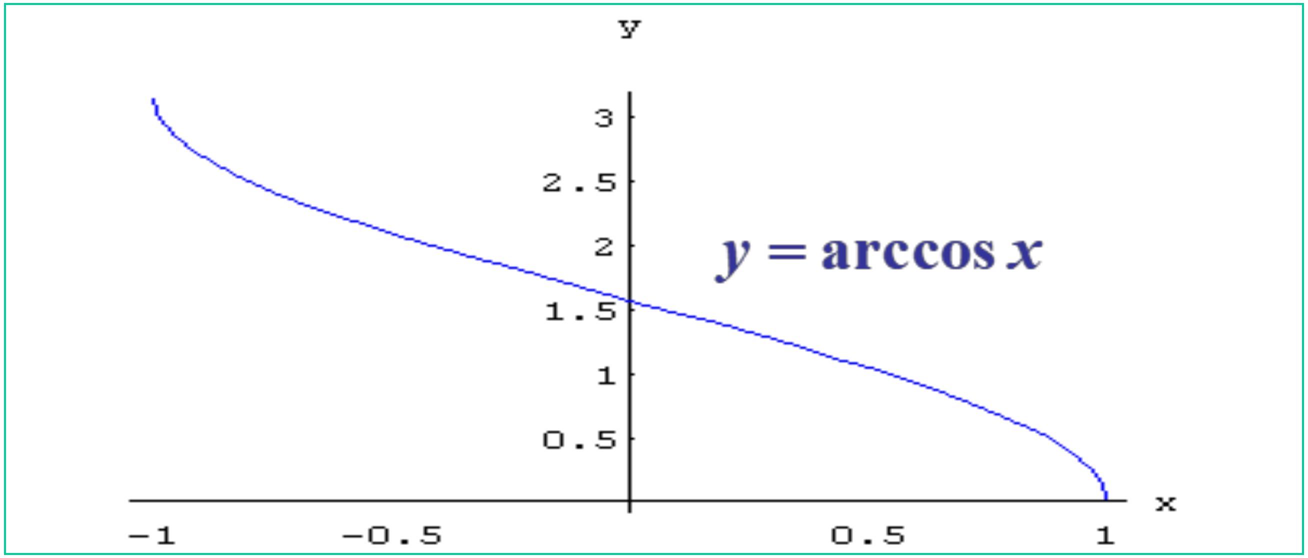
反正弦函数y=arcsin$x$



定义域为[−1,1]　　值域为$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

sin(arcsin$x$)=x

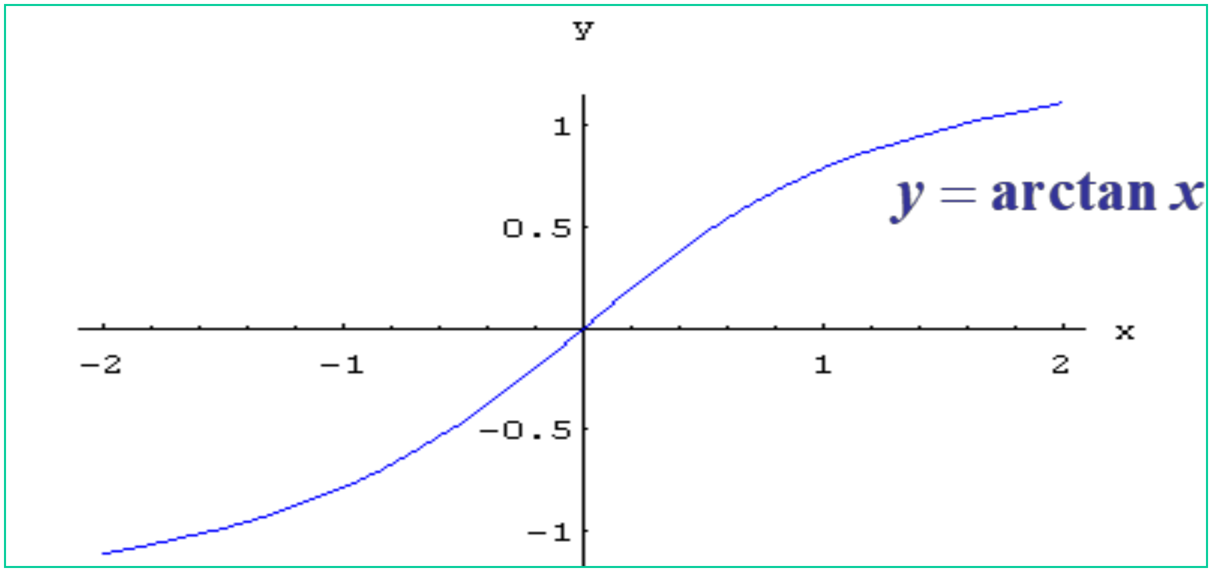
反余弦函数y=arccos$x$



定义域为[−1,1]　　值域为[0,π]

cos(arccos$x$)=x

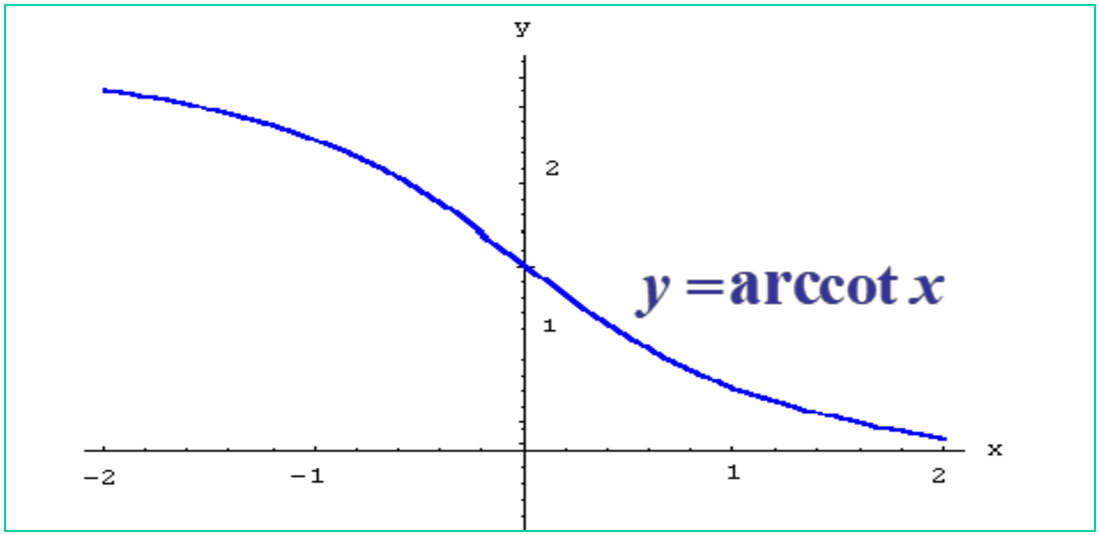
反正切函数y=arctan$x$



定义域为$(-\infty,+\infty)$　值域为$(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$

$\tan(\arctan x)=x$

反余切函数$y=\text{arccot}x$



定义域为$(-\infty,+\infty)$ 值域为$(0,\pi)$

$\cot(\text{arccot}x)=x$

2.极限定义

$\varepsilon-N$定义: $\lim_{n\to\infty} y_n = A$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N>0$,使$n>N$时,恒有$|y_n-A|<\varepsilon$

$\varepsilon-M$定义: $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists M>0$,使当$|x|>M$时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$

$\varepsilon-\delta$定义:$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$,使当$0<|x-x_0|<\delta$时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$

3.极限的性质

有界性：若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,则$\exists\delta>0$, 当$x\in U^0(x_0,\delta)$时,$f(x)$有界

唯一性：若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,则极限唯一

局部保号性定理: 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 且$A>0$(或$A<0$), 则$\exists\delta>0$,当$x\in U^0(x_0,\delta)$时,$f(x)>0$ (或$f(x)<0$)

局部保序性定理:

如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$且$f(x)\geq 0$(或$f(x)\leq 0$),则$A\geq 0$ (或$A\leq 0$)

推论:若$f(x)\leqslant g(x)$,且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, 则$A\leqslant B$

4.无穷小和无穷大

(1)无穷小量阶的比较

α,β是同一过程中的两个无穷小,且$\beta\neq 0$

(1)如果 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=C\quad(C\neq 0)$,称$\alpha$与$\beta$是同阶无穷小

特别,当$C=1$时,称α与β是等价无穷小,记作$\alpha\sim\beta$

(2)如果$\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$,称$\alpha$是较$\beta$高阶的无穷小,记作$\alpha=o(\beta)$

(3)如果$\lim\frac{\alpha}{\beta}\to\infty$,称$\alpha$是较$\beta$低阶的无穷小

(2)极限与无穷小量的关系：

变量y在某个变化过程中以常数A为极限$\Leftrightarrow$变量y能表示为常量A与无穷小量α之和的形式,即$y=A+\alpha$

(3)单调有界准则 单调有界数列必有极限

(4)常用等价无穷小：($x\to 0$时)

$\sin x \sim x$ $\tan x \sim x$ $\arcsin x \sim x$

$\arctan x \sim x$ $\ln(1+x) \sim x$ $e^x-1 \sim x$

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \qquad \sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{x}{n}$$

5.极限的计算

a.多项式与分式函数代入法求极限

b.消去零因子法求极限

c.无穷小因子分出法求极限

d.有理化法

e.利用无穷小运算性质求极限

f.利用两个重要极限公式求极限: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

g.利用左右极限求分段函数极限

h.利用等价无穷小替换定理

i.利用夹逼准则，单调有界准则

j.利用洛必达法则

k.利用定积分的定义

6.连续的定义

定义1 设函数$f(x)$在点x_0及其邻域有定义，若$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$，则称函数$f(x)$在点$x_0$处**连续**

定义2 设函数$f(x)$在点x_0及其邻域有定义，若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称函数$f(x)$在点$x_0$处**连续**，$x_0$称为函数$f(x)$的**连续点**

7.间断点的类型

间断点

第一类

- 跳跃间断点: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$
- 可去间断点: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$

  或$f(x)$在点x_0处无定义

函数在点x_0处的左、右极限都存在

第二类间断点: $f(x)$在点x_0处的左、右极限至少有一个不存在

无穷型　　振荡型

8.闭区间上连续函数的性质

最大值和最小值定理: 闭区间上的连续函数一定存在最大值和最小值

有界性定理: 在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界

介值定理: 若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且$f(a)\neq f(b)$, η为介于$f(a)$与$f(b)$之间的任意一个数,即$f(a)<\eta<f(b)$或$f(a)>\eta>f(b)$,则至少存在一个内点$\xi\in(a,b)$,使得$f(\xi)=\eta$

零点定理: 若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且$f(a)$与$f(b)$异号,则至少存在一个内点$\xi\in(a,b)$,使得$f(\xi)=0$

二、导数与微分

1.定义

设函数$y=f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义, 如果$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$存在,则称该极限值为$f(x)$在点$x_0$处的导数

2.计算

(1)$[u\pm v]'=u'\pm v'$； $(uv)'=u'v+uv'$； $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

(2)复合函数求导: $y'_x=y'_u\cdot u'_x$

(3)反函数的求导: $f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}$

(4)隐函数的求导: 用复合函数求导法则直接对方程两边求导

(5)对数求导法: 先对等式两边取对数,然后根据隐函数的求导法求出导数

(6)参变量函数$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=f(t) \end{cases}$的求导: $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

基本导数公式

$(C)'=0$

$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$(a^x)'=a^x\ln a$

$(e^x)'=e^x$

$(\sin x)'=\cos x$

$(\cos x)'=-\sin x$

$(\tan x)'=\sec^2 x$

$(\cot x)'=-\csc^2 x$

$(\sec x)'=\sec x\tan x$

$(\csc x)'=-\csc x\cot x$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

3.其他

(1)导数的几何意义: 曲线$y=f(x)$在点x_0处的切线斜率

(2)可导与连续的关系: 可导则连续,反之不成立

4.微分

(1)定义: 设函数$y=f(x)$的函数增量Δy可表示成$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$,其中$A$与$\Delta x$无关,$A\Delta x$称为$\Delta y$的**线性主部**,$o(\Delta x)$是关于$\Delta x$的**高阶无穷小**,则称函数$y=f(x)$在点$x$**可微**,并称$A\Delta x$为函数$y=f(x)$在点$x$处的**微分**,记作$dy$或$df(x)$,即$dy=df(x)=A\Delta x$

(2)导数与微分的关系: 可微⇔可导

(3)微分的求法: $dy=y'dx$

(4)微分在近似计算中的应用

计算函数增量的近似值: $\Delta y\approx dy=f'(x)\Delta x$

计算函数值的近似值:$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$

三、导数的应用

1. 中值定理

罗尔定理:若函数$f(x)$满足:(1)在$[a,b]$上连续;(2)在(a,b)内可导;(3)$f(a)=f(b)$,则$\exists\xi\in(a,b)$,使得$f'(\xi)=0$

拉格朗日中值定理:若函数$f(x)$满足:(1)在$[a,b]$上连续;(2)在(a,b)内可导,则$\exists\xi\in(a,b)$,使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

柯西中值定理:若函数$f(x)$及$g(x)$满足:(1)在$[a,b]$上连续;(2)在(a,b)内可导;(3)对任一$x\in(a,b)$, $g'(x)\neq 0$,则$\exists\xi\in(a,b)$,使得$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

2. 泰勒公式

定理 （泰勒公式）如果函数 $f(x)$ 在含 x_0 的某个开区间 (a,b) 内具有直到 $(n+1)$ 阶导数，

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \quad ①$$

其中：

余项 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ ② （ξ 在 x_0 与 x 之间）

公式 ① 称为 $f(x)$ 的 n 阶泰勒公式．

公式 ② 称为 n 阶泰勒公式的拉格朗日余项．

注意到 $R_n(x)=o[(x-x_0)^n]$ ③

在不需要余项的精确表达式时，泰勒公式可写为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n] \quad ④$$

公式 ④ 称为具有佩亚诺型余项的 n 阶泰勒公式.

公式 ③ 称为n 阶泰勒公式的佩亚诺(Peano) 余项 .

在泰勒公式中若取 $x_0 = 0, \xi = \theta x \ (0 < \theta < 1)$，则有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

称为麦克劳林（ **Maclaurin** ）公式 .

马克劳林，C.

由此得近似公式

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

若在公式成立的区间上 $\left| f^{(n+1)}(x) \right| \le M$，则有误差估计式

$$|R_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}$$

几个常见的初等函数的带有佩亚诺余项的麦克劳林公式：

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1} + o(x^{2m-1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m} + o(x^{2m})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + o(x^n)$$

3.函数单调性的判别

设函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,则该函数在区间$[a,b]$内单调增加(或减少)$\Leftrightarrow f'(x)\geq 0$(或$f'(x)\leq 0$), $x\in(a,b)$,而$f'(x)=0$只在个别点处成立

凹凸的判别

如果$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内具有二阶导数,若在(a,b)内

1° $f''(x)>0$,则$f(x)$在$[a,b]$上的图形是凹的

2° $f''(x)<0$,则$f(x)$在$[a,b]$上的图形是凸的

4.函数的极值及其求法

判别法则1:设函数$f(x)$在x_0的某邻域$(x_0-\delta, x_0+\delta)$内连续且可导(但$f'(x_0)$可以不存在)

1^o 如果$x\in(x_0-\delta, x_0)$,有$f'(x)>0$,而$x\in(x_0, x_0+\delta)$,有$f'(x)<0$,则$f(x)$在x_0处取得极大值

2^o 如果$x\in(x_0-\delta, x_0)$,有$f'(x)<0$,而$x\in(x_0, x_0+\delta)$,有$f'(x)>0$,则$f(x)$在x_0处取得极小值

3^o如果$x\in(x_0-\delta, x_0)$及$x\in(x_0, x_0+\delta)$,有$f'(x)$符号相同,则$f(x)$在x_0处无极值

判别法则2:设$f'(x_0)=0$, $f''(x_0)$存在,则

1^o 当$f''(x_0)<0$时,则$f(x_0)$是极大值; 2^o 当$f''(x_0)>0$时,则$f(x_0)$是极小值; 3^o 当$f''(x_0)=0$时,则不能判别$f(x_0)$是否为极值,改用判别法则1

5.最值的求法:

1^o求驻点和不可导点

2^o求区间端点及驻点和不可导点的函数值,比较大小,哪个大哪个就是最大值,哪个小就是最小值

注: 如果区间内只有一个极值,则这个极值就是最值

6.渐近线

1° 水平渐近线:如果$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=c$或$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=c$,

则$y=c$是曲线$y=f(x)$的一条水平渐近线.

2°垂直渐近线: 如果$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\infty$或$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$,

则$x=a$是曲线$y=f(x)$的一条垂直渐近线.

3°斜渐近线: 如果$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ 或

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$,则$y=ax+b$是曲线$y=f(x)$的

一条斜渐近线.

求法: $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$

四、不定积分

1.定义

$f(x)$在区间I上的全体原函数为$f(x)$在I上的不定积分,记作$\int f(x)dx$

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

连续函数一定有原函数

2.性质

(1)微分运算与求不定积分的运算是互逆的:

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$$

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

(2) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

(3) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \quad (k\text{是常数}, k \neq 0)$

3.计算

第一类积分换元法:设$f(u)$具有原函数, $u=\varphi(x)$可导,则有$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\int f(u)du$

第二类积分换元法:设$f(x)$,$\varphi(t)$及$\varphi'(t)$均连续,且$\varphi'(t)\neq 0$,又$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$存在原函数$F(t)$,则

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=F(t)+C$$
$$=F[\varphi^{-1}(x)]+C$$

分部积分法: $\int udv=uv-\int vdu$

基本积分公式:

(1) $\int k dx = kx + C$ (k是常数)

(2) $\int x^{\mu} dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$ ($\mu \neq -1$)

(3) $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ ($x \neq 0$)

(4) $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$ 或 $-arc\cot x + C$

(5) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$ 或 $-\arccos x + C$

(6) $\int \cos x dx = \sin x + C$

(7) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

(8) $\int \sec^2 x dx = \int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$

$$(9)\int \csc^2 x dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$(10)\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

$$(11)\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

$$(12)\int e^x dx = e^x + C \quad (a > 0,\ a \neq 1)$$

$$(13)\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$(14)\int shx dx = chx + C$$

$$(15)\int chx dx = shx + C$$

$$(16)\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$(17)\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$(18)\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$(19)\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

$$(20)\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$(21)\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$(22)\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$(23)\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$$

$$(24)\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$$

五、定积分

1.定义

设函数$f(x)$在$[a,b]$上有界,用点$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$将$[a,b]$分成$n$个小区间,各小区间的长度为$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ $(i=1,2,\cdots,n)$.在每个小区间上任取一点ξ_i $(\xi_i\in[x_{i-1}, x_i])$,作乘积$f(\xi_i)\Delta x_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$,并取和$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.记$\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$,当$\lambda\to 0$时, S_n的极限存在,并且其极限值与$[a,b]$的分法以及ξ_i的取法无关,则该极限值称为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分,记作$\int_a^b f(x)dx$

$$即\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

2.性质

(1) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

(2) 若在$[a,b](a<b)$上$f(x)\le g(x)$,则

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

(3) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \quad (a<b)$

(4)设m,M分别是$f(x)$在$[a,b]$上的最小值和最大值,则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

(5)(积分中值定理) 若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,则$\exists \xi \in [a,b]$,使得$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

3.计算

牛顿–莱布尼茨公式:若$F(x)$是连续函数$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数,则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

换元法: $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$

分部积分法: $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

当$f(x)$在$[-a,a]$上连续,有

(1)若$f(x)$为偶函数,则$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

(2)若$f(x)$为奇函数,则$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

4.反常积分

（1）. 反常积分$\left\{\begin{array}{l}\text{积分区间无限}\\ \text{被积函数无界}\end{array}\right\}\longrightarrow$ 常义积分的极限

（2）. 两个重要的反常积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\begin{cases}+\infty, & p\le 1\\ \dfrac{1}{(p-1)a^{p-1}}, & p>1\end{cases}\qquad (a>0)$$

$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}=\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^q}=\begin{cases}\dfrac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q<1\\ +\infty, & q\ge 1\end{cases}$$

设$F(x)$是$f(x)$的原函数, 引入记号

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x);\quad F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)$$

则有类似牛顿－莱布尼茨公式的计算表达式：

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^{+\infty}=F(+\infty)-F(a)$$

$$\int_{-\infty}^{b}f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^{b}=F(b)-F(-\infty)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=F(+\infty)-F(-\infty)$$

设$F(x)$是$f(x)$的原函数,则也有类似牛 – 莱公式的计算表达式：

若 b 为瑕点, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b^-) - F(a)$

若 a 为瑕点, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a^+)$

若 a , b 都为瑕点, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b^-) - F(a^+)$$

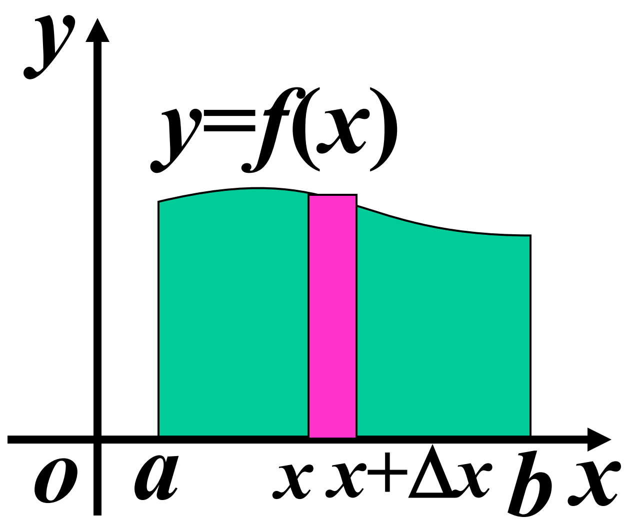
注意: 若瑕点 $c \in (a,b)$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) \underline{- F(c^+) + F(c^-)} - F(a)$$

可相消吗?

六、定积分的应用

1.直角坐标平面图形的面积

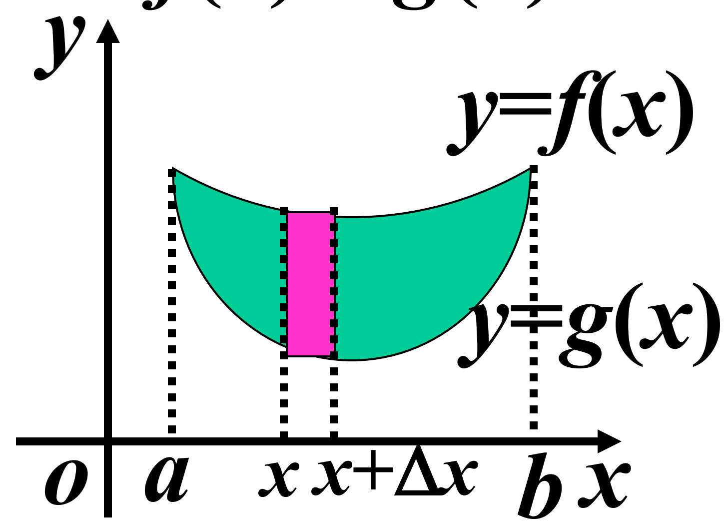


$f(x)$正负不知

曲边梯形的面积

$$S=\int_a^b |f(x)|dx$$

$f(x)\geqslant g(x)$



$dS=[f(x)-g(x)]dx$

所围图形的面积

$$S=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$$

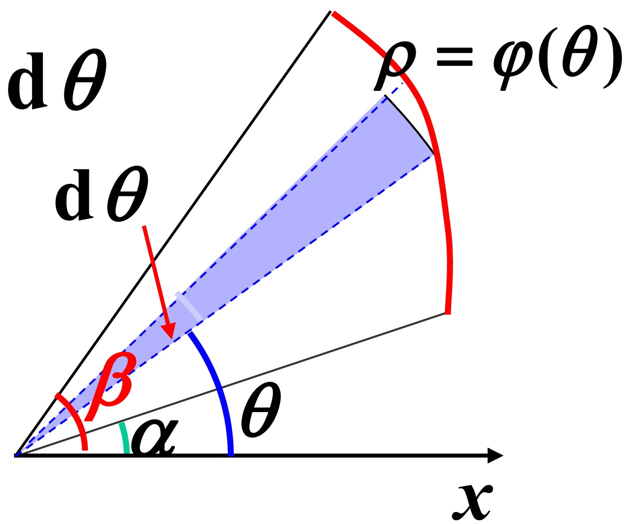
2. 极坐标系的情形

设 $\varphi(\theta) \in C[\alpha, \beta], \varphi(\theta) \ge 0$，求由曲线 $\rho = \varphi(\theta)$ 及射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 围成的曲边扇形的面积 .

在区间 $[\alpha, \beta]$ 上任取小区间 $[\theta, \theta + \mathrm{d}\theta]$

则对应该小区间上曲边扇形面积的近似值为

$$\mathrm{d}A = \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \cdot \pi[\varphi(\theta)]^2 = \frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2 \,\mathrm{d}\theta$$



所求曲边扇形的面积为

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \varphi^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

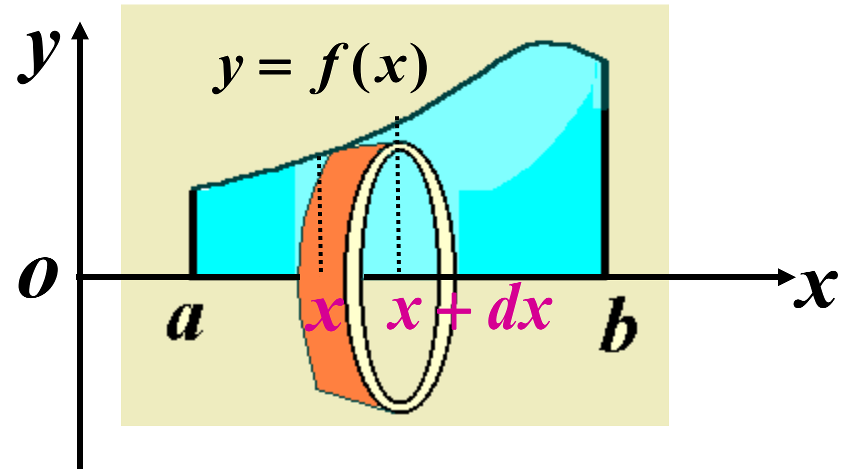
3.旋转体体积求法

一般地，如果旋转体是由连续曲线 $y=f(x)$、直线 $x=a$、$x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周而成的立体的体积求法如下：

取积分变量为x，

$x\in[a,b]$，在$[a,b]$上任

取小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$，



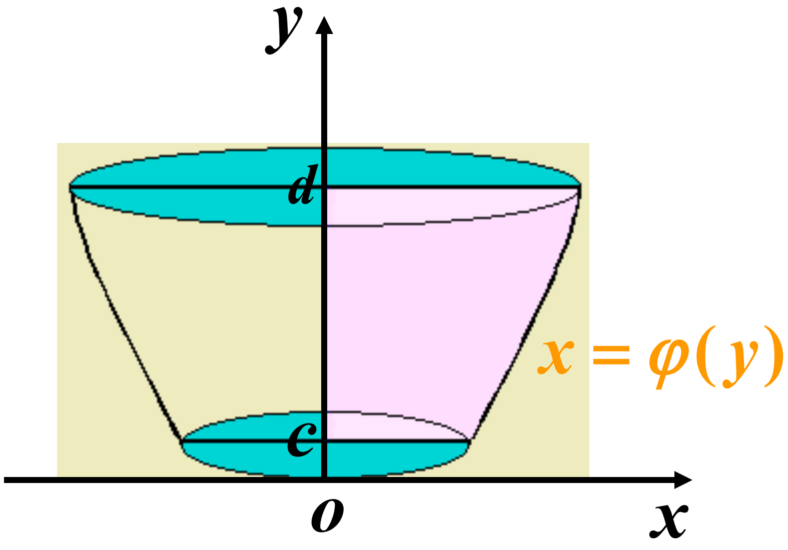
体积元素取成以 $f(x)$为底半径，$\mathrm{d}x$为高的圆柱体

的体积，即 $\mathrm{d}V=\pi[f(x)]^2\mathrm{d}x$

旋转体的体积为 $V=\int_a^b \pi[f(x)]^2\mathrm{d}x.$

类似地，如果旋转体是由连续曲线 $x=\varphi(y)$, 直线 $y=c$, $y=d$ 以及 y 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周而成的立体，则其体积为

$$V=\int_c^d \pi[\varphi(y)]^2\mathrm{d}y.$$



4.柱壳法求体积

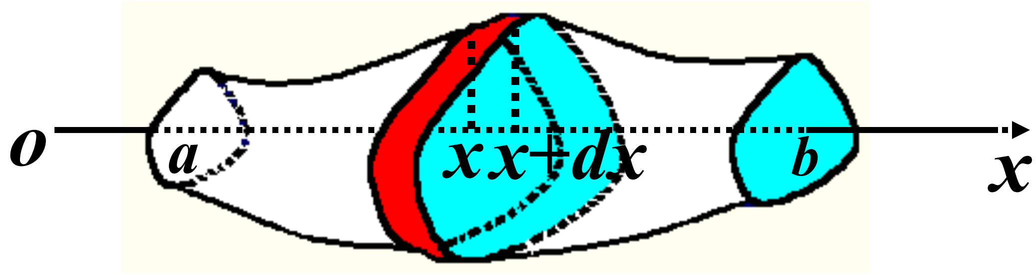
一般地, 如果旋转体是由连续曲线 $y=f(x)$、直线 $x=a$、$x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周而成的立体的体积求法如下:

$$V=\int_a^b 2\pi x f(x)\mathrm{d}x$$

5.由截面面积求立体体积

　　Ω为一空间立体,它夹在垂直于x轴的两平面$x=a$及$x=b$之间$(a<b)$,其体积

$$V=\int_a^b S(x)dx$$



$S(x)$表示过点x且垂直于x轴的截面面积

6.平面曲线的弧长

（1）直角坐标系情形　弧长$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x.$

（2）参数方程情形

设曲线弧由参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$ $(\alpha\le t\le\beta)$给出,

其中$\varphi(t),\psi(t)$在$[\alpha,\beta]$上具有连续导数.

所以弧长 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t.$

（3） 极坐标系情形

曲线弧为$\rho=\rho(\theta)$ $(\alpha\le\theta\le\beta)$,

其中$\rho(\theta)$在$[\alpha,\beta]$上具有连续导数.

弧长 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$

七、微分方程

1.一阶微分方程的求解

(1)可分离变量的一阶微分方程: $\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$

分离变量: $\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$ (其中$g(y)\neq 0$)

两端积分: $\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx$

求通解

(2)可化为可分离变量微分方程的方程: $\frac{dy}{dx}=f(ax+by)$

令$u=ax+by \Rightarrow \frac{du}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}$

将原式代入$\Rightarrow \frac{du}{dx}=a+bf(u)$ $\rightarrow$可分离变量方程

(3)齐次微分方程: $\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$

令 $u=\frac{y}{x}\Rightarrow y=xu\Rightarrow\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$

代入原式 $\Rightarrow u+x\frac{du}{dx}=f(u)$

变量分离 $\Rightarrow\frac{du}{f(u)-u}=\frac{dx}{x}\quad(f(u)-u\neq 0)$

两端积分 $\Rightarrow\int\frac{du}{f(u)-u}=\int\frac{dx}{x}=\ln x+C$

进一步解出u后将$\frac{y}{x}$代替u即可

(4)一阶线性微分方程: $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$

若$q(x)\equiv 0$,上方程称为一阶线性齐次方程

若$q(x)\not\equiv 0$,上方程称为一阶线性非齐次方程

1°常数变易法求一阶线性非齐次方程:

①先求出线性非齐次方程所对应的齐次方程的通解

②根据所求出的齐次方程的通解设出线性非齐次方程的解(将所求出的齐次方程的通解中的任意常数C改为待定函数$C(x)$即可)

③将所设解代入线性非齐次方程,解出$C(x)$,并写出线性非齐次方程的通解

2°利用一阶线性非齐次方程的通解公式:

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]$$

2.二阶微分方程的求解

(1)最简单的二阶微分方程: $y''=f(x)$

特点: 右端是x的一元函数.

积分1次得 $y' = \int f(x)dx + C_1$

积分2次得 $y = \int [\int f(x)dx]dx + C_1 x + C_2$

(2)不显含未知数y的二阶微分方程: $y''=f(x, y')$

特点: 右端不显含y

解法: 令$y'=p(x) \Rightarrow y''=p'(x)$

方程化为$p'=f(x, p)$ (降低了方程的阶数)

这是关于p的一阶微分方程

解出 $p(x)=\varphi(x,C_1) \Rightarrow y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2$

(3)不显含自变量x的二阶微分方程：$y''=f(y, y')$

特点: 右端不显含x

解法: 视y为自变量,令$y'=p(y)$

则 $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot p$

方程化为 $\frac{dp}{dy}p=f(y,p)$

解出 $p(y)=\varphi(y,C_1)$ 即 $\frac{dy}{dx}=\varphi(y,C_1)$

分离变量并积分得 $\int\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2$

(4)二阶常系数齐次线性方程 $y'' + py' + qy = 0$

求二阶常系数齐次线性方程 $y'' + py' + qy = 0$ 通解的一般步骤:

(1) 写出相应的特征方程 $r^2 + pr + q = 0$；

(2) 求出特征根;

(3) 根据特征根的不同情况,得到相应的通解.

特 征 根	通 解
$r_{1,2} = \frac{1}{2}(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q})$ (相异实根)	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$ (重根)	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta = -\frac{p}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{4q - p^2}$ (复根)	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

(5)二阶常系数非齐次线性方程 $y''+py'+qy=e^{\lambda x}P_m(x)$

$$R''(x)+(2\lambda+p)R'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)R(x)=P_m(x) \quad (*)$$

设特解为 $y^*=R(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ (λ 是特征方程的 k 重根)

则 $y^*=x^kR_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}=\begin{cases} R_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x} & \lambda\text{不是特征根，} k=0 \\ xR_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x} & \lambda\text{是单特征根，} k=1 \\ x^2R_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x} & \lambda\text{是二重特征根，} k=2 \end{cases}$

然后将y^*代入原方程或根据 (*)式来确定$R(x)$，从而得到特解.

注：当$\lambda=0$时，则$f(x)=P_m(x)$

(6)二阶常系数非齐次线性方程

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + Q_n(x)\sin\omega x]$$

则可设特解为

$$y^* = x^k e^{\lambda x}\left[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x + R_m^{(2)}(x)\sin\omega x\right]$$

若$\lambda \pm i\omega$ 为特征方程的 k 重根，$k = \begin{cases} 0 & \lambda \pm i\omega \text{ 不是特征根} \\ 1 & \lambda \pm i\omega \text{ 是特征单根} \end{cases}$

$R_m^{(1)}(x), R_m^{(2)}(x)$ 为m次多项式，$m = \max\{l, n\}$