南昌大学 2018-2019 学年第二学期期末考试试卷 A 答案

一、 填空题（每空 3 分，共 15 分）

1、5；　2、$z=x^2+y^2+2$；　3、0；　4、π；　5、3

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、A；　2、D；　3、C；　4、C；　5、C

三、计算题（每小题 8 分，共 16 分）

1、解：$F=e^z-z+xy-3$,

$$\vec{n}=(y,x,e^z-1)$$

$$\vec{n}|_{(2,1,0)}=(1,2,0)$$

切平面：$x+2y-4=0$

法线：$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{0}$

2、解：$F(x,y,z)=z^2y-xz^3-1$

$$\mathrm{F}_x=-z^3;F_y=z^2;F_z=2zy-3xz^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{-z^3}{2zy-3xz^2};\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{z^2}{2zy-3xz^2}$$

$$x=1,y=0,则z=-1$$

则 $dz|_{(1,0)}=\dfrac{1}{3}(dx+dy)$

四、计算题（每小题 8 分，共 16 分）

1、解：$P=\dfrac{y}{x^2+y^2},Q=\dfrac{-x}{x^2+y^2}$，则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

$L_1: x^2+y^2=\varepsilon^2$ 顺时针

$\because \oint_{L+L_1}=\iint_D 0dxdy=0$

又 $\int_{L_1}=2\pi$

$\therefore \oint_L=\oint_{L+L_1}-\int_{L_1}=\iint_D 0dxdy-\int_{L_1}$

$=-2\pi$

2、解：$\because \dfrac{\partial P}{\partial y}=12xy-3y^2=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

$\therefore$该积分与路径无关。

$I=\int_0^1 0dx+\int_0^1 6y-3y^2dy$ 或 $I=\int_0^1 0dy+\int_0^1 6x-1dy$

$=2$

五、计算题（每小题 8 分，共 16 分）

1、解：设 Σ_0：$z=0$ $x^2+y^2\le 1$，取下侧

$\because \oiint_{\Sigma+\Sigma_0}=\iiint_\Omega x^2+y^2+z^2dv=\dfrac{2\pi}{5}$

$\iint_{\Sigma_0}=-\iint_{x^2+y^2\le 1}dxdy=-\pi$

$\therefore I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_0}-\iint_{\Sigma_0}$

$I=\dfrac{7\pi}{5}$

2、解：$u_n(x)=(2n+1)x^{2n+1}$ ，则$\lim\limits_{n\to\infty}|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}|=x^2$

$x^2<1$时收敛；$x^2>1$时发散。

$x=1:\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)$发散；$x=-1:\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{2n+1}(2n+1)$发散

$\therefore$收敛域为（-1，1）

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}(x^{2n+1})'$$

$$=x(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1})'=x(\frac{x}{1-x^2})'$$

$$=\frac{x(1+x^2)}{(1-x^2)^2}\qquad(-1,1)$$

六、计算题（每小题 8 分，共 16 分）

1、解：$ds=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{2}dxdy$

$S_1=\iint\limits_{\Sigma}ds=\sqrt{2}\iint\limits_{D}dxdy\quad D:\ x^2+y^2\le1$

$=\sqrt{2}\pi$

$S=\pi+\sqrt{2}\pi=(\sqrt{2}+1)\pi$

$V_{圆锥}=\dfrac{1}{3}\pi1^2\times1=\dfrac{1}{3}\pi$

2、解：设$z=x^2+y^2$上的点(x,y,z)到平面$x+y-2z=2$之间的距离

$$d=\frac{|x+y-2z-2|}{\sqrt{6}}$$

$$F=(x+y-2z-2)^2+\lambda(x^2+y^2-z)$$

$$F_x=2(x+y-2z-2)+2\lambda x=0$$

$$F_y=2(x+y-2z-2)+2\lambda y=0$$

$$F_z = -4(x+y-2z-2)-\lambda = 0$$

$$z = x^2 + y^2$$

解方程组可得唯一的驻点$(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8})$

易知$d=\frac{|x+y-2z|}{\sqrt{6}}$在条件下存在最大值,则$d_{\max}=\frac{7}{4\sqrt{6}}=\frac{7\sqrt{6}}{24}$

七、证明题（6 分）

证：由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_{n+1}-u_n}{(u_n-1)(u_{n+1}-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{u_n-1}-\frac{1}{u_{n+1}-1})$收敛

则 $S_n=\frac{1}{u_1-1}-\frac{1}{u_2-1}+\frac{1}{u_2-1}-\frac{1}{u_3-1}+\cdots\cdots+\frac{1}{u_n-1}-\frac{1}{u_{n+1}-1}$

$=\frac{1}{u_1-1}-\frac{1}{u_{n+1}-1}$ 收敛

又$\{u_n\}$非无穷大 则 $\{u_n\}$收敛，$\therefore$不妨设$|u_n|<M$, n充分大时

$\therefore |u_nv_n|\le M|v_n|$, n充分大时，　　又已知$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$绝对收敛

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_nv_n)$绝对收敛