2023秋高等数学1期末试卷A答案

一、1. B　2. C　3. D　4. D　5. B

二、6. 正确　7. 错误　8. 错误　9. 错误　10. 错误

三、11. $(-1,+\infty)$　12. $\dfrac{y}{y-x}dx$　（不加 dx 不给分）13. $\dfrac{\pi^3}{2}$　14. π　15. π

四、16.解法1：$\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(e^x)^{\frac{1}{x}}\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right)^{\frac{1}{x}}$

2分

$$=e\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{x}{e^x}\right)^{\frac{e^x}{x}}\right]^{\frac{1}{e^x}}$$

4分

$=e\cdot e$

$=e^2$

6分

解法2：$\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln(e^x+x)}$

2分

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+x)}{x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{e^x+1}{e^x+x}}{1}}$$

4分

$=e^2$

6分

17. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin t+t\cos t-\sin t}{\cos t}=t$

2分

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{\cos t}$

4分

则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$

6 分

18. $\displaystyle\int\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}dx=\int\frac{1}{x}dx-\int\ln(1-x)d\left(\frac{1}{x}\right)$

$$=\ln|x|-\frac{\ln(1-x)}{x}-\int\frac{1}{x(1-x)}dx$$

2 分

$$=\ln|x|-\frac{\ln(1-x)}{x}-\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)dx$$

4 分

$$=\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(1-x)+C$$

6 分

19. $\displaystyle\int_0^\pi f(x)dx=xf(x)\Big|_0^\pi-\int_0^\pi xf'(x)dx$

2 分

$$=\pi f(\pi)-0-\int_0^\pi x\cdot\frac{\sin x}{\pi-x}dx$$

$$=\pi\int_0^\pi\frac{\sin t}{\pi-t}dt-\int_0^\pi x\cdot\frac{\sin x}{\pi-x}dx$$

$$=\int_0^\pi\frac{\pi\sin x}{\pi-x}dx-\int_0^\pi\frac{x\sin x}{\pi-x}dx$$

4 分

$$=\int_0^\pi\frac{(\pi-x)\sin x}{\pi-x}dx$$

$$=\int_0^\pi\sin xdx$$

$$=(-\cos x)\Big|_0^\pi$$

$$=2$$

6 分

20. 令 $p=-\tan x$，$q=\sec x$，应用一阶线性方程的通解公式可得：

1 分

$$y = e^{\int \tan x dx}\left(\int \sec x e^{-\int \tan x dx} dx + C\right)$$

2 分

$$= \frac{1}{\cos x}\left(\int \sec x \cos x dx + C\right)$$

$$= \frac{1}{\cos x}(x + C)$$

4 分

由 $y|_{x=0}=0$，可得 $C=0$，所以特解是 $y = \frac{x}{\cos x}$

6 分

五、21.令 $u=x^2-t^2$，

则 $\int_0^x tf(x^2-t^2)dt = -\frac{1}{2}\int_{x^2}^0 f(u)du = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)du$

2 分

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(x^2-t^2)dt}{x^2(1-e^{x^2})} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)du}{x^2(-x^2)}$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{xf(x^2)}{4x^3}$$

4 分

$$= -\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{x^2}$$

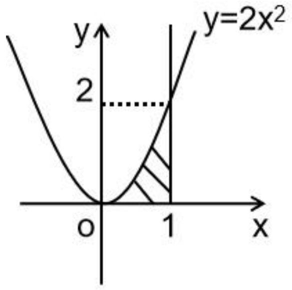
$$= -\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)-f(0)}{x^2-0}$$

6 分

$$= -\frac{1}{4}f'(0) = -\frac{1}{4}$$

8 分

22. 解法 1：



$$V_y = \pi\cdot 1^2\cdot 2 - \int_0^2 \pi\left(\sqrt{\frac{y}{2}}\right)^2 dy$$

4 分

$$=2\pi-\frac{1}{2}\pi\cdot\frac{1}{2}y^2\Big|_0^2$$ 6 分

=π 8 分

解法 2：$V_y=\int_0^1 2\pi x(2x^2)dx$ 4 分

$$=4\pi\cdot\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1$$ 6 分

=π 8 分

23.设切点为(a, e^{-a})，则切线方程为：$y-e^{-a}=-e^{-a}(x-a)$ 1 分

令 $x=0$，得 $y=(1+a)e^{-a}$；

令 $y=0$，得 $x=1+a$ 2 分

切线与坐标轴所夹面积 $S=\frac{1}{2}(1+a)^2e^{-a}$ 4 分

$S'=(1+a)e^{-a}-\frac{1}{2}(1+a)^2e^{-a}=\frac{1}{2}(1+a)(1-a)e^{-a}$

令 $S'=0$，得 $a_1=1$，$a_2=-1$（舍去） 6 分

由于当 $a<1$ 时，$S'>0$；当 $a>1$ 时，$S'<0$

故当 $a=1$ 时，面积 S 有极大值，即最大值

所求切点为$(1, e^{-1})$，最大面积 $S=\frac{1}{2}\cdot 2^2e^{-1}=2e^{-1}$ 8 分

六、24.由已知条件知，函数 $f(x)$在$[2, 3]$上连续，

从而取得最大值 M 和最小值 m，即 $m\le f(x)\le M$，$x\in[2, 3]$，

于是 $m \le \dfrac{f(2)+f(3)}{2} \le M$

1 分

由介值定理知，存在 $b\in[2, 3]$，使得 $f(b)=\dfrac{f(2)+f(3)}{2}$

2 分

由积分中值定理知，存在 $a\in[0, 1]$，使得 $\int_0^1 f(x)dx = f(a)$

4 分

依题意，有 $f(a)=f(b)$，

对函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上应用罗尔定理知，

至少存在一点$\xi\in(a, b)\subset(0, 3)$，使得 $f'(\xi)=0$

6 分