# Examen de Teoría de Percepción

ETSINF, Universitat Politècnica de València, Marzo de 2015

**Apellidos:** ☐ **Nombre:** ☐

**Profesor:** ☐ **Carlos Martínez** ☐ **Roberto Paredes**

## Cuestiones (3 puntos, 30 minutos, sin apuntes)

$\boxed{\text{C}}$ Indicar la afirmación correcta respecto a la clasificación estadística:

A) La regla óptima de clasificación es $c(x) = \arg\max_{c=1\ldots C} p(\mathbf{x}|c)$
B) Se puede aplicar que $P(c|\mathbf{x}) = P(c)p(\mathbf{x}|c)$
C) El clasificador basado en distancias puede verse como uno estadístico asumiendo $P(c|\mathbf{x}) = \frac{k_c}{K}$
D) Sólo es aplicable cuando las probabilidades *a priori* son las mismas (equiprobables)

$\boxed{\text{D}}$ Se tienen las funciones discriminantes (para puntos en $\mathbb{R}^2$) $g_1(\mathbf{x}) = 2x_1 - 2x_2 + 3$ y $g_2(\mathbf{x}) = 3x_1 + x_2 - 2$; el punto (2,1) se clasificaría en:

A) La clase 1
B) La clase 2
C) Ninguna de las clases, al no superar el umbral mínimo
D) En una clase al azar, al situarse en la frontera de decisión

$\boxed{\text{A}}$ Se tiene un problema de reconocimiento de imágenes, donde las imágenes son de 20×20 píxeles a 256 niveles de gris, y se plantea su representación local usando ventanas de 7×7. ¿Qué afirmación es correcta?

A) Con rejilla de un píxel, habrá un total de 196 ventanas
B) La representación local ocupará siempre más que la global
C) Con rejilla de un píxel, la representación local requiere más de 10000 bytes
D) Cada ventana requerirá más bytes que la representación global

$\boxed{\text{B}}$ Indicar cuál de las siguientes características *no* es propia del banco de filtros de Mel:

A) Generalmente emplea filtros triangulares
B) Transforma la señal del dominio temporal al frecuencial
C) Imita la percepción humana, afinando para frecuencias bajas y siendo menos fino para las altas
D) Permite una reducción de dimensión de la representación frecuencial

$\boxed{\text{D}}$ Dada una colección de 50 documentos, de longitud máxima 65535 *tokens* sobre un conjunto de 220 *tokens* distintos, indicar cuánto ocuparía (aproximadamente) una representación (densa) de cuentas de bigramas de *tokens* para toda la colección:

A) 21 Kbytes
B) 0.8 Mbytes
C) 2.3 Mbytes
D) 4.6 Mbytes

$\boxed{\text{A}}$ Dado un espacio de representación de $d$ dimensiones se desea reducir a $k$ dimensiones mediante PCA. Para ello se dispone de una matriz $B_{nxd}$ compuesta por los $n$ vectores de entrenamiento, menos la media de dichos vectores, dispuestos en filas. Entonces:

A) Escogeremos los $k$ mayores eigenvectores (mayor eigenvalor asociado) de la matriz: $\frac{1}{n}\ B^tB$
B) Escogeremos los $k$ mayores eigenvectores (mayor eigenvalor asociado) de la matriz: $\frac{1}{n}\ BB^t$
C) Escogeremos los $k$ mayores eigenvectores (mayor eigenvalor asociado) de la matriz: $\frac{1}{n}\ B$
D) Escogeremos los $k$ mayores eigenvectores (mayor eigenvalor asociado) de la matriz: $\frac{1}{n}\ B^t$

D Dado un problema de clasificación en 5 clases donde los objetos se representan en un espacio de 10 dimensiones. Se desea obtener una representación en un espacio reducido de 2 dimensiones. En general, ¿cuál de las siguientes reducciones es la menos aconsejable?

A) Proyectar primero con PCA a 10 dimensiones y luego con LDA a 2
B) Proyectar primero con PCA a 9 dimensiones y luego con LDA a 2
C) Proyectar con LDA a 2 dimensiones y luego con PCA a 2
D) Proyectar primero con PCA a 4 dimensiones y luego con LDA a 2

D Dado un problema de clasificación en $C$ clases donde los objetos se representan en un espacio de $d$ dimensiones, se desea obtener una representación en un espacio reducido de $k$ dimensiones. Mediante PCA se obtiene $W$ como matriz de proyección a $d'$ dimensiones y a partir de los datos una vez proyectados mediante PCA se obtiene $V$ como la matriz de proyección mediante LDA. Se debe de cumplir que:

A) $k \leq d'$ y $d' \leq C-1 \leq d$

B) $k \leq C-1 \leq d' \leq d$

C) $k \leq d'$ y $d' \leq d$

D) $k \leq C-1$ y $k \leq d' \leq d$

B Indica cuál de las siguientes afirmaciones es *falsa*

A) El algoritmo Kernel Perceptron incrementa la importacia (peso) de las muestras incorrectamente clasificadas
B) El uso de kernels es adecuado cuando los objetos son linealmente separables en el espacio de representación original
C) El uso de kernels es adecuado cuando los objetos no son linealmente separables en el espacio de representación original
D) Las funciones kernel modelan el producto escalar de dos vectores en un espacio de representación alternativo

C Sean $K_1(\mathbf{x},\mathbf{y})$ y $K_2(\mathbf{x},\mathbf{y})$ dos kernels, indica cuál de las siguientes expresiones *no* es un kernel

A) $(\mathbf{x}^t\mathbf{x}) \cdot K_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{y}^t\mathbf{y})$

B) $\exp(K_1(\mathbf{x},\mathbf{y})+1)$

C) $(c+K_1(\mathbf{x},\mathbf{y}))^d \quad c,d \geq 0$

D) $K_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) + 2K_2(\mathbf{x},\mathbf{y})$

# Examen de Teoría de Percepción

ETSINF, Universitat Politècnica de València, Marzo de 2015

**Apellidos:**   **Nombre:**

**Profesor:** ☐ **Carlos Martínez** ☐ **Roberto Paredes**

## Problemas (4 puntos, 90 minutos, con apuntes)

1. **(2 puntos)** Se desea clasificar imágenes de 4×4 píxeles representadas mediante representación directa con un vector de 16 dimensiones, recorriendo fila a fila. Las imágenes pertenecen a dos clases, clase 1 (aspas) y clase 2 (cuadrados). Las representación original es proyectada a 4 dimensiones mediante PCA, y en el espacio de 4 dimensiones se aplican funciones discriminantes lineales.

   Los eigenvalores y eigenvectores de la matriz de covarianza de los datos son los siguientes:

   $\lambda = [1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 8, 9, 10, 11, 12]$

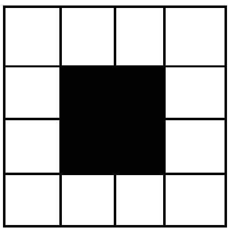
```
W =

     0     0     0     0     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     1     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0     0     1     0     0     0     0     0     0
     0     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     1     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     1     0
     0     0     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     1     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0     1     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     1     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     1     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     1
     0     0     0     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
```

   Los eigenvalores estan en el vector $\lambda$ y los eigenvectores asociados son las columnas de $W$.

   Siendo las funciones discriminantes lineales :

   $$g_1(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_1\mathbf{x} + b_1, \text{ con } \mathbf{w}_1 = [1, 0, 0, 1] \text{ y } b_1 = 0$$
   $$g_2(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_2\mathbf{x} + b_2, \text{ con } \mathbf{w}_2 = [0, 1, 1, 0] \text{ y } b_2 = 1$$

   a) Proyecta la siguiente imagen a 4 dimensiones (con el menor error de recosntrucción posible) Al no especificarse en el enunciado original, se supone que la media de los datos empleados para estimar la PCA es de 0. (1 **punto**)

   (Blanco=0, Negro=1)

   b) Clasifica el vector obtenido de acuerdo a las funciones discriminantes (1 **punto**)

   **Solución:**

   a) Proyectar con las cuatro últimas columnas de $W$. La representación directa sería $x = [0, 0, 0, 0,\ 0, 1, 1, 0,\ 0, 1, 1, 0,\ 0, 0, 0, 0]$, y la proyección $x' = [0, 1, 1, 0]$

   b) $g_1(x') = 0$ y $g_2(x') = 3$, se clasificaría en la clase 2 (cuadrado)

2. **(2 puntos)** Dada la función kernel $K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + 2)^2$ y el conjunto de aprendizaje en $\mathbb{R}^3$ $X = \{(\mathbf{x}_1, -1), (\mathbf{x}_2, +1), (\mathbf{x}_3, -1), (\mathbf{x}_4, +1), (\mathbf{x}_5, +1)\}$, siendo $\mathbf{x}_1 = [0\ 0\ -1]$, $\mathbf{x}_2 = [1\ 0\ 0]$, $\mathbf{x}_3 = [0\ 0\ 1]$, $\mathbf{x}_4 = [0\ 1\ 0]$, $\mathbf{x}_5 = [0\ -1\ 0]$, se pide:

   *a*) Obtener la matriz de kernel $K$ asociada a $X$ (**0.5 puntos**)

   *b*) Realizar iteraciones hasta la convergencia del algoritmo Kernel Perceptron partiendo del conjunto de pesos $\alpha = (1, 1, 1, 1, 1)$ (**1 punto**)

   *c*) Clasificar la muestra $\mathbf{y} = [-1\ 0\ 0]$ de acuerdo a los pesos obtenidos en el apartado previo (**0.5 puntos**)

**Solución:**

*a*) $\text{K}=\begin{vmatrix} 9 & 4 & 1 & 4 & 4 \\ 4 & 9 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 9 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 1 & 9 \end{vmatrix}$

*b*) $\mathbf{x}_1$: $g(\mathbf{x}_1) = 3$, $c_1 g(\mathbf{x}_1) = -3 \leq 0$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha = (2, 1, 1, 1, 1)$
$\mathbf{x}_2$: $g(\mathbf{x}_2) = 5$, $c_2 g(\mathbf{x}_2) = 5 > 0$
$\mathbf{x}_3$: $g(\mathbf{x}_3) = 1$, $c_3 g(\mathbf{x}_3) = -1 \leq 0$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha = (2, 1, 2, 1, 1)$
$\mathbf{x}_4$: $g(\mathbf{x}_4) = -3$, $c_4 g(\mathbf{x}_4) = -3 \leq 0$, $\alpha_4 = 2$, $\alpha = (2, 1, 2, 2, 1)$
$\mathbf{x}_5$: $g(\mathbf{x}_5) = -1$, $c_5 g(\mathbf{x}_5) = -1 \leq 0$, $\alpha_5 = 2$, $\alpha = (2, 1, 2, 2, 2)$

$\mathbf{x}_1$: $g(\mathbf{x}_1) = 1$, $c_1 g(\mathbf{x}_1) = -1 \leq 0$, $\alpha_1 = 3$, $\alpha = (3, 1, 2, 2, 2)$
$\mathbf{x}_2$: $g(\mathbf{x}_2) = 5$, $c_2 g(\mathbf{x}_2) = 5 > 0$
$\mathbf{x}_3$: $g(\mathbf{x}_3) = -1$, $c_3 g(\mathbf{x}_3) = 1 > 0$
$\mathbf{x}_4$: $g(\mathbf{x}_4) = 4$, $c_4 g(\mathbf{x}_4) = 4 > 0$
$\mathbf{x}_5$: $g(\mathbf{x}_5) = 4$, $c_5 g(\mathbf{x}_5) = 4 > 0$

$\mathbf{x}_1$: $g(\mathbf{x}_1) = -9$, $c_1 g(\mathbf{x}_1) = 9 > 0$

*c*) $K(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) = 4$, $K(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = 1$, $K(\mathbf{x}_3, \mathbf{y}) = 4$, $K(\mathbf{x}_4, \mathbf{y}) = 4$, $K(\mathbf{x}_5, \mathbf{y}) = 4$
Por tanto, $g(y) = -3$, $c(y) = -1$