Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide

June 7, 2025

Référence

Expérience : Tube Pitot (apparemment Toricelli ne marche pas bien, on ne retrouve pas les bons préfacteurs de l'évolution)

Livre :

- Physique PC/PC* Tout-en-un, Dunod, 2022

Prérequis :

- Cinématique des fluides
- Équation de Navier-Stokes (écoulement visqueux, nombre de Reynolds)

Niveau : PC

Introduction

1 Écoulement parfait

1.1 Équation d'Euler

Un écoulement est parfait si les phénomènes diffusifs sont négligeables. $\rightarrow$ Transformation adiabatique ($Q = 0$) et réversible ($S_c = 0$) $\rightarrow$ Effet de viscosité négligeable ($\eta \rightarrow 0$, $Re \rightarrow \infty$ et épaisseur de la couche limite tend vers 0)

Équation d'Euler :

$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})\vec{v}\right) = -\overrightarrow{grad}P + \overrightarrow{f_{vol}}$

Conséquences sur certains écoulements :

Jet rectiligne : Pression hydrostatique dans une section orthogonal aux lignes de champ

Courbure des lignes de courant : La pression augmente du centre de la courbure vers la périphérie extérieure du jet

1.2 Théorème de Bernoulli

Important de bien faire attention aux hypothèses sur l'écoulement

Hypothèses : Écoulement parfait, incompressible, stationnaire d'un fluide homogène évoluant dans le champ de pesanteur

Cas où l'écoulement est aussi irrotationnel ($\overrightarrow{rot}\vec{v} = \vec{0}$) :

L'équation d'Euler devient : $\rho(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})\vec{v} = -\overrightarrow{grad}P + \rho\vec{g}$

$\rho(\overrightarrow{grad}\frac{v^2}{2} + (\overrightarrow{rot}\vec{v}) \wedge \vec{v}) = -\overrightarrow{grad}P - \rho\overrightarrow{grad}gz$

$\rho(\overrightarrow{grad}\frac{v^2}{2} + (\overrightarrow{rot}\vec{v}) \wedge \vec{v} = -\overrightarrow{grad}P - \rho\overrightarrow{grad}gz$

$\overrightarrow{grad}\frac{v^2}{2} = -\overrightarrow{grad}\frac{P}{\rho} - \overrightarrow{grad}gz$

$\overrightarrow{grad}(\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz) = \vec{0}$

Théorème de Bernoulli pour un écoulement parfait, incompressible, irrotationnel, stationnaire d'un fluide homogène évoluant dans le champ de pesanteur : $\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = cste$

Le théorème de Bernoulli traduit la conservation de l'énergie dans l'écoulement (chaque terme est homogène à une énergie par unité de masse).

Dans le cas où l'écoulement n'est pas irrotationnel, on peut obtenir le théorème de Bernoulli en intégrant l'équation d'Euler le long d'une ligne de champ entre A et B.

$\int_A^B \overrightarrow{grad}\frac{v^2}{2} \cdot \overrightarrow{dl} + \int_A^B (\overrightarrow{rot}\overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{dl} = -\int_A^B \overrightarrow{grad}\frac{P}{\rho} \cdot \overrightarrow{dl} - \int_A^B \overrightarrow{grad}gz \cdot \overrightarrow{dl}$

Comme $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{dl}$ sont colinéaires, le terme $(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{dl}$ est nul. Ainsi, on obtient :

$\int_A^B d\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\int_A^B d\left(\frac{P}{\rho}\right) - \int_A^B d\left(gz\right)$

Théorème de Bernoulli pour un écoulement parfait, incompressible, stationnaire d'un fluide homogène évoluant dans le champ de pesanteur le long d'une ligne de champ :

$\frac{v^2(A)}{2} + \frac{P(A)}{\rho} + gz(A) = \frac{v^2(B)}{2} + \frac{P(B)}{\rho} + gz(B)$

2 Applications

2.1 Tube Pitot

Faire le schéma Manip expérimental Expliquer comment fonctionne un anémomètre à fil chaud

Faire les calculs théoriques pour remonter à la vitesse de l'écoulement.

2.2 Effet Torricelli/Vidange d'un réservoir

2.3 Effet Venturi/ Filtre Buchner

2.4 Sustentation d'une aile/Effet Coanda

Expérience quantitative

Objectif de l'expérience

Vérifier Bernoulli

Matériels

- Soufflerie
- Tube Pitot
- Manomètre différentiel
- Anémomètre à fil chaud
- Voltmètre
- Potence + noix + pince 3 doigts
- Alimentation continue ± 12V

Protocole

Mesurer la tension au voltmètre et la vitesse de l'écoulement sur l'anémomètre pour différentes vitesses de soufflerie

Précautions expérimentales

Incertitudes de l'anémomètre à lire sur la notice (environ 5%)

Attendre que l'écoulement soit en régime stationnaire

Vérifier les fluctuations des mesures pour les incertitudes

Bien rapprocher l'anémomètre et le tube Pitot sans les coller.