V1

Viscosité

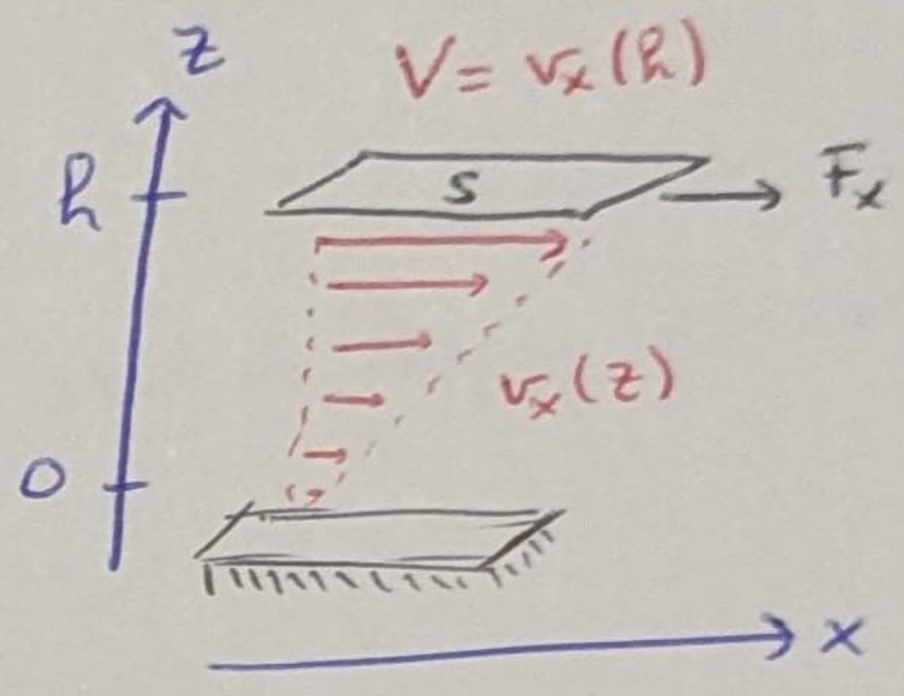
Observations Macro

pour simplifier → écoul. plan

écoulement de Couette plan (m̂ chose que vidéo miel en rotation mais avec $r_{courbure} \to \infty$)

- fluide entre 2 plaques horizontales
- On tire sur la plaque du haut avec force surfacique $\frac{F_x}{S}$

et imposer = vitesse V à la plaque



expérimentalement on observe $\Rightarrow v_x(z) = \frac{V}{h} z$

expériment. on observe aussi que pour certains fluides, $V \nearrow$ linéairement avec la contrainte

$$\left(\frac{F_x}{S} = \eta \frac{V}{h} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z}\right.$$

loi de Newton → fluide Newtonien

$$\vec{F} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} S \vec{e_x}$$

contrainte de cisaillement $\left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)$

homogène à pression mais agit tangentiellement

coeff de proportion. = viscosité dynamique

plus elle est grand plus il faut exercer force pour déplacer les couches

$[\eta] = Pa.s = Pl$ (poiseuille)

↓

ancienne unité

<u>OG</u>

η air $= 1{,}8 \times 10^{-5}$ Pl

eau $= 1 \times 10^{-3}$ Pl

glycérol $= 1{,}49$ Pl

miel $= 10 - 100$ Pl

poix $= 2 \times 10^{8}$ Pl

η dépend uniquement du liquide

mesurée par <u>viscosimètre</u> ou <u>rhéomètre</u>

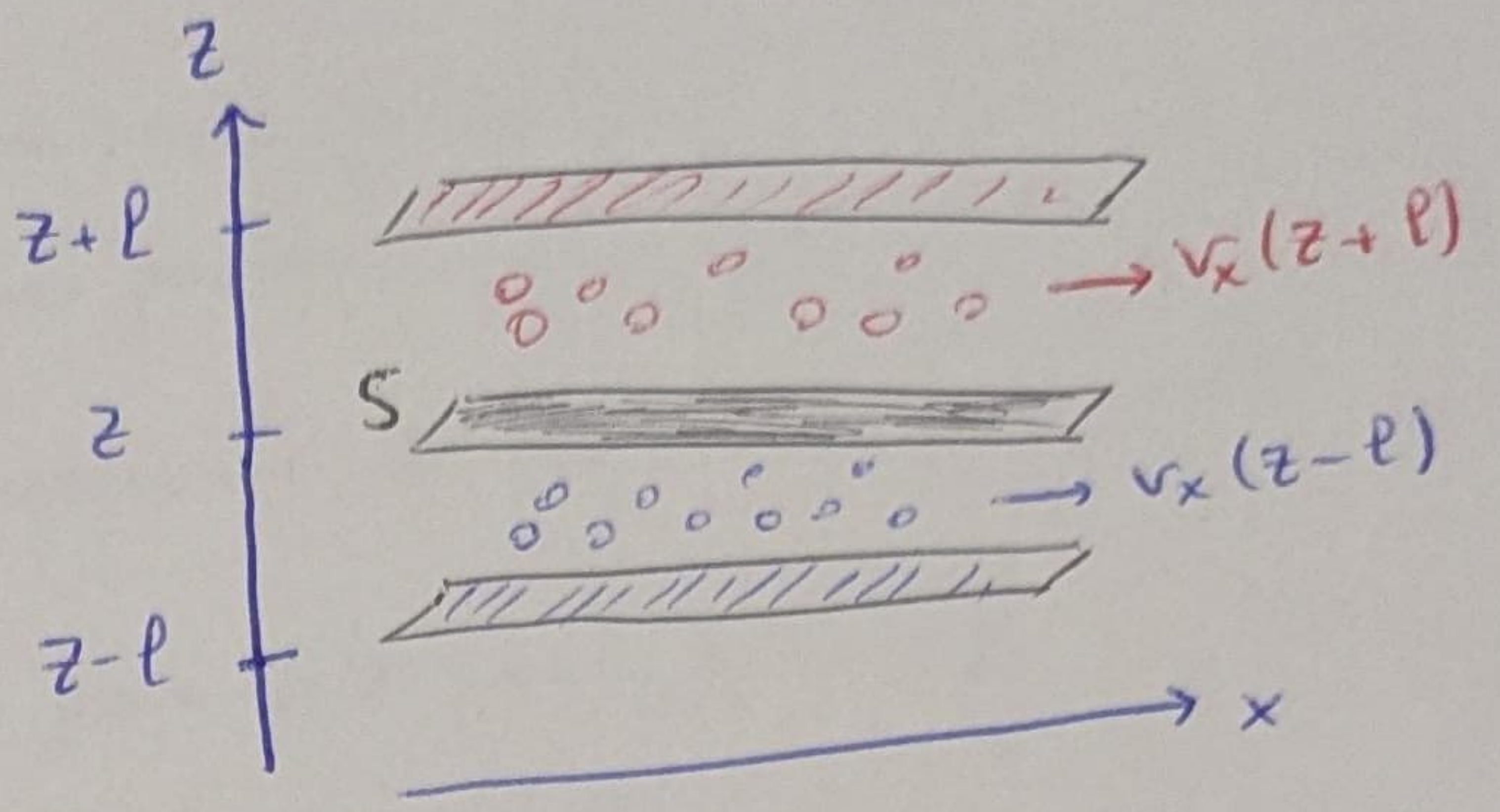
↓

on applique $\vec{v}$ rotation sur une paroi et on mesure couple sur l'autre paroi

V2

origine micro

a) cas des gaz



Soit écoul. horiz selon $\vec{e_x}$

$\vec{v} = v(z)\,\vec{e_x}$

c'est une vitesse d'ensemble

microscopiquement c'est un chaos

et part. bougent ds tous les sens

$\therefore$ leur vitesse thermique u est $\gg v$: $\frac{1}{2} m u^2 = \frac{3}{2} k_B T$

à T amb ~~300 K~~ $\rightarrow$ $u = 500$ m/s

Supposons | cette vitesse isotrope $\Rightarrow \frac{1}{6}$ des atomes vont ds chaque direction

| ℓ = libre parcours moyen

| n = densité d'atomes

| ont tous m̂ masse m

$\vec{v} = \vec{v_x} + \vec{u}$

$\langle \vec{v} \rangle = \langle \vec{v_x} \rangle$

Bilan qté mouv selon u_z :

rouges : $p_x(z+\ell) = N \; m v_x(z+\ell)$ → on prend pas qté mouv due à $\vec{u}$ car en $\langle\rangle = 0$

$= \frac{1}{6} n u S dt \; m v_x(z+\ell)$

bleus : pareil

$\therefore$ rouges exercent sur bleu une force :

$F_x = \frac{dp_x(z+\ell)}{dt} - \frac{dp_x(z-\ell)}{dt}$ | $\Rightarrow v(z+\ell) - v(z-\ell) = 2\ell \frac{\partial v}{\partial z}$

par dévelop. $\Rightarrow$ $\boxed{F_x = \underbrace{\frac{1}{3} n u S \ell m \frac{\partial v_x}{\partial z}}_{\text{micro}} = \underbrace{\eta S \frac{\partial v_x}{\partial z}}_{\text{macro}}}$

$\frac{\eta}{\rho} = \nu$ cinématique $[m^2/s]$ ← $\Rightarrow \eta = \frac{1}{3} n u \ell m$

ρ ↓ nm

$\ell = \frac{1}{\sigma n}$ et $u \propto \sqrt{k_B T}$ $\Rightarrow$ $\eta \propto \sqrt{T}$ $\therefore$ viscosité ↗ avec T

σ ↓ sect° eff de collision $[m^2]$ = proba de collision

ODG air : $u \approx 700$ m/s $\ell \approx 100$ nm

$\therefore \nu = \frac{\eta}{\rho} = \frac{1}{3} u \ell \sim 10^{-5}$ Pa.s

Cas des liquides

phase condensée avec (-) d'espace entre particules

∴ on le modélise par une poudre

chaque graine ≡ part. et est emprisonné ds cage faite par les autres

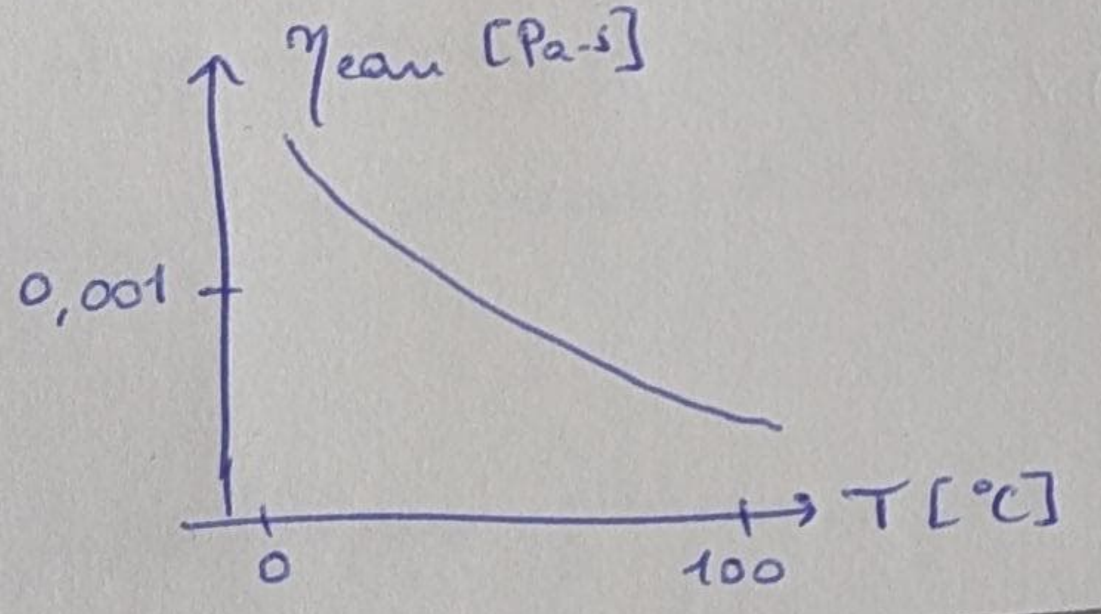
par agitation thermique, un grain peut passer à la cage suivante avec proba type Boltzmann

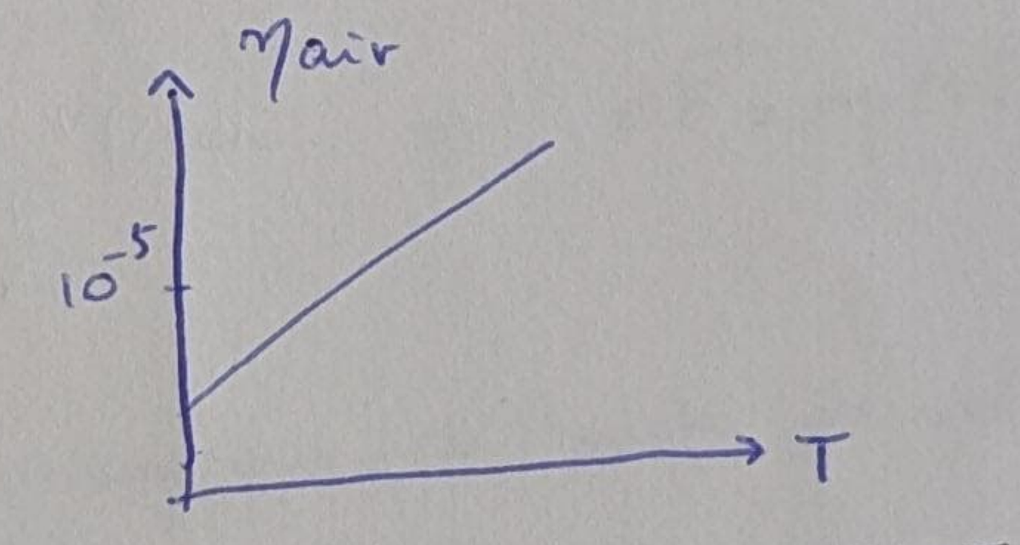
∴ fréq saut : $f = \frac{k_B T}{h} e^{\frac{-\Delta g}{k_B T}}$ → Δg = E activation pour traverser barrière de potentiel séparant 2 sites

h : cste Planck

par contrainte de cisaillement on va favoriser une direction et baisser une des parois de puits

$\Rightarrow \eta = \eta_0 \, e^{\frac{-\Delta g}{k_B T}}$ ∴ $\eta \searrow$ avec T !





Eq° Navier - Stokes

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = - \vec{\nabla} P + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v}$$

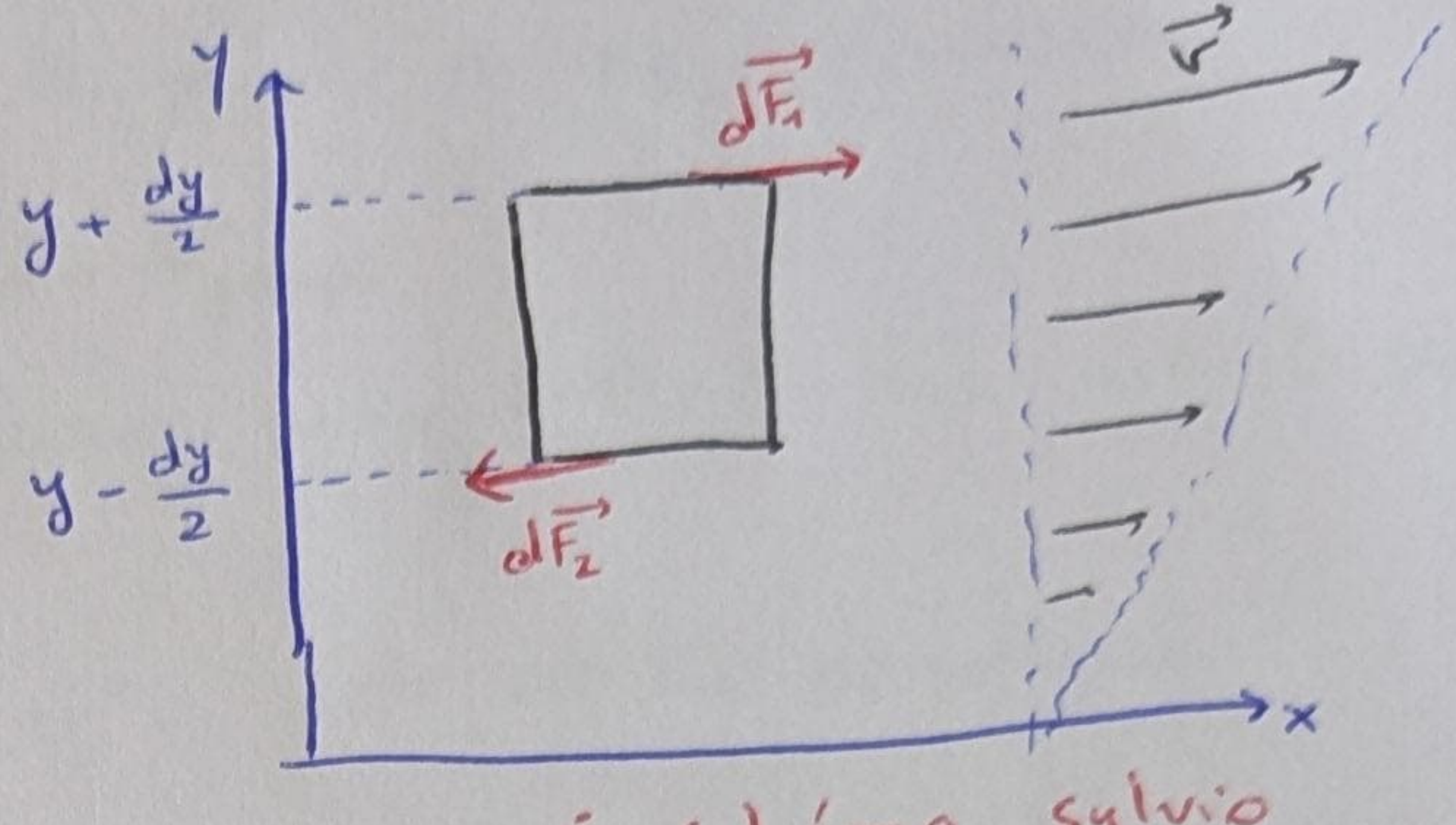
pour les fluides : éq° incompressibilité → $\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{v}}_{div} = 0$

Démonstrat° 1) conserv° masse $\underbrace{\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}}}_{0} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$

homogène $\Rightarrow \rho \, \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$

2) on cherche la résultante des actions de viscosité s'exerçant sur part. ds écoul° de cisaillement

La part. est soumise à 2 forces de cisaillement de la part du reste du fluide



voir schéma Sylvio Rossetti

À $y + \frac{dy}{2}$, la couche supérieure exerce $\vec{dF_1} = \eta \frac{\partial v}{\partial y} dS \, \vec{e_x}$

À $y - \frac{dy}{2}$, la couche inf. exerce $\vec{dF_2} = -\eta \frac{\partial v}{\partial y} dS \, \vec{e_x}$

$\therefore \vec{dF}_{visc} = \vec{dF_1} + \vec{dF_2} = \eta \underbrace{2 \frac{dy}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{\text{au 1er ordre}} \underbrace{dS}_{dx\,dz \text{ en cartés.}} \vec{e_x}$

par $dx\,dy\,dz = d\tau$ vol. élémentaire $\rightarrow \vec{dF}_{visc} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} d\tau \, \vec{e_x}$

cela est pour champ de vitesse $\vec{v} = v_x(y) \, \vec{e_x}$

$\therefore$ pour écoul. dépendant des 3 var. $\Rightarrow$ $\vec{dF} = \eta \Delta \vec{v} \, d\tau$

Dans réf. labo supposé galiléen, part. mésoscopique de fluide de vol. $d\tau$ et masse vol. ρ est soumise à :

- poids $\rho d\tau \, \vec{g}$
- résultante des actions du fluide ambiant $\left\{ \begin{array}{ll} \text{pression} & -\vec{grad} P \, d\tau \\ \text{viscosité} & \eta \Delta \vec{v} \, d\tau \end{array} \right.$

on néglige les autres (comme Archimède)

L'acc. est la dérivée particulaire de la vitesse

$$\rho d\tau \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{grad} P \, d\tau + \rho d\tau \, \vec{g} + \eta \Delta \vec{v} \, d\tau$$

tous les termes $\equiv$ forces volumiques

★ si écoul est compress. on ajoute $\vec{F}_{volum.} \propto \text{div} \, \vec{v}$ dite de seconde viscosité

★ si réf. non galiléen on ajoute $\vec{F}_{volum.}$ d'inertie

Maintenant faut appliquer CL

pour écoul. contre solide (fond du récipient) on suppose que fluide ne pénètre pas la paroi ni ne s'en décolle

$\therefore \quad \vec{v}_{bord} = \vec{v}_{paroi}$

cette CL assume que $\vec{F}$ ne diverge pas à l'interface avec la paroi

Mais on ne sait pas résoudre cette éq° -- elle est très compliquée

Pour la simplifier, il faut négliger les termes dont OG < devant les autres

Nb très pratique pour cela est Nb Re

nombre de Reynolds

on souhaite négliger | le terme non linéaire

$\therefore$ on s'intéresse aux fluides visqueux, ~~[illegible]~~

$\therefore$ on compare termes visqueux et convectifs en OG

pour écoul. de vit. caract. U et dim. caract. L :

$$\frac{\text{convection}}{\text{viscosité}} = \frac{|\rho(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}|}{|\eta\Delta\vec{v}|} \simeq \frac{\rho U \frac{U}{L}}{\eta \frac{U}{L^2}} = \frac{\rho U L}{\eta} = \frac{UL}{\nu}$$

terme advectif = transport de qté mouv dû à l'entrainement par mouv. du milieu

terme diffusif dû à la viscosité

coeff. diffusion $= \nu = \frac{\eta}{\rho}$ en m^2/s

si $Re \ll 1$ viscosité joue rôle prépondérant → écoul. laminaire

si $Re \gg 1$ " " " négligeable → " turbulent

tourne ⇒ page

OG eau à la sortie du robinet : $U \sim 1\ m/s$ $L = 0{,}01\ m$ (diamètre jet) $\nu \sim 10^{-6}\ m^2/s$ → $Re = 10^4 \gg 1$ turb.

miel coule le long de cuillère : $\rho = 1400\ kg/m^3$ $\eta \sim 10^2\ Pl$ $U \sim 1\ cm/s$ $L = 1\ cm$

→ $Re \sim 10^{-3} \ll 1$ stokes

V6

Re < 2000 → laminaire couches fluides // pas de mélange transversal

Re > 4000 → turbulent tourbillons et mélange chaotique

(2000 ≲ Re ≲ 4000 → transition petits tourb. état instable)

cas particulier du laminaire : Re ≪ 1 → écoul. de Stokes

écoul. très lent car inertie négligeable et viscosité dominante

* ces seuils dépendent du contexte

écoul. ds tuyau (Poiseuille) → ces seuils sont standards

écoul. autour obstacle (bille par ex) → seuil turb. et transition sont + bas

∴ si on ouvre robinet doucement → laminaire

car jet de diamètre +↘ et vitesse +↘

~~Écoulements visqueux~~ ≡ écoul. rampants

Écoul° ~~à bas nb Re~~ de Stokes = écoul. dominés par la viscosité (effets inertiels sont négligeables)

obtenu par combinaison de 3 facteurs ≠ :

1) faible taille objet en mouv ou faible taille canal d'écoul. ~~comme écoul~~ ou écoul. ds milieux poreux

2) Fluides très visqueux 3) ~~de tran~~ ~~de~~ vitesse faible

comme | déplacement glaciers ($Re \sim 10^{-17}$)
| mouv. lent du manteau terrestre ($Re \sim 10^{-20}$)

∴ $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\text{grad}}\, P + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v}$

on suppose que l'écoul. est quasi station. ∴ $\vec{\text{grad}}\, P = \eta \Delta \vec{v} - \rho \vec{g}$

Ds fluide au repos (pas d'écoul.) on a :

$$\vec{\nabla} P_0 = \rho \vec{g}$$ loi fondamentale de l'hydrostatique

en mouv, on peut intégrer la gravité ds le champ de pression total : $P = P_0 + P_{dynamique}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} P = \vec{\nabla}(P_0 + P_{dyn.}) = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} P_{dyn.}$$

$$\therefore \quad \vec{grad}\, P_{tot} = \eta \Delta \vec{v}$$ ⟶ éq° linéaire ✓

éq° de Stokes

Propriétés

1) linéarité : si v_1 et v_2 2 solut° $\therefore$ $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ = solut°

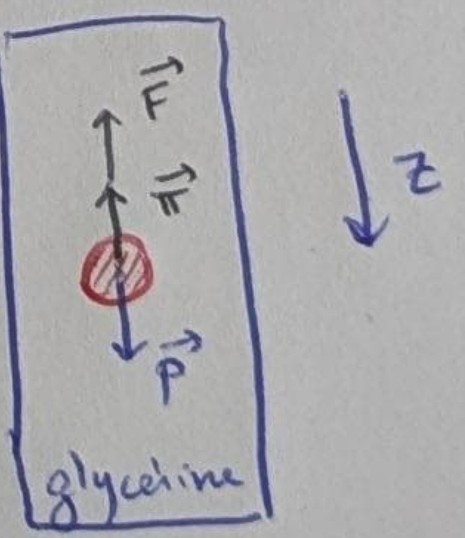
$$\therefore \quad \vec{grad}\, P = \lambda_1 \vec{grad}\, P_1 + \lambda_2 \vec{grad}\, P_2$$

2) unicité : éq° Stokes a une unique solut° pour 1 écoul. et des CL données

3) réversibilité : si on inverse sens d'écoul., les part. fluides vont refaire en sens inverse le m̂ chemin

vidéo Expérience Taylor

Application Sphère dans une colonne de glycérine



soit part. en acier de diamètre D et masse vol. ρ_p à vit. U ds fluide visqueux de masse vol. ρ_f et visc. dyn. η_f

$\vec{F}$ sur cette part. :

- poids : $\vec{P} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3 \rho_p \vec{g}$ car sens opposé de $\vec{g}$
- force d'Archimède : $\vec{\Pi} = -\frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3 \rho_f \vec{g}$
  poussée
- force frott. ou force de traînée : $\vec{F}$

PFD : $$m \frac{d\vec{U}}{dt} = \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{F}$$

on a 5 paramètres F D U η_f ρ_f

$F \to MLT^{-2}$, $D \to L$, $U \to LT^{-1}$, $\eta_f \to ML^{-1}T^{-2}$, $\rho_f \to ML^{-3}$

et ∴ 3 dimensions ≠

par théorème Pi on peut construire $(5-3) = 2$ nb sans dim

$$\frac{F}{\rho_f D^2 U^2} \quad \text{et} \quad \frac{\rho_f U D}{\eta_f}$$

nb de Reynolds

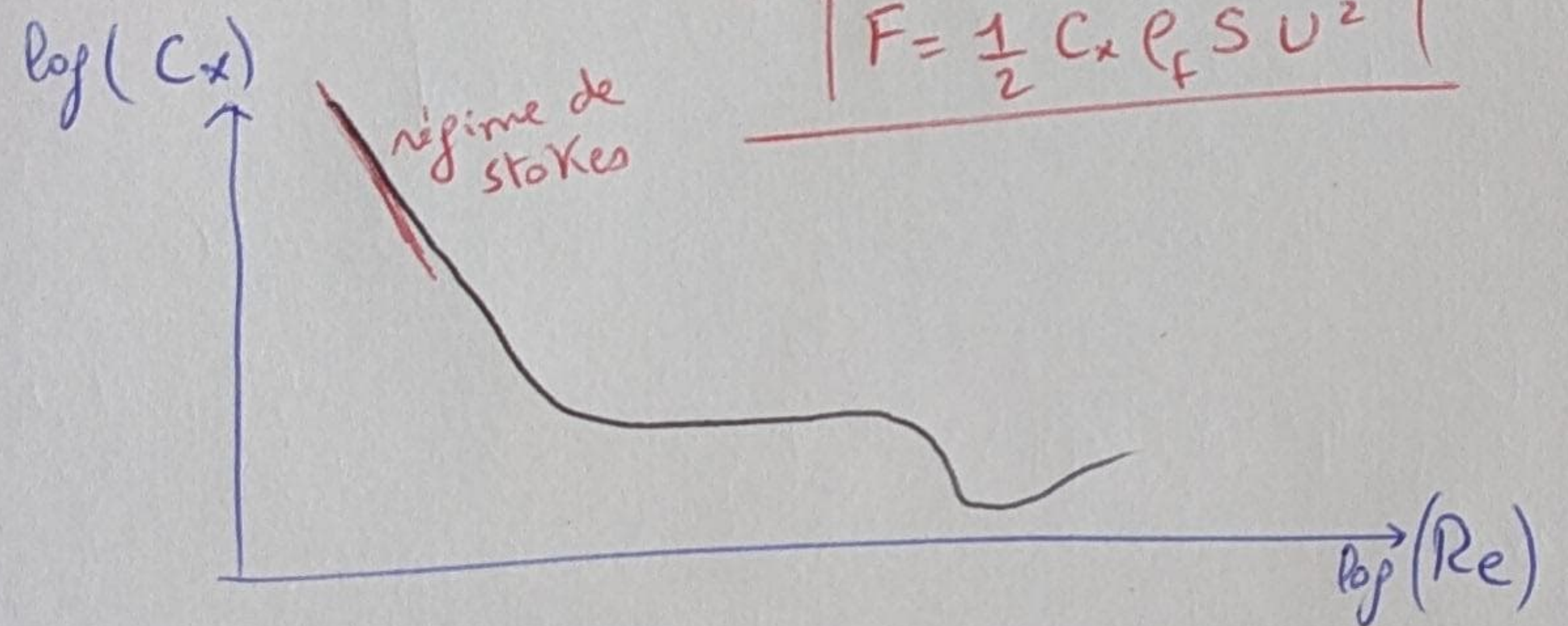
∴ par analyse dimensionnelle : $\dfrac{F}{\rho_f D^2 U^2} = f(Re)$ inconnue

cette relat° est usuellement exprimée sous la forme de :

générale pour ∀ Re

$$F = \frac{1}{2} C_x(Re)\, \rho_f \pi D^2 U^2 \quad \to \quad C_x(Re) = \frac{2F}{\rho_f \pi D^2 U^2}$$

$$\boxed{F = \frac{1}{2} C_x \rho_f S U^2}$$



pour faible Re, il y a dépendance linéaire de Cx en fct Re en échelle log

∴ loi de puissance

$\cancel{C_x \propto Re^{\beta}}$

$C_x = A\, Re^{\alpha}$

$$\log C_x = \alpha \log Re + \log A$$

pente de la droite $\to$ $\boxed{C_x = 24 Re^{-1}}$

$$\vec{F} = -\frac{1}{2} \frac{24}{Re} \rho_f \frac{\pi D^2}{4} U^2 = -\frac{12 \eta_f}{\rho_f D U} \rho_f \frac{\pi D^2}{4} U^2$$

car opposé à la chute

$$\boxed{\vec{F} = -6\pi \eta_f R \vec{U}}$$

Force de traînée de Stokes

∴ ds PFD :

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_p \vec{g} - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_f \vec{g} - 6\pi \eta_f R \vec{U} = \vec{0}$$

qd bille atteint sa vitesse finale cste (pas d'acc.)

$$\Rightarrow \vec{U} = \frac{2}{9} \frac{(\rho_p - \rho_f) R^2}{\eta_f} \vec{g}$$

$$\to \boxed{\eta = \frac{2}{9}(\rho_p - \rho_f) \frac{R^2 g}{U}}$$