Effet tunnel : Application à la radioactivité alpha

June 7, 2025

Référence

Expérience : Non
Livre :

- Physique pour l'agrégation, FFR, Deboeck
- Cours de physique nucléaire, Elias Khan

Prérequis :

- Mécanique quantique (équation de Schrödinger, densité de probabilité)
- Physique nucléaire (temps de demi-vie)

Rq : Avoir les calculs détaillés sous la main mais ne pas tous les présenter, plutôt présenter les résultats et les aspects physiques derrière.

Introduction

1 Effet tunnel

1.1 Barrière de potentiel

On s'intéresse à une particule de masse m et d'énergie E venant de moins l'infini arrivant sur une barrière de potentiel constante d'énergie $V_0 > E$ et de largeur L.

Mettre schéma barrière constante

On cherche à calculer la fonction d'onde de la particule dans tout l'espace. En modélisant la particule comme un paquet d'ondes, par linéarité, on peut se contenter de résoudre le cas d'une onde stationnaire d'énergie E. On cherche donc les solutions de l'équation de Schrödinger indépendante du temps :

$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - V(r)\right]\phi(x) = 0$

En posant $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ et $\kappa = \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$

La solution générale de $\phi(x)$ est :

- pour x<0, $\phi(x) = A_1 \exp^{ikx} + B_1 \exp^{-ikx}$
- pour 0<x<L, $\phi(x) = A_2 \exp^{\kappa x} + B_2 \exp^{-\kappa x}$
- pour x>L, $\phi(x) = A_3 \exp^{ikx} + B_3 \exp^{-ikx}$

On a donc 6 coefficients à exprimer. Pour les déterminer, on peut utiliser les relations suivantes :

- Absence d'onde provenant de +infini : $B_3 = 0$
- Continuité de ϕ en x=0 et en x=L :
  - $A_1 + B_1 = A_2 + B_2$
  - $A_2 \exp^{\kappa L} + B_2 \exp^{-\kappa L} = A_3 \exp^{ikL}$

- Continuité de $\frac{d\phi}{dx}$ en x=0 et en x=L :
  - $ikA_1 - ikB_1 = \kappa A_2 - \kappa B_2$
  - $\kappa A_2 \exp^{\kappa L} - \kappa B_2 \exp^{-\kappa L} = ikA_3 \exp^{ikL}$

On peut donc exprimer les coefficients en fonction d'un seul. (projeter les résultats)

1.2 Coefficient de transmission

On définit les coefficients de réflexion et de transmission : $R = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2}$ et $T = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2}$

On peut réécrire le coefficient de transmission sous la forme :

$T = \frac{1}{1+\frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}\sinh^2(\kappa L)}$

Dans la limite où κL
$gg1$ (approximation de barrière épaisse), on obtient l'expression suivante :

$T \simeq \frac{16E(V_0-E)}{V_0^2}\exp(-2\kappa L)$

Pour interpréter les résultats, on regarde la densité de probabilité $\mid \psi \mid^2$:

Mettre graphe du FFR

Application numérique à différentes échelles

2 Application à la radioactivité alpha

2.1 Temps de demi-vie

La radioactivité alpha est le processus par lequel un noyau X devient un noyau Y en émettant un noyau d'hélium (appelé particule alpha) :

${}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{X} \rightarrow {}^{\mathrm{A-4}}_{\mathrm{Z-2}}\mathrm{Y} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$

En 1911, loi phénoménologique de Geiger et Nuttall entre l'énergie de He et le temps de demi-vie du noyau père :

$\ln(t_{1/2}) = +\frac{bZ_{fils}}{\sqrt{E}}$ où Z_{fils} est le nombre de protons du noyau fils, a et b des constantes variant légèrement selon Z_{fils}.

Mettre graphe expérimentale du cours de physique nucléaire + applications numériques

2.2 Potentiel du noyau

On peut retrouver cette loi par la mécanique quantique.

Hypothèses : La particule alpha est formée dans le noyau père avec une énergie E. Elle subit l'interaction forte tant qu'elle est au contact de celui-ci (portée de 10^{-15} m). En s'éloignant, la particule alpha subit la répulsion coulombienne provenant des protons du noyau.

Le potentiel peut donc être modélisé par :

(mettre graphe du FFR)

Qualitativement, la particule alpha est piégée dans le puits de potentiel générée par l'interaction forte et a une probabilité de s'échapper par effet tunnel.

Plus la probabilité est forte, plus le noyau père va émettre une particule alpha et donc son temps de demi-vie est plus court

En notant la probabilité de traverser la barrière par unité de temps $\frac{1}{\tau}$, pour N particules, le nombre moyen de particules alpha émises pendant la durée dt est Ndt/τ. Ainsi :

$dN = -\frac{Ndt}{\tau}$

$N(t) = N_0 \exp^{-t/\tau}$

On peut donc relier le temps de demi-vie à τ :

$t_{1/2} = \tau \ln(2)$

D'après l'étude précédente de l'effet tunnel, la particule alpha a une probabilité T_a de passer lorsqu'elle arrive sur la barrière. Si la particule met un temps Δt à parcourir le noyau, on a : $\frac{1}{\tau} = \frac{T_a}{\Delta t}$

Pour une particule non-relativiste de masse m et d'énergie E, on a :

$\Delta t = \frac{2r_0}{v} = \frac{2r_0}{\sqrt{2E/m}}$

Ainsi, on obtient :

$t_{1/2} = \frac{\sqrt{2m}r_0}{T_a\sqrt{E}}\ln(2)$

Il nous reste donc à calculer le coefficient de transmission correspondant au potentiel du noyau père.

(Ne pas faire)Approximation WKB

Pour cela, on fait l'approximation d'un potentiel variant lentement (Pas clair!). On pose pour la fonction d'onde spatiale sous la barrière $phi(r) = A\exp^{-\gamma(r)} + B\exp^{+\gamma(r)}$

Équation de Schrödinger indépendante du temps sous la barrière :

$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - V(r)\right]\phi(r) = 0$

Or $\frac{d^2\phi}{dr^2} = [\gamma'(r)]^2\phi(r) + \gamma"(r)(-A\exp^{-\gamma(r)} + B\exp^{+\gamma(r)}$

Approximation WKB : On néglige $\gamma"(r)$ devant $[\gamma'(r)]^2$ (à justifier à posteriori)

L'équation de Schrödinger devient :

$[\gamma'(r)]^2\phi(r) = \frac{2m}{\hbar^2}\left[V(r) - E\right]\phi(r) = \kappa(r)^2$

Donc $\gamma'(r) = \kappa(r)$ et $\gamma(r) = \int_{r_0}^{r_1}\kappa(r)dr$

Pour une barrière suffisamment épaisse, on a par analogie avec le cas de barrière constante :

$T_a = f(E)\exp\left(-2\int_{r_0}^{r_1}\kappa(r)dr\right)$ où f est une fonction dont la forme est proche de celle pour la barrière constante.

Comme $V(r_1) = E$, on a $E = k/r$ et donc on peut calculer l'intégrale :

$\gamma(r_1) = \int_{r_0}^{r_1}\kappa(r)dr = \frac{\sqrt{2mk}}{\hbar}\int_{r_0}^{r_1}\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}}dr$

$\gamma(r_1) = \frac{\sqrt{2mkr_1}}{\hbar}\int_{r_0/r_1}^{1}\sqrt{\frac{1}{x} - 1}dx$

Or $\int_a^1\sqrt{\frac{1}{x} - 1}dx = \arccos(\sqrt{a}) - \sqrt{a}\sqrt{1-a}$

Pour $a \ll 1$, on a : $\arccos(\sqrt{a}) - \sqrt{a}\sqrt{1-a} = \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{a} + o(a)$

Ainsi dans la limite où $r_0 \ll r_1$, on a :

$\gamma(r_1) = \frac{\sqrt{2mkr_1}}{\hbar}\left(\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{r_0}{r_1}}\right)$

On peut vérifier l'approximation WKB faite auparavant (à faire) :

$\gamma'(r) =$

Le coefficient de transmission vaut donc :

$T_a = f(E)\exp\left(\frac{2\sqrt{2mkr_1}}{\hbar}\left(-\frac{\pi}{2} + 2\sqrt{\frac{r_0}{r_1}}\right)\right)$

$T_a = f(E)\exp\left(\frac{4\sqrt{2mkr_0}}{\hbar}\right) \times \exp\left(-\pi\frac{\sqrt{2m}e^2 Z_\alpha}{4\epsilon_0\hbar}\frac{Z_{fils}}{\sqrt{E}}\right)$

D'où $t_{1/2} = \ln(2)\frac{\sqrt{2m}r_0}{\sqrt{E}f(E)}\exp\left(-\frac{4\sqrt{2mkr_0}}{\hbar}\right) \times \exp\left(\pi\frac{\sqrt{2m}e^2 Z_\alpha}{4\epsilon_0\hbar}\frac{Z_{fils}}{\sqrt{E}}\right)$

En passant au logarithme, on retrouve bien la loi de Geiger-Nuttall.

Expérience quantitative

Objectif de l'expérience

Expérience numérique avec le logiciel PhET sur l'effet tunnel.