Effet Tunnel

* particule est entièrement décrite par fonction d'onde qui lui est associée $\Psi(t,\vec{x})$

* densité de proba = proba de présence d'une particule à instant t ds vol. $d\tau$ centré en $\vec{x}$

$$dP(t,\vec{x}) = |\Psi(t,\vec{x})|^2 d\tau$$

L'interprétation probabiliste de MQ est parfois appelée règle de Born

unidimensionnel : $dP(t,x) = |\Psi(t,x)|^2 dx$

ds ce cas $[\Psi] = L^{-1/2}$ car $[P]$ = sans dim

⇒ unité de fct d'onde dépend de la dimension du problème (1D .. 3D ...)

condition normalisation : $\int |\Psi(t,x)|^2 dx = 1$ car $\int P = 1$

si on mesure qté $A(t,x)$ comme position par ex ⇒ chque mesure sera ≠ car aléatoire

~~m si on a~~

⇒ moyenne $\langle A \rangle$ de mesures : $\langle A \rangle = \int A\, dP = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Psi} A \Psi \, dx$

indétermination ΔA de A : $\Delta A^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$

en maths c'est l'écart-type de la distrib. de proba

= à quel pt la valeur de A est éloignée de la moyenne

* indétermination ≠ incertitude

↘ car là l'aléatoire vient du manque de précision du syst. de mesure par ex

↓

là l'aléatoire est fondamental ≠ défaut d'observation par fct d'onde on peut décrire la dualité

$$\Psi(t,x) = \underbrace{A}_{\text{cste}}\, e^{i\left(\frac{-Et+px}{\hbar}\right)}$$

c'est une onde progressive dont les paramètres respectent les relations de de Broglie $\left|\begin{array}{l} E = h\nu = \hbar\omega \\ p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \end{array}\right.$

pour cette onde, la proba de présence $dP = |A|^2 dx$ ∴ $\int_{-\infty}^{+\infty} |A|^2 dx = 1$

∴ particule est trouvée partout ds l'espace avec proba cste !

une telle condition $\int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 dx = 1$ si $A = 0$ mathématiquement

∴ on n'aura pas d'onde ..

∴ notion d'onde de matière totalement délocalisée ds l'espace n'est pas physique

la bonne notion = paquet d'ondes (comme pour OPPH qui n'∄)

là pas d'onde à p fixé

∴ particule décrite par Σ ondes matière sinusoïdales

paquet d'ondes

$$\Psi(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(p)\, e^{i\left(\frac{-Et+px}{\hbar}\right)} dp$$

$A(p)$ ↓ amplitude pour chaque impulsion p

en dérivant Ψ : $\left|\begin{array}{l} p\Psi = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ E\Psi = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial \Psi}{\partial t} \end{array}\right.$ ∴ p et E sont des opérateurs qui agissent sur Ψ elle-m

$p \leftrightarrow \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ $\quad E \leftrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$

∴ $\langle E \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \bar{\Psi}\, i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$ ∴ en quantique l'E n'a pas de valeur fixée pour 1 syst

c'est distrib. de proba d'énergie

<u>1926</u> : Schrödinger ⇒ eq° pour prévoir l'évolut° temporelle de Ψ d'une particule (de masse m) dans potentiel $V(t,x)$

la base du formalisme ondulatoire de MQ

$$\underbrace{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}}_{E}\Psi = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}}_{\frac{p^2}{2m}}\Psi + V\Psi$$

Eq° Schrödinger :

1) Linéaire : si ψ_1 et ψ_2 solut° ⇒ comb. lin. $\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2$ est solut°

2) ordre 1 en temps ⇒ connaître $\psi(t_0, x)$ à t_0 permet de trouver $\psi(t,x)$ pour tout t ⇒ éq° décrit un processus déterministe

car juste intégrer en t et on connaître l'évolution futur ou passée

3) réversible : si ψ solut° ⇒ $\bar{\psi}$ sol. où on renverse $t \to -t$

renver $t \equiv \psi \to \bar{\psi}$

⇒ décrit que processus réversible

mais cela ne change pas le comportement physique du syst car toute grandeur fait intervenir $|\psi|^2$ ⇒ échangé qd ψ devient $\bar{\psi}$

∵ éq. Schröd. = éq aux dérivées partielles ⇒ pour simplifier, cherchons $\psi(x,t)$ sous la forme de : $\psi(x,t) = f(t)\, g(x)$

état stationnaire

analogie avec les ondes

si potentiel indép. de t :

$$E\, f(t) g(x) = i\hbar \underbrace{\dot{f}(t)}_{\text{temporel}} g(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} f(t) \underbrace{g''(x)}_{\text{spatial}} + \underbrace{V(x)}_{\text{indép de t}} f(t) g(x)$$

$$\Rightarrow \quad i\hbar \frac{\dot{f}}{f} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{g''}{g} + V = E$$

∵ = entre quantité dépend de t et autre d'espace ⇒ les 2 sont ctes

⇒ $E = \text{cte}$

partie temporelle $\longrightarrow$ $f(t) = \underbrace{A}_{\text{cste}}\, e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$

⇒ Etats stationn. de éq° Schröd. sont le cas d'une Ep indép. de t

$$\psi(t,x) = \varphi(x)\, e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$$

où $E = \text{cste}$

et $\varphi(x)$ vérifie éq. Schröd. indép. de t :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + V\varphi = E\varphi(x)$$

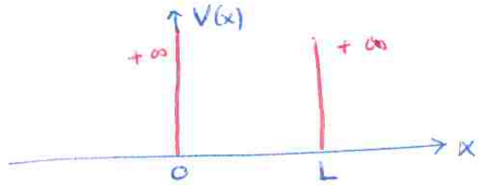
~~$\varphi(x)$~~ La partie spatiale φ de la fct d'onde d'un état stationn. est continue en tout pt x

Si potentiel $V(x)$ est fini ⇒ $\frac{d\varphi}{dx}$ est aussi continue

Puits quantique ∞

si part. confinée entre $x=0$ et $x=L$

$$\begin{cases} V(x)=0 & \text{si } x\in[0,L] \\ V(x)=+\infty & \text{sinon} \end{cases}$$



on cherche à résoudre éq° Schröd. indép. de t pour E donnée

- où $V=+\infty$ → $\varphi=0$ car la particule ne peut pas s'y trouver.

- ds domaine central : $\dfrac{-\hbar^2}{2m}\varphi'' + 0 = E\varphi$

$$\therefore \varphi(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx) \qquad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

- continuité en $\begin{vmatrix} x=0 \\ x=L \end{vmatrix}$ $\Rightarrow$ $\varphi(0)=\varphi(L)=0$

$\varphi(0)=0$ → $A=0$

$\varphi(L)=0$ → $B\sin(kL)=0 \Rightarrow k_n = \dfrac{n\pi}{L}$ $\quad n\in\mathbb{N}^*$ (sinon $\varphi=0$ pas de particule)

discontinuité φ' car puit ∞

$$k_n = \sqrt{\frac{2mE_n}{\hbar^2}} = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow \boxed{E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}}$$

Energie est quantifiée

Les fct d'ondes associées sont : $\varphi_n(x) = B\sin\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)$

pour trouver B : $\displaystyle\int_0^L dx\, \left|B\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right|^2 = |B|^2\frac{L}{2} = 1$ $\qquad B=\sqrt{\dfrac{2}{L}}$

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

limite grands nb quantiques $n\gg1$ $\Longrightarrow$ $\dfrac{E_{n+1}-E_n}{E_n} \sim \dfrac{2}{n}$

$\therefore$ écart relatif entre 2 niveaux tend vers 0

$\dfrac{k_n}{k_{n+1}-k_n} = n \gg 1$ soit $k_n \gg \dfrac{\pi}{L}$ $\quad$ par $k_n = \dfrac{2\pi}{\lambda_n}$ (λ_{DB} à état n)

$$\Rightarrow \lambda_n \ll \frac{L}{2} \quad \therefore \lambda_n \ll L$$

Ds limite ↗ nb quant: on a ∴ un continuum de niveaux d'E (car très proche 1 de l'autre) et λ très petite devant taille du puits

∴ la particule se comporte comme particule classique

= principe de correspondance de Bohr

Notons $\mathcal{E}$: $\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(t,\vec{x}) + V(\vec{x})\Psi(t,\vec{x}) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,\vec{x})}$

3D

en remplaçant $\varphi(\vec{x})$ par $\varphi(\vec{x})\, e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$

en calculant : $\bar{\Psi}\mathcal{E} - \Psi\bar{\mathcal{E}} \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}(\bar{\Psi}\Delta\Psi - \Psi\Delta\bar{\Psi}) + V\cancel{(\bar{\Psi}\Psi - \Psi\bar{\Psi})}$

$$= i\hbar\underbrace{\left(\bar{\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \Psi\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial t}\right)}_{=\frac{\partial|\Psi|^2}{\partial t}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial|\Psi|^2}{\partial t} - \frac{i\hbar}{2m}(\bar{\Psi}\Delta\Psi - \Psi\Delta\bar{\Psi}) = 0$$

div(grad)

par $\bar{\Psi}\Delta\Psi = \bar{\Psi}\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\Psi)$ $\Rightarrow$ $(\text{---}) = \operatorname{div}(\bar{\Psi}\,\vec{\operatorname{grad}}\,\Psi - \Psi\,\vec{\operatorname{grad}}\,\bar{\Psi})$

~~grad(div)~~

$f\,\vec{\nabla}.\vec{A} = \vec{\nabla}(f\vec{A}) - \vec{\nabla}f.\vec{A}$

$+ \quad \vec{\nabla}\bar{\Psi}.\vec{\nabla}\Psi = \vec{\nabla}\Psi.\vec{\nabla}\bar{\Psi}$ = se simplifient

éq. conserv. densité proba $\Rightarrow$ $\frac{\partial|\Psi|^2}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\underbrace{\frac{\hbar}{2im}(\bar{\Psi}\vec{\nabla}\Psi - \Psi\vec{\nabla}\bar{\Psi})}_{\text{courant de densité de proba } \vec{J}}\right) = 0$

$$= \frac{\hbar}{2im}\, 2i\, \mathrm{Im}(\bar{\Psi}\vec{\nabla}\Psi) = \frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}(\bar{\Psi}\vec{\nabla}\Psi)$$

pour onde de de Broglie $\left(e^{i\left(\frac{-Et+\vec{p}\cdot\vec{x}}{\hbar}\right)}\right) \rightarrow \vec{J} = \frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}\left(\frac{i\vec{p}}{\hbar}|\Psi|^2\right)$

$$\vec{J} = |\Psi|^2\frac{\vec{p}}{m} = \rho\vec{v} \quad \text{avec } \rho = |\Psi|^2$$

les 2 sont reliés par TF

Inégalité de Heisenberg $\quad \Delta x\,\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ $\longrightarrow$ principe d'indétermination de Heisenberg (spatial)

indéterminations de position et impulsion

$\Delta x_i\,\Delta p_i \geq \frac{\hbar}{2}$

$\Delta x_i\,\Delta p_j \geq 0$ si $i \neq j$ axes ≠

d'où le cas pour onde plane d'impulsion fixe p $\therefore \Delta p = 0$ on avait onde ds tout l'espace ($\therefore$ indéterminée spatialement $\Delta x = +\infty$)

$\therefore \Delta x\,\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$ et $\Delta y\,\Delta p_x \geq 0$

si on considère paquet d'onde d'extension temporelle τ

$\therefore$ sa TF possède écart-type en fréq. $\Delta\omega$: $\tau \Delta\omega \geq \frac{1}{2}$

par De Broglie : Principe de Heisenberg temporel $\tau \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$

état stationn. a densité proba indép de t $\therefore$ $\tau = +\infty$ $\therefore$ $\Delta E = 0$

$\therefore$ les états station. sont les seuls états à avoir E parfaitement définie

---

$\because$ éq. Schröd. est difficile à résoudre $\therefore$ on utilise la prop. suivante :

toute solut° $\Psi(t,x)$ de éq° Schröd. peut se décomposer en Σ ∞ d'états d'E fixée appelés états stationn. à condition que le potentiel soit indép. du temps

Ces états $\varphi(x)$ vérifient l'éq. Schröd. indép. du temps : $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + V(x)\varphi = E\varphi$

Pour un spectre d'énergie discret $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ on résoud cette éq° pour chaque E_n et obtenir ensemble d'état station $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$\therefore$ par Comb. lin. de ces états on a Ψ $\Rightarrow$ $\Psi(t,x) = \sum_n \underbrace{c_n}_{\text{cste complexe}} \varphi_n(x)\, e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}}$

si E est continu sur une certaine gamme (on le note $E(a)$ avec a paramètre continu)

$$\therefore \quad \Psi(t,x) = \sum_n c_n \varphi_n(x)\, e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} + \int \underbrace{c(a)}_{\text{fct complexe}} \varphi_a(x)\, e^{-i\frac{E(a)t}{\hbar}}\, da$$

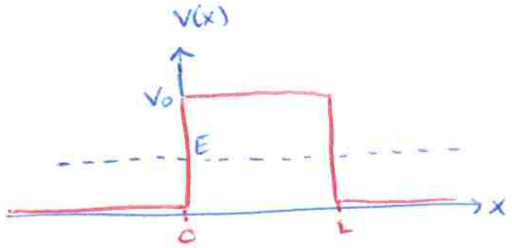
analogue avec corde Melde
$= \Sigma$ modes propres de ω_n fixées
la seule $\neq$ est qu'en Melde, E est tjr bien définie m̂ hors mode propre
alors que là E est définie juste en états station.
hors ces états : mesure de E donne valeur E_n avec proba $|c_n|^2$

Une des prédictions les + remarquables de la physique Quantique est la capacité pour 1 particule de traverser une barrière d' E_p > à son énergie mécanique ce qui est interdit par méca classique.

Cet effet est Effet tunnel

il est possible par la nature ondulatoire de la fct d'onde

Etude d'une barrière de potentiel



- $V = 0$ $x < 0$, $x > L$
- $V = V_0$ $0 < x < L$

barrière de long. L et hauteur V_0

et part. a énergie $E < V_0$ et arrive depuis $x = -\infty$
incidente

on modélise part. par paquet d'onde = Σ onde station.

∴ le problème est linéaire ∴ on se contente d'étudier le cas où l'onde incidente est un état station. d'énergie E

∴ on étudie chaque E séparément puis on Σ car Schröd est linéaire

éqⁿ Schröd indép de t pour 1 état station : $\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]\varphi = 0$

on pose : $K = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$ et $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ $[K] = [k] = m$

Zone 1 : $x < 0$: $V = 0$ $\Rightarrow$ $\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\varphi = 0$ $\Rightarrow$ $\varphi(x) = \underbrace{A_1 e^{ikx}}_{\text{onde incidente}} + \underbrace{B_1 e^{-ikx}}_{\text{réfléchie}}$

Zone 2 : $0 < x < L$: $V = L$ $\Rightarrow$ $\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)\varphi = 0$ $\Rightarrow$ $\varphi(x) = A_2 e^{Kx} + B_2 e^{-Kx}$

pas des ondes oscillantes mais expo (croiss / décroiss)

Zone 3 : m̂ que 1 : $\varphi(x) = A_3 e^{ikx} + \underbrace{B_3}_{=0} e^{-ikx}$

$= 0$ car pas d'onde (de source) qui vient de $+\infty$

continuité de φ $\begin{cases} x=0 & : \quad A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \\ x=L & : \quad A_2 e^{KL} + B_2 e^{-KL} = A_3 e^{ikL} \end{cases}$

$\therefore$ potentiel finie $\therefore$ discontinuité du potentiel fait la continuité de $\dfrac{d\varphi}{dx}$

continuité de φ' $\begin{cases} x=0 & : \quad ikA_1 - ikB_1 = KA_2 - KB_2 \\ x=L & : \quad KA_2 e^{KL} - KB_2 e^{-iKL} = ikA_3 e^{ikL} \end{cases}$

par $Z = \dfrac{K}{ik}$

$$A_1 = \frac{1}{2}\left[A_2(1+Z) + B_2(1-Z)\right]$$

$$B_1 = \frac{1}{2}\left[A_2(1-Z) + B_2(1+Z)\right]$$

$$\left(\begin{aligned} A_2 &= A_3 \exp((ik-K)L)\,\frac{1+Z}{2Z} \\ B_2 &= A_3 \exp((ik+K)L)\,\frac{-1+Z}{2Z} \end{aligned}\right)$$

$$\therefore \quad A_1 = -A_3 e^{ikL}\,\frac{e^{KL}(Z-1)^2 - e^{-KL}(Z+1)^2}{4Z}$$

$$B_1 = A_3 e^{ikL}\,\frac{(e^{KL} - e^{-KL})(Z^2-1)}{4Z}$$

par $e^{\pm KL} = \cosh(KL) \pm \sinh(KL)$

$$A_1 = A_3 e^{ikL}\left(\cosh(KL) - \sin(KL)\,\frac{Z^2+1}{2Z}\right)$$

$$B_1 = A_3 e^{ikL}\,\sinh(KL)\,\frac{Z^2-1}{2Z}$$

$$\therefore \left(\begin{aligned} A_1 &= A_3 e^{ikL}\left(\cosh(KL) - i\sinh(KL)\,\frac{k^2-K^2}{2kK}\right) \\ B_1 &= -iA_3 e^{ikL}\,\sinh(KL)\,\frac{k^2+K^2}{2kK} \end{aligned}\right)$$

on trouve tout en fct d'une cste A_3 car plus simple

m si celui ~~[illegible]~~ qui a + de sens physique est A_1 car c'est l'amplitude de l'onde incidente

- $x<0$ tout se passe comme si on avait 2 ondes qui se propagent tous les 2 avec le vect. d'onde k à directions opposées
  - onde incid.
  - onde réfléchie

- $x>L$ une onde transmise se propageant avec vect. d'onde k

- sous la barrière la proba est non-nulle de franchir la barrière !

définir coeff. réflexion et transmission en "probabilité" comme les rapports des courants de proba associés à chaque onde /!\

ne pas parler de ça si je présente pas le calcul de courant

$$R = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2} \qquad T = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2}$$

$$\therefore \quad R = \frac{\sinh^2(KL)\,(k^2+K^2)^2}{4k^2K^2\cosh^2(KL) + (k^2-K^2)^2\sinh^2(KL)}$$

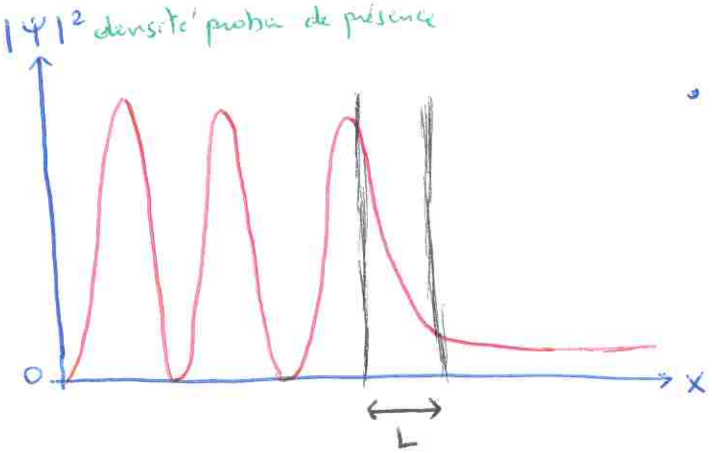
$$T = \frac{4k^2K^2}{4k^2K^2\cosh^2(KL) + (k^2-K^2)^2\sinh^2(KL)}$$

par $\cosh^2(KL) - \sinh^2(KL) = 1$ on enlève les $\cosh^2$ des dénom.

$$\left[\begin{aligned} R &= \frac{\sinh^2(KL)\,(k^2+K^2)^2}{4k^2K^2 + (k^2+K^2)^2\sinh^2(KL)} \\ T &= \frac{4k^2K^2}{4k^2K^2 + (k^2+K^2)^2\sinh^2(KL)} \end{aligned}\right]$$

$R+T=1$

$\therefore$ particule incid. est soit réfléchie soit transmise



- $kL = 4$
- $KL = 0{,}05$

$\Rightarrow T = 0{,}2$

- proba non nulle à droite de la barrière
 ∴ part. a la possibilité de traverser la barrière
- en amont de la barrière il y a interférence entre onde incid et réfléch et la part. peut exister en amont aussi

ici on a modélisé qu'1 onde monochromatique mais une description rigoureuse = paquet d'ondes

<u>Si $E > V_0$</u> : ∴ $K' = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}$ et on remplace K par iK'

par $\cosh(ix) = \cos(x)$ $\Rightarrow$ on aura des résonances de diffusion
$\sinh(ix) = i\sin(x)$

Où transmission est max ($T = 1$)
∴ $R = 0$ pas d'onde réfléchie

grâce à des interférences constructives internes $\leftarrow$ toute l'onde passe à travers la barrière

↓

c'est comme une cavité résonnante qui laisse passer une onde uniquement à certaines fréq.

ou comme lumière qui traverse une couche mince (à certaines λ, pas de réflexion et 100% transmission → résonance optique)

Voir Animations

Réécrivons T en faisant apparaître V_0 et E :

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0-E)} \sinh^2(KL)}$$

si $KL \gg 1$ $\Rightarrow$ approx. de barrière épaisse $\rightarrow \sinh \alpha \simeq \frac{1}{2} e^{\alpha}$

$\therefore$ $T \simeq \dfrac{16E(V_0-E)}{V_0^2} \, e^{-2KL}$

c'est l'atténuation de l'onde ds la barrière

largeur barrière

dépend hauteur barrière

$\therefore$ (+) barrière est épaisse ou haute

(−) la particule a de la chance de traverser

★ doubler L = multiplier l'atténuation par e^{-2KL}

et effet tunnel et quasi nul ..

Démonstration DL :

$$\sinh(KL) = \frac{e^{KL} - e^{-KL}}{2}$$

$$\sinh^2(KL) = (\quad)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2KL} - 2 + e^{-2KL}\right)$$

$2e^{+}e^{-}$

à $KL \gg 1$ $\therefore$ $e^{+KL} \gg e^{-KL}$ $\therefore$ $\sinh^2(KL) \simeq \frac{1}{4} e^{2KL}$

$$\therefore T \simeq \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{16E(V_0-E)} e^{2KL}}$$

et $\therefore$ $e^{2KL} \gg 1$

$\therefore$ on néglige le 1 du dénominateur

~~Alors~~ Dans la zone $V(x) = V_0 > E$, la fct d'onde décroît exponentiellement

$\varphi(x) \sim e^{-Kx} \longrightarrow e^{-\frac{x}{\delta}} \Rightarrow$ dist. caract. de pénétration

par $A_2 - B_2$

effet tunnel mieux pour part. les + légères

$$\delta = \frac{1}{K} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0-E)}}$$

+ δ est ↘ + la barrière est opaque

+ δ est ↗ + effet tunnel est probable

δ dépend de $\begin{cases} m \\ V_0 \\ E \end{cases}$

06 calculons T pour $\neq$ situations

à échelle atomique : longueurs $\sim 0{,}1$ nm $\Rightarrow L = 0{,}3$ nm

énergie ~ 1 eV $\Rightarrow V_0 = 2E = 4$ eV

pour e^- incident $\rightarrow T = 5 \times 10^{-2}$ $\Rightarrow$ application = microscope à effet tunnel

si $V_0 = 2E = 40$ eV $\rightarrow T = 4 \times 10^{-6}$

pour proton incident $\rightarrow T = 5 \times 10^{-81}$ à $V_0 = 2E = 4$ eV

$\Downarrow$

phénomène observable = radioactivité α

homme ($m = 70$ kg)

($v = 1$ m/s)

↳ barrière

$L = 10$ cm

~~V_0 E = 2m~~

$\Rightarrow$ prenons que E gravitationnelle

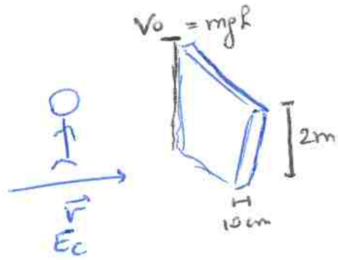
$\therefore V_0 = mgh = 1{,}4$ kJ

2m

$E = E_c = 35$ J

$\therefore K = 4{,}1 \times 10^{36}$ m

$T = 10^{-4 \times 10^{35}}$



Totalement impossible

$\therefore$ effet tunnel est un effet quantique

Radioactivité α

= processus par lequel noyau X émet noyau hélium et devient noyau Y

$${}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He$$

particule α → elle est accessible expérimentalement

son énergie E varie selon le noyau père ${}^{A}_{Z}X$

1911 Geiger et Nuttal → loi phénoménologique qui relie E à demi-vie $t_{1/2}$ du noyau père

$$\ln(t_{1/2}) = a + b\,\frac{Z_{fils}}{\sqrt{E}}$$

Z_{fils} → nb proton du noyau fils

$t_{1/2}$: où population est divisée par 2

a, b : cste peuvent varier un peu selon Z_{fils}

E : E_c totale (fils + α) après désintégration (car avant, père n'a pas d'E_c car on est ds réf. centre de masse)

1928 Gamow l'a trouvé ↗ par MQ

<u>mécanisme</u> supposons particule α est formée ds noyau par procédés complexes.

Tant qu'elle est ds noyau ∴ subit interaction forte qui la confine.

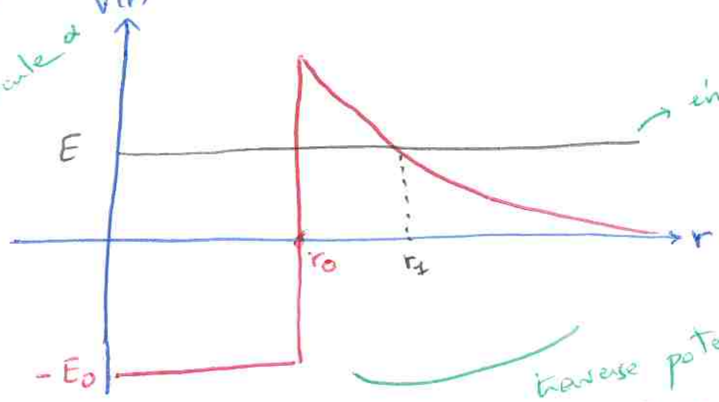
Quand elle s'éloigne, interact° forte disparait (car est à courte portée)

et α ressent le potentiel coulombien répulsif (à portée ∞)

généré par les protons du noyau

mais en réalité il y a effet d'écrantage

modélisation du potentiel vu par la particule α



partie confinée du potentiel

traverse potentiel coulombien par effet tunnel

plus proba de transition ↗

plus noyau père émet et a donc une ½ vie faible

Nb α émis / t ? proba de traverser la barrière par unité $t = \frac{1}{\tau}$ → temps de vie moyen d'un noyau avant désintégration
(taux de désintégration)

si on a N part. ∴ nb part. α moyen émis en $dt = \frac{N\,dt}{\tau}$

∴ $\frac{1}{\tau}$ des noyaux se désintègrent en 1 sec

$$\therefore \quad dN = -\frac{N\,dt}{\tau} \Rightarrow N(t) = N(0)\,e^{-\frac{t}{\tau}}$$

La ½ vie est reliée à τ par : $t_{1/2} = \tau \ln(2)$

$$N(t) = \frac{N(0)}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\frac{t_{1/2}}{\tau}} \Rightarrow \ln 2 = \frac{t_{1/2}}{\tau}$$

A chaque rebond contre la barrière de potentiel (barrière nucléaire) une particule α a une proba T_α de s'échapper par effet tunnel.

Par raisonnement semi-classique, α rebondit à une fréq. $f = \frac{1}{\Delta t}$ avec Δt temps moyen entre 2 chocs sur la paroi intérieure du noyau ≡ un aller-retour dans le puits nucléaire (passer d'un bout à l'autre du noyau)

et ∵ à chaque choc, proba $= T_\alpha$ ⇒ proba par unité de temps de sortir ⇒ $\frac{1}{\tau} = \frac{T_\alpha}{\Delta t}$

Taux de désintégration (cste radioactive)

pour part. non-relativiste : $\Delta t = \frac{\overbrace{2r_0}^{\text{diamètre noyau}}}{v}$

$$\Delta t = \frac{2\,r_0}{\sqrt{\frac{2E}{m}}} \Rightarrow \boxed{t_{1/2} = \frac{\sqrt{2m}\;r_0}{T_\alpha\,\sqrt{E}}}$$

- plus E est grande → α rebondit + souvent → Δt diminue → ½ vie courte
- plus proba tunnel T_α ↗ → + chance de sortir → désintégration rapide
- si barrière + haute ou + large → T_α diminue → $t_{1/2}$ augmente

on laisse tomber le ln2 par approx car là on s'intéresse à des OG pas de valeur précise

Le vrai calcul de $t_{1/2}$ par T_α de la barrière coulombienne

en prenant : $r < r_0 \quad V(r) = -E_0$

$r > r_0 \quad V(r) = \frac{K}{r}$ coulombien $\left(K = \frac{e^2 Z_\alpha Z_{fils}}{4\pi\varepsilon_0} \right)$ ($Z_\alpha = 2$)

ici le potentiel n'est pas uniforme

∴ on la divise par une succession de barrières d'épaisseur dr

et hauteur = cste (mais ↘ de barrière à une autre)

suffisamment petite pour avoir hauteur cste mais suffisamment grande pour faire approx barrière épaisse

chacune a $T(r) = \frac{16E(V(r)-E)}{V(r)^2} e^{-2K(r)dr}$

$$\therefore \ln(T) = -2Kdr + \ln\left(\frac{16E(V-E)}{V^2}\right)$$

$$\underbrace{\sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar^2}}}_{} \gg \underbrace{}_{}$$

$m \to m_\alpha$

$\therefore \ln T(r) \simeq -2Kdr \quad \Rightarrow \quad \ln T_\alpha = \sum \ln(T(r))$

total = produit des $T(r)$ ∴ $\sum \ln(T_r)$

$$\ln T_\alpha \simeq -2\sum K dr$$

$$= -2\int_{r_0}^{r_1} K\,dr$$

r_1 → pt de sortie de la barrière

K → dépend de $V(r)$ ∴ de r

$$\Rightarrow T_\alpha = e^{-2\int_{r_0}^{r_1} K dr}$$

→ le problème ici est que dr n'est pas infinitésimal

on continue et on trouve

$$T_\alpha = f(E) \exp\left(\frac{4\sqrt{2mkr_0}}{\hbar}\right) \exp\left(-\pi \frac{\sqrt{2m}\,e^2 Z_\alpha}{4\varepsilon_0\hbar} \frac{Z_{fils}}{\sqrt{E}}\right)$$

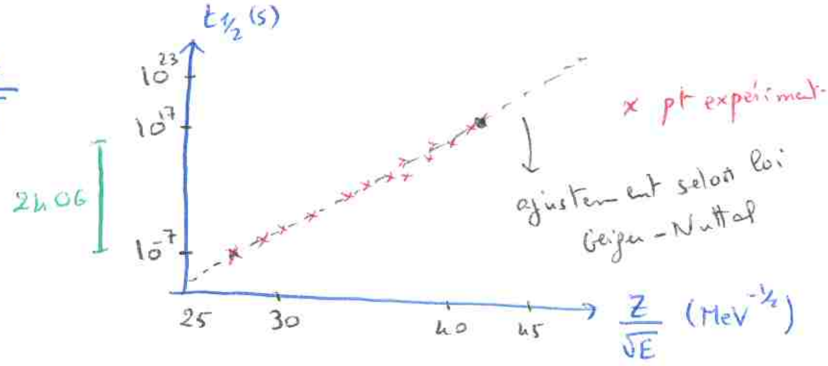
fct quelconque dont formule est proche de éq° $T(r)$

$$\Rightarrow t_{1/2} = \frac{\sqrt{2m}\,r_0}{\sqrt{E}\,f(E)} \exp\left(-\frac{4\sqrt{2mkr_0}}{\hbar}\right) \exp\left(\pi \frac{\sqrt{2m}\,e^2 Z_\alpha}{4\varepsilon_0\hbar} \frac{Z_{fils}}{\sqrt{E}}\right)$$

∴ en log : $\ln(t_{1/2}) = a + \frac{bZ}{\sqrt{E}}$ on retrouve Geiger-Nuttal on trace $t_{1/2}$ en fct de $\frac{Z}{\sqrt{E}}$

on trouve $b = (4{,}0 \pm 0{,}1)$ MeV$^{1/2}$

$b_{théo} = 3{,}3$ MeV$^{1/2}$



faut améliorer la modélisation car là c'est un modèle simple

formule Viola - Seaborg en 1966 qui prend en compte la dépendance de a et b en la charge du noyau émetteur
et prend en compte les couches du noyau atomique