Ondes progressives, ondes stationnaires
Niveau : CPGE 2

June 7, 2025

Rajouter des exemples concrets (corde de guitare,...)
Expérience : Corde de Melde/ Câble coaxial (cavité Fabry-Pérot)
Livre :

- Physique PC/PC* Tout-en-un, Dunod, 2022
- Physique PCSI Tout-en-un, Dunod, 2016
- Acoustique des instruments de musique, A. Chaigne, J. Kergomard

1 Introduction

2 Établissement de l'équation d'onde

2.1 Tension d'une corde

Soit un élément de corde MM' de masse linéique µ au repos entre x et x+dx.

Bilan des forces :

- Poids qui est négligé ici
- Tension de la portion de corde située à droite de M' : $\overrightarrow{T}(x+dx,t)$
- Tension de la portion de corde située à gauche de M : $\overrightarrow{T}(x,t)$

Application du PFD à l'élément de corde en projetant sur Oy:
$\mu dx \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = (T\sin\alpha)(x+dx,t) - (T\sin\alpha)(x,t)$

Au premier ordre en $\dfrac{\partial y}{\partial x}$: $\sin\alpha(x,t) \simeq \alpha(x,t) = \dfrac{\partial y}{\partial x}$

On considère que la tension s'exprime comme une perturbation du module de la tension à l'équilibre : $T(x,t) = T_0 + T_1(x,t)$ où $\mid T_1(x,t) \mid \ll T_0$

Or $\dfrac{\mid T_1(x,t) \mid}{T_0}$ est au moins du même ordre que $\dfrac{\partial y}{\partial x}$. Donc on peut écrire : $(T\sin\alpha)(x,t) \simeq (T\alpha)(x,t) \simeq (T_0\alpha)(x,t)$

Ainsi l'équation différentielle en y devient :
$\mu dx \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = (T_0\alpha)(x+dx,t) - (T_0\alpha)(x,t)$
$\mu dx \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = T_0 \dfrac{\partial \alpha}{\partial x}(x,t)dx$
$\mu \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = T_0 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t)$
$\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t)$ où $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$

2.2 Généralisation et propriétés de l'équation d'onde

3 Solutions de l'équation d'onde

3.1 Ondes progressives

Solution générale de l'équation d'onde unidimensionelle : $y(x,t) = f(t-\frac{x}{c})+g(t+\frac{x}{c})$ avec $f(t-\frac{x}{c})$ correspondant à une onde se propageant dans la direction Ox positif et $g(t+\frac{x}{c})$ correspondant à une onde se propageant dans la direction Ox négatif.

Si on cherche des solutions sous forme d'ondes progressives sinusoïdales aussi appelées ondes progressives harmoniques, elles sont sous la forme : $y(x,t) = y_0\cos(\omega t - kx + \phi_0)$

Comme une onde progressive harmonique est solution de l'équation d'onde, on peut l'injecter pour récupérer la relation suivante entre k et ω, qui est appelé relation de dispersion : $\omega^2 = k^2c^2$

Les ondes progressives harmoniques forment une base de solutions de l'équation de d'Alembert mais elles n'ont pas de signification physique individuellement car elles ont une extension spatiale et temporelle infinie.

Un signal physique correspond à une superposition d'ondes progressives harmoniques.

Parler de vitesse de phase et de vitesse de groupe

3.2 Ondes stationnaires

On définit une onde stationnaire une forme de solution de l'équation d'onde où les dépendances spatiales et temporelles sont séparées, c'est-à-dire sous la forme $y(x,t) = f(x)g(t)$

En injectant cette solution dans l'équation de d'Alembert, on obtient : $f(x)g''(t) = c^2g(t)f''(x)$

$\dfrac{g''(t)}{g(t)} = c^2\dfrac{f''(x)}{f(x)} = C$ où C est une constante car chaque membre de l'équation ne dépend que d'une variable indépendante.

On ramène donc la résolution du problème à la résolution de 2 équations différentielles d'ordre 2.

$\dfrac{g''(t)}{g(t)} = C$ $c^2\dfrac{f''(x)}{f(x)} = C$

On peut discuter des solutions de g(t) en fonction du signe de C. Si C est positif, $g(t) = A\exp^{\sqrt{C}t} + B\exp^{-\sqrt{C}t}$. Quand t tend vers l'infini, l'exponentielle positive tend vers l'infini ce qui n'a pas de réalité physique. L'exponentielle négative tend vers zéro ce qui correspond à un régime transitoire qui ne nous intéresse pas ici. Si C=0, le problème est similaire. Donc on suppose que C est négatif et on pose $C = -\omega^2$. Ainsi, $g(t) = A\cos(\omega t + \phi_0)$

Par conséquent, en posant $k = \frac{\omega}{c}$, on obtient que $f(x) = B\cos(kx+\psi_0)$ ou $f(x) = B_1\cos(kx) + B_2\sin(kx)$

Remarque : En prenant comme solution de l'équation d'onde $y(x,t) = y_0\cos(\omega t - kx + \phi_0) + y_0\cos(\omega t + kx + \phi_0)$ la somme de deux OPH identiques se propageant dans des directions opposés, on obtient une onde stationnaire. En effet, la solution précédente peut se réécrire sous la forme :

$y(x,t) = 2y_0\cos(\omega t + \phi_0)\cos(kx)$

Cela signifie que les ondes stationnaires forment aussi une base de solutions de l'équation d'onde.

3.3 Application à la corde de Melde

Conditions aux limites : $y(0,t) = 0$ et $y(L,t) = 0$

En cherchant une solution sous la forme d'une onde stationnaire, on a : $y(x,t) = \cos(\omega t + \phi_0)(A\cos(kx) + B\sin(kx))$

$y(0,t) = A\cos(\omega t + \phi_0) = 0 \Leftrightarrow A = 0$

$y(L,t) = B\cos(\omega t + \phi_0)\sin(kL) = 0 \Leftrightarrow kL = n\pi$ avec n un entier positif pour avoir une solution non nulle.

Ainsi les solutions impliquent que le vecteur d'onde et donc la pulsation ne peuvent prendre que des valeurs discrètes : $k_n = n\frac{\pi}{L}$ et $\omega_n = n\frac{\pi c}{L}$

Fréquence fondamentale : $\nu_0 = \frac{c}{2L}$ Longueurs d'onde associées :

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

Graphe représentant les modes propres avec le vocabulaire de ventres et de noeuds.

Expérience de la corde de Melde :
Conditions aux limites : $y(0,t) = 0$ et $y(L,t) = y_0 \cos(\omega_0 t)$
Conditions initiales : $y(x,0) = a(x)$ et $\dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0) = b(x)$

3.4 Absorption et dispersion

Expérience quantitative

Objectif de l'expérience

Mesure de la vitesse de groupe dans un câble coaxial

Matériels

- Câble coaxial de 100m
- GBF
- Résistance 1k Ohm à adapter sur un câble coaxial
- Oscilloscope

Protocole

Réalisation d'une wobbulation (de 100kHz à 12MHz sur 2s). Mesure du temps sur l'oscilloscope de chaque fréquence de résonance. Tracer les fréquences de résonances en fonction de n (l'ordre de résonance). Ajustement linéaire pour extraire la vitesse de groupe. Peut être comparé à la vitesse de propagation d'une onde progressive

Précautions expérimentales