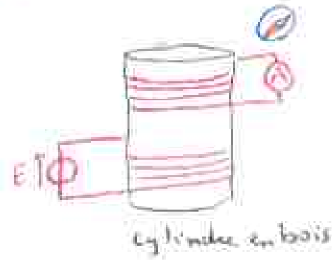
Induction

niveau ~~PCSI~~ 2^e CPGE — Dunod: PCSI / PSI

Introduction

en 1831 Faraday par son expérience
- bobine lié à (A) + boussole
- bobine lié à pile + interrupteur, produit $\vec{B}$



en allumant interrupteur boussole ds 1 sens puis en fermant ds autre sens

il refait en ajoutant piles et cylindre en fer doux

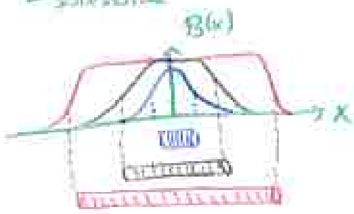
il déduit que variation du courant du 1er circuit qui est à l'origine du courant détecté ds le 2^e

Joseph Henry avait fait ce expérience 1 an + tôt mais n'avait pas publié ses résultats

★ à l'intérieur d'un solénoïde, $\vec{B}$ ~ uniforme (loin des bords) $= \mu_0 n I \vec{u_z}$, $n = \dfrac{N_{spire}}{L_{solénoïde}}$

si courant variable $i(t)$ ⇒ $\vec{B}(t)$ pas stationnaire

+ bobine longue + effet de bord sont négligeable



circuit fixe + indéformable, $\vec{B}$ variable ⇒ Neumann → observateur lié au circuit

circuit mobile ou déformable, $\vec{B}$ station. ⇒ Lorentz → observateur lié à la src $\vec{B}$

Par éq° Maxwell on étudie ces 2 cas et on verra applications

Induction de Neumann

circuit fixe et indéformable, plongé ds $\vec{B}$ ext variable ds t
peut être le siège de courants induits

cadre

ARQS magnétique :

- négliger propag. ondes devant variation champ : $L \ll \tau c$

  pour distances d'ordre $L = 1\,m$ on considère des
  fréq. allant jusqu'à 100 MHz au max

  on néglige le retard de propagation des champs EM
  si $L \ll \lambda \rightarrow \frac{c}{f}$
  $\therefore$ à $L = 1\,m \rightarrow f \sim 100\,MHz \rightarrow \lambda = 3\,m$

- on suppose $|\vec{j}| \gg \rho c$ c'est la partie magnétique de ARQS magnét.

  c'est ce qui distingue ARQS magn. de ARQS électrique
  $\Rightarrow$ courant électrique + important que densité charge
  (avec $c = v_{lumière}$)

  $\therefore$ négliger contributions de charges et se concentrer
  sur effets magnétiques inductifs

- on suppose réf galiléen et conducteur fixe dans ce réf.
  $\therefore$ non relativiste

  $\therefore \vec{v} = \vec{0}$ $\therefore \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}$
  $\therefore \vec{F}_{Lorentz\ mag} = \vec{0}$ sur e^- conduction
  $q\vec{E} \neq \vec{0}$
  $\exists$ courant
  $\therefore$ il y a $\vec{E}$
  mais $\vec{F}_{Laplace}$ s'exerce sur charges $\neq 0$ $(\vec{j} \wedge \vec{B})$

conséquences :

- électroneutralité des conducteurs (pas d'accumulation de charges)
  $\rho \simeq 0$

- éq. conserv. charge devient : $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ → courant conservé localement (pas accumulation ni fuite)
  car $\rho \simeq cste = 0$ ($\frac{\partial \rho}{\partial t}$ varie peu)
  $\Rightarrow$ cela reflète l'incompressibilité du courant de conduction électroneutre
  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$
  $\therefore$ ce qui entre = ce qui sort etc sans accumulation
  (comme fluide incompressible)

on utilise loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ avec $\sigma = 6 \times 10^7\ S/m$ pour Cu

Modélisation

en ARQS : $\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\quad \vec{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\quad \vec{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ $\quad \text{div}\,\vec{B} = 0$

Max-Flux $\therefore \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \therefore \exists\, \vec{A}$ potentiel vecteur tq $\vec{B} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}$

$\text{div}\,\vec{B} = 0$ $\qquad\qquad \vec{B} = \vec{\text{rot}}\,\vec{A}$

par $\text{div}(\vec{\text{rot}}) = 0$

Max-Farad $\underbrace{\vec{\nabla}\wedge\vec{E}}_{\vec{\text{rot}}\,\vec{E}} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \longrightarrow \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = \vec{\nabla}\wedge -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

$\rightarrow \vec{\nabla}\wedge\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$

$\therefore \vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}}) = \vec{0} \therefore \vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

terme statique $\qquad$ variation $\vec{B}$ et $\vec{E}$

champ électromoteur de Neumann $\quad \vec{E_m} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

C'est lui qui est responsable de l'induction

$\therefore \vec{j} = \sigma_0 \vec{E} = \sigma_0\left(-\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$

★ le cas général : $\vec{j} = \sigma_0(\vec{E} + \underline{\vec{v}\wedge\vec{B}})$ qd conducteur bouge à vitesse $\vec{v}$ ds champ $\vec{B}$

force électromotrice d'origine mécanique présente ds rail mobile par ex

C'est un terme de Hall qu'on déduit d'un modèle de Drude

on cherche lien entre courant passant à travers conducteur et tension aux bornes

$\therefore \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 \therefore \vec{j}$ uniforme ds conducteur filiforme

$\therefore$ ne dépend pas de t et $i_{A\to B} = j\,S$

Sur morceau conducteur $\quad \underbrace{\int_A^B \vec{j}\cdot\vec{dl}}_{i_{A\to B}\frac{L}{S}} = \underbrace{-\sigma_0\int_A^B \vec{\nabla}V\,\vec{dl}}_{\sigma_0(V_A - V_B)} - \sigma_0\int_A^B \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\,\vec{dl}$

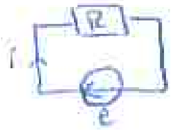
on définit : $R_{AB} = \frac{L}{\sigma_0 S}$ $\qquad$ $e_{AB} = \int_A^B -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\, d\vec{l}$

force électromotrice de Neumann

$\Rightarrow$ $V_A - V_B = R_{AB}\, i_{A\to B} - e_{AB}$

* on doit orienter e et i ds un sens pour que $d\vec{S}\, d\vec{l}$ = élément vol. > 0

si on ferme circuit



$e = Ri$

car $V_A = V_B$

en électrostatique classique, $\vec{E}$ provient de charges $\rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} V$

= champ conservatif

En induction $\vec{E}$ provient de la variation de $\vec{B}$ par $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

et ce champ n'est pas conservatif

en général force électromotrice = circulation champ électrique total du circuit

$$\mathcal{E} = \oint_\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

en électrostat. $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

en induction $\neq 0$ $\Rightarrow$ fem agit comme "tension source" mais sans pile

$\downarrow$

car $= -\frac{d\Phi_B}{dt}$

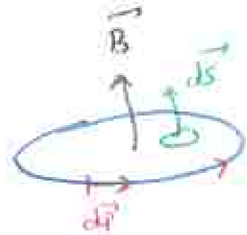
* champ conservatif
  - $\rightarrow$ circulation long chemin fermé $= 0$ $\quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$
  - $\rightarrow$ dérive d'un potentiel scalaire $\quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V$ $\quad$ tension dépend uniquement du départ et arrivée pas chemin
  - $\rightarrow$ son rotationnel est nul $\quad \vec{rot}\, \vec{E} = \vec{0}$

Donc on peut avoir tension ds circuit fermé sans pile uniquement par ce champ non conservatif

$\therefore$ on a utilisé Maxwell pour réécrire loi d'Ohm à l'échelle conducteur (forme intégrale). Si on ferme conducteur, circulation $\vec{E}$ pas conservative

$\vec{E}$ pas conservatif du à un terme provenant des variations temporelle de $\vec{B}$

$\vec{A}$ pas très pratique : on relie la force électromotrice au flux $\vec{B}$



Loi de Lenz soit conduct. filiforme fermé immobile :

par Thm Stokes : $e = \oint \vec{E}_m \cdot \vec{dl}$

$= - \oint \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \vec{dl}$

$= - \frac{\partial}{\partial t} \iint_\Sigma \vec{B} \cdot \vec{dS} = - \frac{\partial}{\partial t} \Phi_B \longrightarrow$ Flux du champ $\vec{B}$

Lenz : les phénomènes d'induction ont tendance, par leurs effets, à s'opposer aux causes qui leur ont donné naissance

$\Rightarrow$ une loi de modération

∴ ds l'expérience de départ, flux ↗ qd on approche aimant

∴ > 0 alors force électromotrice < 0 ∴ $i < 0$

∴ ce i induit $\vec{B}_{ind}$ qui s'oppose à $\vec{B}$ aimant