

Cinématique relativiste

2 théories très robustes à la fin du XIX^{ème} siècle.

- mécanique classique qui repose sur le principe de relativité, avec la notion de réf. inertiels qui sont équivalents
- électromagnétisme qui repose sur les équations de Maxwell.

Tension qui apparaît: la vitesse c est la vitesse des ondes em dans un réf. inertiel...

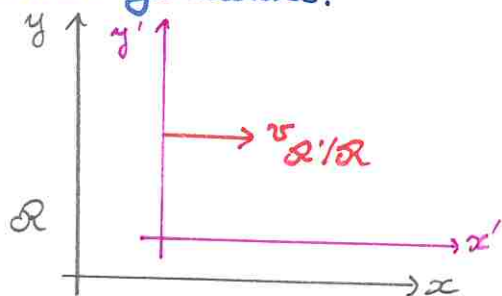
2

I/ D'une tension à une invalidation de la mécanique classique

1. Incompatibilité entre mécanique et électromagnétisme

équation pour une onde em: $(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2) \vec{E} = \vec{0}$. dans \mathcal{R} .

Relativité galiléenne:



on a $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$ (ici $x' = x - vt$
 et $t' = t$ $y' = y$
 $z' = z$)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial t'} - v \frac{\partial f}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t'^2} - 2v \frac{\partial^2 f}{\partial t' \partial x'} + v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}$$

(et les dérivées spatiales sont inchangées)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial x'}{\partial x}}_{=1} \frac{\partial f}{\partial x'} + \underbrace{\frac{\partial t'}{\partial x}}_0 \frac{\partial f}{\partial t'}$$

Donc, l'équation devient

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t'^2} - 2v \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t' \partial x'} + v^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x'^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) \vec{E} = \vec{0}.$$

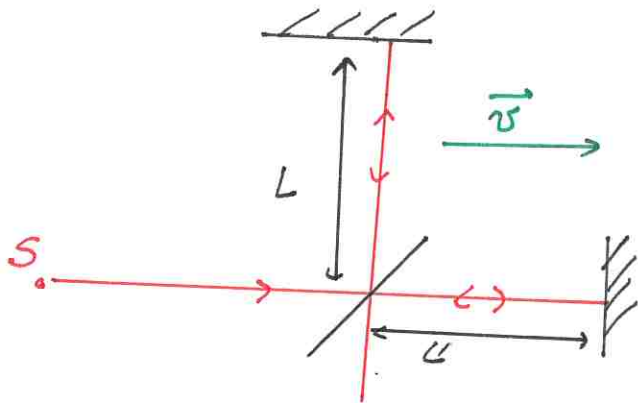
C'est différent!

Il y a un problème. Résolution: il existe un réf. privilégié, appelé réf. absolue et qui est le support des ondes em.

2. L'expérience de Michelson et Morley

♣ Mesurer le vent d'éther (vitesse de la Terre par rapport à l'éther) grâce à un interféromètre de Michelson.

on va supposer l'existence de l'éther et voir les conséquences.



réglé en lame d'air ~~au contact~~
~~optique~~.

que se passe-t-il lorsqu'il a une vitesse?

On se place dans \mathcal{R} de l'éther: l'interféromètre a une vitesse v .

10

Branche // diagramme

temps ~~distance~~ à parcourir: $\frac{L' + v \Delta t_A}{c} = \Delta t_A''$. aller $\Delta t_A = \frac{L'}{c(1 - \frac{v}{c})} = \frac{L'}{c - v}$

$\frac{L' - v \Delta t_R}{c} = \Delta t_R''$ retour $\Delta t_R = \frac{L'}{c + v}$.

Donc $\Delta t_{//} = \Delta t_A'' + \Delta t_R'' = \frac{L'}{c - v} + \frac{L'}{c + v} = \frac{2L'}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

12

Branche | diagramme

même raisonnement.

$$\Delta t_A = \frac{\sqrt{L^2 + (v \Delta t_A)^2}}{c} \Rightarrow \Delta t_{\perp} = \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Delta t_R = \Delta t_A$$

Différence de temps $T_{//} - T_{\perp} = \frac{2L}{c} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right\}$

($L = L'$)

$$\delta = c(T_{//} - T_{\perp}) \approx 2L \left(1 + \frac{v^2}{c^2} - 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) = \boxed{L \frac{v^2}{c^2}}$$

18

(2)

$$\Delta p = 2 \frac{\delta}{\lambda} \approx \frac{2L}{\lambda} \frac{v^2}{c^2} \quad \text{si on retourne de } 90^\circ \text{ l'appareil.}$$

ODG: réf. de l'éther solidaire au système solaire:

$$v_{\oplus} \approx 30 \text{ km/s.} \quad \frac{v_{\oplus}}{c} \approx 10^{-4} \quad \text{donc } \Delta p \approx 0,04.$$

$$L \approx 1 \text{ m.} \quad \lambda \approx 500 \text{ nm.}$$

Discuter les résultats.

"sauver les phénomènes": entraînement de l'éther?

autre possibilité: $v=0 \dots$

20

II / Fondements de la relativité restreinte

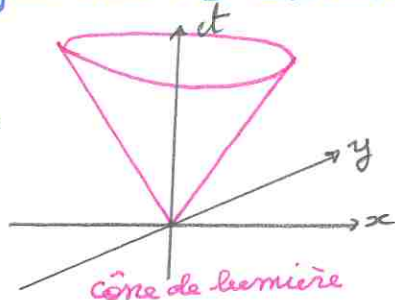
1. Postulats

① toutes les lois de la physique, en part. l'électromagnétisme, sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels

② la lumière se déplace à c dans tous les réf.

③ est compris dans ① car les éq. de Maxwell imposent ②.

Conséquence:



propagation sphérique:
 $c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$

Dans un autre réf., on doit AUSSI vérifier $c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0$ si la relativité fonctionne.

De plus, il faut une relation linéaire par homogénéité de l'espace-temps.
 Quelle transf. conviendrait?

↳ il faut une matrice

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad 23$$

2. Transformations de Lorentz

Les transformations conviennent!

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta & 0 & 0 \\ -\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

26

do est
 $= (cdt')^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2$ est la pseudo-norme du quadri-vecteur

important.

métrique

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Démonstration

on différencie.

$$\begin{cases} c dt' = \gamma (c dt - \beta dx) \\ dx' = \gamma (dx - \beta c dt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \end{cases}$$

$$ds'^2 = c^2 (dt')^2 - (dx')^2 - (dy')^2 - (dz')^2$$

$$= \gamma^2 (c dt - \beta dx)^2 - \gamma^2 (dx - \beta c dt)^2 - dy^2 - dz^2$$

$$= \gamma^2 c^2 (dt)^2 + \gamma^2 \beta^2 dx^2 - 2\gamma^2 c \beta dt dx$$

$$- \gamma^2 dx^2 + \beta^2 c^2 \gamma^2 dt^2 + 2\gamma^2 \beta c dt dx - dy^2 - dz^2$$

$$= c^2 dt^2 (\gamma^2 (1 - \beta^2)) - dx^2 \gamma^2 (1 - \beta^2) - dy^2 - dz^2$$

$$= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Cas particulier Le temps propre est tel que $ds^2 = c^2 d\tau^2$. (l'objet est alors immobile dans son propre référentiel.)

→ τ est un invariant de Lorentz car c et s le sont.

3. Preuve expérimentale de la relativité restreinte

muons (fait par Bruno Rossi de ha contribuito alla fondazione della scuola fiorentina dei raggi cosmici)

production (dine).

$$\rightarrow N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$$

avec $\tau = 2.2 \mu s$ temps de vie moyen.

28

Le libre parcours moyen (s'ils vont presque à c) et

$$l = ct \approx 660 \text{ m}$$

Mais on en mesure un flux important à la surface de la Terre.

(surtout, entre 2 hauteurs $\Delta h = \Delta t c$, on n'a pas un rapport

$$\frac{N_{\text{bas}}}{N_{\text{haut}}} = e^{-\Delta t/\tau} \quad \left(\begin{array}{l} 1916 \text{ m} - 4 \text{ m.} \\ \Delta t \approx 6,38 \mu\text{s.} \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{l} \text{donne } N_{\text{bas}} = 31 \\ \text{mes: } 4-12 \end{array} \right)$$

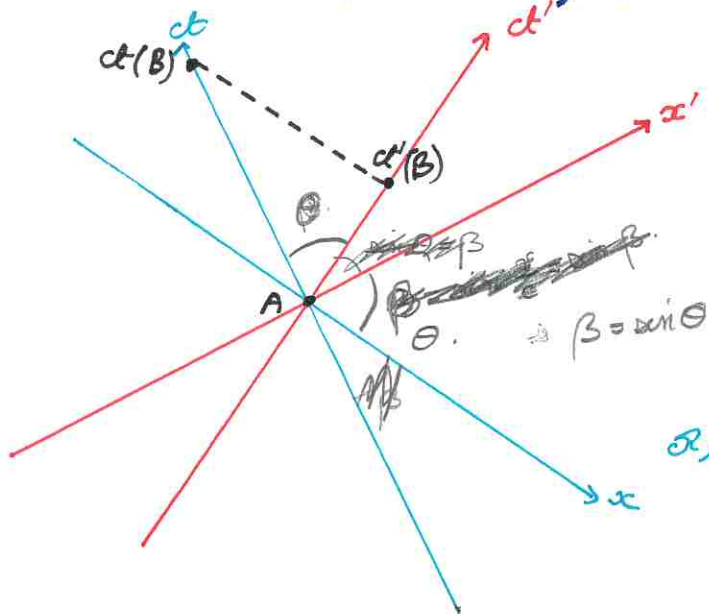
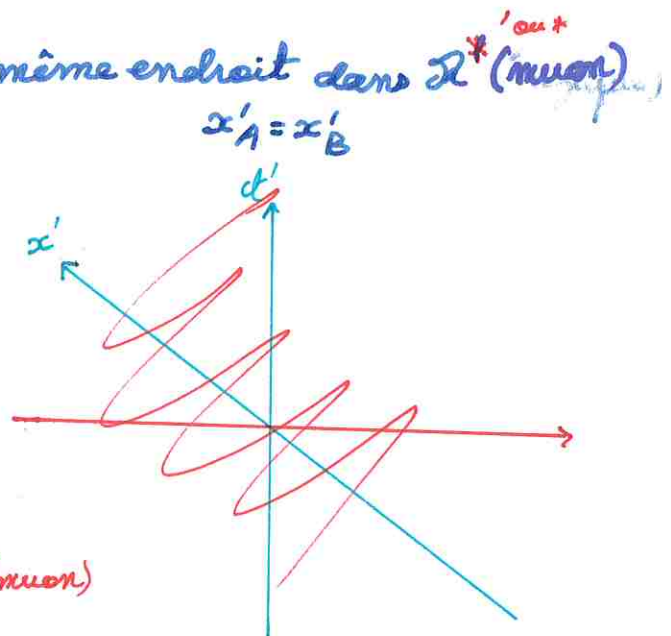
29

Comment expliquer? Dans la réf. terrestre, il y a dilatation des durées.

en effet, si 2 événements se produisent au même endroit dans \mathcal{R}' (muon) et séparés par $\Delta t' = t'_A - t'_B$, on a:

$$\begin{cases} ct_A = \gamma(ct'_A + \beta x'_A) \\ ct_B = \gamma(ct'_B + \beta x'_B) \end{cases}$$

$$c\Delta t = \gamma(c\Delta t' + \beta(x'_A - x'_B)) = \gamma c\Delta t'$$



B. $x'_A = x'_B$

$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

33

dilatation du temps dans la réf. où les événements se produisent au même endroit. le temps est le + court dans la réf. propre

Application: pour nous le muon,

le vie et le mort sont séparés de τ , et on se place dans la réf. terrestre

$$\text{dans la réf. du muon: } N(t') = N_0 e^{-t'/\tau} \Rightarrow N(t) = N_0 e^{-t/\gamma\tau}$$

Pout se passe comme si τ augmentait.

36

5

Pour la même unité de temps, on mesure

$$\frac{N_{\text{bas}}}{N_{\text{haut}}} = \frac{412}{568} = e^{-\Delta t / \gamma \tau} \quad \Rightarrow \text{on trouve alors } \gamma = 9$$

↑ Frisch & Smith

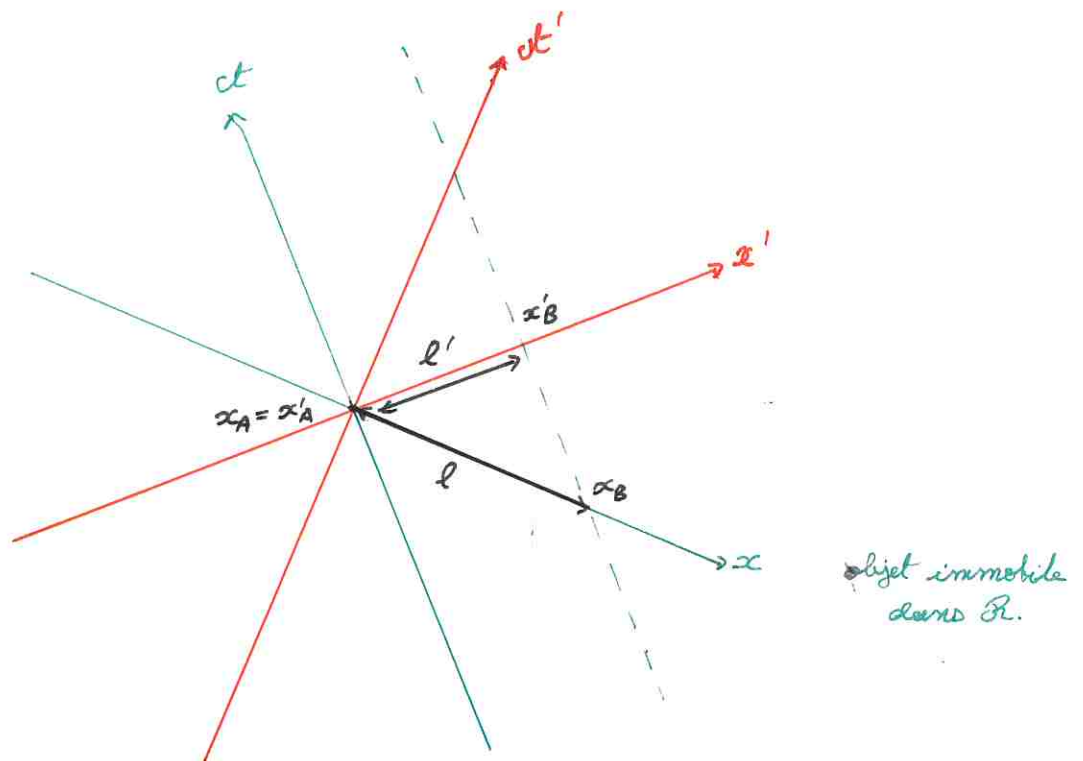
$$\text{et } \beta = 0,995$$

38

Conclusion

Il y a aussi eu une expérience pour tester directement le décalage des horloges (cf. diaporama).

La relativité restreinte est restreinte aux référentiels inertiels... 40



$$x_B = \gamma(x'_B + \beta ct'_B)$$

$$x_A = \gamma(x'_A + \beta ct'_A)$$

$$t'_A = t'_B \text{ (on mesure en même temps dans } R')$$

$$\Rightarrow x_B - x_A = \gamma(x'_B - x'_A)$$

$$\Delta x = \gamma \Delta x'$$

donc $\Delta x' < \Delta x$: plus grand dans le référentiel propre.

Préparation à l'Agrégation Abrégé de Relativité Restreinte

Centre de Montrouge – Année Universitaire 2024–2025

Intervenant : L. Le Guillou (Sorbonne Université / LPNHE)

1. De Galilée (*Galileo Galilei*, 1564–1642) à Einstein (1879-1955)

Le principe de relativité. Les lois de la physique sont invariantes par changement de référentiel galiléen (ou inertiel). Par exemple, le principe fondamental de la dynamique s'écrit sous une forme invariante dans deux référentiels galiléens quelconques \mathcal{R} et \mathcal{R}' :

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a} \quad (\mathcal{R}) \quad \text{et} \quad \mathbf{F}' = m \mathbf{a}' \quad (\mathcal{R}')$$

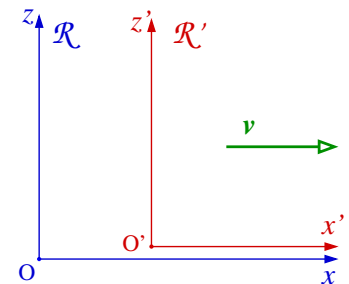
Changement de référentiel galiléen : transformations spéciales. En mécanique classique, le passage d'un référentiel galiléen \mathcal{R} à un autre référentiel galiléen \mathcal{R}' s'effectue par la transformation suivante (dite de Galilée) :

$$\begin{cases} x' = x - vt' \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \text{et réciproquement} \quad \begin{cases} x = x' + vt' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

On se place ici dans le cas particulier où les axes des deux repères sont parallèles, et où les axes (Ox) et $(O'x')$ sont choisis parallèlement à la vitesse relative $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$. On suppose aussi que $t = t'$ (temps universel) et que $t = t' = 0$ quand les origines O et O' se confondent.

Si on appelle \mathbf{u} (respectivement \mathbf{u}') la vitesse d'un mobile mesurée dans \mathcal{R} (resp. \mathcal{R}'), la loi de composition des vitesses s'écrit :

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{v} \quad \text{et réciproquement} \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v}$$



Ex. 1.1

Ex. 1.2

Limites de la mécanique classique galiléenne. La mécanique classique prédit que la vitesse apparente d'un rayon lumineux doit changer selon le référentiel de l'observateur : si la vitesse de propagation d'un rayon lumineux (dans le vide) est c dans un référentiel inertiel donné \mathcal{R} , la loi classique de composition des vitesses prédit que, pour un observateur en translation uniforme à la vitesse v dans la direction de propagation du rayon dans le référentiel \mathcal{R} , la vitesse du rayon lumineux deviendra $c' = c + v$ ou $c' = c - v$ dans le référentiel de l'observateur, selon que l'observateur s'approche ou s'éloigne de la source à la vitesse v (relativité galiléenne : composition des vitesses, en supposant les deux mouvements colinéaires).

Cette prédiction est à mettre en relation avec l'hypothèse de l'**éther**¹ à la fois comme support des ondes électromagnétiques (ce qui inclut la lumière) et comme référentiel privilégié où les ondes lumineuses se propagent à la vitesse $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ prédite par les équations de Maxwell ; en effet, les équations de Maxwell ne sont pas invariantes par les transformations de Galilée. On s'attend ainsi à ce qu'il soit possible expérimentalement de détecter le mouvement relatif d'un observateur par rapport à l'éther, le milieu de propagation des ondes lumineuses (le *vent d'éther*).

Ex. 1.3 Expérimentalement : la vitesse de la lumière dans le vide vaut toujours c , quel que soit le référentiel inertiel considéré, et le *vent d'éther* n'a jamais pu être mis en évidence : expériences de Fizeau (1851, initialement (mal-)interprétée comme due à l'entraînement partiel de l'éther par les corps en mouvement), de Michelson et Morley (1881, puis 1887, souvent répétée et améliorée depuis), de Trouton et Noble (1901-03) etc...

Solution : la relativité restreinte. Plusieurs physiciens théoriciens (Lorentz, Poincaré) proposent des solutions formelles *ad hoc* pour réconcilier mécanique classique et électromagnétisme, sans toutefois en tirer toutes les conséquences physiques. A. Einstein propose en 1905 de reconstruire les lois de la mécanique à partir de deux postulats :

1. **Principe de relativité** : les lois de la physique sont invariantes par changement de référentiel galiléen ;
2. **La vitesse de la lumière dans le vide est la même dans tous les référentiels** : la vitesse de la lumière c est invariante par changement de référentiel.

À partir de ces postulats, on trouve les nouvelles équations de changement de référentiel (formulées par Lorentz et Poincaré), et on construit un nouvel ensemble de lois mécaniques baptisé **relativité restreinte** (*special relativity*).

2. Les transformations de Lorentz

À partir des postulats choisis, on montre que le temps n'est pas invariant par changement de référentiel, et que les concepts de temps universel, de longueur invariante, de simultanéité ne sont plus des concepts valides. Les coordonnées d'espace et de temps se *mélagent*, et il est nécessaire de raisonner sur des **événements**, c'est à dire des points dans l'espace-temps repérés par des coordonnées spatiales $\mathbf{r} = (x, y, z)$ et temporelle t .

Transformations spéciales de Lorentz. Il s'agit du cas particulier où les axes (Ox) et $(O'x')$ des référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' sont choisis parallèles à la vitesse relative $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$ des deux référentiels (On pourrait raisonner de même en choisissant plutôt les axes $(Oy)/(Oy')$ ou $(Oz)/(Oz')$).

1.4–1.12 On montre que, lorsqu'on passe du référentiel inertiel \mathcal{R} au référentiel inertiel \mathcal{R}' , les coordonnées

1. Historiquement, l'idée selon laquelle la lumière est une onde qui se propage dans un matériau ténu baptisé "éther", présent partout même dans le vide, est bien plus ancienne que la synthèse de l'électromagnétisme de Maxwell. Christiaan Huygens formule cette hypothèse dans son "*Traité de la Lumière*" dès 1678. Cette idée s'imposera avec la découverte des phénomènes de diffraction et d'interférences.

d'un événement M se transforment selon :

$$\left\{ \begin{array}{l} t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \end{array} \right. \quad \text{i.e.} \quad \left\{ \begin{array}{l} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{array} \right. \quad \text{et réciproquement} \quad \left\{ \begin{array}{l} ct = \gamma(ct' + \beta x') \\ x = \gamma(x' + \beta ct') \\ y = y' \\ z = z' \end{array} \right.$$

où on pose en général :

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{ou vectoriellement} \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} = \frac{\mathbf{v}}{c} \quad \text{et} \quad \gamma = \gamma(\mathbf{v}) = (1 - \beta^2)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}.$$

Avec la convention suivante : les origines O et O' se confondent à $t = t' = 0$.

On peut mettre ces équations sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & +\beta\gamma & 0 & 0 \\ +\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Forme générale des transformations de Lorentz. Si on se place dans le cas plus général où la vitesse relative \mathbf{v} de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} n'est pas parallèle aux axes (Ox) et $(O'x')$, les équations des transformations de Lorentz peuvent s'écrire sous la forme générale suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} ct' = \gamma \left(ct - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{r} \right) \\ \mathbf{r}' = \mathbf{r} + (\gamma - 1) \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v}^2} \mathbf{v} - \gamma \mathbf{v} t \end{array} \right.$$

Ces équations se réduisent au cas précédent quand \mathbf{v} est parallèle aux axes (Ox) et $(O'x')$.

Ex. 1.9

3. Conséquences : dilatation du temps, contraction des longueurs

Les transformations de Lorentz ont de nombreuses conséquences pratiques assez surprenantes et contre-intuitives. Le temps n'est plus universel : il s'écoule différemment selon le référentiel considéré. Le concept de simultanéité devient relatif. La synchronisation des horloges dans un référentiel donné nécessite d'élaborer un protocole d'échanges de signaux lumineux (car c est constante et universelle).

Intervalle d'espace-temps. Pour deux événements E_1 et E_2 séparés par $(\Delta t, \Delta x)$ dans \mathcal{R} et respectivement $(\Delta t', \Delta x')$ dans \mathcal{R}' , on aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta\Delta x) \\ \Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c\Delta t) \end{array} \right.$$

Ex. 1.4 La distance Δx comme l'intervalle de temps Δt séparant ces événements ne sont pas conservés par changement de référentiel. Par contre, l'intervalle d'espace-temps Δs^2 est invariant :

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2$$

Dilatation du temps. Temps propre. Pour deux événements se produisant au même point dans \mathcal{R}' , on aura $\Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c \Delta t) = 0$, et donc $\Delta x = \beta c \Delta t = vt$. L'intervalle de temps $\Delta t'$ vaut ainsi :

$$c \Delta t' = \gamma(c \Delta t - \Delta x) = \gamma(1 - \beta^2) c \Delta t = \frac{1}{\gamma} c \Delta t \quad \text{d'où} \quad \Delta t = \gamma \Delta t' > \Delta t'$$

Le temps semble s'écouler plus lentement dans le référentiel \mathcal{R}' .

Pour un observateur, le temps $\Delta \tau$ mesuré dans le référentiel qui lui est attaché semble toujours s'écouler plus lentement que dans tout autre référentiel : $\Delta t = \gamma \Delta \tau > \Delta \tau$. Le temps τ est le **temps propre** de l'observateur ; c'est un invariant car $\Delta s^2 = c^2 \Delta \tau^2$.

Contraction des longueurs. Longueur propre. La mesure d'une longueur, par exemple à l'aide d'une règle immobile dans le référentiel de l'observateur, consiste *par définition* en une lecture simultanée de la position des extrémités de l'objet à mesurer. On montre de la même manière que dans tout autre référentiel galiléen, un objet en mouvement de **longueur propre** L_0 apparaît contracté dans le référentiel d'un observateur se déplaçant à la vitesse v par rapport à l'objet : la longueur apparente est $L = L_0 / \gamma < L_0$.

Equivalence des référentiels inertiels. Conséquence davantage contre-intuitive : comme les référentiels inertiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' sont équivalents, les observateurs dans \mathcal{R} et dans \mathcal{R}' font les mêmes observations (dilatation du temps, contraction des longueurs) pour l'autre référentiel, et ce, sans contradiction. Il s'agit d'un phénomène de "*perspective dans l'espace-temps*".

Invariance de la vitesse c de la lumière dans le vide et redéfinitions des unités. Comme d'une part, la vitesse c de la lumière dans le vide est la même dans tous les référentiels galiléens, et d'autre part, les mesures de fréquence et de durée sont nettement plus précises aujourd'hui que les mesures de distance, la Conférence Générale des Poids et Mesures (CGPM) a décidé en 1983 de redéfinir le mètre à partir de la seconde (la seconde étant définie comme 9 192 631 770 périodes de l'onde émise lors de la transition hyperfine de l'atome de Césium-133 dans son niveau fondamental). La CGPM a ainsi fixé la vitesse de la lumière dans le vide à exactement :

$$c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

et redéfini le mètre comme la distance parcourue pendant $1/299\,792\,458$ seconde par la lumière dans le vide.

Composition des vitesses. À partir des transformations de Lorentz, on dérive la loi de composition des vitesses :

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \\ u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{1}{\gamma} \frac{u_y}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \\ u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{1}{\gamma} \frac{u_z}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \end{array} \right. \quad \text{et réciproquement} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} \\ u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{u'_y}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} \\ u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{u'_z}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} \end{array} \right.$$

Il apparaît clairement que :

Ex. 2.1

- Les composantes transverses u_y et u_z de la vitesse ne sont pas invariantes.
- Le vecteur vitesse ne se transforme pas comme le vecteur position selon les équations des transformations de Lorentz (voir plus loin le quadrivecteur vitesse).

Rapacité. Plutôt que la vitesse, une grandeur utile en relativité restreinte est la rapidité φ , définie par :

$$\beta = \frac{v}{c} = \tanh \varphi \quad \varphi = \operatorname{argtanh} \beta = \operatorname{argtanh} \frac{v}{c}$$

La rapidité est une grandeur additive lors d'un changement de référentiel, ce qui simplifie notamment le traitement des mouvements accélérés. 2.2–2.5

On a les relations suivantes, très pratiques :

$$\beta = \tanh \varphi \quad \gamma = \cosh \varphi \quad \beta\gamma = \sinh \varphi$$

4. L'espace-temps : événements, intervalles, lignes d'univers, cône de lumière

Pour raisonner dans le cadre contre-intuitif de la relativité restreinte, on peut considérer que les événements ont lieu dans un **continuum espace-temps** à 4 dimensions doté d'une pseudo-métrie, que l'on appelle aussi l'**espace de Minkowski**. Dans cet espace, un point représente un événement; la position occupée par un objet ponctuel au fil du temps est sa **ligne d'univers** $\tilde{\mathbf{r}}(\tau)$; le **volume d'espace-temps** occupé par un objet non-ponctuel constitue son **tube d'univers**, etc (fig. 1). Un changement de référentiel, décrit par une transformation de Lorentz, correspondra à une transformation géométrique dans l'espace de Minkowski.

Événements. On appellera **événement** un phénomène physique qui se produit dans un référentiel inertiel \mathcal{R} à un instant t donné et à une position \mathbf{r} donnée : les coordonnées (t, \mathbf{r}) sont les **coordonnées spatio-temporelles** de l'événement en question. Comme vu précédemment, on obtient les coordonnées (t', \mathbf{r}') dans un autre référentiel du même événement en utilisant la transformation de Lorentz.

Intervalle d'espace-temps. Pour deux événements A et B séparés par l'intervalle $(\Delta t = t_B - t_A, \Delta x = x_B - x_A)$ dans \mathcal{R} et respectivement par $(\Delta t' = t'_B - t'_A, \Delta x' = x'_B - x'_A)$ dans \mathcal{R}' , on aura :

$$\begin{cases} c\Delta t' &= \gamma(c\Delta t - \beta\Delta x) \\ \Delta x' &= \gamma(\Delta x - \beta c\Delta t) \end{cases}$$

Ex. 1.4 Comme montré précédemment, la distance Δx comme l'intervalle de temps Δt séparant ces événements A et B ne sont pas conservés par changement de référentiel. Par contre, la norme au carré de l'intervalle d'espace-temps Δs^2 est invariante par changement de référentiel :

$$\Delta s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2$$

ou, sous une forme plus générale, dans l'espace à 3 dimensions,

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &= c^2(\Delta t)^2 - (\Delta \mathbf{r})^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \\ &= c^2(\Delta t')^2 - (\Delta \mathbf{r}')^2 = c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 \end{aligned}$$

La nature de l'intervalle d'espace-temps \widetilde{AB} entre les événements A et B est fonction du signe de Δs^2 :

- Si $\Delta s^2 > 0$, l'intervalle \widetilde{AB} est **de genre temps** : On aura forcément $c\Delta t > |\Delta \mathbf{r}|$, et par conséquent, les événements A et B peuvent être les positions successives dans l'espace-temps de la trajectoire d'un mobile se déplaçant à une vitesse $u = |\Delta \mathbf{r}|/\Delta t < c$. L'ordre des événements A et B sera le même dans tous les référentiels galiléens ; l'événement A aura toujours lieu avant l'événement B , et pourra en être la cause (principe de causalité).
- Si $\Delta s^2 = 0$, l'intervalle \widetilde{AB} est **de genre lumière** : $|\Delta \mathbf{r}| = c\Delta t$, ce qui signifie que les événements A et B peuvent être les positions successives d'un rayon lumineux. Pour un événement M quelconque, l'ensemble des points N tels que $|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_M| = c(t_N - t_M)$ constituent la surface du **cône de lumière** de l'événement M .
- Enfin, si $\Delta s^2 < 0$, l'intervalle \widetilde{AB} est **de genre espace**. La distance $|\Delta \mathbf{r}|$ est supérieure à $c\Delta t$; par conséquent, aucun mobile ne peut aller de l'événement A à l'événement B , pas même un rayon lumineux. Il ne peut exister aucune relation causale entre ces deux événements ; l'événement B est en dehors du **cône de lumière** de l'événement A (et réciproquement). De plus l'ordre temporel de ces deux événements dépendra du référentiel choisi (ce qui n'a aucune conséquence, car il ne peut y avoir de lien causal entre A et B).

Passé, futur, "ailleurs" et cône de lumière. Pour un événement donné A , on peut diviser l'espace-temps en différentes régions en fonction du signe de $\Delta s^2 = \widetilde{AM}^2 = c^2(t_M - t_A)^2 - (\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_A)^2$.

Les événements M pour lesquels $\Delta s^2 > 0$ forment avec l'événement A un intervalle de *genre temps* : ils peuvent être la cause ou la conséquence de A . Ceux pour lesquels $t_M < t_A$ constituent le **passé** de l'événement A , tandis que ceux pour lesquels $t_M > t_A$ constituent le **futur** de A (fig. 1).

Les événements M tels que $\Delta s^2 < 0$ forment avec l'événement A un intervalle de *genre espace* : ils ne peuvent avoir de lien causal avec l'événement A : on désigne souvent cette région du continuum espace-temps comme étant **l'ailleurs** de l'événement A (fig. 1).

Enfin, les événements M tels que $\Delta s^2 = 0$ constituent la frontière entre l'ailleurs d'une part, et le passé ou le futur : l'hyper-surface correspondante s'appelle le **cône de lumière** de l'événement A (en toute rigueur, il s'agit d'un hypercône). Les événements de cette surface peuvent appartenir à la trajectoire d'un rayon lumineux qui arrive en A ou qui part de A (fig. 1).

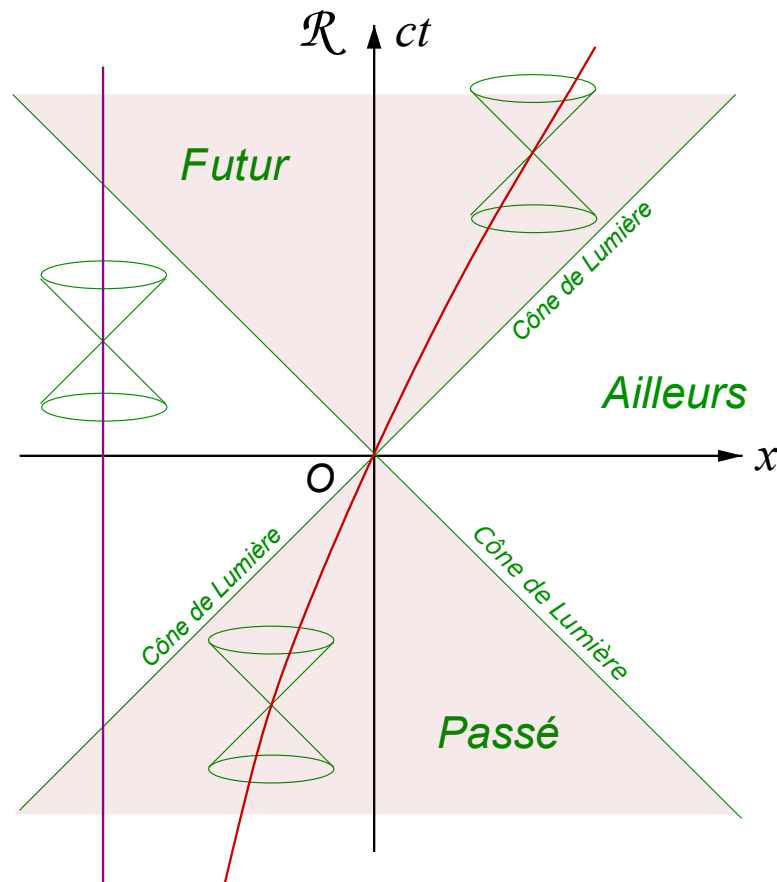


FIGURE 1 – Diagramme d'espace-temps (Minkowski). Représentation de la ligne d'univers d'un objet immobile dans \mathcal{R} (ligne violette), et ligne d'univers d'un objet en mouvement, qui passe par l'origine de \mathcal{R} à $t = 0$ (ligne rouge). Le cône de lumière de l'événement origine O est représenté en vert : il partitionne l'espace-temps en trois régions : d'une part, le **passé** et le **futur** de l'événement O , et d'autre part l'**ailleurs**, ensemble des événements sans relation causale possible avec l'événement O (les événements de cette dernière région sont "au-delà de l'horizon" de O). On peut bien sûr construire le cône de lumière pour n'importe quel événement. Pour un objet matériel, l'ensemble de sa ligne d'univers est nécessairement comprise dans le cône de lumière de n'importe quel point événement de sa trajectoire dans l'espace-temps.

5. Diagrammes d'espace-temps : diagrammes de Minkowski, diagrammes de Loedel

Afin de se forger une intuition en relativité restreinte, il est souvent utile de représenter les événements sur un **diagramme d'espace-temps** ; cela permet notamment de mieux comprendre les effets d'un changement de référentiel. Il en existe de plusieurs sortes, les plus communs étant les diagrammes de Minkowski et les diagrammes symétriques de Loedel.

5.1. Les diagrammes dits "de Minkowski"

1.5–1.6 Hermann Minkowski (1864 – 1909) était mathématicien : il a été l'un des enseignants d'Albert Einstein à l'École polytechnique fédérale de Zurich. Avec Poincaré, il est l'un des premiers à avoir proposé de raisonner en relativité dans un espace à 4 dimensions associant les coordonnées de temps et d'espace, le **continuum espace-temps** encore appelé **espace de Minkowski**.

Sur un diagramme de Minkowski, la coordonnée d'espace (x , ou z) est représentée en abscisse, et le temps (t ou ct pour être homogène) en ordonnée. Un point représente un événement ; la succession des points représentant la position d'un objet dans l'espace à des instants t différents est la **ligne d'univers** de cet objet. Si cet objet possède une extension spatiale, on parlera plutôt de **tube d'univers**, autrement dit le volume d'espace-temps qu'occupe un objet au fur et à mesure que le temps s'écoule.

La figure 2 représente un diagramme de Minkowski, avec les axes x et ct associés au référentiel \mathcal{R} , et les axes x' et ct' du référentiel \mathcal{R}' , en translation par rapport à \mathcal{R} à la vitesse v . Les coordonnées d'un événement dans les deux référentiels s'obtiennent en **projetant parallèlement** le point correspondant sur les axes des deux référentiels. Il faut toutefois se souvenir que dans ce type de diagrammes, la graduation des axes n'est pas triviale, et s'obtient en traçant les hyperboles d'équations $c^2t^2 - x^2 = \text{constante}$ et $x^2 - c^2t^2 = \text{constante}$.

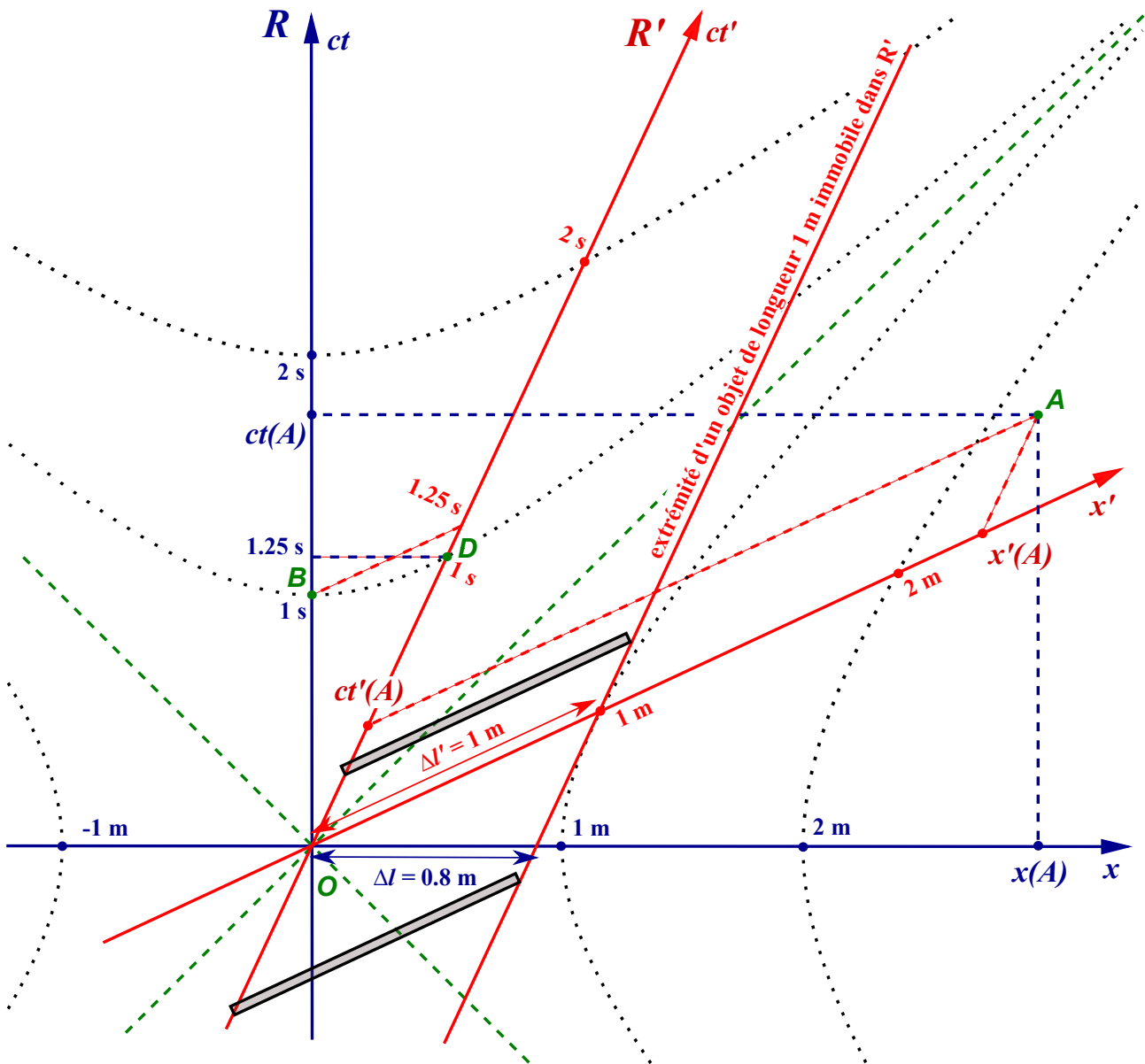


FIGURE 2 – Diagramme de Minkowski. Dans cet exemple, $\beta = 3/5$ et $\gamma = 5/4 = 1.25$. Les axes x et ct du référentiel \mathcal{R} sont représentés en bleu, et les axes x' et ct' du référentiel \mathcal{R}' sont en rouge. On obtient les coordonnées d'un événement, par exemple ici l'événement A , dans les deux référentiels en **projetant parallèlement** ce point sur les axes correspondants. Il faut toutefois être vigilant sur la graduation des axes, qui s'obtient en traçant les hyperboles d'équations $c^2t^2 - x^2 = \text{constante}$ et $x^2 - c^2t^2 = \text{constante}$. La dilatation des temps est illustrée ici par les événements B et D : les événements O et B , ayant lieu tous deux successivement en $x = 0$ dans le référentiel \mathcal{R} avec un intervalle de temps de $\Delta t = 1$ s, sont séparés dans \mathcal{R}' par $\Delta t' = 1.25$ s. Symétriquement, les événements O et D ont lieu successivement à la même position $x' = 0$ dans \mathcal{R}' à une seconde d'intervalle ($\Delta t' = 1$ s), et sont séparés par $\Delta t = 1.25$ s dans le référentiel \mathcal{R} (dilatation des temps). On a aussi représenté un objet de longueur $\Delta \ell' = 1$ m au repos dans \mathcal{R}' , et dont la longueur dans \mathcal{R} n'est plus que de 0.8 m (contraction des longueurs).

5.2. Les diagrammes symétriques de Loedel

1.5–1.6 Les diagrammes de Minkowski sont les plus répandus, mais ils présentent deux inconvénients : d’une part la graduation des axes n’est pas triviale, ce qui rend l’interprétation moins intuitive ; de plus, la représentation graphique est différente pour les deux référentiels considérés, ce qui est un peu contradictoire avec l’esprit même de la théorie et du principe de relativité (“tous les référentiels galiléens sont équivalents”). Plusieurs physiciens ont proposé des variantes qui rétablissent visuellement la symétrie entre les deux référentiels. On attribue à Enrique Loedel Palumbo (1901 – 1962), physicien uruguayen, la parenté de ces diagrammes symétriques.

La figure 3 présente un exemple de diagramme de Loedel. Sur ces diagrammes, l’angle θ vérifie

$$\sin \theta = \beta = \frac{v}{c} \quad \text{et par conséquent} \quad \cos \theta = \sqrt{1 - \beta^2} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma(v)}.$$

Comme précédemment, les coordonnées d’un événement dans un référentiel donné s’obtiennent en projetant le point correspondant parallèlement aux axes de ce référentiel. Les graduations des axes sont identiques pour les deux référentiels, ce qui simplifie la construction et l’interprétation de ces diagrammes.

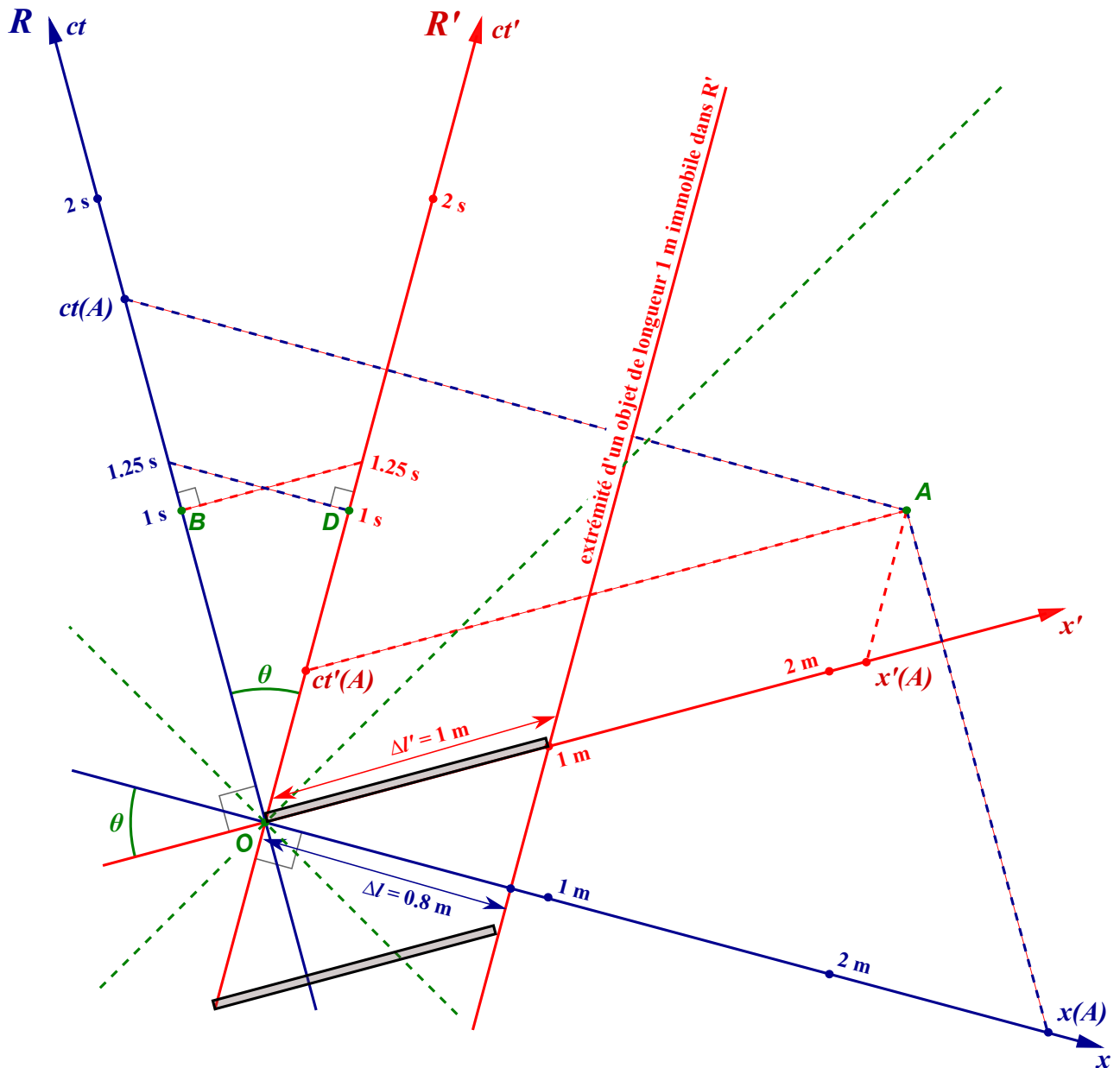


FIGURE 3 – Diagramme de Loedel. Dans cet exemple, $\beta = 3/5$ et $\gamma = 5/4 = 1.25$. Les axes x et ct du référentiel \mathcal{R} sont représentés en bleu, et les axes x' et ct' du référentiel \mathcal{R}' sont en rouge. On obtient les coordonnées d'un événement, par exemple ici l'événement A , dans les deux référentiels en **projetant parallèlement** ce point sur les axes correspondants. Les graduations sont identiques sur les axes de \mathcal{R} et de \mathcal{R}' . La dilatation des temps est illustrée ici par les événements B et D : les événements O et B , ayant lieu tous deux successivement en $x = 0$ dans le référentiel \mathcal{R} avec un intervalle de temps de $\Delta t = 1$ s, sont séparés dans \mathcal{R}' par $\Delta t' = 1.25$ s. Symétriquement, les événements O et D ont lieu successivement à la même position $x' = 0$ dans \mathcal{R}' à une seconde d'intervalle ($\Delta t' = 1$ s), et sont séparés par $\Delta t = 1.25$ s dans le référentiel \mathcal{R} (dilatation des temps). On a aussi représenté un objet de longueur $\Delta l' = 1$ m au repos dans \mathcal{R}' , et dont la longueur dans \mathcal{R} n'est plus que de 0.8 m (contraction des longueurs).

6. Quadrivecteurs, tenseurs, composantes covariantes et contravariantes

6.1. Quadrivecteurs

Les équations de changement de référentiel de la relativité restreinte conduisent naturellement à utiliser un objet mathématique baptisé **quadrivecteur** (*four-vector*), dont les composantes se transforment selon les équations des transformations de Lorentz (on parlera de composantes *contravariantes*, ce qui sera précisé plus loin). L'objectif est ensuite d'écrire les lois de la physique dans ce formalisme quadrivectoriel, pour obtenir des relations invariantes de Lorentz, *i.e.* indépendantes du choix du référentiel inertiel (selon la même démarche qu'en mécanique classique avec le formalisme vectoriel).

Un quadrivecteur quelconque $\tilde{\mathbf{A}}$ possède ainsi une composante temporelle $A^0 = A^t$, et une composante spatiale $\mathbf{A} = (A^1, A^2, A^3) = (A^x, A^y, A^z)$. Ces composantes se transforment selon les transformations de Lorentz lors d'un changement de référentiel :

$$\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}' \quad A'^\mu = \sum_\nu [\mathbf{L}]^\mu{}_\nu A^\nu = [\mathbf{L}]^\mu{}_\nu A^\nu \quad \text{avec} \quad [\mathbf{L}]^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ex. 3.1 On munit l'espace des quadrivecteurs d'un *pseudo-produit scalaire* et d'une *pseudo-norme* qui sont des scalaires invariants. Pour deux quadrivecteurs quelconques $\tilde{\mathbf{A}}$ et $\tilde{\mathbf{B}}$, on aura ainsi :

$$\begin{aligned} \text{Le pseudo-produit scalaire} \quad \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{B}} &= A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3 \\ &= \sum_{\mu=0\dots 3} \sum_{\nu=0\dots 3} \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{La pseudo-norme (carrée)} \quad \tilde{\mathbf{A}}^2 &= \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} = (A^0)^2 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 \\ &= \sum_{\mu=0\dots 3} \sum_{\nu=0\dots 3} \eta_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = \eta_{\mu\nu} A^\mu A^\nu \end{aligned}$$

Avec $\eta_{\mu\nu}$ la *métrique* de l'espace de Minkowski² :

$$\eta_{\mu\nu} = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu \quad \text{où} \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \quad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On emploie ici la convention dite *convention de sommation d'Einstein*, où une sommation sur toutes les valeurs possibles d'un indice est implicite chaque fois qu'un indice est répété ; ainsi, par exemple :

$$\tilde{\mathbf{r}}^2 = \eta_{\mu\nu} r^\mu r^\nu = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} r^\mu r^\nu$$

3.1–3.5 On peut construire un quadrivecteur à partir d'autres quadrivecteurs et de grandeurs scalaires invariantes de Lorentz (célérité c , temps propre τ , masse propre m , pseudo-norme, *etc.*). On construira ainsi les quadrivecteurs position $\tilde{\mathbf{r}}$, la quadri-vitesse $\tilde{\mathbf{U}}$, la quadri-accélération $\tilde{\mathbf{A}}$, la quadri-impulsion $\tilde{\mathbf{p}}$, *etc.*

2. On utilise dans ce cours la signature $(+, -, -, -)$: dans l'expression de la pseudo-norme, le temps est compté positivement et l'espace négativement. Selon les ouvrages, on peut aussi trouver la convention inverse $(-, +, +, +)$. Les deux conventions sont bien évidemment équivalentes.

Le quadrivecteur position $\tilde{\mathbf{r}}$: (noté aussi $\tilde{\mathbf{x}} : x^\mu$), dont les composantes contravariantes sont :

$$\tilde{\mathbf{r}} : r^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^0 \\ r^1 \\ r^2 \\ r^3 \end{pmatrix} \quad \text{sa pseudo-norme carrée est } \tilde{\mathbf{r}}^2 = c^2 t^2 - \mathbf{r}^2 = (r^0)^2 - (r^1)^2 - (r^2)^2 - (r^3)^2.$$

De plus, $d\tilde{\mathbf{r}}^2 = \eta_{\mu\nu} dr^\mu dr^\nu = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2 = c^2 d\tau^2$ où $d\tau$ est l'intervalle élémentaire de temps propre de l'objet de trajectoire $\tilde{\mathbf{r}}(\tau)$.

La quadri-vitesse ou quadrivecteur vitesse :

$$\tilde{\mathbf{U}} = \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\tau} \quad U^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(u)c \\ \gamma(u)\mathbf{u} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad \text{Sa pseudo-norme carrée est } \tilde{\mathbf{U}}^2 = \eta_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = c^2.$$

La quadri-accélération ou quadrivecteur accélération :

$$\tilde{\mathbf{A}} = \frac{d\tilde{\mathbf{U}}}{d\tau} \quad A^\mu = \begin{pmatrix} \gamma^4(u) \frac{\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}}}{c} \\ \gamma^4(u) \frac{\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}}}{c^2} \mathbf{u} + \gamma^2(u) \dot{\mathbf{u}} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \dot{\mathbf{u}} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

Sa pseudo-norme carrée est $\tilde{\mathbf{A}}^2 = -a^2$ où a est l'accélération propre (mesurée dans le référentiel propre de l'objet). [Ex. 3.4](#)

6.2. Tenseurs, composantes covariantes et contravariantes

Le formalisme quadrivectoriel peut être étendu et généralisé grâce au concept de *tenseur* : les grandeurs physiques sont représentées par des quadritenseurs (*four-tensor*), de telle sorte que, par construction, écrire les équations de la physique sous forme tensorielle assure leur invariance par changement de référentiel : on parle de “formalisme manifestement covariant” et d'équations “covariantes”.

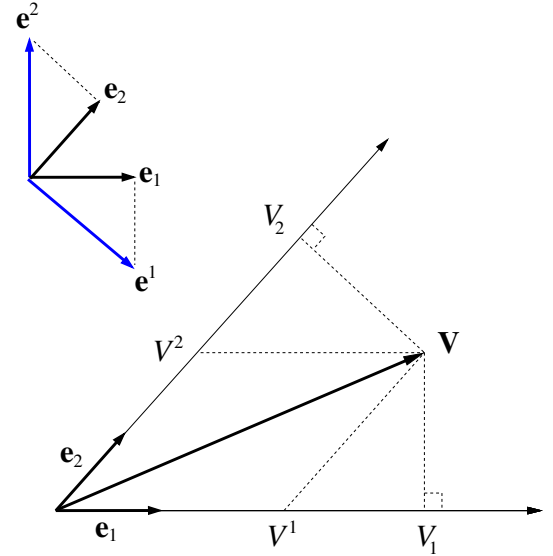
Tenseurs. Un quadritenseur (*4-tensor*) de rang n possède 4^n composantes qui se transforment linéairement par changement de référentiel. Ainsi, un scalaire invariant de Lorentz est un tenseur de rang 0 (par exemple, c , m , la pseudo-norme...). Un quadrivecteur est un tenseur de rang 1 et possède 4 composantes dans l'espace de Minkowski : c'est le cas des quadrivecteurs position, vitesse, accélération, énergie-impulsion, etc. Un tenseur de rang 2 possède $4 \times 4 = 16$ composantes : le tenseur du champ électromagnétique $\tilde{\mathbf{F}}$ de composantes $F^{\mu\nu}$ en est un exemple. On construit de même des tenseurs de rang 3, 4, etc.

Dans le formalisme relativiste, on adopte souvent la convention suivante : un indice grec prend les valeurs 0, 1, 2 ou 3 et désigne une composante quelconque du quadrivecteur ou du quadritenseur tandis qu'un indice latin ne prend que les valeurs 1, 2 ou 3 et correspond aux composantes x, y, z de l'espace.

Composantes covariantes et contravariantes d'un tenseur. Métrique. De manière générale, dans une base quelconque (non nécessairement orthonormée) $\{\mathbf{e}_i\}$, on peut exprimer les composantes d'un vecteur \mathbf{V} de deux manières distinctes :

- En exprimant \mathbf{V} comme une combinaison linéaire des vecteurs de base $\{\mathbf{e}_i\}$: $\mathbf{V} = \sum V^i \mathbf{e}_i = V^i \mathbf{e}_i$: les V^i sont les composantes *contravariantes* de \mathbf{V} ;
- En projetant orthogonalement \mathbf{V} sur les vecteurs de base : $V_i = \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_i$, ce qui revient à développer \mathbf{V} sur la base duale $\{\mathbf{e}^i\}$ définie par $\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_j^i$. Les V_i sont les composantes *covariantes* de \mathbf{V} .

Composantes	Développement de \mathbf{V}	Projections
Contravariantes	$\mathbf{V} = \sum_i V^i \mathbf{e}_i = V^i \mathbf{e}_i$	$V^i = \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}^i$
Covariantes	$\mathbf{V} = \sum_i V_i \mathbf{e}^i = V_i \mathbf{e}^i$	$V_i = \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_i$



Dans le cas d'un espace euclidien muni d'un repère orthonormé, la base duale $\{\mathbf{e}^i\}$ se confond avec la base $\{\mathbf{e}_i\}$, et les composantes covariantes et contravariantes sont identiques. Ce n'est plus le cas dans l'espace de Minkowski : c'est pourquoi on distingue pour un quadrivecteur donné $\tilde{\mathbf{A}}$ (et plus généralement pour un quadritenseur) ses composantes covariantes notées A_μ (indice inférieur), et ses composantes contravariantes notées A^μ (indice supérieur à ne pas confondre avec un exposant).

Vis à vis d'une transformation de Lorentz, les composantes contravariantes d'un quadritenseur se transforment selon les équations de Lorentz écrites précédemment :

$$A'^\mu = [\mathbf{L}]^\mu{}_\nu A^\nu \quad \text{avec} \quad [\mathbf{L}]^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [\mathbf{L}]^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$$

Tandis que les composantes covariantes se transforment selon la matrice inverse :

$$A'_\mu = [\bar{\mathbf{L}}]_\mu{}^\nu A_\nu \quad \text{avec} \quad [\bar{\mathbf{L}}]_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [\mathbf{L}] [\bar{\mathbf{L}}] = \mathbf{1} \quad [\bar{\mathbf{L}}]_\mu{}^\nu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}$$

Ex. 3.6 Pour passer d'une composante covariante à une composante contravariante (et vice-versa), on utilise le tenseur métrique $\tilde{\eta}$ de composantes $\eta^{\mu\nu}$:

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu \quad A^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu \quad B_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} B^{\alpha\beta} \quad B^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} B_{\alpha\beta}$$

On fait ainsi *monter un indice* en contractant le tenseur avec $\eta^{\mu\nu}$, et réciproquement *descendre un indice* en contractant avec $\eta_{\mu\nu}$. Dans l'espace de Minkowski,

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et on aura} \quad \eta'^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$$

Il est à noter que la relation $\eta'^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ (tenseur métrique invariant par changement de référentiel) n'est pas vraie en général dans un espace courbe.

Pour un quadrivecteur $\tilde{\mathbf{A}}$, la pseudo-norme carrée peut ainsi s'écrire :

$$\tilde{\mathbf{A}}^2 = A^\mu A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = \eta^{\mu\nu} A_\mu A_\nu$$

La généralisation de ce formalisme (pour une métrique $g^{\mu\nu}$ quelconque, $\tilde{g}(r^\mu)$) permet de construire les lois de la mécanique dans un espace courbe. C'est dans ce cadre formel qu'Albert Einstein a élaboré avec succès une théorie *géométrique* des lois de la gravitation : la relativité générale (*general relativity*).

7. La dynamique relativiste

À partir du quadrivecteur vitesse, on peut construire un quadrivecteur énergie-impulsion (ou quadri-impulsion) $\tilde{\mathbf{p}}$:

$$\tilde{\mathbf{p}} = m \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\tau} = m \tilde{\mathbf{U}} \quad p^\mu = m U^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(u)mc \\ \gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c = \gamma(u)mc \\ \mathbf{p} = \gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix}$$

Dans cette relation, m est la masse propre de l'objet (c'est à dire sa masse au repos), $\gamma(u)m > m$ est en quelque sorte sa "masse apparente", et $E = \gamma(u)mc^2$ son énergie totale, somme de son énergie de masse $E_0 = mc^2$ et de son énergie cinétique $T = E - mc^2 = (\gamma(u) - 1)mc^2$. Ex. 4.1

La pseudo-norme carrée de $\tilde{\mathbf{p}}$ vaut $\tilde{\mathbf{p}}^2 = p_\mu p^\mu = m^2 c^2 = (mc^2)^2 / c^2$.

Les composantes de $\tilde{\mathbf{p}}$ vérifient les relations suivantes, très utiles :

$$\tilde{\mathbf{p}}^2 = p_\mu p^\mu = (mc^2)^2 / c^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 \quad \text{i.e.} \quad E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

$$\vec{\beta} = \frac{\mathbf{p}}{p^0} = \frac{\mathbf{p}c}{E} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{E}{mc^2}$$

Quadrivecteur force ou quadri-force. La deuxième loi de Newton possède un équivalent relativiste, exprimé avec des quadrivecteurs :

$$\tilde{\mathbf{f}} = \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{d\tau} = m \frac{d\tilde{\mathbf{U}}}{d\tau} = m \tilde{\mathbf{A}} \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{f}} : f^\mu = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) = \gamma \frac{d}{dt} \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) = \left(\gamma \frac{1}{c} \frac{dE}{dt}, \gamma \mathbf{f} \right)$$

Comme $\tilde{\mathbf{U}}^2 = U_\mu U^\mu = c^2$ est constant, on montre facilement que

$$\tilde{\mathbf{f}} \cdot \tilde{\mathbf{U}} = f^\mu U_\mu = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{dE}{dt} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}$$

Le cas particulier du photon. Pour le photon, dont la masse propre (masse au repos) est nulle, on peut construire un quadrivecteur d'onde $\tilde{\mathbf{k}}$ et un quadrivecteur énergie-impulsion $\tilde{\mathbf{p}}$ selon : 4.3, 4.6

$$\tilde{\mathbf{k}} : k^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\pi\nu}{c} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{p}} = \hbar \tilde{\mathbf{k}} : p^\mu = \begin{pmatrix} \frac{h\nu}{c} \\ \hbar \mathbf{k} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{p}}^2 = p_\mu p^\mu = \left(\frac{h\nu}{c} \right)^2 - \hbar^2 \mathbf{k}^2 = 0$$

Dynamique des réactions nucléaires et des collisions de particules. Dans une réaction nucléaire ou un processus de physique des particules (désintégration, collision, etc.), le quadrivecteur énergie-impulsion total du système est conservé :

$$\left[\sum_i \tilde{\mathbf{p}}_i \right]_{\text{avant}} = \left[\sum_i \tilde{\mathbf{p}}_i \right]_{\text{après}}$$

ce qui correspond à la conservation de l'énergie totale d'une part, et de l'impulsion totale d'autre part.

4.1–4.6 En pratique, pour analyser une réaction, on fait un usage intense du fait que, d'une part, le quadrivecteur énergie-impulsion est conservé, et que, d'autre part, les pseudo-produits scalaires de quadri-vecteurs sont invariants par changement de référentiels : par exemple, $\tilde{\mathbf{p}}^2$, $(\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2)^2$, $\tilde{\mathbf{p}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{p}}_2$, etc.

Référentiel du centre de masse. Pour tout objet ou système, il existe un référentiel particulier \mathcal{R}^* où l'impulsion totale (c'est à dire la composante vectorielle \mathbf{p} de $\tilde{\mathbf{p}}_{\text{total}}$) du système s'annule : c'est le référentiel du "centre de masse", et dans ce référentiel,

$$\tilde{\mathbf{p}}_{\text{total}}^2 = \left[\sum_i \tilde{\mathbf{p}}_i \right]^2 = (E^*/c)^2 = M^2 c^2$$

4.5–4.6 où E^* est l'énergie totale du système dans le référentiel \mathcal{R}^* , et M la **masse invariante** (*invariant mass*) du système considéré. La masse invariante M est un invariant de Lorentz : pour un système donné, sa valeur est indépendante du référentiel.

8. Le champ électromagnétique

Opérateur gradient. Les équations régissant le comportement du champ électromagnétique sont des équations différentielles faisant apparaître des dérivées partielles. Dans le formalisme tensoriel, on définit l'opérateur gradient (*four-gradient*) par ses composantes covariantes ∂_μ :

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

Les composantes contravariantes ∂^μ s'obtiennent simplement par :

$$\partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right).$$

La contraction de l'opérateur gradient avec lui-même donne l'opérateur invariant de Lorentz \square qui n'est autre que le D'Alembertien :

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2.$$

Quadri-vecteur courant. Dans le cadre relativiste, on décrit à la fois la densité de charge ρ et la densité de courant \mathbf{j} par un quadri-vecteur courant (*four-current*) $\tilde{j} : j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$. La conservation de la charge s'écrit alors simplement :

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

Tenseur du champ électromagnétique. Pour décrire le champ électromagnétique dans ce formalisme, on peut partir du potentiel scalaire V et du potentiel vecteur \mathbf{A} , dont les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} se déduisent par :

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Le quadrivecteur potentiel associé $\tilde{\mathbf{A}}$ s'écrit ainsi :

$$\tilde{\mathbf{A}} : A^\mu = \left(\frac{V}{c}, \mathbf{A} \right)$$

Le champ électromagnétique lui-même (champs électrique \mathbf{E} et magnétique \mathbf{B}) est représenté par un tenseur $\tilde{\mathbf{F}}$ de rang 2 de composantes contravariantes $F^{\mu\nu}$. Ce tenseur est antisymétrique ($F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$) et on peut le relier au quadrivecteur potentiel $\tilde{\mathbf{A}}$ par la relation : 5.1–5.3

$$\tilde{\mathbf{F}} : F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Les équations de Maxwell peuvent dès lors s'écrire sous forme covariante :

Relation aux sources	$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$	$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$
Structure du champ	$\partial^\sigma F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\sigma} + \partial^\nu F^{\sigma\mu} = 0$	$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{cases}$

Transformation des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} . De ce qui précède, il paraît évident que les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} ne sont pas vraiment les bons objets de la théorie. Il est toutefois parfois utile de savoir comment ces champs se transforment par changement de référentiel galiléen, sans devoir repasser par le tenseur $F^{\mu\nu}$ ou le quadrivecteur potentiel. Des résultats précédents, on peut montrer que les composantes parallèles et orthogonales par rapport au mouvement relatif des référentiels considérés se transforment de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{E}'_{//} = \mathbf{E}_{//} \\ \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma (\mathbf{E}_{\perp} + \beta c \times \mathbf{B}_{\perp}) \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{B}'_{//} = \mathbf{B}_{//} \\ \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma \left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{\beta}{c} \times \mathbf{E}_{\perp} \right) \end{cases}$$

Force de Lorentz. Dans le formalisme covariant, la quadri-force de Lorentz que subit une particule de charge q dans une région de l'espace où règne le champ électromagnétique $F^{\mu\nu}$ s'écrit simplement :

$$f^\mu = q F^\mu{}_\nu U^\nu = q F^{\mu\nu} U_\nu.$$