Notion de viscosité d'un fluide
Écoulements visqueux

Niveau :
Pré-requis :
- Abc

Introduction

Voir notion couche mince

L'étude de la viscosité est essentielle pour réduire nos consommations de carburant dans les avions ou les voitures.

Manip Qualitative : On fait couler de l'eau et du miel/de l'eau sucrée : le miel colle et coule doucement, l'eau parait plus "fluide".

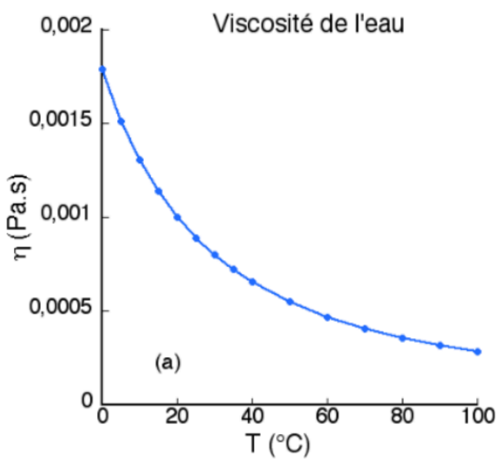
Aujourd'hui, on va appréhender la notion de viscosité et voir sa définition physique dans le cas de fluides particuliers : les fluides newtonniens.

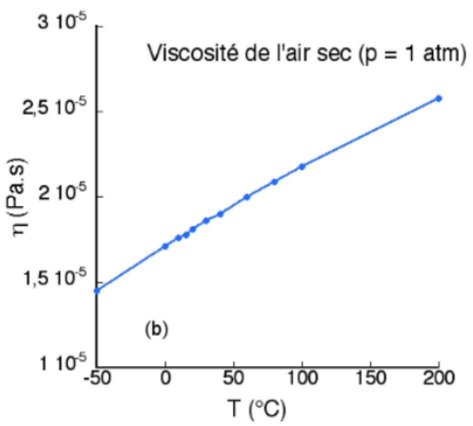
I. Notion de Viscosité
A. Observation macro

Video "Manip Lycée Montaigne Bordeaux : viscosité du miel en rotation"

- On observe que le fluide ne se déplace pas en bloque mais que la vitesse sur les bords semble nulle
- Le fluide se déplace dans la direction du mouvement extérieur
- On observe que l'on agit sur l'extérieur et que cela transmet un mouvement vers le milieu : il y a donc une force

B. Origine micro





II. Dynamique d'un fluide visqueux

A. Equation de Navier-Stokes

B. Nombre de Reynolds

C. Ecoulement de Stokes

Video Youtube page Benjamin Marchetti
Taylor Kinematic reversibility

D. Écoulement de Poiseuille

Voir Sylvio Rossetti

Video Youtube page unisciel
La physique animée : Écoulement de Poiseuille d'un fluide visqueux

Conclusion

Pendant cette leçon, on a présenté la notion de viscosité d'un fluide. On a mené une approche microscopique dans le cas des gaz et on a comparé l'évolution de la viscosité avec la température entre les gaz et les liquides. Enfin, on a décrit la dynamique d'un fluide visqueux et on a utilisé la force de trainée de Stokes pour mesurer expérimentalement la viscosité de l'huile silicone.
On s'est limité ici au cas des fluides dits newtoniens, mais il existe certains fluides, dits non-newtoniens, qui se comportent différemment, et cela fera l'objet d'un devoir maison.

Un **fluide non newtonien** est un fluide pour lequel la relation entre **contrainte de cisaillement** τ et **taux de cisaillement** $\dot{\gamma}$ n'est **pas linéaire**, **contrairement** aux fluides newtoniens comme l'eau ou l'air.

Pour un fluide newtonien :

$$\tau = \eta \dot{\gamma} \quad \text{(loi de Newton)}$$

Pour un fluide non newtonien :

$$\tau \neq \text{constante} \cdot \dot{\gamma} \quad \Rightarrow \eta_{\text{apparent}} \text{ dépend de } \dot{\gamma}$$

🧪 Pour un **fluide newtonien** :

$$\tau_{xy} = \eta \frac{dv_x}{dy} \quad \Rightarrow \text{relation **linéaire**, viscosité constante}$$

🔄 Pour un **fluide non newtonien**, cette relation devient **non linéaire** :

$$\tau_{xy} = f\left(\frac{dv_x}{dy}\right) \quad \Rightarrow \eta_{\text{apparent}} = \frac{\tau_{xy}}{dv_x/dy} \quad \text{qui dépend de } \frac{dv_x}{dy}$$

📊 Tableau synthèse des fluides non newtoniens

Type de fluide	Forme de $\tau_{xy}(dv_x/dy)$	Effet	Exemples
Newtonien	$\tau = \eta \frac{dv_x}{dy}$	viscosité constante	Eau, air
Pseudoplastique	$\tau < \eta \frac{dv_x}{dy}$	viscosité diminue quand dv_x/dy ↑	**Peinture, sang, ketchup**
Dilatant (shear thick.)	$\tau > \eta \frac{dv_x}{dy}$	viscosité augmente quand dv_x/dy ↑	Maïzena + eau
Plastique de Bingham	$\tau = \tau_c + \eta \frac{dv_x}{dy}$ si $\tau > \tau_c$, 0 sinon	seuil à franchir pour s'écouler	Dentifrice, pâte
Rhéofluidifiant	$\eta_{\text{apparent}} \downarrow$ avec le temps	fluidifie sous cisaillement prolongé	Encre, colle fraîche
Rhéoépaississant	$\eta_{\text{apparent}} \uparrow$ avec le temps	épaissit sous cisaillement prolongé	Solutions de polymères

🍅 Focus sur le ketchup :

- C'est un **fluide pseudoplastique**.
- Sa viscosité diminue quand on agite (ou tape sur la bouteille).
- Il a aussi un comportement **plasto-visqueux** : il faut une contrainte seuil pour démarrer l'écoulement → **comportement de Bingham modifié**.

🧩 Pourquoi c'est important ?

- En ingénierie, chimie, biologie : ces fluides sont très fréquents.
- Les modèles classiques (loi de Stokes, Navier-Stokes) **ne s'appliquent pas directement**.
- Il faut utiliser des **lois de comportement spécifiques** (modèle de Bingham, Ostwald-de Waele, etc.).

Questions sur la Manip

Q: Quelles sont les hypothèses de validité de la loi de Stokes ?
R: C'est valide en régime visqueux, Re<<1 et on ne prend pas en compte les effets de bords (particule dans milieu infini)

Q: Si on veut négliger les effets de bords, quelle est le critère à vérifier ? Est-on dans ce cas ?
R: Il faut $R < 100\ R_{cuve}$, on a à peu près un facteur 100 avec une cuve qui a un rayon de 10 cm.

Q: vous mesurez la viscosité de la glycérine mais est-ce bien de la glycérine ? Pourquoi on remplace la glycérine par l'huile silicone ?
R: Non, c'est de l'huile silicone. La glycérine se détériore dans le temps car elle est hydrophile et on ne connait jamais la quantité d'eau qui a été absorbée.

Q: De quoi dépend la viscosité ?
R: La viscosité dépend de la température. Pour un liquide, plus T augmente, plus les molécules bougent vite et les liaisons intermoléculaires deviennent plus faible donc la viscosité diminue. Elle suit une loi type Arrhenius (avec Ea énergie d'activation pour l'écoulement). Pour un gaz, c'est l'inverse, la viscosité augmente avec T.

Q: Quelle est la définition de la viscosité ? Comment s'appelle cette loi ?
R: Sur un élément $d\vec{S} = dS\,\vec{e_z}$ on a une force selon x qui vaut :$dF_x = dS\eta\dfrac{dv_x}{dz}$. Le coefficient de viscosité est alors défini comme ce terme η. C'est la loi de Newton

Q: Quelles hypothèses avez-vous faites pendant ce montage ?
R: Que les fluides sont newtoniens.

Q: Est-ce que vous avez des exemples de non-Newtonien ?
R: Ketchup, Maizena et eau, peinture.

Q: Quel est l'effet de la hauteur de la cuve ?
R: On a un régime transitoire au début de la chute. A la fin de la chute, on peut avoir un effet de bord. C'est pour cela qu'on n'étudie que la trajectoire intermédiaire.

Q: Quelles sont les précautions à prendre pour bien lâcher la bille ?
R: Le temps caractéristique du régime transitoire est faible (de l'ordre de 0,1s), il est donc inutile de s'attarder à la lâcher à une vitesse contrôlée. Par contre, il faut essayer au maximum de la lâcher au centre de la cuve.

Q: Quel temps faut-il prendre entre deux expériences pour que la cuve revienne à l'équilibre ?
R: On a une taille caractéristique de la cuve de 20 cm, et un coefficient de viscosité cinématique de $10^{-3}\ m^2s^{-1}$. On arrive à un temps caractéristique : $\dfrac{0.2^2}{10^{-3}} = 40\ s$. En

pratique, avec l'étude numérique le temps entre deux manipulations est de plusieurs minutes donc ce n'est pas un problème.

Q: Quel est l'effet de la rotation de la sphère ?
R: S'il y a rotation, on verra un effet Magnus qui dévie la trajectoire de la bille dans la direction perpendiculaire au mouvement.

Q: Est-ce qu'on le voit ici ?
R: Sur les mesures, les fluctuations dans la direction horizontale sont de l'ordre de 0,1mm donc négligeable. On ne voit pas l'effet Magnus ici.

Q: Comment s'assurer qu'on a la bonne échelle de longueur avec les questions de parallaxe ?
R: On met la règle dans le plan de lâcher normal à l'axe caméra-cuve.

Q: Comment s'assurer de lâcher la bille au centre ?
R: On peut mettre le chapeau de la cuve et il y a un trou au centre : on lâche à cet endroit.

Q: Comment s'assurer de la verticalité de l'image ?
R: On peut mettre un niveau à bulle ou un fil à plomb (ou même le niveau de l'eau) et régler avec Tracker.

Titre : Notion de viscosité d'un fluide : écoulements visqueux

Présentée par : Gwilherm JASPARD **Rapport écrit par** : Hubert COSTE

Correcteur : Philippe GONDRET **Date** : 29/01/25

Bibliographie		
Titre	**Auteurs**	**Éditeur**
Tout-en-un, PSI (édition 2022)	S. Cardini, E.Ehrhard, et al.	Dunod
Tout-en-un, PC (édition 2004)	Sanz, Salamito, Chardon, Vandenbrouck	Dunod

Compte-rendu détaillé de la leçon

Eléments imposé : Présenter l'intérêt du nombre de Reynolds dans la conception d'objets aérodynamiques.

***Niveau choisi pour la leçon* :** CPGE, $2^{ème}$ année

***Pré-requis* :**

- Diffusion
- Description des écoulements
- Dérivée particulaire et conservation de la masse
- Equivalent volumique des forces de pression

Introduction : Expérience de la chute d'une bille dans une huile de silicone et observation d'une vitesse limite :il existe une force opposée au poids de la bille.

<u>Objectif/problématique</u> : comment la modéliser ?

I / Forces de cisaillement

A] Approche expérimentale et viscosité dynamique

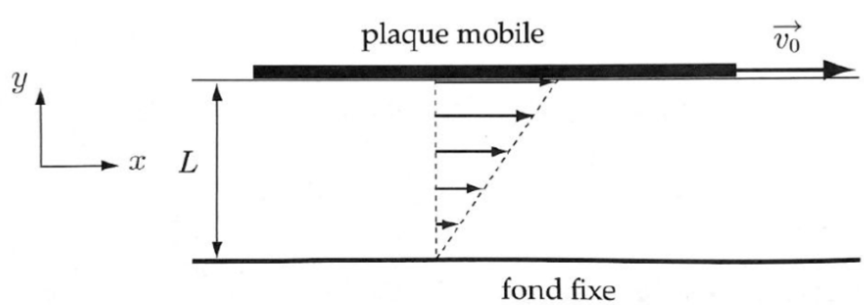


Figure 10.5 – Écoulement de cisaillement.

Macroscopiquement, on peut montrer que la force qu'exerce la plaque sur le fluide est :

$$\vec{F} = \eta \frac{v_0 S}{L} \vec{e}_x$$

avec η la viscosité dynamique.
Ordre de grandeur :

Fluide	air	eau	huile	huile silicone
Viscosité dynamique η	1.8x10^{-5} Pl	1.0x10^{-3} Pl	0.1 Pl	0.5 Pl

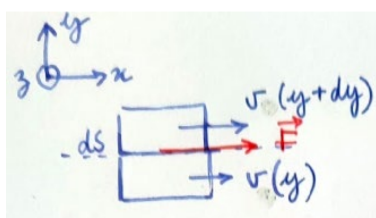
B] Loi de Newton

Hypothèses sur l'écoulement :

- de cisaillement $v = v(y,t)\overrightarrow{e_x}$
- incompressible
- fluidenewtonien

A l'échelle mésoscopique, la forcetangentielle appliquée par une particule fluide du dessus sur celle du dessous est :

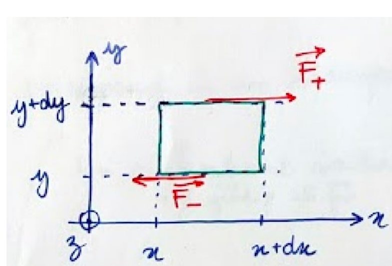
$$d\vec{F} = \eta \frac{\partial v}{\partial y} dS \, \vec{e}_x$$



On a besoin d'exprimer cette force surfacique sous forme volumique afin de l'introduire dans l'équation de Navier-Stokes.

C] Forces de viscosité

On définit les forces de viscosité comme l'équivalent volumique des forces de cisaillement (sous les mêmes hypothèses).



$$d\vec{F} = d\overrightarrow{F_+} - \overrightarrow{F_-} = \eta\left(\frac{\partial v}{\partial y}(y+dy) - \frac{\partial v}{\partial y}(y)\right) dx \, dz \, \vec{e}_x == \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(y) \, d\tau$$

Donc en terme volumique :

$$\vec{f}_{visco} = \eta \Delta \vec{v}$$

D] Equation de Navier-Stokes

On obtient donc l'équation de Navier-Stokes qui exprime la variation de quantité de mouvement volumique $\mu\vec{v}$:

$$\mu\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \eta\Delta\vec{v} + \vec{f}_{vol}$$

Avec des termes décrivant :
- Transport convectif : $\mu(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}$
- Transport diffusif :$\eta\Delta\vec{v} = \nu\Delta(\mu\vec{v})$

E] Nombre de Reynold

Ce nombre (sans dimension)permet de comparer les termes de convection et de diffusion, donc :

$$Re = \frac{"convection"}{"diffusion"} = \frac{||\mu(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}||}{||\nu\Delta(\mu\vec{v})||} = \frac{\mu UL}{\eta}$$

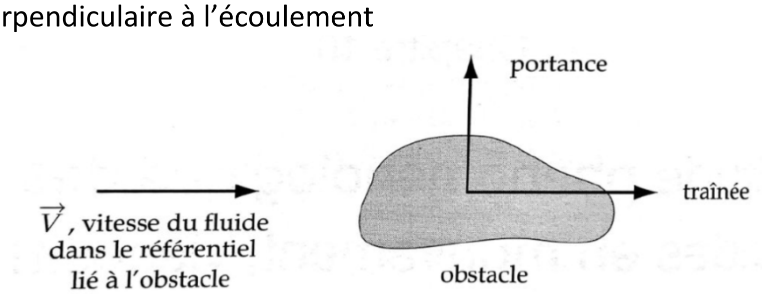
En notant respectivement la vitesse et la taille caractéristique de l'écoulement$||\vec{v}||\sim U$ et L.

Dans le cas de l'huile silicone avec $L \sim 2$ mm, $v \sim 0.04$ m/s et $\nu \sim 5.10^{-4}$m²/s . Ici,on a en ordre de grandeur $Re\sim 0.2$.

II / Force exercée par un fluide en écoulement

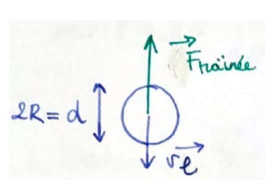
A] Portance et trainée

On appelle les forces exercées par l'écoulement sur un objet :
- Trainée si parallèle à l'écoulement
- Portance si perpendiculaire à l'écoulement



B] Approche expérimentale

On définit le coefficient de trainée (sans dimension) pour une sphère : $C_x = \frac{F_r}{\frac{1}{2}\mu\pi R^2 {v_l}^2}$



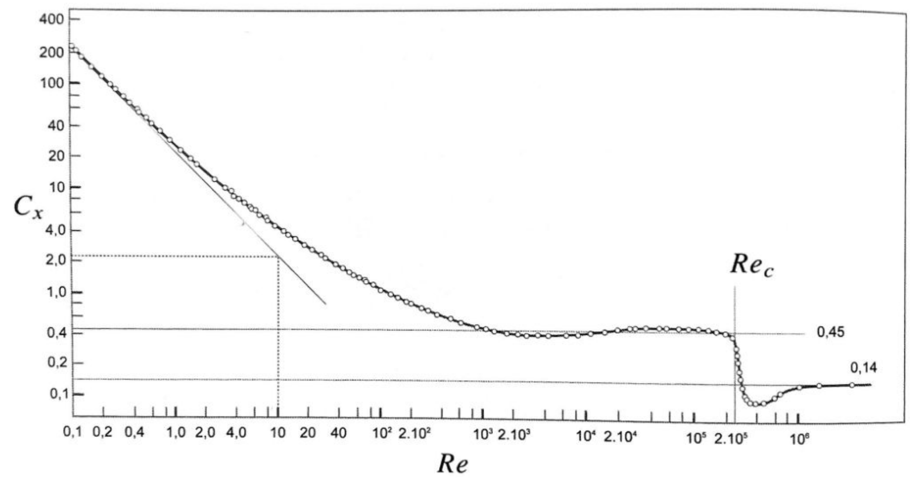


Figure 17.2 – C_x en fonction du nombre de Reynolds pour une sphère lisse.

Identification de 3 zones :

- Bas Re : relation linéaire $C_x \propto 1/Re$
- Haut Re : $C_x = cst$
- Re moyen : pas de relation simple entre C_x et Re

C] Zone des bas Reynolds (régime visqueux) : loi de Stokes$Re < 1$

Graphiquement, on a$\log(C_x) = -\log(Re)$ *+ 1.4 donc* $C_x = 10^{1.4}/Re$Ainsi, la force de trainée peut s'exprimer *:*

$$\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{v}$$

On comprend alors l'existence d'une vitesse limite, observée lors de la chute de la bille dans l'huile silicone.

D] Force de trainée à haut Reynolds (régime inertiel)$10^3 < Re < 10^5$

Dans ce cas, C_x est indépendant de Re, donc

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}\mu\pi R^2 C_x v\,\vec{v}$$

$C_x$doit être déterminé expérimentalement en fonction du système considéré.

Obstacle 2D	C_x	Obstacle 3D	C_x
cylindre circulaire	1,22	sphère	0,45
demi-cylindre circulaire plein	1,16	demi-sphère pleine	0,42
demi-cylindre circulaire creux	1,20	demi-sphère creuse	0,38
demi-cylindre circulaire creux	2,3	demi-sphère creuse	1,42
ruban plan	1,86	disque circulaire	1,14
cylindre carré	2,05	cube	1,05

Figure 17.7 – Coefficients de traînée pour des formes simples.

2D : extension infinie suivant une direction. Pour la bille étudiée, on a donc $C_x = 0.45$.

La puissance de l'utilisation d'un nombre sansdimension (comme Re ou Cx) est qu'ils permettent de comparer des situations très diverses (fluide différents et objets de dimensions différentes).

On peut ainsi travailler l'aérodynamisme d'objets réel en utilisant des modèles réduits. Prenons l'exemple d'un sous-marin :

Sous-marin réel	Maquette en soufflerie
L ~ 5 m	L ~ 1 m
U ~ 1 $m.s^{-1}$	U ~ 50 $m.s^{-1}$
ν(eau) = 1.0×10^{-6} $m^2.s^{-1}$	ν(air) = 1.5×10^{-5} $m^2.s^{-1}$
Re ~ 5×10^{-5}	Re ~ 5×10^{-5}

Nombre de Reynolds et modélisation expérimentale

<u>Ouverture</u> : Autre utilisation du nombre de Reynolds : simplification de l'équation de Navier-Stokes

Expérience(s) réalisée(s) :*chute d'une bille dans une cuve d'huile silicone (traitement uniquement qualitatif)*

Questions posées par l'enseignant (avec réponses)

Question : Est-ce la viscosité de l'eau qu'on ressent en marchant dans une piscine ?

Réponse : On peut calculer le Re associé :

$$Re = \frac{UL}{\nu} \sim 10^5 \gg 1$$

On est en régime inertiel, pour lequel la force de trainée est indépendante de la viscosité, donc ***non****, c'est la densité (masse volumique) de l'eau qui est ressentie.*

Question : Quelle est l'origine de loi de Stokes (analytique, empirique, numérique, …) ?

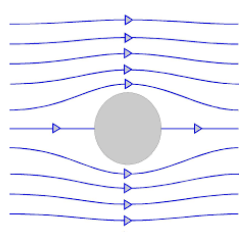
Réponse : La démonstration analytique est possible et a été réalisée par Stockes à la fin du 19ème siècle (1880). Il faut déterminer le champ de vitesse partout dans le fluide pour ensuite calculer les contraintes (normales et tangentielles)

Question : Idem pour la loi à haut Reynolds ? Comment est estimé C_x = 0.45 pour une sphère ?

Réponse : Les valeurs de Cx sont obtenues expérimentalement.

Question : Quel est l'allure des lignes de courant pour l'expérience réalisée ?

Réponse :



Attention, cela correspond aux lignes de courant dans le référentiel de la sphère. Les lignes de courant dans le référentiel du laboratoire ne sont pas du tout celles-là et il faudrait être capable de tracer leur allure…

Question : Peut-on négliger les effets des parois latérales ?

Réponse : Oui car le rayon de la cuve est de l'ordre de 10 cm, celui de la bille de 2 mm. On a donc 2 ordres de grandeur. Cependant, les effets de bords ne sont plus négligeables vers le fond de la cuve. Le champ de vitesse autour d'une sphère varie en 1/r avec donc des interactions à longue portée. Il faut donc que le récipient de diamètre soit beaucoup plus grand que la sphère pour qu'il n'y ait pas d'effets de parois.

Question : Comment estimer la distance nécessaire pour atteindre la vitesse limite ?

Réponse : La bille est soumise à une force de trainée, au poids et à la poussée d'Archimède. On peut donc estimer le temps caractéristique à partir duquel la bille cesse d'accélérer.

Question : Comment définir le nombre de Reynolds dans le cas général, que faire du terme de pression ?

Réponse : Il faut comparer le terme de viscosité avec le gradient de pression. On doit donc définir une pression caractéristique basée sur la viscosité et le gradient typique de vitesse (cf. cours).

Question : Comment comprendre la notation $Re = \frac{"convection"}{"diffusion"}$ **?**

Réponse : C'est un rapport de forces volumiques qui correspond aussi à un rapport de temps caractéristiques de diffusion / convection :

- *Temps visqueux :* $\tau_{\text{visq}} = \mathrm{L}^2/\nu$
- *Temps de convection :* $\tau_{\text{conv}} = \mathrm{L}/\mathrm{U}$

Or, les temps caractéristiques sont inversement proportionnels à la force, donc

$$\mathrm{Re} = \tau_{\text{visq}}/\tau_{\text{conv}}.$$

Question : Quelle est le domaine de validité de la loi de Stokes ? L'objet considéré est-t-il nécessairement solide?

Réponse : La sphère est supposée indéformable et les vitesses (normale et tangentielles) à la surface de la sphère sont supposées être égales à la vitesse de la sphère (condition de non-glissement à la paroi). Elle n'est donc pas valide pour une sphère fluide (par exemple une bulle d'air dans un liquide) car les conditions aux limites ne sont pas les mêmes (il y continuité des vitesses à l'interface mais il peut y avoir une vitesse de fluide à l'intérieur…)

Question : Que ce passe-t-il si l'écoulement est compressible ?

Réponse : L'expressiondes forces de viscosité n'est plus aussi simple.

Question : Si le fluide n'est pas newtonien ?

Réponse : La viscosité est fonction de la contrainte appliquée. Le terme visqueux alors plus un Laplacien mais il faut revenir au terme de divergence du tenseur des contraintes en prenant en compte l'équation constitutive du fluide (équation liant les contraintes aux gradients de vitesses) qui n'est plus simplement linéaire.

Question : Si l'écoulement n'est pas de cisaillement (par exemple si $v_x(x)$ **)**

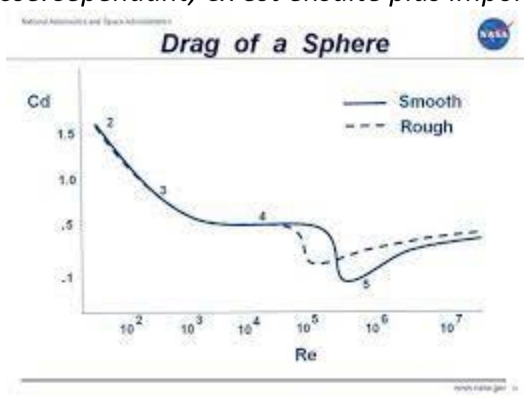
Réponse : Supposer l'écoulement incompressible et le fluide newtonien est suffisant pour pouvoir exprimer les forces de viscosité comme $\vec{f}_{visco} = \eta\Delta\vec{v}$*. Il faut acoir conscience que si l'écoulement n'est pas de cisaillement mais extensionnelle, il peut se développer des contraintes normales visqueuses.*

Question : Sur le graphique $C_x(Re)$**, on observe un décrochage vers 2.10**^{5} **(c*rise de la trainée / paradoxe d'Eiffel)*. Quelle en est la signification physique ?**

Réponse : Ce décrochage (chute de la trainée) correspond à l'amincissement de la zone de turbulence située derrièrel'objet. On utilise ce phénomène pour réduire la trainée des balles de golf en les réalisant rugueuses (non lisses).

Question : La crise de la trainée a-t-elle lieu avant ou après pour une sphère lisse ?

Réponse : Dans le cas d'une sphère rugueuse, ledécrochage a lieu plus tôt (Re critique plus faible) que pour une sphère lisse.Cependant, Cx est ensuite plus importante pour Re > Re_c.



Question : Dans la construction d'une séquence pédagogique, l'étude d'un fluide parfait doit-elle avoir lieu avant ou après celle de la viscosité ?

Réponse : Tout est possible. Etudier le modèle du fluide parfait après la viscosité peut permettre de bien cerner les limites et les avantages de cette modélisation. Cependant, c'estcontraire à l'approche historique(fluide parfait avant l'étude de la viscosité).

Question : Quelle est la dépendance du coefficient de viscosité dynamiqueη avec la température ? Est-elle identique pour tous les fluides ?

Réponse : Pour un <u>gaz</u> : si T élevée = agitation thermique importante = temps de diffusion faible = viscosité importante. La valeur de η augmente donc avec la température.
Pour un <u>liquide</u>, c'est le contraire, la viscosité diminue lorsque la température augmente (cf. huile sur une poêle).

Question : Quelle est la dépendance de la viscosité η avec la pression ?

Réponse : Elle est indépendante de la pression pour un gaz, et il existe dépendance importante (exponentielle) pour les liquides.

Commentaires lors de la correction de la leçon

Remarques générales :
Bonne leçon. La présentation était assurée etclaire avec un plan bien structuré.

Il vaut mieux distinguer : « nombre adimensionné » et« grandeur sans dimension ».

Le choix de l’exemple du passage obligé n’est pas le bon. Il est plus courant de réaliser une maquette dans l’eau d’un objet réel ayant vocation à évoluer dans l’air.

Exemples de « passages obligés » sur cette leçon

Traiter des écoulements en conduite et des pertes de charges associées

Compte-rendu de leçon de physique
Candidat : Hervé Schrimpf – Jury : Philippe Gondret
Compte-rendu : Clément Raphin
17 janvier 2023

Notion de viscosité d'un fluide. Ecoulements visqueux

Bibliographie			
Titre	Auteurs	Editeur	Année
Ce que disent les fluides	Guyon, Hulin, Petit	Belin	2011 (2ème éd.)
Hydrodynamique physique	Guyon, Hulin, Petit	CNRS éditions	2001 (2ème éd.)
*Tout-en-un PC/PC**	Sanz et al.	Dunod	2022 (6ème éd.)
Mécanique des fluides	Salin	Nathan Université	1997
Notes de cours	Marc Rabaud	Site de Montrouge	2019
Diapos du cours	Philippe Gondret	Site de Montrouge	2023

Plan détaillé

Niveau choisi pour la leçon : Licence
Prérequis :

— Hydrodynamique
— Cinématique des fluides
— Fluide parfait
— Equations de diffusion

Slide : Intro : eau et miel 30"
Ecoulement de l'eau et écoulement du miel : propriétés différentes. On va s'intéresser à ce qui différencie ces deux phénomènes.
Slide : Ecoulement de Couette plan 1'40"
Un fluide compris entre deux plans en mouvement rectiligne de cisaillement a une distribution de vitesse linéaire.
On peut introduire une force de frottement, qui représente le cisaillement du fluide entre ces deux plaques.
Slide : Equation de diffusion de la quantité de mouvement 4'15"

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

Slide : Viscosités cinématiques et dynamiques de quelques fluides newtoniens 6'
On a reporté quelques valeurs assez disparates pour la viscosité dynamique, alors qu'elles sont proches pour la viscosité cinématique. On préfèrera utiliser la première, qui se comprend mieux phénoménologiquement.

I – Viscosité

8'

Slide : Equation de Navier-Stokes pour un fluide newtonien incompressible

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}.\boldsymbol{\nabla})\vec{v}\right)=-\boldsymbol{\nabla}P+\rho\vec{g}+\eta\vec{\Delta}\vec{v}$$

Discussion des différents termes : instationnaire, advectif (ou inertiel), de pression, de pesanteur et de viscosité.

Slide : Nombre de Reynolds 9'

On introduit un nombre adimensionné, dit nombre de Reynolds :

$$Re=\frac{\|(\vec{v}.\boldsymbol{\nabla})\vec{v}\|}{\|\eta\Delta\vec{v}\|}=\frac{UL}{\nu}$$

Slide : Equation de Navier-Stokes adimensionnée 10'20

On peut réécrire l'équation de Navier-Stokes en n'utilisant que des grandeurs adimensionnées, ce qui fait alors apparaître le nombre de Reynolds.

Slide : Valeurs de Re 12'

Notion d'écoulement laminaire, écoulement turbulent.

Exemple d'un robinet : lorsqu'on ouvre légèrement le robinet, le filet d'eau s'écoule de manière uniforme. Lorsqu'on augmente le débit, on observe un régime turbulent.

Slide : Déformations d'un filet de colorant 13'20

On injecte un filet de colorant dans un écoulement, et on observe ce qu'il se passe pour plusieurs valeurs de Re. Plus Re est élevé, plus l'écoulement est turbulent.

Slide : Ecoulement autour d'un cylindre fixe 14'20"

Apparition de vortex pour Re élevé. Il faut des outils plus précis pour décrire l'écoulement.

Slide : Notion de couche limite 15'45"

On peut faire une analogie avec l'effet de peau pour un conducteur ohmique. Au-delà de la couche limite, l'écoulement est décrit par un écoulement de fluide parfait, mais près de la paroi, c'est un écoulement visqueux.

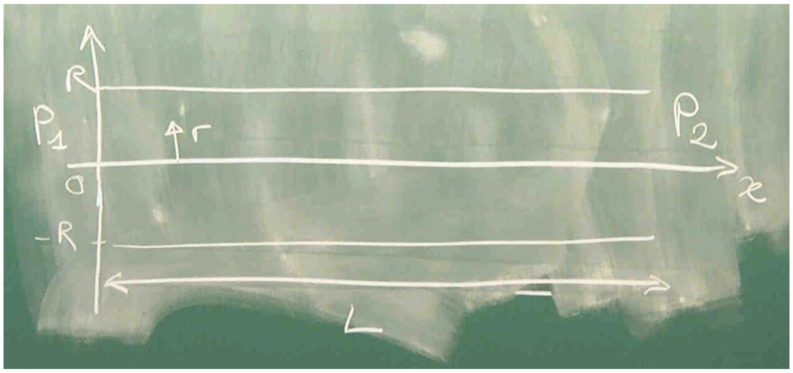
Slide : Couche limite laminaire près d'une plaque plane avec écoulement uniforme 16'50"

$$\delta=\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

II – Ecoulements visqueux

18'

1. Ecoulement de Poiseuille cylindrique



On considère deux plaques plan parallèles, avec une symétrie cylindrique. En amont, on a la pression P_1, en aval, P_2.
Hypothèses :

- Ecoulement incompressible
- Régime stationnaire

L'équation de Navier-Stokes s'écrit alors :

$$\vec{0} = -\boldsymbol{\nabla} P + \rho \vec{g} + \eta \vec{\Delta} v$$

Vu les symétries, on s'attend à avoir $v(\vec{M}) = v_x(r)\vec{u_x}$, et $p(M) = p(x, r)$. En projetant suivant les axes :

$$\begin{cases} \dfrac{\eta}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v_x}{\partial r}\right) = \partial_x p \\ 0 = \partial_x p + \rho g \end{cases}$$

On obtient alors $p(x, r) = -\rho g r + Ax + B$ Ecrivons les conditions aux limites : 23'30"

$$\begin{cases} p(x = 0, r) = P_1 \\ p(x = L, r) = P_2 \end{cases}$$

ce qui impose $A = \frac{P_2 - P_1}{L}$ et $B = P_1$ Alors

$$p(x, r) = \frac{P_2 - P_1}{L}x + P_1 - \rho g r$$
$$\text{soit } \partial_r(r\partial_r v_x) = \frac{P_2 - P_1}{\eta L}r$$

En intégrant deux fois, on obtient alors

$$v_x(r) = \frac{P_2 - P_1}{4\eta L}r^2 + D$$

où l'on trouve la constante en écrivant que $v_x(R) = 0$. On obtient ainsi :

$$v_x(r) = \frac{P_2 - P_1}{4\eta L}(R^2 - r^2)$$

29'30"

On peut enfin s'intéresser au débit volumique :

$$D_v = \int_0^{2\pi}\int_0^R v_x(r) r dr d\theta = \pi\frac{\Delta P}{128\eta L}d^4$$

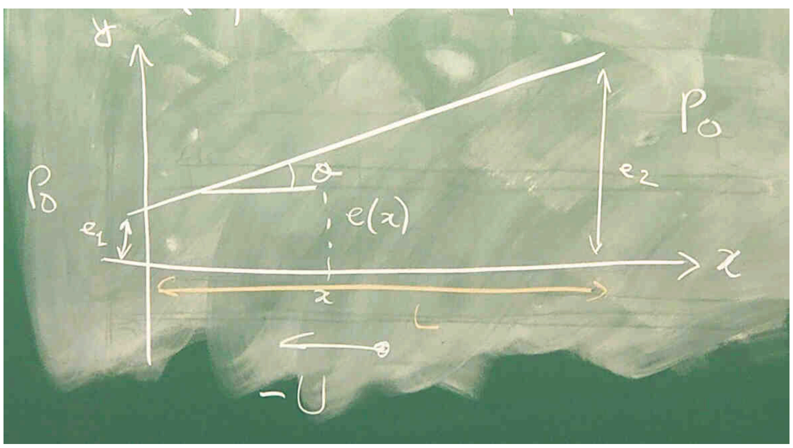
C'est la **loi de Hagen-Poiseuille.** 32'

Si l'on double le diamètre de la conduite, toutes choses égales par ailleurs, le débit est alors multiplié par 16.

2. Ecoulement quasi-parallèle

33'30"

On lance une feuille sur la table : elle glisse une certaine distance. Si on perce la feuille, un lancer dans les mêmes conditions donnera une distance plus faible. 35'30"



On se place dans le cas d'un écoulement stationnaire dans le référentiel de la feuille. On considère une feuille inclinée d'un angle θ faible, de manière à avoir $e(x) = e_1 + \theta x$ Des approximations permettent d'établir que :

$$\begin{cases} \eta\partial_x^2 v_x = \partial_x P \\ \partial_y P = 0 \implies P(x,y) = A + f(x) \end{cases}$$

En intégrant :

$$v_x(x,y) = \frac{1}{2\eta}\frac{dP}{dx}y\left(y - e(x)\right) - U\left(1 - \frac{y}{e(x)}\right)$$

Superposition d'un écoulement de Poiseuille et de Couette plan.

III – Conclusion

40'

Slide : Conclusion On a vu plusieurs écoulements de fluides newtoniens, mais il existe également des fluides non-newtoniens : on peut définir des viscosités élongationnelles. Même pour les vaisseaux sanguins, le fluide n'est pas newtonien.
Fin. 41'

Questions posées par les enseignant·e·s, et réponses

Q° *Que représente l'image du milieu sur la slide de conclusion ?*
C'est une imagerie par effet Doppler ultrasonore d'une artère : les zones rouges indiquent une vitesse élevée, les vertes moins élevées.

Q° *C'est quoi comme type de fluide, le sang ?*
Il y a des globules, qui doivent pouvoir passer même dans les capillaires : ils sont capables de s'étirer. Certaines maladies font perdre l'élasticité des globules rouges, ce qui entraîne des thromboses ou des anévrismes.

Q° *Qu'est-ce qu'il y a comme grandes classes de fluides non-newtoniens ?*
Pour un fluide non-newtonien, la viscosité n'est pas constante par rapport au taux de cisaillement. Selon les cas, on peut définir une viscosité élongationnelle, notamment pour des polymères.

Q° *Plus précisément ?*
Il y a de la visco-élasticité, des fluides rhéo-épaississants : η augmente..., rhéo-fluidifiants, thixotropes...

Q° *Qu'est-ce qu'un fluide rhéo-épaississant ? Et thixotrope ?*
η varie... → Rhéo-épaississant (resp. fluidifiant) : la viscosité augmente (resp. diminue) lorsque le taux de cisaillement augmente. Thixotropie : la viscosité diminue avec le temps d'application du cisaillement (ex : ketchup). Il y a une micro-structure qui dépend de l'histoire du cisaillement. C'est encore plus compliqué !

Q° *Est-ce que la viscosité élongationnelle est caractéristique des fluides non-newtoniens, ou bien elle existe dans les fluides newtoniens ?*
Seulement dans les non-newtoniens. → La viscosité élongationnelle existe pour les fluides newtoniens. Compte-tenu de sa définition il y a un facteur 3 par rapport au coefficient de viscosité dynamique mesuré en cisaillement. Pour des fluides viscoélastiques, la viscosité élongationnelle peut être plus élevée de plusieurs ordres de grandeurs par rapport à la viscosité dynamique mesurée en cisaillement.

Q° *Si on revient à la première diapo, de quel type de viscosité s'agit-il ?*
Pour le miel, il y a de la viscosité dynamique mais aussi de la viscosité d'élongation.

Q° *Vous avez présenté quelques valeurs de viscosité à 20°C de différents fluids comme l'air et l'eau. Y-a-t-il une dépendance de ces différents fluides avec la température ?*
Si on augmente la température de l'eau, sa viscosité diminue. Pour l'air, je dirais que la viscosité

augmente quand la température augmente.

Q° *Et si on fait varier la pression, y a-t-il une dépendance ? Si oui, dans quel sens ?*
Je pense qu'il y aura une dépendance avec la pression, mais je ne saurais dire de quelle nature. Si on augmente la pression, je dirais que la viscosité diminue. Une particule est contrainte par une sorte de "cage" formée par les autres particules. → La viscosité d'un gaz ne dépend pas de la pression sur une grande gamme de pression car le libre parcours moyen qui est inversement proportionnel à la pression compense le nombre de molécules par unité de volume qui augmente avec la pression (voir calcul par la théorie cinétique des gaz parfaits). A très basse pression, on peut avoir un effet de baisse de viscosité apparente dû au libre parcours moyen qui devient non négligeable devant les dimensions du dispositif de mesure. A très haute pression, on peut avoir un effet d'augmentation de la viscosité car le libre parcours moyen n'est plus très grand par rapport à la taille des molécules (effet de covolume pour les gaz réels). Pour un liquide, la viscosité augmente avec la pression. Ceci peut se comprendre par le modèle de cage où la sortie de cage est moins facile à plus forte pression car l'énergie de sortie de cage est plus élevée.

Q° *Si on considère l'air comme un gaz parfait, est-ce qu'il peut avoir une viscosité ? En d'autres termes, un gaz parfait est-il un fluide parfait ?*
Je ne sais pas. → Un gaz parfait n'est pas un fluide parfait car un gaz parfait possède une viscosité non nulle (voir théorie cinétique des gaz parfaits)

Q° *Dans l'équation de Navier-Stokes adimensionnée, il n'y a plus de terme de gravité...*
Oui, on l'a négligé : si la gravité intervient, il faut introduire le nombre de Froude.

Q° *Dans cette équation adimensionnée, le dernier terme est en $1/Re$. Si on considère $Re \geq 1$, on retombe sur...*
L'équation d'Euler des fluides parfaits !

Q° *A l'inverse, à Re très faible, le laplacien tend vers l'infini et apparait comme le seul terme à garder dans l'équation, non ?*
Non, il faut regarder les caractéristiques u, ν, L : en fonction des cas, on pourra négliger le terme inertiel.

Q° *J'ai un peu du mal à comprendre...*
L'équation de NS adimensionnée est utile pour montrer l'importance du nombre de Reynolds, mais il faut peut-être plutôt utiliser l'autre équation pour bien voir. → Dans l'adimensionnement classique de l'équation de Navier-Stokes, on prend comme échelle de pression ρU^2, ce qui est pertinent quand l'écoulement est inertiel ($Re \gg 1$) mais pas quand l'écoulement est visqueux ($Re \ll 1$) pour lequel il est plus pertinent de prendre comme échelle de pression $\eta U/L$. Dans le cas $Re \ll 1$, cet adimensionnement plus pertinent conduit alors à garder le terme visqueux et le terme de pression. L'équation de Navier-Stokes se simplifie en l'équation de Stokes.

Q° *Dans l'écoulement de Poiseuille, si on regarde le gradient de pression $\partial_x P$, comment est le profil de pression le long du tube ?*
Il suit une loi affine.

Q° *Et si on remplace l'eau par de l'air dans le tube ?*
La viscosité cinématique pour l'air et l'eau est à peu près la même, donc on est à peu près au même Reynolds. Mais l'air est compressible !

Q° *Et alors, il n'y a pas de profil de Poiseuille ? (En régime stationnaire)*
Il faut prendre l'équation de Navier-Stokes compressible, la résolution ne sera pas la même. Il y aura du $\rho\vec{v}$ dans le gradient... $\rightarrow$ La compressibilité de l'air ne modifie pas le profil de vitesse (parabolique de Poiseuille) mais le profil de pression qui n'est plus tout à fait linéaire. En effet, comme p diminue par perte de charge le long de la conduite, ρ qui est proportionnel à p diminue également...

Q° *Comment on mesure la viscosité ?*
On peut utiliser un viscosimètre de Couette : on prend deux cylindres concentriques avec du liquide entre eux deux.

Q° *Existe-t-il d'autres dispositif que celui-là ?*
Les anémomètres à fil chaud... $\rightarrow$ Attention, un anémomètre est un dispositif qui mesure la vitesse. Il existe d'autre types de viscosimètre de Couette que celui basé sur une géométrie cylindrique : Couette plan ou encore cône-plan avec alors l'avantage que le gradient de vitesse est constant partout. Il existe aussi d'autres viscosimètres : à chute de bille,...

Q° *C'est quoi le rôle d'un anémomètre ?*
Je ne sais pas. $\rightarrow$ Mesurer une vitesse.

Q° *L'équivalent de l'équation de Navier-Stokes pour un fluide compressible, c'est quoi ?*
Le ρ serait dans la dérivée (terme de gauche). $\rightarrow$ Dans le cas compressible, le terme de gauche de l'équation de Navier-Stokes n'est pas affecté mais il y a d'autre termes visqueux que le terme en Laplacien, avec la prise en compte de la viscosité de compression car la divergence de la vitesse n'est plus nulle.

Q° *Et dans le cas non-newtonien (incompressible) ?*
Il faut incorporer le tenseur des contraintes. $\rightarrow$ Il faut considérer l'équation constitutive du fluide considéré liant les contraintes aux gradients de vitesse et réinjecter dans l'équation du mouvement (dans le terme de divergence du tenseur des contraintes).

Q° *C'est un terme en plus ou qui remplace ?*
C'est un terme qui remplace les forces de viscosité.

Q° *Revenons à l'écoulement de Hagen-Poiseuille... tiens d'ailleurs, monsieur Poiseuille d'accord, mais c'est monsieur ou madame Hagen ?*
Je ne sais pas. $\rightarrow$ Jean Léonard Marie Poiseuille, physicien et médecin français du 19ème siècle, et Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen, ingénieur allemand de la même époque.

Q° *Vous avez parlé d'une condition aux limites de vitesse nulle à la paroi. Quelles sont les conditions aux limites qu'il faut considérer dans Navier-Stokes ?*
La paroi a une vitesse nulle, donc le fluide a une vitesse nulle. Cette zone de couche limite est la principale différence avec le fluide parfait : on a toujours la vitesse normale à la paroi qui est nulle, et à l'interface entre deux fluides non-miscibles... $\rightarrow$ Conditions aux limites : les fluides visqueux sont différents des fluides parfaits pour les conditions aux limites à la fois cinématiques et dynamiques. Pour les fluides visqueux il y a continuité des vitesses non seulement normales mais aussi tangentielles aux parois et interfaces (c'est la condition de non-glissement de Navier). Et il y a existence de contraintes tangentielles (égale au produit de la viscosité dynamque par le gradient de vitesse) avec continuité de ces contraintes tangentielles aux parois et interfaces.

→ Et il y a continuité des contraintes normales sauf pour une interface courbe entre deux fluides non-miscibles où existe une saut de pression proportionnel à la tension interfaciale et à l'inverse du rayon de courbure (loi de Laplace).

Q° *Si on regarde une interface air-eau, c'est quoi la condition limite à la surface de l'eau ? Quelles sont les contraintes normales, tangentielles ?*
Les vitesses normales doivent être nulles. → Non, la vitesse normale à l'interface doit être égale à la composante correspondante de la vitesse de l'interface. Mais il y a aussi une condition dynamique de continuité des contraintes tangentielle qui se traduit par une contrainte nulle et donc un gradient de vitesse nul à la surface dans le cas où l'air est au repos au dessus. Pour la contrainte normale ou pression, il y a continuité de la pression et donc pression atmosphérique à la surface si la surface est plane, mais discontinuité de pression avec donc saut de pression gouverné par la loi de Laplace si la surface est courbe, liée à l'existence d'une tension de surface et d'une courbure.

Q° *Dans l'écoulement de Poiseuille, y-a-t-il une contrainte de cisaillement à la paroi ? Où sont les couches limites ?*
Slide : établissement d'un écoulement de Poiseuille depuis un champ de vitesses homogène. → Oui, il y a une contrainte à la paroi qui est égale au produit de la viscosité dynamique par le gradient de vitesse à la paroi car ce gradient n'est pas nul à la paroi (il est même maximum à la paroi). Dans l'écoulement établi de Poiseuille caractérisé par un profil parabolique, les couches limites ont diffusé dans tout le tube.

Q° *Pour $x = x_0$, a-t-on un profil de Poiseuille ou pas ? Où sont les couches limites en x_1 ?*
Non, c'est un profil transitoire. Les couches limites sont indiquées par les courbes en gras.

Q° *Vous avez établi le profil de Poiseuille en écoulement stationnaire, est-ce la seule solution de l'équation de Navier-Stokes dans le tube ? (Sans forcément que l'écoulement soit stationnaire)*
Si l'écoulement est instationnaire... → Le profil de Poiseuille est la seule solution stationnaire des équations de Navier-Stokes mais ce n'est pas la seule solution des équations de Navier-Stokes. Il existe d'autres solutions, avec des fluctuations temporelles et spatiales de vitesse correspondant à un régime turbulent.

Q° *Que vaut le nombre de Reynolds dans le cas de cet écoulement de Poiseuille ?*
En TP, on a mesuré un écoulement de $Re \approx 400$ sur cette manip.

Q° *Est-ce qu'on cet écoulement de Poiseuille à n'importe quel Re ?*
Il faut que $Re < 2000$ sinon il faut prendre en compte des pertes de charges. → Le régime est laminaire (avec donc un profil de vitesse parabolique de Poiseuille) en dessous d'un nombre de Reynolds critique Re_c qui est de l'ordre de 2600 sans prendre de précaution particulière mais Re_c peut être beaucoup plus grand. Dans des expériences très propres, il a été observé un régime laminaire jusqu'à des Re de l'ordre de 10^5. En théorie, l'écoulement de Poiseuille en tube cylindrique est linéairement stable jusqu'à l'infini, mais il est non-linéairement instable vers 2500 : la valeur dépend de l'amplitude du bruit (bifurcation dite sous-critique)...

Q° *A quoi sert le nombre de Reynolds ? Quel régime d'écoulement sert-il à caractériser ?*
La transition laminaire-turbulent. → La valeur du nombre de Reynolds plus petite ou plus grande que 1 sert à savoir si l'écoulement est visqueux ($Re < 1$) ou inertiel ($Re > 1$).

→ Dans les situations d'écoulements parallèles, les termes inertiels sont nuls mais un rien peut les faire exploser... Il existe alors une valeur critique du nombre de Reynolds plus ou moins bien définie selon la nature de la bifurcation, qui sépare le régime laminaire du régime turbulent.

Q° *Est-ce toujours la même valeur de Re qui fait la frontière ? Ca marche quel que soit l'écoulement ?*
Non, on peut avoir des écoulements laminaires à très haut Reynolds. → La valeur critique du nombre de Reynolds qui sépare la régime d'écoulement laminaire du régime turbulent dépend du type d'écoulement.

Q° *Comment calculer Re dans Poiseuille ?*

— U : vitesse moyenne
— L : échelle de variation spatiale de la vitesse : il faut regarder selon quelle longueur se fait le gradient de vitesse.

→ Dans un écoulement en tube c'est suivant le diamètre que se font les gradients de vitesse, dont il faut prendre le diamètre (ou le rayon) pour estimer la valeur du nombre de Reynolds corrrespondant.

Q° *Ecrire l'équation de Navier-Stokes en la projetant suivant $\vec{e_x}$*
.

$$\rho\left(\partial_t v_x + \vec{v}.\left(\partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z\right)\right).\vec{e_x} = -\partial_x P + \eta\left(\partial_x^2 v_x + \partial_y^2 v_y + \partial_z^2 v_z\right)$$

Q° *Ecrire l'équation d'incompressibilité d'un fluide.*
$\partial_t\rho + \rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{v}$ le premier terme est nul, $\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$. → La conservation de la masse s'écrit $\partial_t\rho + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0$ qui peut s'écrire plus simplement $\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$ pour un fluide incompressible.

Retours des enseignant.e.s

Vous avez choisi de faire une leçon niveau licence, avec comme prérequis "hydrodynamique" : c'est vaste ! *Hervé : je voulais mettre : hydrostatique.* Ah, c'est plus clair !
C'est la leçon qui introduit la notion de viscosité et ce qui a été présenté me semble très (trop) ambitieux. Présenter la viscosité et aller jusqu'aux écoulements quasi-parallèles !... Même si le jury est supposé infiniment intelligent, ce n'est pas raisonnable et tenable. Ca ne me semble pas réaliste. Quelqu'un qui découvre sera complèment perdu !
Brendan : J'ai rien compris !
Et quand on brosse un tel panorama, cela ouvre sur tellement de questions ! Par exemple pour les écoulements quasi-parallèles que tu abordes à la fin, tu n'expliques pas les approximations de lubrification (qui en font la beauté) et tu aboutis à un profil de vitesse qui se compose d'un terme de Poiseuille, mais c'est du Poiseuille plan (il aurait fallu le traiter plutôt que le cylindrique), et d'un terme de Couette plan, dont tu n'as pas parlé avant. Ce n'est pas pédagogique.
Je pense qu'il ne faut pas faire les écoulements quasi-parallèles. Ce choix est intenable pédagogiquement. Il y a tellement de choses plus fondamentales et pas faciles à raconter avant. Tu parles dans ton introduction de quelque chose plus lié à la viscosité élongationnelle, et tu ouvres dans ta conclusion sur plein de choses compliquées, qui mettent en jeu de la viscoélasticité. Pourquoi

pas mais il faut vraiment être solide sur tout cela.
Par ailleurs, si l'image avec le filament qui se tortille permet d'illustrer différents types de viscosité, pédagogiquement, c'est un peu mélanger des choses. Il ne faudrait pas que les étudiants se disent que la viscosité c'est un peu comme un comportement solide, ce n'est pas un message valable ! Ce tortillon de viscosité, je ne vois pas ce que l'on peut en dire. Ouvrir sur les fluides non-newtoniens, pourquoi pas : la viscosité ne dépend pas du taux de cisaillement....
Ecoulement parallèle : les lignes de courant sont parallèles, ce qui est le cas quand la vitesse est unidirectionnelle est qu'elle ne dépend pas de cette direction.

Commentaires additionnels des enseignant.e.s

→ Je pense qu'il vaut mieux ne pas trop balancer de choses avec des transparents comme tu l'as fait au début de ta leçon : l'équation de diffusion de la quantité de mouvement, l'équation de Navier-Stokes, son adimensionnement, le nombre de Reynolds et la couche limite sur une plaque plane depuis le bord d'attaque ! Il vaut sans doute mieux expliquer le concept de forces de cisaillement et montrer que cela peut finalement se mettre sous la forme d'un Laplacien. L'équation d'Euler avec ce nouveau terme est alors l'équation de Navier-Stokes. Il peut être bien de mieux introduire le concept de couche limite (par exemple avec le démarrage d'une plaque plane ?) qui fait intervenir le coefficient de viscosité cinématique. Et faire ensuite un régime stationnaire simple (Couette et/ou Poiseuille plan) et peut-être parler du transitoire d'établissement de ce régime stationnaire en lien avec la notion de couche limite. Il serait sans doute bien de présenter une petite démonstration expérimentale en live, sans qu'elle soit forcément quantitative.

LF1 : NOTION DE VISCOSITÉ D’UN FLUIDE

Ecoulements visqueux

EAU COLORÉE ET MIEL

Tiré de flowfluids.weebly

I] NOTION DE VISCOSITÉ DE FLUIDE

a) Description macroscopique de la viscosité

ÉCOULEMENT DE COUETTE PLAN

$$v_x(\mathrm{y}) = V_0 \frac{y}{a}$$

$$\frac{F_x}{S} \propto - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

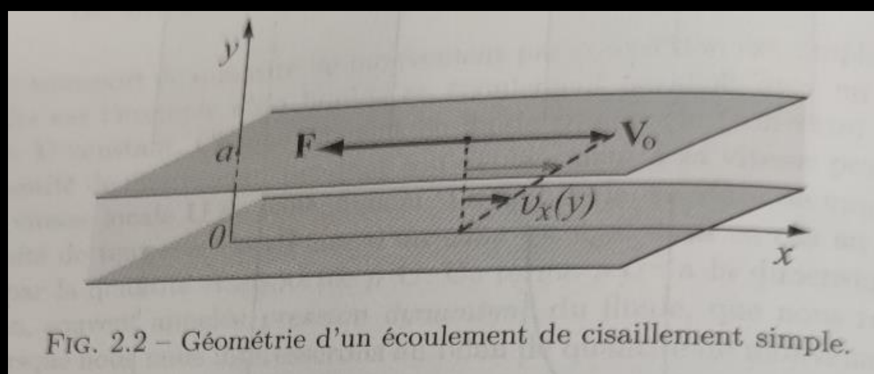
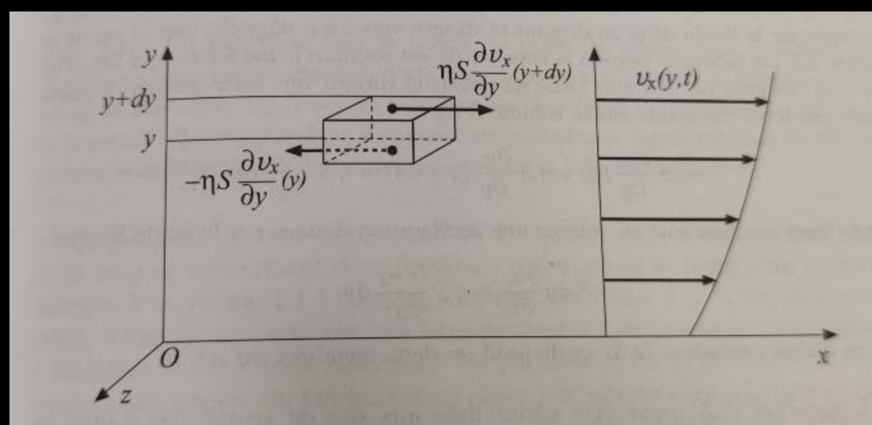


FIG. 2.2 – Géométrie d'un écoulement de cisaillement simple.

Tiré de *Hydrodynamique Physique*, Etienne Guyon et al.

ÉQUATION DE DIFFUSION DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT

$$\boxed{\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}}$$



Tiré de *Hydrodynamique Physique*, Etienne Guyon et al.

	Viscosité dynamique $\eta\,(Pa.s)$	Viscosité cinématique $\nu = \frac{\eta}{\rho}\,(m^2/s)$
Eau (20°C)	10^{-3}	$1,006\ 10^{-6}$
Air (20°C)	$18,2\ 10^{-6}$	$15,1\ 10^{-6}$
Glycérine (20°C)	1,49	$1180\ 10^{-6}$
Mercure (20°C)	$1,55\ 10^{-3}$	$0,116\ 10^{-6}$
CO_2 (20°C, 1 atm.)	$14,7\ 10^{-6}$	$8,03\ 10^{-6}$
H_2 (20°C, 1 atm.)	$8,83\ 10^{-6}$	$105\ 10^{-6}$

TABLE 1.1 – Tableau donnant les viscosités de quelques fluides newtoniens à 20°C.

VISCOSITÉS CINÉMATIQUES ET DYNAMIQUES DE QUELQUES FLUIDES NEWTONIENS

Tiré de *Notes de cours sur les fluides*, Marc Rabaud

I] NOTION DE VISCOSITÉ DE FLUIDE

b) De Navier Stokes à Reynolds

ÉQUATION DE NAVIER STOKES POUR UN FLUIDE NEWTONIEN INCOMPRESSIBLE

De gauche à droite :

1) Terme instationnaire
2) Terme advectif/inertiel
3) Forces volumiques appliquées au fluide
4) Forces de pression
5) Forces de viscosité

$$\boxed{\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad} \right) \vec{v} = \rho \cdot \vec{f} - \overrightarrow{grad}(p) + \eta \Delta(\vec{v})}$$

NOMBRE DE REYNOLDS

- U : vitesse caractéristique de l'écoulement ($m.s^{-1}$)
- L : longueur caractéristique de l'écoulement (m)
- ν : viscosité cinématique ($m^2.s^{-1}$)

$$Re = \frac{\|(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{v}\|}{\|\eta\Delta(\vec{v})\|} = \frac{UL}{\nu}$$

ÉQUATION DE NAVIER STOKES ADIMENSIONNÉE

Quantités sans dimension :

- r' = r/L
- v' = v/U
- t' = t/(L/U)
- p' = p/(ρU²)

$$\boxed{\frac{\partial \overrightarrow{v'}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v'} \cdot \overrightarrow{grad'}\right)\overrightarrow{v'} = -\overrightarrow{grad'}(p') + \frac{\eta}{\rho U L}\Delta'(\overrightarrow{v'})}$$

On peut facilement estimer des ordres de grandeur pour quelques écoulements :

— Une paramécie nageant dans l'eau : $Re \approx 10^{-2}$.

— Un goutte de pluie tombant dans l'air : $Re \approx 1000$.

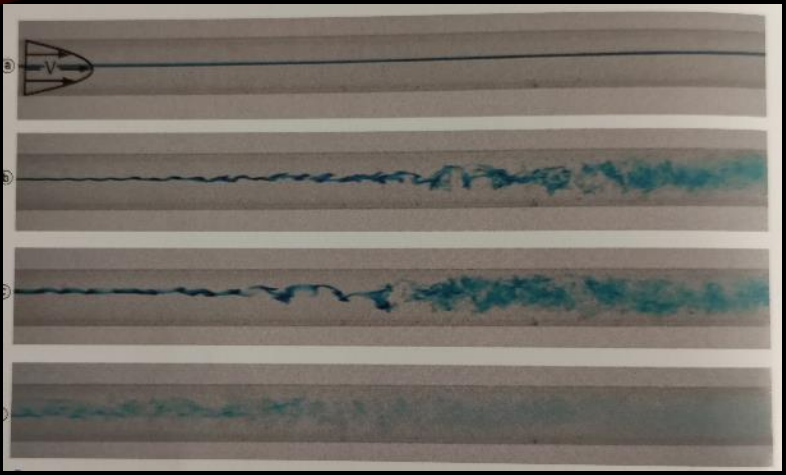
— Sillage d'un marcheur : $Re \approx 30\,000$.

— Sillage d'une voiture : $Re \approx 4 \times 10^6$.

— Sillage d'un avion : $Re \approx 2 \times 10^8$.

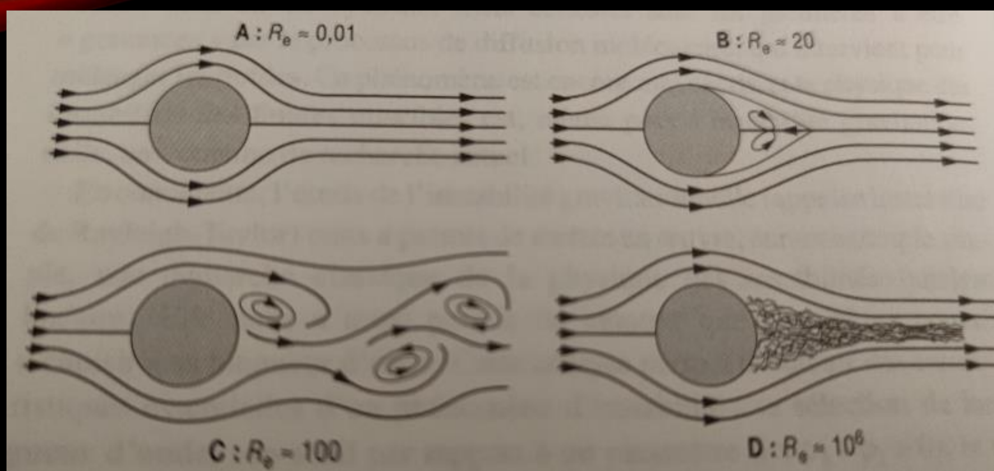
QUELQUES VALEURS DE NOMBRE DE REYNOLDS

Tiré de *Notes de cours sur les fluides*, Marc Rabaud



DÉFORMATIONS D'UN FILET DE COLORANT DANS L'AXE D'UN ÉCOULEMENT D'EAU DANS UN TUBE HORIZONTAL

Tiré de *Ce que disent les fluides*, Etienne Guyon et al.



ECOULEMENT AUTOUR D’UN CYLINDRE FIXE

Tiré de *La mécanique des fluides*, Dominique Salin et al.

I] NOTION DE VISCOSITÉ DE FLUIDE

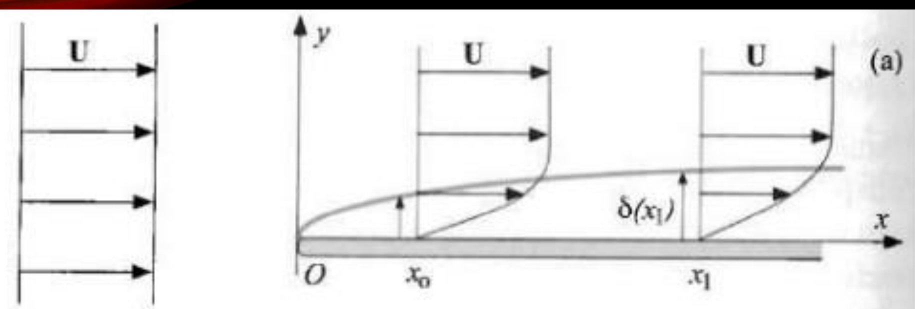
c) Notion de couche limite

COUCHE LIMITE LAMINAIRE PRÈS D'UNE PLAQUE PLANE AVEC ÉCOULEMENT UNIFORME

- x : distance caractéristique de l'écoulement (m)
- Re_x: nombre de Reynolds local évalué à x.

Tiré de *Hydrodynamique Physique*, Etienne Guyon et al.

$$\delta(x) \approx \frac{x}{\sqrt{Re_x}}$$



diffusion visqueuse et advection

$$\delta = (\nu t)^{1/2} \qquad x = Ut \qquad \delta = \left(\frac{\nu x}{U}\right)^{1/2}$$

ECOULEMENT STATIONNAIRE A L'ABORD D'UNE PLAQUE PLANE

Tiré de *Notes de cours sur les fluides*, Marc Rabaud

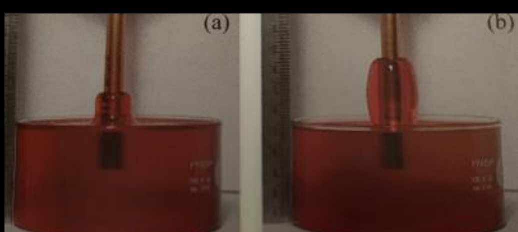
II] ECOULEMENTS VISQUEUX

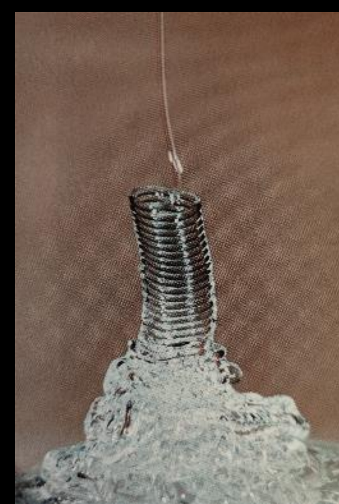
a) Ecoulement de Poiseuille cylindrique

II] ECOULEMENTS VISQUEUX

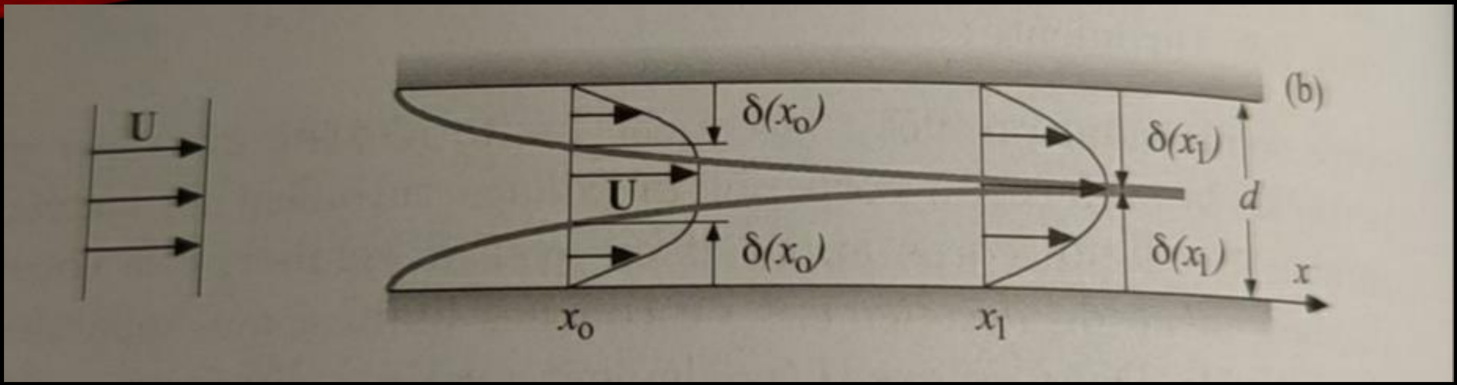
b) Ecoulement quasi-parallèle et concept de lubrification

CONCLUSION





Tiré de *Ce que disent les fluides*, Etienne Guyon et al.



ETABLISSEMENT DE LA COUCHE LIMITE POUR UN ÉCOULEMENT DE POISEUILLE

Tiré de *Hydrodynamique Physique*, Etienne Guyon et al.