Oscillateurs ; portraits de phase et non-linéarités

7 juin 2025

Référence

Expérience : Formule de Borda pour un pendule simple + portraits de phase exp
Livre :
— Physique PC/PC* Tout-en-un, Dunod, 2022
— Physique pour l'agrégation, FFR
Prérequis :
— Oscillateurs harmoniques
— Dynamique newtonienne
— Électronique
Niveau :

Introduction

Rappel sur les oscillateurs harmoniques :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = g(t)$$

1 Pendule simple

1.1 Équation du mouvement

Schéma du pendule simple

Par une approche énergétique, on peut définir l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$ et l'énergie potentielle $E_p = mgl(1-\cos\theta)$ avec comme origine de potentiel $E_p(y=-l) = 0$.

En l'absence de forces dissipatives, l'énergie mécanique est conservé donc $\frac{dE_m}{dt} = 0$ ce qui donne comme équation différentielle :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

En prenant des petites oscillations, c'est-à-dire $\sin\theta \approx \theta$, on retrouve bien l'équation d'un oscillateur harmonique. Dans ce cas, on a isochronisme des oscillations à la période $T_0 = 2\pi * \sqrt{\frac{l}{g}}$ ou encore à la fréquence $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

1.2 Formule de Borda

L'énergie mécanique du pendule s'écrit $\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1-\cos\theta) = mgl(1-cos\theta_0)$ où le terme de gauche est une constante correspondant à l'énergie potentielle lorsque l'énergie cinétique est nulle.

En exprimant $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$, on obtient l'équation suivante :

$$\dot{\theta} = \pm\omega_0\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

$$\theta = \theta_0 \quad \text{=>} \quad \sin\psi = 1 \quad \text{=>} \; \psi = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = 0 \quad \text{=>} \quad \sin\psi = 0 \quad \text{=>} \; \psi = 0$$

$$\frac{d}{d\theta}\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta}{2}} = X\cos\psi\frac{d\psi}{d\theta}$$

En intégrant dt sur un quart de période, on intègre θ entre θ_0 et 0. Dans ce cas, on a bien un signe moins du côté de $d\theta$ car sur un quart de période, quand t augmente, θ diminue. Ainsi on obtient :

$$\int_0^{\frac{T}{4}} dt = \frac{T}{4} = -\frac{1}{2\omega_0}\int_{\theta_0}^{0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}$$

En posant $X = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$ et en faisant le changement de variable $\sin\frac{\theta}{2} = X\sin\psi$, on peut donc écrire la période comme égale à :

$$T = \frac{2T_0}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - X^2\sin^2\psi}} = \frac{2T_0}{\pi} * K(X)$$

(Le changement de variable n'étant pas intuitif, il faut expliquer à quoi il correspond et comment on le fait -> voir sujet et correction de l'épreuve docteur 2023 question 23)

On peut faire un développement limité de la fraction dans la fonction $K(X)$ pour $X \ll 1$ à l'ordre 2 : $\frac{1}{\sqrt{1 - X^2\sin^2\psi}} = 1 + \frac{X^2}{2}\sin^2\psi + O(X^2)$

Ainsi on trouve que $K(X) \simeq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}X^2$ et donc que $T = T_0(1 + \frac{\theta_0^2}{16})$ (Formule de Borda)

Vérification expérimentale de la formule de Borda. Script Python pour représenter la période réelle en fonction de l'angle initial.

2 Portraits de phase

2.1 Construction

Définition d'un portrait de phase (FFR p.25) On applique ça au pendule simple -> équation différentiel d'ordre 2 donc on peut écrire deux équations différentiels d'ordre 1 -> Espace de phases de dimensions 2

Établir l'équation du cercle pour le portrait de phase dans le cas linéaire à partir de la conservation de l'énergie mécanique

Propriétés des trajectoires dans le portrait de phase :

— Les conditions initiales définissent intégralement la trajectoire

— Les trajectoires ne peuvent se croiser car sinon pas de déterminisme de la trajectoire.

— Les trajectoires ont un sens de parcours bien défini

2.2 Application à la non-linéarité

On reprend les calculs de la partie précédente sans la linéarisation :

$\left(\frac{1}{\omega_0}\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - 2\cos(\theta) = C$ où C est une constante

Les trajectoires dépendent de la valeur de C et on peut distinguer 3 cas :

— $-2 < C < 2$: Oscillations

— $C > 2$: Trajectoire de révolution

— $C = 2$: Trajectoire critique

Tracé expérimentale de quelques trajectoires phases.

Le portrait de phase permet d'étudier qualitativement des systèmes complexes pour en comprendre le comportement.

Ouverture vers le chaos !

Expérience quantitative

Objectif de l'expérience

Vérifier la loi de Borda pour le pendule simple

Matériels

— Pendule simple
— Carte d'acquisition Sésame + câbles d'alimentation et de connexion
— Mètre

Protocole

Lancer le pendule sans vitesse initiale puis lancer une acquisition de 10s sur LatisPro. Mesurer avec LatisPro l'angle initial et la période d'oscillation. Enregistrer les données sous la forme de .csv pour le script de portrait de phase. Tracer les portraits de phases expérimentaux avec le script Python.

Précautions expérimentales

Penser à remettre à zéro le pendule avant chaque mesure.