

# Effet Tunnel :

## Application à la radioactivité alpha

**Niveau :** Licence

### **Pré-requis :**

- Equation de Schrödinger
- Puits de potentiel
- Interactions fondamentales

### **Bibliographie :**

- FFR

## **Introduction**

En mécanique classique, une balle glisse dans un trou, acquiert  $E_c$  en descendant sur la pente puis remonte mais ne peut pas sortir du trou.

Effet Tunnel : Une particule a une énergie inférieure à celle de la barrière de potentiel peut la franchir

## **I / Effet Tunnel**

### **A. Barrière de potentiel**

Supposons une particule de masse  $m$  et d'énergie  $E$  qui se propage dans le sens des  $x$  croissants (qui vient de  $-\infty$ )

Supposons une barrière de potentielle avec une certaine énergie et une certaine largeur.

Si l'énergie de la particule est supérieurs à la barrière donc elle traverse sans aucun problème. Ce qui nous intéresse ici c'est quand son énergie est  $< E$  barrière.

Pour cela calculons la fonction d'onde.

On modélise la particule par un paquet d'ondes : somme d'ondes stationnaires.

Prenons donc une onde stationnaire d'énergie  $E$  et de fonction d'onde  $\phi(x)$

Equation de Schrödinger indépendante du temps : 
$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\phi(x) = 0$$

On peut définir 3 domaines où on peut résoudre cette équation.

1.  $x < 0$
2.  $0 < x < L$
3.  $x > L$

C'est un calcul qui a été déjà vu avant.

On pose  $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$  et  $\kappa = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$

1.  $\phi(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}$
2.  $\phi(x) = A_2 e^{\kappa x} + B_2 e^{-\kappa x}$
3.  $\phi(x) = A_3 e^{ikx}$

Coefficient  $B_3$  est annulé car on suppose que l'onde vient de  $-\infty$  donc aucune venant de  $+\infty$ . On trouve les autres coefficients par les conditions aux limites.

Continuité de  $\phi(x)$  :

- En  $x=0$  :  $A_1 + B_1 = A_2 + B_2$
- En  $x=L$  :  $A_2 e^{\kappa L} + B_2 e^{-\kappa L} = A_3 e^{ikL}$

Continuité de  $\frac{d\phi(x)}{dx}$

- En  $x=0$  :  $ik(A_1 - B_1) = \kappa(A_2 - B_2)$
- En  $x=L$  :  $\kappa(A_2 e^{\kappa L} - B_2 e^{-\kappa L}) = ikA_3 e^{ikL}$

On a 5 inconnus et 4 équations donc on exprime les coefficients en fonction de  $A_3$

$$A_1 = A_3 e^{ikL} \left( \cosh(kL) - \sinh(kL) \frac{k^2 + 1}{2kz} \right)$$

$$B_1 = A_3 e^{ikL} \sinh(kL) \frac{k^2 - 1}{2kz}$$

$$A_2 = A_3 e^{(ik - k)L} \frac{1 + z}{2z}$$

$$B_2 = A_3 e^{(ik + k)L} \frac{-1 + z}{2z}$$

sin z =  $\frac{k}{ik}$

## **B. Coefficient de transmission**

On a une onde qui est réfléchiée et une autre qui est transmise

Coefficient de transmission :  $T = \frac{|A_3|^2}{|A_2|^2}$

Coefficient de réflexion :  $R = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2}$

Si notre hypothèse est correcte donc  $T+R=1$ . C'est ce qu'on va prouver.  
par slide de calcul :

$$R = \frac{\sinh^2(\kappa L)(\kappa^2 + k^2)^2}{4k^2\kappa^2 + \sinh^2(\kappa L)(\kappa^2 + k^2)^2}$$

$$T = \frac{4\kappa^2 k^2}{4k^2\kappa^2 + \sinh^2(\kappa L)(\kappa^2 + k^2)^2}$$

En divisant  $T$  par  $4\kappa^2 k^2$  et par  $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$  et  $\kappa = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$  on trouve :

$$T = \frac{1}{1 + \frac{sh^2(\kappa L)}{4} \frac{V_0^2}{E(V_0 - E)}}$$

Pas facile à l'interpréter. Donc par approximation de la barrière épaisse ( $\kappa L \gg 1$ ) on a

$$sh^2(\kappa L) \sim \frac{e^{2\kappa L}}{4} \gg 1 \text{ donc } T = \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-2\kappa L}$$

On a une décroissance exponentielle avec la largeur de la barrière. Plus elle est large, moins l'onde traverse.

**A.N. :** Pour une barrière  $L = 0.3nm$  et  $V_0 = 2E = 4eV$ , pour un électron incident on trouve  $T \sim 4 \times 10^{-2}$  qui est une probabilité pas négligeable.

Pour la même L mais  $V_0 = 2E = 40eV$ ,  $T \sim 2 \times 10^{-6} \rightarrow T$  chute de 4 ordres de grandeur.

### Simulation Effet Tunnel "site PhET" :

d'abord une barrière large puis on diminue la barrière et on voit que proba transmission n'est pas nulle (mais 0.05) en plus d'une onde progressive après le puit. Ensuite on diminue la hauteur de la barrière et on voit plus d'onde qui traverse.

Ensuite on lance un paquet d'onde et on voit la transmission dans le domaine 3 mais en plus une réflexion dans le domaine 1.

Cela a des applications dans le domaine nucléaire.

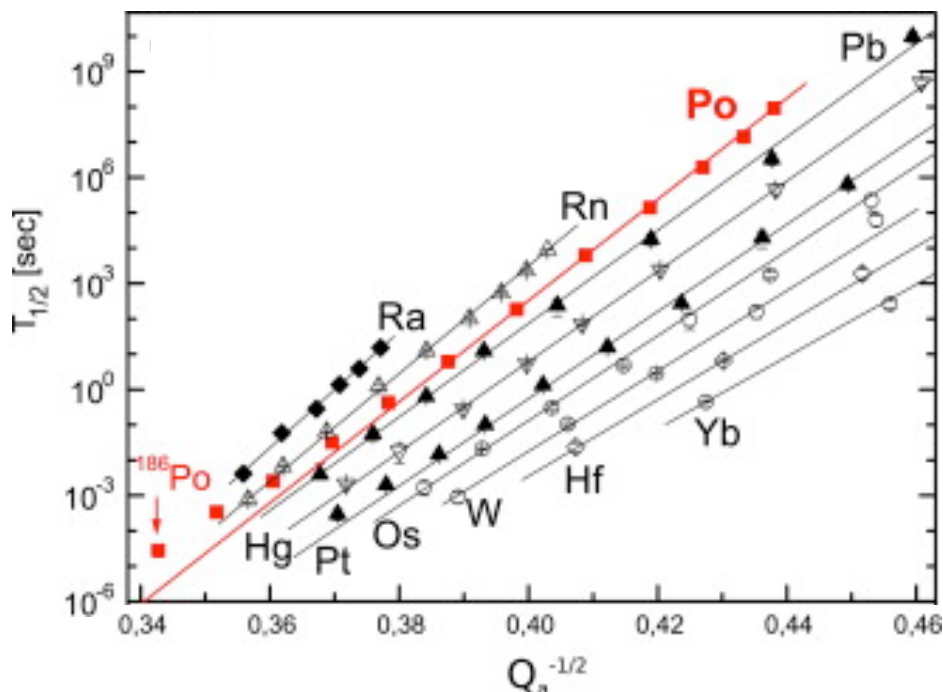
## II / Application à la radioactivité $\alpha$

### A. Temps de demi-vie

Radioactivité  $\alpha$  : noyau père se désintègre en noyau fils en donnant une particule  $\alpha$  qui est le noyau de l'hélium :  ${}^A_Z X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} Y + {}^4_2 He$

La radioactivité a été étudiée par Becquerel puis les Curie puis Rutherford.

Loi de Geiger-Nuttall loi phénoménologique qui relie temps de demi-vie à l'énergie de la particule :  $\ln(t_{1/2}) = a + \frac{b}{\sqrt{E}}$  avec a,b des constantes qui dépendent du noyau.



## B. Potentiel du noyau

Imaginons qu'on est dans l'atome père et dans le noyau il y a des protons et neutrons. Un noyau d'hélium se forme et piégé dans le noyau père. Il est piégé par l'interaction forte attractive de courte portée ( $\sim 10^{-15} \text{ m}$ ). Quand le noyau d'hélium sort et s'éloigne du noyau (fils), c'est l'interaction coulombienne répulsive.

C'est globalement les 2 interactions que le noyau d'hélium va subir. On peut les représenter par des barrières de potentiels.

Donc au début attractive jusqu'à  $r_0$  (qui est le rayon du noyau père) puis répulsive. Pour que l'hélium quitte le noyau père, son E doit être  $>0$ .

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$$

Soit l'hélium se propage de gauche à droite (dans la courbe potentiel) donc rencontre la barrière potentielle. Soit il la traverse ou pas.

$$\frac{1}{\tau} = \frac{T_\alpha}{\Delta t} \text{ donc } \frac{2r_0}{v} = \frac{2r_0}{\sqrt{\frac{2E}{m}}} \text{ et on peut trouver le temps de demi-vie}$$

## Conclusion :

l'effet tunnel illustre une limite fondamentale de la physique classique : même lorsqu'un obstacle semble infranchissable selon l'énergie disponible, la mécanique quantique autorise un passage avec une certaine probabilité.

C'est ce phénomène qui permet, par exemple, à des noyaux instables d'émettre une particule alpha, bien que celle-ci n'ait pas l'énergie suffisante pour franchir la barrière de potentiel nucléaire selon les lois classiques.

Cette compréhension a non seulement permis d'expliquer la radioactivité alpha, mais aussi ouvert la voie à des applications technologiques majeures, comme le microscope à effet tunnel. L'effet tunnel n'est donc pas un simple effet exotique, mais une conséquence directe de la nature ondulatoire de la matière

## Extra : Voir FFR partie nucléaire pour autres types de radioactivité

Radioactivité beta est gouverné par l'interaction faible. C'est un processus probabiliste, mais pas lié à une barrière de potentiel (pas d'effet tunnel)

Radioactivité gamma est une relaxation électromagnétique d'un noyau excité.

# Questions

**Est-ce que c'est la radioactivité alpha qui est utilisé dans les réacteurs nucléaires .**  
Non.

**Pk que unidimensionnel ? Ne représente pas la réalité ?**  
pour simplifier les calculs mais on trouve les mêmes résultats que si on travaille en 3D.

**Si les potentiels  $<0$  et  $>L$  sont pas nuls, est-ce que cela change quelque chose ?**  
**Est-ce que ça change la vitesse de la particule ?**  
Non car toutes les énergies sont définies à un potentiel près. Donc changer le potentiel de référence ne change rien.

**Pertinent de faire composition en ondes stationnaires ?**  
Oui car le potentiel scalaire indépendant du temps

**Ecris l'équation Schrödinger indépendant du temps. C'est quoi la formulation la plus générale de l'équation Schrödinger ?**  
(présenter au tableau)

**D'où viennent  $K$  et  $\kappa$  ?**  
présenter Schrödinger indépendant du temps et le polynôme caractéristique de l'équation différentielle. On a des racines complexes  $r = \pm i \sqrt{\frac{2mE}{\hbar}}$

**Pourquoi tu parles de propagation ? C'est quoi la solution complète de Schrödinger ?**  
car il y a la partie temporelle qui est là dans l'équation complète de Schrödinger.

**Continuité en  $\frac{d\phi}{dx}$  ? Elle est toujours validée ?**  
Il faut que le potentiel ne diverge pas. Si  $E$  et  $V$  sont bornée, donc dérivée 2nd sont nul donc la dérivée première est continue.

**Pourquoi on prend les origines en  $x=0$  ?**  
Juste pour simplifier. En prenant un  $x$  quelconque on aura des exponentielles constantes à la fin. Mais on peut définir d'autres constantes  $A1$   $B1$   $A2$   $B2$  contenant ces exponentielles.

**Est-ce qu'on s'attend à exprimer les constantes  $A$   $B$  juste en fonction de  $\kappa$  et  $K$  ?**  
**Pourquoi t'étais choqué d'avoir 5 constantes et 4 équations ?**  
C'est normal d'avoir un paramètre libre qui dépend de l'amplitude de l'onde ( $A1$ ). Donc non on s'attend pas à avoir des solutions qui dépendent que de  $\kappa$  et  $K$

**Pk t'as choisi de tout écrire en fonction de  $A3$ . Car c'est plus  $A1$  le paramètre naturel lié à l'amplitude de l'onde.**  
c'est ce qui permet d'avoir le calcul le plus rapide.

**T'as exprimé  $T$  en fonction de  $\kappa$   $V_0$   $E$   $L$  alors que  $\kappa$  dépend de  $V_0$   $E$  ! T'as dit que plus  $L$  est grand, la proba de transmission diminue, il n'y a pas d'autres conclusion ?**  
Car on peut pas simplifier plus.

**OG choisi pour l'AN ? Dans le 2e calcul t'as changé à la fois  $E$  et  $L$ , c'est perturbant.**  
c'est les valeurs qu'on trouve à l'échelle quantique. Pour simplifier le calcul mais oui je ne devrais pas le faire.

**Autres type de radioactivité ?**  
beta (avec explication) / gamma

**Loi Geiger-Nuttall : réexplique les termes. Le noyau fils bouge .. donc  $E$  est une énergie de qui exactement ?**  
 $t_{1/2}$  temps que la population est divisée par 2.  $E$  énergie cinétique totale (la particule alpha + noyau fils) après désintégration. Avant désintégration, le noyau père n'a pas d' $E_c$ .

**Dans la courbe de Loi Geiger-Nuttall, pk le Polonium a plusieurs points alors qu'on suppose que l' $E$  est fixe ..**  
*Réponse :*

**Les noyaux Po ont été formés où et comment ? Dans les étoiles ça va au delà du Fer ?**  
noyaux lourds formés au sein des étoiles. Mais dans les étoiles on forme les noyaux jusqu'au fer. Puis dans les jets de supernovae ou étoiles à neutrons, les noyaux plus lourds se forment.

**Portée de l'interaction coulombienne. A l'intérieur du noyau ?**  
infini. Il y a des distances caractéristiques et une d'elles sont le  $r_0$

## **Microscope à effet tunnel (STM – Scanning Tunneling Microscope)**

- Inventé en 1981 (prix Nobel 1986), il permet de visualiser les atomes un par un à la surface d'un matériau.
- Une pointe métallique extrêmement fine est placée à quelques angströms (0,1 nm) de la surface.
- Une tension est appliquée entre la pointe et l'échantillon.

Effet tunnel : des électrons traversent le vide entre la pointe et la surface, créant un courant de tunnel.

Idée clé : ce courant dépend exponentiellement de la distance → en balayant la pointe et en maintenant un courant constant, on peut reconstituer une image 3D de la densité électronique, donc des positions atomiques.