Manip 1 : Force de trainée en régime visqueux - Loi de Stokes

Référence : Polycopié de TP – Série 2 – Mécanique des fluides

Le nombre de Reynolds de l'écoulement est donné par $Re = \dfrac{2Rv\rho_f}{\eta}$, où R est le rayon de la sphère, v sa vitesse, ρ_f la masse volumique du fluide et η sa viscosité dynamique.

On lance la bille et il y a une zone où la vitesse est uniforme (donc Forces = poids = mg).
Bilan de Forces :

- $P = mg = \rho_b V g$ vers le bas
- $\Pi = \rho_f V g$ vers le haut
- $\vec{F}_{stokes} = -6\pi\eta R\vec{v}$ vers le haut (opposé au mouvement)

Au début, la bille accélère car le poids est supérieur à la somme des forces qui s'opposent. Mais à mesure que la vitesse augmente, la force de frottement visqueux augmente proportionnellement (car elle dépend de v).

Quand la somme des forces devient nulle : $\vec{F}_{stokes} + \vec{\Pi} = \vec{P}$

À ce moment-là, l'accélération devient nulle et la bille tombe à vitesse constante : c'est la vitesse limite.

Par $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ on trouve $v_{lim} = \dfrac{2}{9}\dfrac{gR^2}{\eta}(\rho_b - \rho_f)$

La loi de Stokes est valable sous l'hypothèse d'un fluide infini, c'est-à-dire sans effet des parois. En pratique, la traînée dépend du rapport entre le rayon de la bille R et le rayon (ou diamètre) du tube. L'hypothèse d'un milieu infini est raisonnable lorsque ce rapport est inférieur à 1/100, c'est-à-dire lorsque le rayon du tube est au moins 100 fois plus grand que celui de la bille.

Modélisation de la phase d'accélération :

$m\dfrac{dv}{dt} = P - \Pi - 6\pi\eta R v \neq 0 \ \rightarrow \ \dfrac{m}{6\pi\eta R}\dfrac{dv}{dt} = \tau\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{P - \Pi}{6\pi\eta R} - v = v_{lim} - v$ avec τ une constante de temps caractéristique.

La solution est une évolution exponentielle : $v(t) = v_{lim}(1 - e^{-t/\tau})$

Et donc, la distance parcourue (en phase d'accélération) est obtenue par intégration :

$z(t) = \displaystyle\int_0^t v(t')\,dt' = v_{lim}(t + \tau e^{-t/\tau} - \tau)$

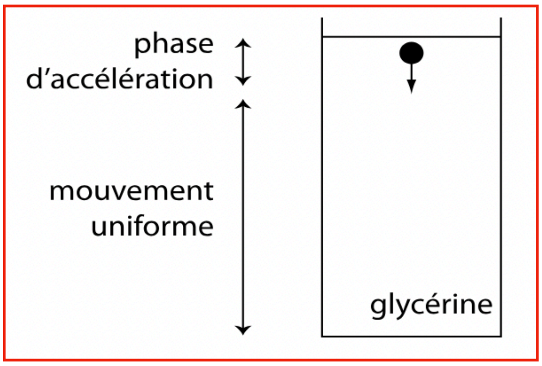
On considère souvent que la phase d'accélération est pratiquement terminée à t = 3τ (la vitesse atteint plus de 95 % de v_{lim}). A t = 4.7τ, on atteint le régime permanent à 99% donc, la distance de la phase d'accélération peut être estimée par $z(4.7\tau) = 3.71\,\tau\, v_{lim}$

avec $\tau = \dfrac{m}{6\pi\eta R} = \dfrac{2\rho R^2}{9\eta}$

Pour diamètre de bille 5mm donc R=2,5mm on trouve v_{lim}=19.33 cm/s et τ=22.48ms donc au bout de 4.7τ : z_{acc}=16.12mm.

Mais si on lance la bille (même légèrement), elle entre dans le fluide avec une vitesse initiale non nulle, et ce n'est plus une chute libre complète depuis le haut du cylindre dans le fluide : on doit alors prendre en compte cette vitesse d'entrée.
Si on lâche la bille depuis une hauteur h_{air} au-dessus de la surface du fluide, elle arrive déjà accélérée avec une vitesse d'entrée $v_0 = \sqrt{2gh_{air}}$
Donc $v(t) = v_{lim} + (v_0 - v_{lim})e^{-t/\tau}$ et $z(t) = v_{lim}t + \tau(v_0 - v_{lim})(1 - e^{-t/\tau})$
Si h_{air} = 10cm donc v_0 = 1.4m/s donc $z_{acc}(4.7\tau)$ = 4.73cm

La vitesse limite est toujours atteinte, mais plus ou moins rapidement selon la vitesse d'entrée dans le fluide.



Protocole :

- Je colle une règle sur le récipient
- Je mesure le diamètre de la bille par pied à coulisse
- Je positionne la caméra par logiciel caméra de Windows
- Je filme une video par Virtual Dub.
- Sur tracker j'identifie la zone où la vitesse est uniforme en affichant les courbes v_y et a_y (qui sera nulle en moyenne). J'identifie la valeur moyenne de v_y et son incertitude (par le max et le min de la fluctuation de la courbe).
- Je refais pour plusieurs billes de diamètres différents

- Sur Qtiplot je plot v_{lim} en fonction du rayon R et j'ajuste par : $v_{lim} = \frac{2}{9}\frac{gR^2}{\eta}(\rho_b - \rho_f)$ pour trouver la viscosité η du silicon.

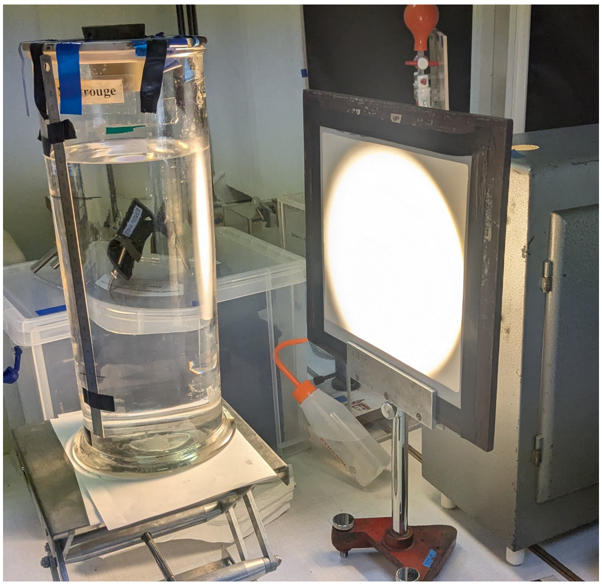
Les valeurs tabulées sont : $\rho_{acier} = 7850\ kg/m^3$ et $\rho_{silicon} = 970\ kg/m^3$

Viscosité cinématique de l'huile silicone 500 cSt (475-525 cSt à 25°C). Par $\eta = \nu\rho$ et 1 centistokes (cSt) = 10^{-2} St = 10^{-6} m^2/s et ρ = 970 kg/m^3 : $\eta = 0.485\ Pa.s$
(Je peux calculer l'incertitude par les valeurs 475 et 525 cSt)

- Sinon, sur Qtiplot, plotter $R(v_{lim})$ et ajuster par : $R = b\sqrt{v_{lim}}$

telque $b = \sqrt{\frac{9\eta}{2(\rho_b - \rho_f)g}}$ en $m^{1/2}s^{1/2}$ puis on déduit η par la valeur de b trouvée.

Ecran (papier) + lampe pour le contraste
(mais pas besoin car ça marche pas bien)



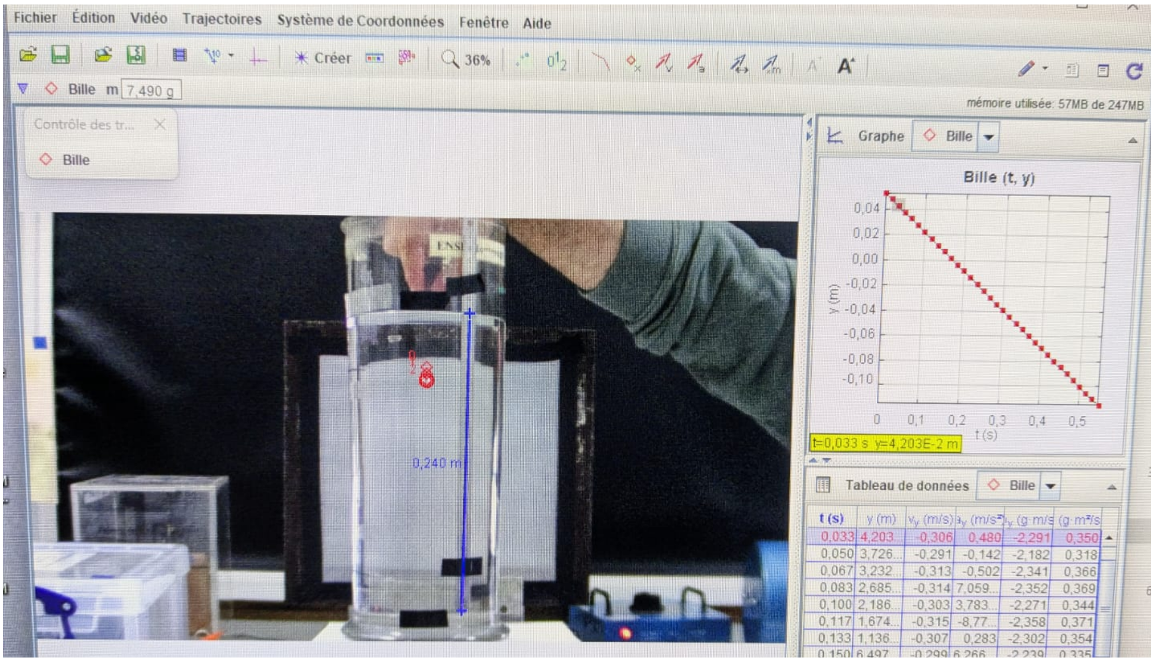
Caméra connectée à l'ordi

Pied à coulisse + règle + aimant + billes en acier

récipient cylindrique rempli d'huile silicone + règle collée (étalon de longueur) + support élévateur + scotch noir

3 curseurs :

- Luminosité
- Focus
- zoom



Tracker :

- choisir zone où v est uniforme
- On voit courbe y (hauteur) correcte