NMIT1 Numerik 1	Serie 8	Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften
Autor	Rémi Georgiou	
Datum	29. April 2015	

NMIT1 – Serie 8 Rémi Georgiou

Aufgabe 2, a), b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 9 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad L \cdot R = P \cdot A \ ?$$

λ

$$\begin{array}{rcl} -3 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 &=& 0 \\ 2 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 9 \cdot x_3 &=& 5 \\ 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 &=& 2 \end{array} \qquad -\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot z_1 \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} -3 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + 3 x_3 &=& 0 \\ 0 + 4 \cdot x_2 + 11 \cdot x_3 &=& 5 \\ 1 \cdot x_1 + 3 x_2 + 3 \cdot x_3 &=& 2 \end{array} \qquad -\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot z_1 \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} -3 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 &=& 0 \\ 0 + 4 \cdot x_2 + 11 \cdot x_3 &=& 5 \\ 0 + 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 &=& 2 \end{array} \qquad -\frac{1}{2} \cdot z_2 \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} -3 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + 3 x_3 &=& 0 \\ 0 + 4 x_2 + 11 \cdot x_3 &=& 5 \\ 0 + 0 - \frac{3}{2} \cdot x_3 &=& -\frac{1}{2} \end{array} \qquad R = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = -\frac{1}{2} \cdot -\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \left(5 - \frac{11}{3}\right) : 4 = \frac{1}{3}$$

$$x_1 = (0 - 3 + 3) : -3 = 0$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Test $L \cdot R = P \cdot A$

$$\begin{array}{ccc|ccc} \multicolumn{3}{l|}{L \cdot R} & -3 & -3 & 3 \\ & & & 0 & 4 & 11 \\ & & & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ \hline 1 & 0 & 0 & -3 & -3 & 3 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 2 & 2+4 & -2+11 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1+2 & -1+5{,}5-\frac{1}{5} \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 2 & 6 & 9 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} \multicolumn{3}{l|}{P \cdot A} & 1 & 3 & 3 \\ & & & 2 & 6 & 9 \\ & & & -3 & -3 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 2 & 6 & 9 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \checkmark$$

$Ax = b \Rightarrow PAx = Pb \quad , \quad Pb = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

1. $Ly = Pb$, nach y auflösen

$$\begin{aligned}
1 \cdot y_1 + 0 + 0 &= 0 &&\Rightarrow y_1 = 0 \\
-\tfrac{2}{3} \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 0 &= 5 &&\Rightarrow y_2 = 5 \\
-\tfrac{1}{3} \cdot y_1 + \tfrac{1}{2} \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 &= 2 &&\Rightarrow y_3 = 2 - \tfrac{5}{2} = -\tfrac{1}{2}
\end{aligned} \qquad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -\tfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. $R \cdot x = y$, nach x auflösen

$$\begin{aligned}
-3 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 &= 0 \\
0 + 4 \cdot x_2 + 11 \cdot x_3 &= 5 \\
0 + 0 - \tfrac{3}{2} \cdot x_3 &= -\tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

$x_3 = -\frac{1}{2} \cdot -\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$x_2 = \left(5 - \frac{11}{3}\right) : 4 = \frac{1}{3}$

$x_1 = (0 - 1 + 1) : (-3) = 0$

$$\underline{\underline{x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}}}$$

Überprüfung des Resultats mit der Gauss-Elimination aus Übungsserie 7, Aufgabe 2

```
[A_triangle,detA,x] = Georgiou_Remi_IT13t_S7_Aufg2([1 3 3;2 6 9;-3 -3
3],[2;5;0])

lambda =
   -0.6667


M =
    -3    -3     3     0
     0     4    11     5
     1     3     3     2


lambda =
   -0.3333


M =
    -3    -3     3     0
     0     4    11     5
     0     2     4     2


lambda =
    0.5000


M =
   -3.0000   -3.0000    3.0000         0
         0    4.0000   11.0000    5.0000
         0         0   -1.5000   -0.5000


A_triangle =
   -3.0000   -3.0000    3.0000
         0    4.0000   11.0000
         0         0   -1.5000


detA =
    18


x =
         0
    0.3333
    0.3333

diary('Diary_Aufgabe2.txt')
```

2 c) Vergleich der Lösung mit dem Resultat der MATLAB-Funktion [L,R,P] = lu(A)

```
L=[1 0 0;-2/3 1 0;-1/3 1/2 1]

L =
    1.0000         0         0
   -0.6667    1.0000         0
   -0.3333    0.5000    1.0000

R=[-3 -3 3;0 4 11;0 0 -3/2]

R =
   -3.0000   -3.0000    3.0000
         0    4.0000   11.0000
         0         0   -1.5000

P=[0 0 1;0 1 0;1 0 0]

P =
     0     0     1
     0     1     0
     1     0     0

A=[1 3 3;2 6 9;-3 -3 3]

A =
     1     3     3
     2     6     9
    -3    -3     3

[L2,R2,P2] = lu(A)

L2 =
    1.0000         0         0
   -0.6667    1.0000         0
   -0.3333    0.5000    1.0000


R2 =
   -3.0000   -3.0000    3.0000
         0    4.0000   11.0000
         0         0   -1.5000

P2 =
     0     0     1
     0     1     0
     1     0     0
```

```
tf = isequal(L,L2)

tf =
     1

tf = isequal(R,R2)

tf =
     1

tf = isequal(P,P2)

tf =
     1

diary('Diary_Vergleich_LR_Zerlegung.txt')
```

Die Lösungen sind identisch.