Übungsserie 12

Keine Abgabe

Die folgenden Aufgaben sind Repetitionsaufgaben über die Kapitel 2-5, teilweise aus dem Skript.

Aufgabe 1:

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \cos(x)$. Untersuchen Sie anhand der Konditionszahl, für welche Werte von $x \in \mathbb{R}$ die Funktionsauswertung ein gut konditioniertes und für welche Werte sie ein schlecht konditioniertes Problem ist. Machen Sie anschliessend je ein konkrektes Zahlenbeispiel in der Umgebung von x, wo die Funktionsauswertung gut bzw. schlecht konditioniert ist.

Lösung Aufgabe 1:

Die Konditionszahl ist

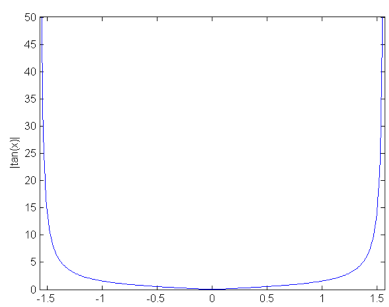
$$\begin{aligned} K &= \frac{\mid f'(\tilde{x}) \mid \cdot \mid \tilde{x} \mid}{\mid f(\tilde{x}) \mid} = \frac{\mid -\sin(\tilde{x}) \mid \cdot \mid \tilde{x} \mid}{\mid \cos(\tilde{x}) \mid} = \frac{\mid \sin(\tilde{x}) \mid}{\mid \cos(\tilde{x}) \mid} \cdot \mid \tilde{x} \mid \\ &= \mid \tan(\tilde{x}) \mid \cdot \mid \tilde{x} \mid \end{aligned}$$

Wir wissen, dass die Tangens-Funktion für $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ Nullstellen und für $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ Polstellen aufweist. Beschränken wir uns auf das Intervall $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, dann gilt

$$\lim_{\tilde{x} \to \pm\frac{\pi}{2}} \mid \tan(\tilde{x}) \mid = \infty$$

und

$$\mid \tan(0) \mid = 0$$



Also gilt für die Konditionszahl

$$\begin{aligned} \lim_{\tilde{x} \to \pm\frac{\pi}{2}} K &= \infty \\ \lim_{\tilde{x} \to 0} K &= 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die Funktionsauswertung von $f(x) = \cos(x)$ in einer Umgebung von $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ beliebig schlecht konditioniert sein kann (d.h. Fehler in x pflanzen sich dort sehr stark fort), während die Funktionsauswertung in einer Umgebung von $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ gut konditioniert ist.

Beispiel gut konditioniert: wir nehmen an, der exakte Wert sei $x = 0.0001$ und der fehlerhafte Wert sei $\tilde{x} = 0.00009$. Dann haben wir für die relativen Fehler

$$
\begin{aligned}
\frac{\mid x - \widetilde{x} \mid}{\mid x \mid} &= 0.1 \\
\frac{\mid f(x) - f(\widetilde{x}) \mid}{\mid f(x) \mid} &= \frac{\cos(0.0001) - \cos(0.00009)}{\cos(0.0001)} = 9.5 \cdot 10^{-10}
\end{aligned}
$$

Der relative Fehler bei der Funktionsauswertung hat also von 10% auf praktisch 0% abgenommen (um einen Faktor $9.5 \cdot 10^{-10}/0.1 = 9.50 \cdot 10^{-9}$) , was nahe bei der Konditionszahl $K = \mid \tan(\tilde{x}) \mid \cdot \mid \tilde{x} \mid = 8.1 \cdot 10^{-9}$ liegt.

Beispiel schlecht konditioniert: wir nehmen an, der exakte Wert sei $x = \frac{\pi}{2} + 0.0001$ und der fehlerhafte Wert sei $\tilde{x} = \frac{\pi}{2} + 0.00009$. Dann haben wir für die relativen Fehler

$$
\begin{aligned}
\frac{\mid x - \widetilde{x} \mid}{\mid x \mid} &= 6.3658 \cdot 10^{-6} \\
\frac{\mid f(x) - f(\widetilde{x}) \mid}{\mid f(x) \mid} &= \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + 0.0001) - \cos(\frac{\pi}{2} + 0.00009)}{\cos(\frac{\pi}{2} + 0.0001)} = 0.10
\end{aligned}
$$

Der relative Fehler bei der Funktionsauswertung hat also von praktisch 0% auf 10% zugenommen (Faktor von $0.1/6.3658 \cdot 10^{-6} = 1.5709 \cdot 10^{4}$), was wieder nahe bei der Konditionszahl $K = \mid \tan(\tilde{x}) \mid \cdot \mid \tilde{x} \mid = 1.7454 \cdot 10^{4}$ liegt.

Bemerkung: bei diesen Beispielen sind wir davon ausgegangen, dass die Funktionswerte vom Cosinus exakt berechnet werden. Dies ist natürlich auch wieder nur eine Näherung.

Aufgabe 2:

Für die Funktion $f(x) = \sin(x) \cdot e^{x}$ erzeugen die folgenden MATLAB Befehle die untenstehende Tabelle (ohne Numerierung der Zeilen). Beantworten Sie die folgenden Fragen:

a) Was wird hier eigentlich berechnet?

b) Welchen Wert würden Sie als Resultat weiterverwenden?

c) Was passiert für kleine Werte von h und weshalb?

```
x = 1;
df_exact = cos(x)*exp(x)+sin(x)*exp(x);
fprintf(1, '    h \t\t [f(x+h)-f(x)]/h \tabsolute error\trelative error\n')
for i = 0:10;
        h=10^(-2*i);
        df = (sin(x+h)*exp(x+h)-sin(x)*exp(x))/h;
        err_abs = abs(df-df_exact);
        err_rel = abs(err_abs/df_exact);
        fprintf(1, '%1.1e\t\t%1.8f\t\t%e\t%e\n', h, df, err_abs, err_rel)
end

   h                    [f(x+h)-f(x)]/h         absolute error  relative error
1.0e+000                4.43149441              6.754452e-001   1.798286e-001
1.0e-002                3.77070850              1.465927e-002   3.902842e-003
1.0e-004                3.75619609              1.468667e-004   3.910137e-005
1.0e-006                3.75605070              1.468263e-006   3.909064e-007
1.0e-008                3.75604916              6.650881e-008   1.770712e-008
1.0e-010                3.75604436              4.862672e-006   1.294624e-006
1.0e-012                3.75610654              5.730982e-005   1.525800e-005
1.0e-014                3.73034936              2.569986e-002   6.842260e-003
1.0e-016                0.00000000              3.756049e+000   1.000000e+000
1.0e-018                0.00000000              3.756049e+000   1.000000e+000
1.0e-020                0.00000000              3.756049e+000   1.000000e+000
```

Lösung Aufgabe 2:

a) Berechnet wird eine numerische Näherung der Ableitung $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ an der Stelle $x = 1$ (1 Punkt) sowie der absolute bzw. relative Fehler.

b) Der Wert, an dem der absolute bzw. relative Fehler ein Minimum erreicht, also bei $h = 10^{-8}$. Dann wird $f'(1) \approx 3.75604916$.

c) Für $h < 10^{-8}$ nehmen der absolute und relative Fehler wieder zu wegen Auslöschung bei der Subtraktion sehr ähnlicher Werte $f(x+h)$ und $f(x)$. Für $h < eps$ wird das Resultat sogar 0, da für den Rechner dann $f(x+h) = f(x)$ gilt, bzw. $f(x+h) - f(x) = 0$.

Aufgabe 3:

Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass die Gleichung

$$x = \frac{1}{5}(x^3 + 3)$$

auf dem Intervall [0, 1] genau eine Lösung hat. Bestimmen Sie diese Lösung auf 3 Nachkommastellen genau.

Lösung Aufgabe 3:

Die Fixpunktiteration lautet

$$x_{n+1} = F(x_n) = \frac{1}{5}(x_n^3 + 3)$$

Damit der Banachsche Fixpunktsatz gillt, müssen wir zeigen, dass (a) $F : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ (d.h. F bildet $[0,1]$ auf sich selber ab) und (b) es existiert eine Konstante $\alpha < 1$ mit $\mid F(x) - F(y) \mid \leq \alpha \mid x - y \mid$ für alle $x, y \in [0,1]$

a) Die Funktion $F(x) = \frac{1}{5}(x^3 + 3)$ ist auf dem Intervall [0, 1] monoton steigend, da $F'(x) = \frac{3}{5}x^2 \geq 0$. Es genügt also, die Intervallsgrenzen in F einzsetzen: $F(0) = 0.6$ und $F(1) = 0.8$, damit gilt $F : [0,1] \longrightarrow [0,1]$

b) Mit $\alpha = \max_{x\in[0,1]} |F'(x)| = \max_{x\in[0,1]} |\frac{3}{5}x^2| = \frac{3}{5} < 1$ haben wir auch die zweite Bedingung erfüllt.

Daraus folgt gemäss dem Fixpunktsatz, dass es auf [0, 1] genau einen anziehenden Fixpunkt gibt und die Fixpunktiteration für jeden Startwert $x_0 \in [0, 1]$ konvergiert. Wir wählen $x_0 = 1$ und iterieren so lange, bis wir sicher sein können, dass sich die dritte Nachkommastelle nicht mehr ändert:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1 \\
x_1 &= \frac{1}{5}(x_0^3 + 3) = 0.8000... \\
x_2 &= \frac{1}{5}(x_1^3 + 3) = 0.7024... \\
x_3 &= \frac{1}{5}(x_2^3 + 3) = 0.6693... \\
x_4 &= \frac{1}{5}(x_3^3 + 3) = 0.6599... \\
x_5 &= \frac{1}{5}(x_4^3 + 3) = 0.6574... \\
x_6 &= \frac{1}{5}(x_5^3 + 3) = 0.6568... \\
x_7 &= \frac{1}{5}(x_6^3 + 3) = 0.6566...
\end{aligned}$$

Die Lösung ist also $x = 0.656...$

Aufgabe 4:

Der Tangens Hyperbolicus ist defniert als

$$\tanh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

Versuchen Sie, die Nullstelle der Funktion

$$f(x) = 6\tanh(x) + x$$

mit dem Newton-Verfahren und dem Startwert $x_0 = 4$ zu bestimmen. Schreiben Sie die Iterationsgleichung explizit auf. Konvergiert die Iteration? Erstellen Sie eine Grafik mit $f(x)$ sowie mit der ersten und zweiten Tangenten und beschreiben Sie, was passiert.

Lösung Aufgabe 4:

Mit

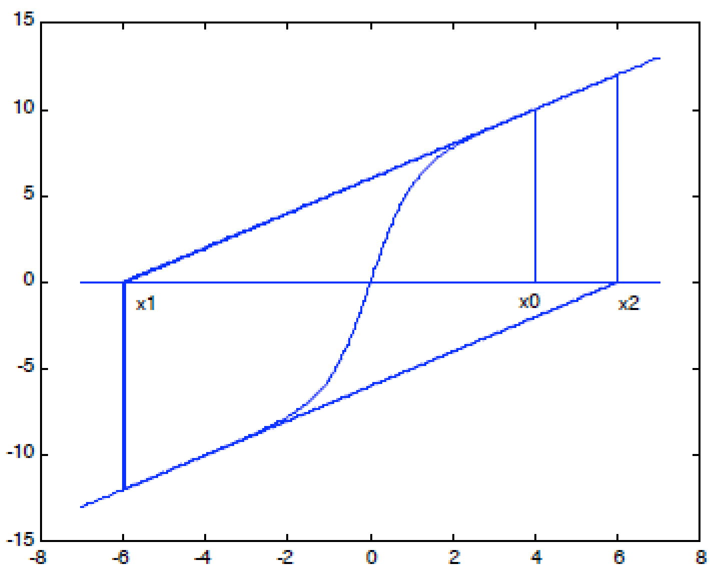
$$\tanh'(x) = \frac{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2 - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} = 1 - \frac{(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2}$$

ergibt sich die Iteration

$$x_{n+1} = x_n - \frac{6\tanh(x_n) + x_n}{6\tanh'(x_n) + 1}$$

Nein, die Iteration konvergiert nicht, sie pendelt nach wenigen Schritten zwischen $-5.998150...$ und $5.998150...$ hin und her. Durch die Symmetrie um die Nullstelle bewegt sich die Iteration entlang der immer wieder gleichen Tangenten im Kreis. Die ersten beiden Tangen haben die Funktionsgleichungen

$$\begin{aligned} g_1(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ g_2(x) &= f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) \end{aligned}$$



Aufgaben 5 (aus dem Skript):

2.5 Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $2 \sin x = x$ bis auf einen nachgewiesenen absoluten Fehler von max. 10^{-3}.

2.6 Das Bauer-Ziege-Wiese-Problem: Ein Bauer besitzt eine kreisrunde Wiese vom Radius R. Am Rand dieser Wiese bindet er eine Ziege an mit einer Leine der Länge r, und zwar so, dass die Ziege genau die Hälfte der Wiese abgrasen kann (s. Bild 2.4). Wie groß ist r?

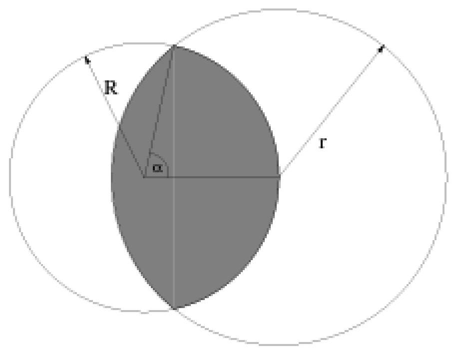


Bild 2.5

Mit dem Kosinussatz erhält man $r = R\sqrt{2(1-\cos\alpha)}$. Das Problem führt auf folgende Gleichung für den Winkel α (im Bogenmaß):

$$\frac{\pi}{2\cos\alpha} + \alpha - \pi - \tan\alpha = 0.$$

Offensichtlich kann diese Gleichung nicht durch geschicktes Umformen nach α aufgelöst werden. Die Hilfe numerischer Methoden ist daher nötig. Bestimmen Sie ein Intervall, in dem sich die gesuchte Lösung befindet und bestimmen Sie die Lösung mit einem Verfahren Ihrer Wahl bis auf einen gesicherten absoluten Fehler von 0.0001.

2.7 Wenden Sie das Newton-Verfahren, das vereinfachte Newton-Verfahren und das Sekantenverfahren zur näherungsweisen Bestimmung der Nullstelle von $f(x) = x^2 - 2$ an.

Lösungen Aufgaben 5:

2.5 Offensichtlich ist $x = 0$ eine Lösung. $f(x) := 2\sin x - x$ ist eine ungerade Funktion – wenn wir eine Nullstelle $\bar{x}$ gefunden haben, so ist $-\bar{x}$ eine weitere. Wir suchen daher nur positive Nullstellen. Da stets $|\sin x| \leq 1$ gilt, brauchen wir Nullstellen nur in $(0, 2]$ zu suchen. Aufgrund von Monotonieüberlegungen findet man, dass dort genau eine Nullstelle liegt, nämlich $\bar{x} \approx 1.9$. Mit dem Newton-Verfahren finden wir, ausgehend von $x_0 = 2$, als gute Näherung $x_3 = \tilde{x} = 1.895494267$. Aus $f(1.895) \cdot f(1.896) < 0$ folgt $\bar{x} \in [1.895, 1.896]$, womit klar ist, dass $|\tilde{x} - \bar{x}| \leq 10^{-3}$. Für die Näherung $-\tilde{x}$ für die Nullstelle $-\bar{x}$ gilt die gleiche Fehlerabschätzung.

2.6 Zunächst ist aus Bild 2.5 anschaulich klar, dass es nur ein solches α geben kann. Es ist $f(1) \leq -0.791 < 0$ und $f(1.5) \geq 6.4631 > 0$, also liegt die gesuchte Nullstelle in $[1, 1.5]$. Startet man das Newton-Verfahren mit $x_0 = 1$, so erhält man $x_5 = 1.235897098\ldots$, $x_6 = 1.235896924\ldots$ und bei diesen Stellen ist bei den weiteren Iterationen keine Änderung erkennbar. Wählen wir als Näherung $\tilde{x} = 1.2359$, so ist wegen $f(\tilde{x} + 0.0001) = f(1.236) > 0$ und $f(\tilde{x} - 0.0001) = f(1.2358) < 0$ die gesuchte Nullstelle in $[1.2358, 1.2359]$ und damit gilt $|\tilde{x} - \alpha| \leq 0.0001$ wie gefordert.

2.7 Im Folgenden sind x_i bzw. y_i bzw. z_i die vom Newton- bzw. vereinfachten Newton- bzw. Sekantenverfahren berechneten Werte.

Aufgabe 6:

Ein Düngemittelhersteller möchte durch die Kombination von drei bestehenden Düngersorten eine neue Mischung herstellen, welche 32.4% Kalium, 26.4% Stickstoff und 41.2% Phosphor enthält. Die bestehenden Düngersorten enthalten:

- Dünger A: 64% Kalium, 16% Stickstoff, 20% Phosphor
- Dünger B: 16% Kalium, 68% Stickstoff, 16% Phosphor
- Dünger C: 20% Kalium, 16% Stickstoff, 64% Phosphor

a) Wieviele Tonnen werden von jedem dieser Dünger benötigt, wenn insgesamt 100 Tonnen der neuen Mischung hergestellt werden sollen? Stellen Sie dafür das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ auf und berechnen Sie die Lösung manuell mit dem Gauss-Algorithmus.

b) Berechnen Sie manuell die LR-Zerlegung von A.

c) Kurz vor Produktionsstart stellt sich heraus, dass die neue Mischung bzgl. Kalium und Phosphor nur mit einer Genauigkeit von $\pm 0.5\%$ hergestellt werden kann, d.h. der neue Dünger wird aus $32.4\% \pm 0.5\%$ Kalium, 26.4% Stickstoff und $41.2\% \pm 0.5\%$ Phosphor bestehen. Was ist also der maximale absolute und relative Fehler der Lösung von a)? Was schliessen Sie daraus bzgl. der Konditionierung des Problems?

Lösung Aufgabe 6:

a) Anzahl Tonnen Dünger A sei x_1, die Anzahl Tonnen Dünger B sei x_2, Anzahl Tonnen Dünger C sei x_3. Es ist das folgende lineare Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{aligned} \text{Kalium: } 0.64x_1 + 0.16x_2 + 0.20x_3 &= 0.324 \cdot 100 = 32.4 \\ \text{Stickstoff: } 0.16x_1 + 0.68x_2 + 0.16x_3 &= 0.264 \cdot 100 = 26.4 \\ \text{Phosphor: } 0.20x_1 + 0.16x_2 + 0.64x_3 &= 0.412 \cdot 100 = 41.2 \end{aligned}$$

in Matrixschreibweise

$$Ax = b \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 0.64 & 0.16 & 0.20 \\ 0.16 & 0.68 & 0.16 \\ 0.20 & 0.16 & 0.64 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 32.4 \\ 26.4 \\ 41.2 \end{pmatrix}$$

Gauss-Algorithmus ergibt:

$$i = 1,\ j = 2 \Rightarrow z_2 \equiv z_2 - \tfrac{0.16}{0.64} z_1 \Rightarrow (A_1 \mid b_1) = \left(\begin{array}{rrr|l} 0.64 & 0.16 & 0.20 & 32.4 \\ 0 & 0.64 & 0.11 & 18.3 \\ 0.20 & 0.16 & 0.64 & 41.2 \end{array} \right)$$

$$i = 1,\ j = 3 \Rightarrow z_3 \equiv z_3 - \tfrac{0.20}{0.64} z_1 \Rightarrow (A_2 \mid b_2) = \left(\begin{array}{rrl|l} 0.64 & 0.16 & 0.20 & 32.4 \\ 0 & 0.64 & 0.11 & 18.3 \\ 0 & 0.11 & 0.5775 & 31.075 \end{array} \right)$$

$$i = 2,\ j = 3 \Rightarrow z_3 \equiv z_3 - \tfrac{0.11}{0.64} z_2 \Rightarrow (A_3 \mid b_3) = \left(\begin{array}{rrl|l} 0.64 & 0.16 & 0.20 & 32.4 \\ 0 & 0.64 & 0.11 & 18.3 \\ 0 & 0 & 0.5586 & 27.9297 \end{array} \right)$$

Rückeinsetzen liefert:

$x_3 = \frac{27.9297}{0.5586} = 50,\ x_2 = \frac{18.3 - 50 * 0.11}{0.64} = 20,\ x_1 = \frac{32.4 - 0.16 \cdot 20 - 0.20 \cdot 50}{0.64} = 30$

b)

$$R = \begin{pmatrix} 0.64 & 0.16 & 0.20 \\ 0 & 0.64 & 0.11 \\ 0 & 0 & 0.5586 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2500 & 1 & 0 \\ 0.3125 & 0.1719 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Absoluter Fehler:

$$\| x - \widetilde{x} \|_\infty \leq \| A^{-1} \|_\infty \| b - \widetilde{b} \|_\infty$$

Mit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1.7902 & -0.3077 & -0.4825 \\ -0.3077 & 1.6154 & -0.3077 \\ -0.4825 & -0.3077 & 1.7902 \end{pmatrix}$$

erhalten wir $\| A^{-1} \|_\infty = 2.5804$ (0.5 P). Aus $\| b - \widetilde{b} \|_\infty \leq 0.5$ (0.5 P) folgt $\| x - \widetilde{x} \|_\infty \leq 1.2902$, d.h. jede Komponente von x kann um bis zu 1.29 Tonnen abweichen.

Relativer Fehler:

$$\frac{\| x - \widetilde{x} \|_\infty}{\| x \|_\infty} \leq \| A \|_\infty \| A^{-1} \|_\infty \frac{\| b - \widetilde{b} \|_\infty}{\| b \|_\infty}$$

Mit $\| A \|_\infty = 1$ (0.5 P) ergibt sich die Konditionszahl $cond(A) = \| A \|_\infty \| A^{-1} \|_\infty = 2.5804$ und mit $\| b \|_\infty = 41.2$ ergibt sich

$$\frac{\| x - \widetilde{x} \|_\infty}{\| x \|_\infty} \leq \| A \|_\infty \| A^{-1} \|_\infty \frac{\| b - \widetilde{b} \|_\infty}{\| b \|_\infty} \leq 2.5804 \cdot \frac{0.5}{41.2} = 0.0313 = 3.13\%$$

Die Matrix ist gut konditioniert.

Aufgabe 7:

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 2 \\ 5 & 20 & 8 \\ 15 & 5 & 30 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 62 \\ 116 \\ 280 \end{pmatrix}.$$

a) Überprüfen Sie, ob das obige System bzgl. dem Jacobi-Verfahren konvergiert.

b) Berechnen Sie auf vier Stellen nach dem Komma die Näherung $x^{(2)}$ mit dem Jacobi-Verfahren ausgehend vom Startvektor $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

c) Schätzen Sie a-priori die Anzahl Iterationsschritte ab, damit der berechnete Näherungsvektor in jeder Kompnente maximal um 10^{-4} von der exakten Lösung $x = (4, 2, 7)^T$ abweicht.

Lösung Aufgabe 7:

a) Wir überprüfen, ob A diagonaldominant ist:

$$\begin{aligned} a_{11} = 10 &> 6 = a_{12} + a_{13} \\ a_{22} = 20 &> 13 = a_{21} + a_{23} \\ a_{33} = 30 &> 20 = a_{31} + a_{32} \end{aligned}$$

Daraus folgt, A ist diagonaldominant und das Jacobi-Verfahren konvergiert.

b) Wir benutzen die Matrixschreibweise

$$x^{(m+1)} = -D^{-1}(L + R)x^{(m)} + D^{-1}b$$

wobei

$$A = L + D + R$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 15 & 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

also

$$\begin{aligned} L &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 15 & 5 & 0 \end{pmatrix} \\ D &= \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix} \\ D^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{20} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{30} \end{pmatrix} \\ R &= \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und damit hat man

$$
\begin{aligned}
x^{(m+1)} &= -\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{20} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{30} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 8 \\ 15 & 5 & 0 \end{pmatrix} x^{(m)} - \begin{pmatrix} 62 \\ 116 \\ 280 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -0.4 & -0.2 \\ -0.25 & 0 & -0.4 \\ -0.5 & -0.1667 & 0 \end{pmatrix} x^{(m)} + \begin{pmatrix} 6.2 \\ 5.8 \\ 9.3333 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
x^{(0)} &= \begin{pmatrix} 3.0000 \\ 2.0000 \\ 6.0000 \end{pmatrix} \\
x^{(1)} &= \begin{pmatrix} 4.2 \\ 2.65 \\ 7.5 \end{pmatrix} \\
x^{(2)} &= \begin{pmatrix} 3.64 \\ 1.75 \\ 6.7917 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

c) Wir verwenden jetzt die Unendlichnorm und die a-priori Abschätzung

$$\| x^{(n)} - \overline{x} \|_\infty \leq \frac{\| B \|_\infty^n}{1 - \| B \|_\infty} \| x^{(1)} - x^{(0)} \|_\infty .$$

Für Jacobi ist

$$B = -D^{-1}(L+R) = \begin{pmatrix} 0 & -0.4 & -0.2 \\ -0.25 & 0 & -0.4 \\ -0.5 & -0.1667 & 0 \end{pmatrix}$$

und daraus folgt

$$\| B \|_\infty = \frac{2}{3} = 0.6667$$

Mit

$$\| x^{(1)} - x^{(0)} \|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 4.2 \\ 2.65 \\ 7.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0.65 \\ 1.5 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 1.5$$

folgt

$$\| x^{(n)} - \overline{x} \|_\infty \leq \frac{(\frac{2}{3})^n}{\frac{1}{3}} \cdot 1.5 \leq 10^{-4}$$

und daraus ergibt sich

$$n \geq \frac{\log(\frac{2}{3} \cdot 10^{-4}/3)}{\log(\frac{2}{3})} = 26.42...$$

Aufgabe 8 (aus dem Skript):

Der Druck, der benötigt wird, damit ein grosser, schwerer Gegenstand in einem weichen, auf einem harten Untergrund liegenden, homogenen Boden absinkt, kann über den Druck vorhergesagt werden, der zum Absinken kleinerer Gegenstände in demselben Boden benötigt wird. Speziell der Druck p, der benötigt wird, damit ein runder flacher Gegenstand vom Radius r um d cm tief in den weichen Boden sinkt, kann über eine Gleichung der Form

$$p = k_1 e^{k_2 r} + k_3 r$$

approximiert werden, wobei k_1, k_2 und k_3 Konstanten mit $k_2 > 0$ sind, die von d und der Konsistenz des Bodens, aber nicht vom Radius des Gegenstandes abhängen. Der harte Untergrund liege in einer Entfernung $D > d$ unter der Oberfläche.

a) Bestimmen Sie die Werte von k_1, k_2 und k_3, falls angenommen wird, dass ein Gegenstand vom Radius 1 cm einen Druck von 10 $\mathrm{N/cm^2}$ benötigt, um 30 cm tief in einen schlammigen Boden zu sinken, ein Gegenstand vom Radius 2 cm einen Druck von 12 $\mathrm{N/cm^2}$ benötigt, um 30 cm tief zu sinken und ein Gegenstand vom Radius 3 cm einen Druck von 15 $\mathrm{N/cm^2}$ benötigt, um ebensoweit abzusinken (vorausgesetzt, der Schlamm ist tiefer als 30 cm). Benutzen Sie den Startvektor

$$k^{(0)} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0.1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

.

b) Sagen Sie aufgrund Ihrer Berechnungen aus Übung a) die minimale Grösse eines runden Gegenstandes voraus, der eine Belastung von 500 N aushält und dabei weniger als 30 cm tief sinkt.

Lösung Aufgabe 8:

- a)

Lösung

$\Rightarrow$ nichtlineares Gleichungssystem $k_1 \mathrm{e}_{k_2 r} + k_3 r - p = 0$.

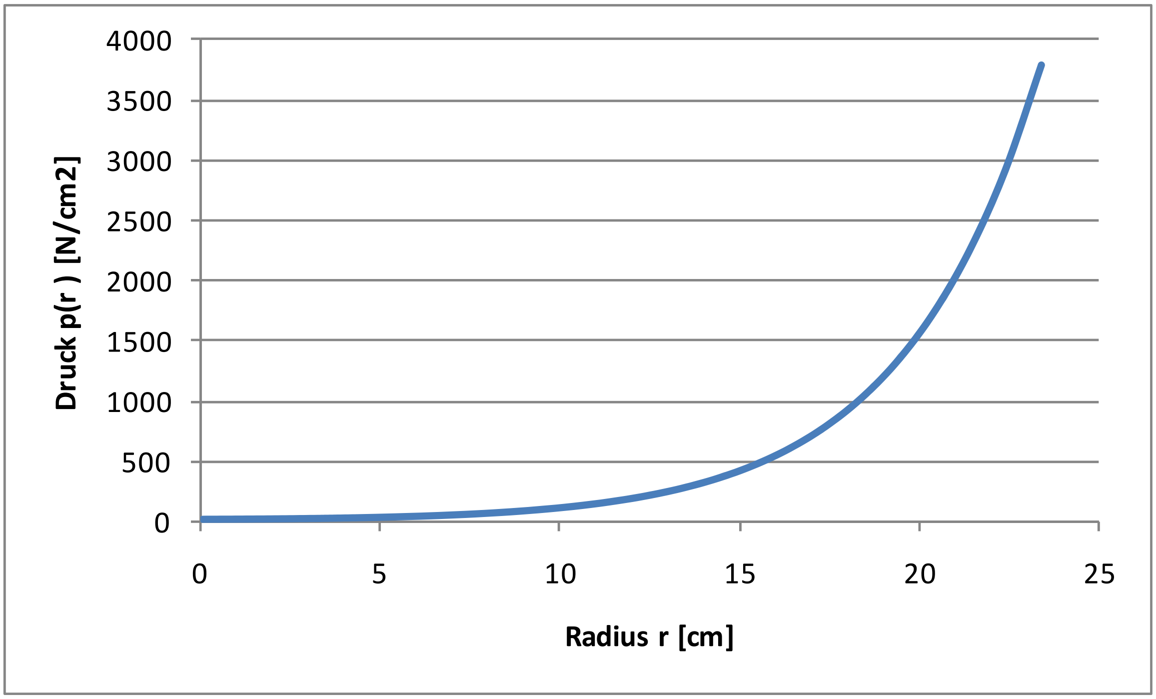
$$\begin{aligned} r = 1: &\quad k_1 \mathrm{e}^{k_2} + k_3 - 10 &= 0 \\ r = 2: &\quad k_1 \mathrm{e}^{2k_2} + 2k_3 - 12 &= 0 \\ r = 3: &\quad k_1 \mathrm{e}^{3k_2} + 3k_3 - 15 &= 0 \end{aligned}$$

Jacobi–Matrix $J(k_1, k_2, k_3)$:

$$J = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{k_2} & k_1 \mathrm{e}^{k_2} & 1 \\ \mathrm{e}^{2k_2} & 2k_1 \mathrm{e}^{2k_2} & 2 \\ \mathrm{e}^{3k_2} & 3k_1 \mathrm{e}^{3k_2} & 3 \end{pmatrix}$$

k	x^k	$f(x^k)$	$\|f(x^k)\|_2$	$\|x^k - x^{k-1}\|_2$
0	$\begin{pmatrix} 10.000000 \\ 0.100000 \\ -1.000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.051709 \\ -1.785972 \\ -4.501412 \end{pmatrix}$	4.843045	
1	$\begin{pmatrix} 8.868195 \\ 0.431279 \\ -3.462075 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.188078 \\ 2.086515 \\ 6.953930 \end{pmatrix}$	7.262648	2.729935
2	$\begin{pmatrix} 8.940308 \\ 0.318569 \\ -2.222635 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.071704 \\ 0.461394 \\ 1.581437 \end{pmatrix}$	1.648929	1.246642
3	$\begin{pmatrix} 8.788372 \\ 0.269945 \\ -1.487606 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.024217 \\ 0.104040 \\ 0.289382 \end{pmatrix}$	0.308469	0.752140
4	$\begin{pmatrix} 8.771774 \\ 0.260049 \\ -1.376155 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.000776 \\ 0.003492 \\ 0.009711 \end{pmatrix}$	0.010349	0.113114
5	$\begin{pmatrix} 8.771287 \\ 0.259696 \\ -1.372286 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.000001 \\ 0.000004 \\ 0.000012 \end{pmatrix}$	0.000013	0.003916
6	$\begin{pmatrix} 8.771286 \\ 0.259695 \\ -1.372281 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.000000 \\ 0.000000 \\ 0.000000 \end{pmatrix}$	0.000000	0.000005

- Daraus ergibt sich die allgemeine Funktion $p = 8.771286 \cdot e^{0.259695 \cdot r} - 1.372281 \cdot r$, welche den Druck beschreibt, der nötig ist, um einen flachen Gegenstand mit Radius r um 30 cm tief in den Schlamm zu drücken.



- Wir müssen jetzt noch die nichtlineare Gleichung $500 = 8.771286 \cdot e^{0.259695 \cdot r} - 1.372281 \cdot r$ nach r auflösen. Das machen wir wieder über das Newtonverfahren. Also haben wir die Iterationsvorschrift

$$r_{n+1} = r_n - \frac{f(r_n)}{f'(r_n)} = r_n - \frac{8.771286 \cdot e^{0.259695 \cdot r} - 1.372281 \cdot r - 500}{8.771286 \cdot 0.259695 \cdot e^{0.259695 \cdot r} - 1.372281}$$

und wir sehen aus dem Graph, dass r ca. 15 cm ist. Wir wählen also $r_0 = 15$ und iterieren. Die Lösung konvergiert schnell gegen $r_0 = 15.731511$ cm:

n	r_n
0	15.000000
1	15.806529
2	15.732244
3	15.731511
4	15.731511
5	15.731511