NMIT1 – Serie 3

Rémi Georgiou

Aufgabe 1

Konditionszahl K bestimmen.

1) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

$$K = \frac{|f'(x)| \cdot |x|}{f(x)} = \frac{n \cdot x^{n-1} \cdot x}{x^n} = n \cdot x^{n-1+1-n} = \underline{n}$$

Abschätzung relativer Fehler: $K \cdot \frac{|x - \tilde{x}|}{|x|} \geq \frac{|f(x) - f(\tilde{x})|}{|f(x)|}$

Bei x^2 hat das noch keine grosse Auswirkung, da der Fehler verdoppelt wird. Aber Fehler steigt linear an.

Bei x^{1000} liegt die Annäherung um den Faktor 1000 daneben.

2) $f(x) = x^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}$, $f'(x) = \frac{1}{n} \cdot x^{1/n - 1}$

$$K = \frac{|f'(x)| \cdot |x|}{f(x)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{x^{1/n - 1} \cdot x}{x^{1/n}} = \frac{1}{n} \cdot x^{1/n - 1 + 1 - 1/n} = \underline{\frac{1}{n}}$$

Das Wurzelziehen einer reellen Zahl ist ein gut konditioniertes Problem. Der relative Fehler wird nicht viel grösser beim Auswerten der Funktion. Der Verstärkungsfaktor (Konditionszahl K) kann höchstens 1 sein.

Aufgabe 2

Mantisse $n = 10$

zu zeigen: $1 + x = 1$, mit $0 < x < eps$, in 10-stelliger Gleitpunktarithmetik

$x = 0{,}1 \cdot 10^{-10}$

Die Exponenten müssen angeglichen werden für die Addition.

$$\begin{array}{rl}
 & 0{,}10\,00\,00\,00\,00 \cdot 10^{1} \\
+ & 0{,}00\,00\,00\,00\,00\,1 \cdot 10^{1} \\
\hline
 & 0{,}10\,00\,00\,00\,00 \cdot 10^{1}
\end{array}
\Rightarrow 1 + x = 1$$

Stelle geht durch Abschneiden verloren.

$\sqrt{x} = \sqrt{0{,}1 \cdot 10^{-10}} = (0{,}1 \cdot 10^{-10})^{\frac{1}{2}} = \underline{0{,}1 \cdot 10^{-5}}$

Keine Exponentenangleichung notwendig für das Radizieren.

$\frac{x}{10^9} = x \cdot 10^{-9} = 0{,}1 \cdot 10^{-10} \cdot 10^{-9} = 0{,}1 \cdot 10^{-10-9} = \underline{0{,}1 \cdot 10^{-19}}$

Keine Exponentenangleichung notwendig bei der Multiplikation mit einem Faktor.