7.4. a) $y^{(4)} + 1.1y''' - 0.1y'' - 0.3y = \sin x + 5$ mit $y(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$ und $y'(0) = 2$

$$\vec{z}' = \begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ z'_3 \\ z'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ \sin x + 5 - 1.1 \cdot z_4 + 0.1 \cdot z_3 + 0.3 \cdot z_1 \end{pmatrix} = f(x, \vec{z}) \quad \text{mit } \vec{z}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2) y = 0$ mit $y(1) = y'(1) = 2$

$$\vec{z}' = \begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ -\frac{1}{x} \cdot z_2 - \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) \cdot z_1 \end{pmatrix} = f(x, \vec{z}) \quad \text{mit } \vec{z}(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

8.1 Klassisches Euler-Verfahren für DGL Systeme

$$x_{i+1} = x_i + h$$
$$\vec{z}^{(i+1)} = \vec{z}^{(i)} + h \cdot f(x_i, \vec{z}^{(i)})$$

Vierstufiges Runge-Kutta Verfahren für DGL Systeme

$$\vec{k}_1^{(i)} = f(x_i, \vec{z}^{(i)})$$
$$\vec{k}_2^{(i)} = f\left(x_i + \tfrac{h}{2}, \vec{z}^{(i)} + \tfrac{h}{2} \cdot k_1\right)$$
$$\vec{k}_3^{(i)} = f\left(x_i + \tfrac{h}{2}, \vec{z}^{(i)} + \tfrac{h}{2} \cdot k_2\right)$$
$$\vec{k}_4^{(i)} = f\left(x_i + h, \vec{z}^{(i)} + h \cdot k_3\right)$$
$$x_{i+1} = x_i + h$$
$$\vec{z}^{(i+1)} = \vec{z}^{(i)} + h \cdot \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

a) mit $h = 0.1$ für Euler

$$\vec{z}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ \sin(0) + 5 - 1.1 \cdot 0 + 0.1 \cdot 0 + 0.3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0.2 \\ 2 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}}}$$

mit $h = 0.1$ für R-Kutta

$$\vec{k}_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{k}_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ \sin(0 + 0.05) + 5 - 1.1 \cdot (0 + 0.05 \cdot \boxed{5}) + 0.1 \cdot (0 + 0.05 \cdot 0) + 0.3 \cdot (0 + 0.05 \cdot 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ \boxed{4.805} \end{pmatrix}$$

$$\vec{k}_3^{(1)} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \ldots \ \boxed{4.805} \ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{4.8157} \end{pmatrix}$$

$$\vec{k}_4^{(1)} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \sin(0 + 0.1) + 5 - 1.1 \cdot (0 + 0.1 \cdot 4.8157) + 0.1 (0 + 0.1 \cdot 0) + 0.3 (0 + 0.1 \cdot 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{4.6301} \end{pmatrix}$$

$$\vec{z}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.1 \cdot \frac{1}{6} \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 4.805 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 4.8157 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 4.6301 \end{pmatrix} \right] = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0.2 \\ 2 \\ 0 \\ 0.4812 \end{pmatrix}}}$$

b) mit $h = 0.1$ und $n^2 = 1$ für Euler

$$\vec{z}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 0.1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{1} \cdot 2 - \left(1 - \frac{1}{1^2}\right) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 0.1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2.2 \\ 1.8 \end{pmatrix}}}$$

mit $h = 0.1$ und $n^2 = 1$ für R-Kutta

$$\vec{k}_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{k}_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{1 + 0.05} \cdot (2 + 0.05 \cdot \boxed{-2}) - \left(1 - \frac{1}{(1 + 0.05)^2}\right) \cdot (2 + 0.05 \cdot 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2.0048 \end{pmatrix}$$

$$\vec{k}_3^{(1)} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \ldots \ \boxed{-2.0048} \ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2.0045 \end{pmatrix}, \quad \vec{k}_4^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2.0178 \end{pmatrix}$$

$$\vec{z}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 0.1 \cdot \frac{1}{6} \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2.0048 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2.0045 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2.0178 \end{pmatrix} \right] = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2.2 \\ 1.7994 \end{pmatrix}}}$$