Übungsserie 6

Abgabe KW 44

Fassen Sie Ihre Lösungen zusammen in die ZIP-Datei *Name_ Vorname_ Gruppe_ S6.zip*. Laden Sie dieses File vor der nächsten Übungsstunde nächste Woche auf OLAT hoch. Die einzelnen m-Files müssen ausführbar sein und in den Kommentrzeilen (beginnen mit %) soll bei Funktionen ein Beispiel eines funktionierenden Aufrufs angegeben werden. Verspätete Abgaben können nicht mehr berücksichtigt werden.

Aufgabe 1 (30 Minuten):

Schreiben Sie eine Funktion `[x, y] = Name_Vorname_S6_Aufg1(f , a, b, n, y0)`, welche Ihnen das Anfangswertproblem $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(a) = y_0$ auf dem Intervall $[a, b]$ mit n Schritten gemäss dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren berechnet. Die Lösung wird in den Vektor `y` geschrieben, `x` enthält die entsprechenden x_i-Werte. Überprüfen Sie Ihre Funktion anhand des Beispiels 7.6 im Skript.

Aufgabe 2 [9] (30 Minuten):

Ein kugelförmiger Wassertank mit dem Radius $R = 4$m wird durch ein kleines Loch mit Radius $r = 0.02$m an seiner Unterseite entleert. Die Wasserhöhe $h = h(t)$ im Tank (gemessen von seiner Unterseite) gehorcht der DGL

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{r^2\sqrt{2gh}}{2hR - h^2},\ h(0) = 6.5\,(\mathrm{m})$$

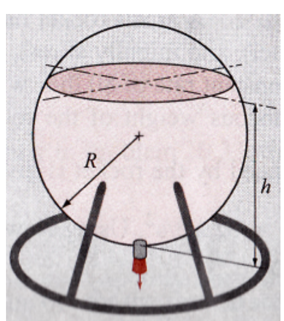
mit $g = 9.81\,(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})$.

Schreiben Sie ein Skript `Name_Vorname_S6_Aufg2.m`, welches Ihnen die folgenden Aufgaben löst:

a) Benutzen Sie Ihr Programm aus Aufgabe 1, um die Lösung $h(t)$ mit einer Schrittweite von $\Delta t = 4000$(s) auf dem Intervall $t \in [0, 24000]$ mit dem klassischen Runge-Kutta Verfahren zu berechnen.

b) Benutzen Sie Ihr Programm Name_Vorname_S5_Aufg3.m aus Serie 5 und berechnen Sie die Lösung ebenfalls mit dem Euler-Verfahren, dem Mittelpunkt-Verfahren und dem modifizierten Euler-Verfahren für die gleiche Schrittweite $\Delta t = 4000$(s). Achtung: den Teil aus Name_Vorname_S5_Aufg3.m, der Ihnen das Richtungsfeld plottet, sollten Sie auskommentieren, so dass Ihnen nur die Lösungsvektoren zurückgegeben werden.

c) Plotten Sie alle vier Lösungen mit Legende in die gleiche Grafik.



Aufgabe 3 (30 Minuten):

Betrachten Sie die folgende DGL aus Serie 5

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$$

auf dem Intervall $0 \leq x \leq 10$ mit $y(0) = 2$. Die exakte Lösung der DGL ist $y(x) = \sqrt{\frac{2x^3}{3} + 4}$.

a) Schreiben Sie ein Skript `Name_Vorname_S6_Aufg3.m`, welches Ihnen die DGL für die vier Verfahren (Euler, Mittelpunkt, mod. Euler, klass. Runge-Kutta) mit Schrittweite $h = 0.1$ löst und die vier Lösungen zusammen in einer Grafik darstellt. Erzeugen Sie eine zweite Grafik (mit logarithmischer $y-$Achse), welche den lokalen Fehler $\mid y(x_i) - y_i \mid$ als Funktion von x_i für jedes der vier Verfahren zeigt.

b) - optional: Benutzen Sie Ihr Skript aus Aufgabe a) um grafisch zu testen, um was für einen Faktor Sie die Schrittweite des Euler-Verfahrens oder des Mittelpunkt-Verfahrens oder des modifizierten Euler-Verfahrens verkleinern müssen, um in etwa einen ähnlichen Verlauf des lokalen Fehlers wie bei Runge-Kutta Verfahren für $h = 0.1$ zu erhalten. Können Sie das theoretisch begründen? Schreiben Sie ihre Antwort in Ihr Skript.