PHIT Physik für Informatik	Auftrag 2 Signaltransformation	Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften School of Engineering
Autoren	Rémi Georgiou, Marcel Derrer	
Datum	7. Dezember 2014	

Signaltransformation

Teilauftrag A

Wir untersuchen wie eine einfache RC-Schaltung (*passiver Tiefpassfilter*) ein Inputsignal verändert. Dazu nehmen wir die Spannung über dem Kondensator genauer unter die Lupe.

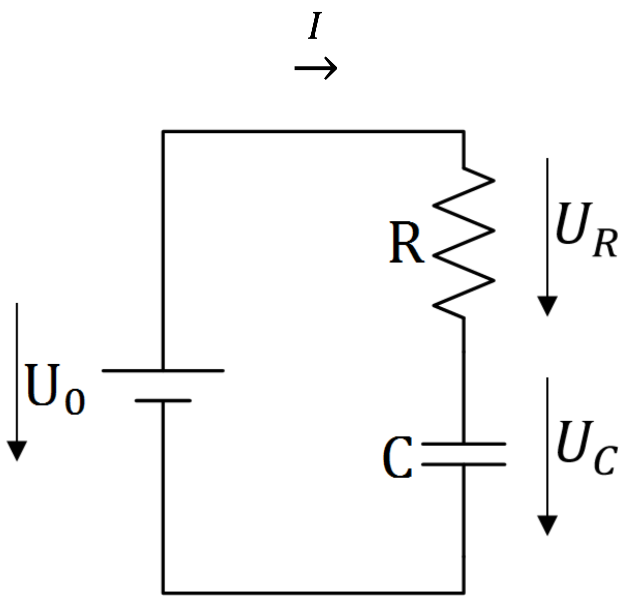

Abbildung 1: Einfache RC-Schaltung

Wir definieren die Referenzrichtung des Stromes für unsere Zwecke im Uhrzeigersinn.

Der Kondensator ist zu Beginn ungeladen, also gilt: $Q(t = 0) = 0$.
Die Differentialgleichungen dieses dynamischen Systems werden mit Hilfe von Berkeley-Madonna gelöst.

1. RC-Schaltung mit Gleichstromquelle

Als erstes werden die Bilanzgleichungen für den Schaltkreis erstellt.

Grössen	Elemente	Masche
$U_0 = 4.5\,V$ $R = 1000\,\Omega$ $C = 500\,\mu F$	$U_R = R \cdot I$ $U_c = \frac{Q}{C}$ $I = \frac{dQ}{dt}$	$U_c + U_R - U_0 = 0$ $U_0 = U_R - U_c$

Unter Anwendung des 2. Kirchhoffschen Gesetzes erhalten wir die Differentialgleichung für die Ladung Q:

$$U_R + U_C = R \cdot I + \frac{Q}{C} = 0 \;\rightarrow I = -\frac{Q}{R \cdot C} \rightarrow \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{R \cdot C}$$

Da es sich beim obigen Schaltkreis um eine Reihenschaltung handelt, ist der Strom durch die beiden Elemente Widerstand und Kondensator derselbe. Wir können mit dem Ohm'schen Gesetz die Stromstärke berechnen:

$$I = \frac{U_R}{R} = \frac{4.5\,V}{1000\,\Omega} = 4.5 \cdot 10^{-3}\,A$$

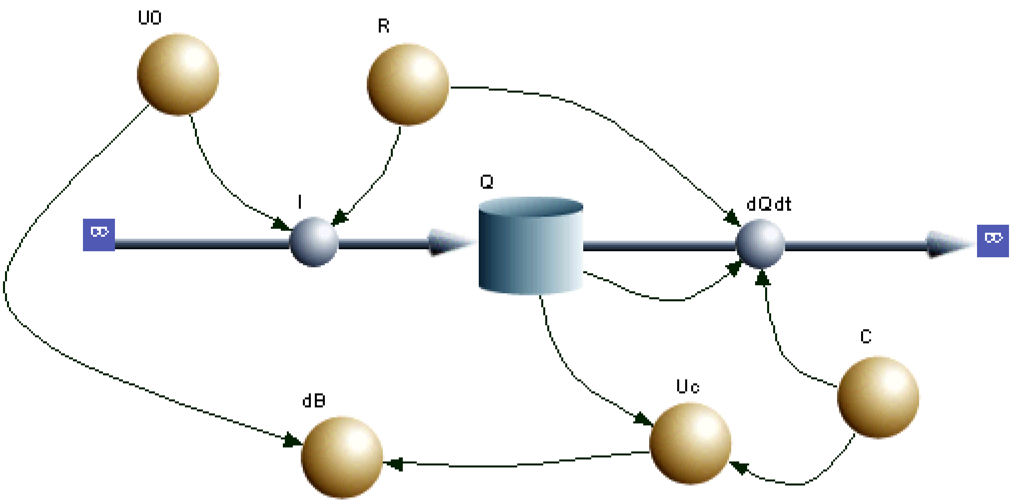

Abbildung 2: Berkeley-Madonna-Modell der RC-Schaltung

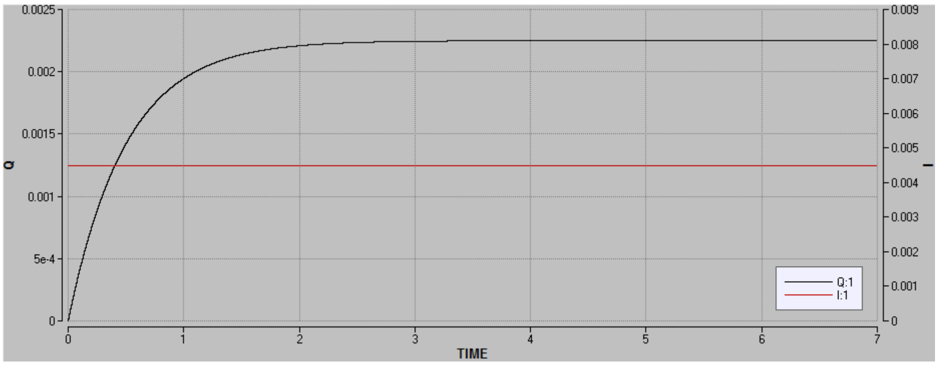

Abbildung 3: Aufladung des Kondensators

Abbildung 3 zeigt die Ladungskurve des Kondensators bei einem konstanten Strom von 4.5 mA.

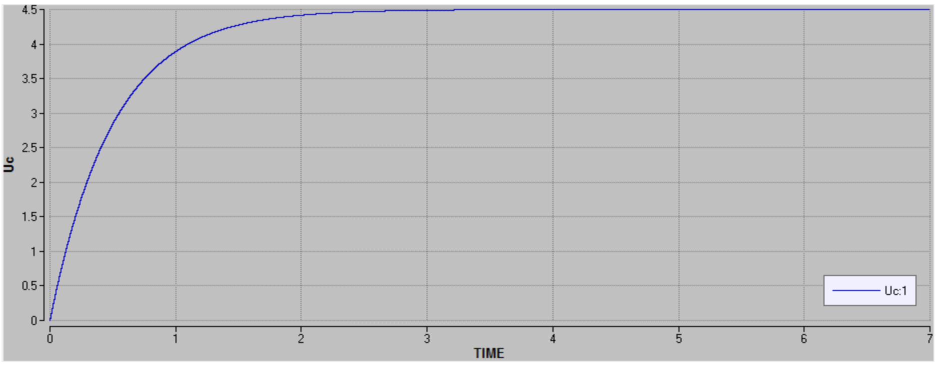

Abbildung 4: Spannungsverlauf über dem Kondensator

Zur Beschreibung des Spannungsverlaufs U_c als Funktion der Zeit ziehen wir die Zeitkonstante $\tau = RC$ zu Hilfe.

$$\tau = RC = 1000\,\Omega \cdot 5 \cdot 10^{-4}\,F = 0.5\,s$$

Der Spannungsanstieg über dem Kondensator kann allgemein folgendermassen berechnet werden:

$U(t) = U_{max}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, wobei in unserer Schaltung $U_{max} = 4.5\,V$ ist.

$$t = -\tau \cdot ln\left(1 - \frac{U(t)}{U_{max}}\right)[s]$$

Mittels dieser Formeln können wir die Spannungen zu einigen ausgewählten Zeitpunkten berechnen.

Zeitpunkt t [s]	**Spannung U [V]**	**% von U_0 (= 4.5 V)**
0.5	2.844	63.2
0.6139	$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot U_0 \approx 3.1819$	70.71
1	3.893	86.51
2	4.415	98.11
3	4.49	99.77
4	4.498	99.95
5	4.499	99.97

Wenn keine hochpräzisen Daten gefordert sind, schliessen wir daraus, dass bei etwa $t = 5$ s die Maximalspannung über dem Kondensator erreicht ist und dieser somit eine Ladung von $2.25 \cdot 10^{-3}\ C$ trägt.

Wir überprüfen dieses Ergebnis anhand der uns bekannten Gleichung für die Kondensatorspannung.

$$\frac{Q}{C} = U_C \rightarrow \frac{2.25 \cdot 10^{-3}\ C}{5 \cdot 10^{-4}\ F} = 4.5\ V$$

Es gibt einen interessanten Zusammenhang zwischen der Zeitkonstante τ und der Grenzfrequenz f_c unseres Tiefpassfilters:

$$f_c = \frac{1}{2\pi \cdot \tau} = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C} = \frac{1}{2\pi \cdot 1000\ \Omega \cdot 5 \cdot 10^{-4}\ F} = 0.31\ Hz$$

Die Grenzfrequenz f_c steht wiederum mit der Zeitkonstante τ in Beziehung:

$$f_c = \frac{159155}{\tau\ \cdot 10^6} = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C} = 0.31\ Hz$$

Berkeley-Madonnas eingebaute Fast-Fourier-Transformation stellt die Ausgangsspannung U_C im Frequenzbereich dar.

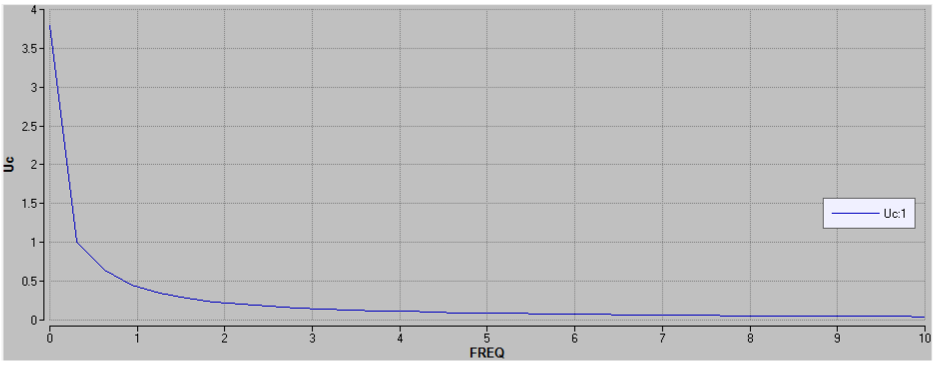

Abbildung 5: Spannung über dem Kondensator als Funktion der Frequenz

Das Diagramm veranschaulicht wie dieser passive Tiefpassfilter 1. Ordnung die Amplitude des Signals ab einer Grenzfrequenz (0.31 Hz) dämpft. Bei der Grenzfrequenz einer Absenkung fällt die Spannung immer auf $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot U_{max}$ ab.

Nun können wir noch den Spannungspegel L_u für unseren Schaltkreis berechnen.

$$L_u = 10 \cdot \log\left(\frac{{U_{out}}^2}{{U_{in}}^2}\right) [dB]$$

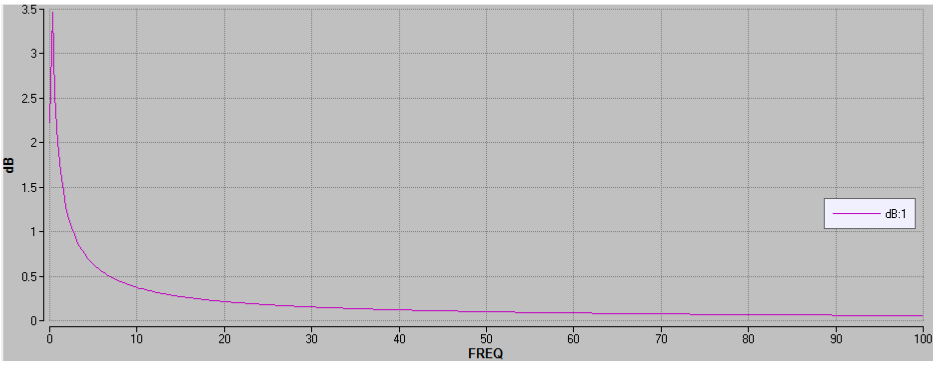

Abbildung 6: Veränderung des Signalpegels als Funktion der Frequenz

Zum Schluss bestimmen wir den Gütefaktor des Tiefpassfilters, auch Q-Faktor genannt:

$$Q = 20 \cdot \log\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot U_0}{U_0}\right) = 20 \cdot \log(0.707\, V) = -3\, dB$$

Der Spannungspegel wird im Bereich der Grenzfrequenz f_c $(0.31\, Hz)$ um **-3 dB gedämpft**.

2. RC-Schaltung mit Wechselspannungsquelle

Wieder werden die zuerst die Bilanzgleichungen erstellt.

Grössen	**Elemente**	**Masche**
$U_0 = 4.5\,V$ $\omega_1 = 1\,s^{-1}\,(const)$ $\omega_2 = 2, 5, 10, 20, 50\,s^{-1}$ $U_{in} = U(t) = U_0\,(\sin(\omega_1 \cdot t + sin(\omega_2.t))\,V$ $R = 1000\,\Omega$ $C = 500\,\mu F$	$U_R = R \cdot I$ $U_c = \frac{Q}{C}$ $I = \frac{dQ}{dt}$	$U_c + U_R - U_{in} = 0$ $U_{in} = U_R - U_c$

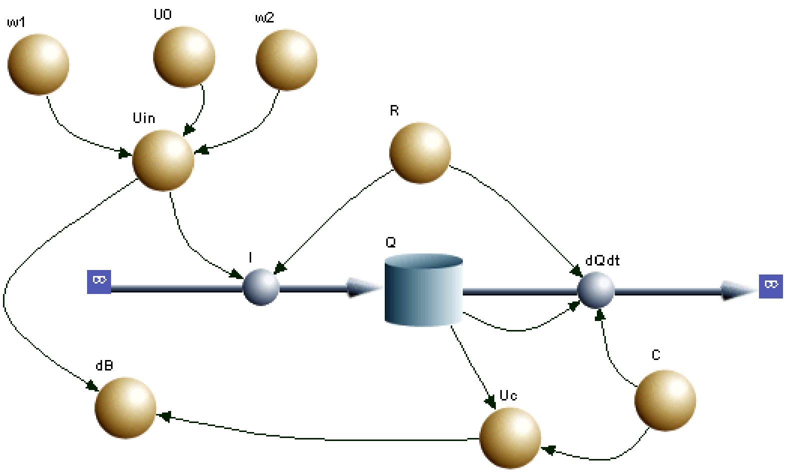

Abbildung 7: Berkeley-Madonna-Modell des RC-Schaltkreises mit Wechselspannungsquelle

Die Differentialgleichung für die Ladung Q übernehmen wir aus der ersten Aufgabe. Das folgende Diagramm zeigt das Verhalten des RC-Glieds im Zeitbereich.

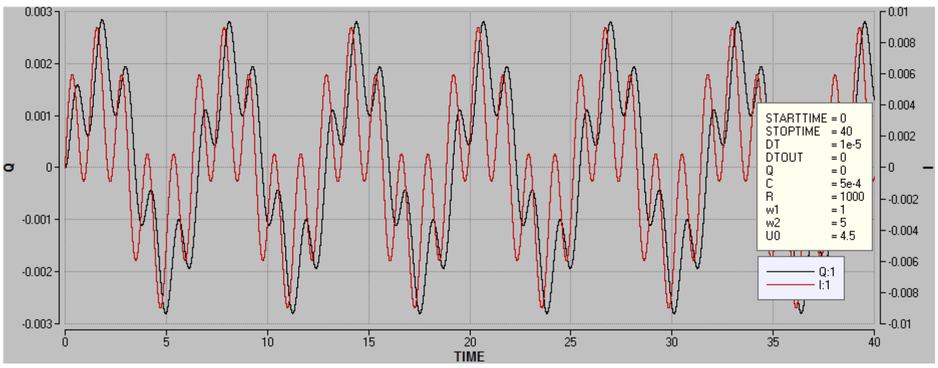

Abbildung 8: Ladung und Strom im Kondensator

Wir variieren die Kreisfrequenz ω_2 des Eingangssignals und visualisieren die gelösten Gleichungen.

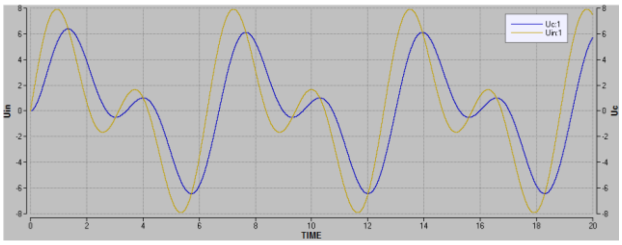

Abbildung 9: Parametrisierte Eingangsspannung mit $\omega_2 = 2\ s^{-1}$

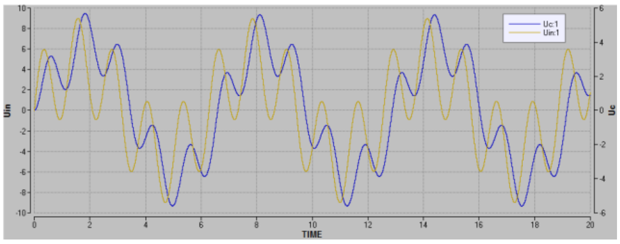

Abbildung 10: Parametrisierte Eingangsspannung mit $\omega_2 = 5\ s^{-1}$

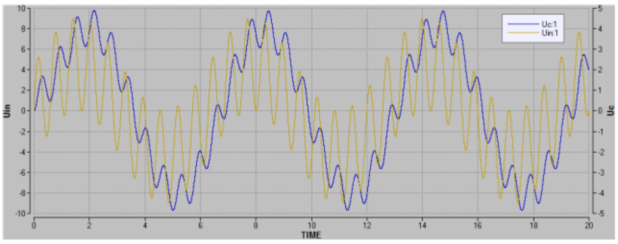

Abbildung 11: Parametrisierte Eingangsspannung mit $\omega_2 = 10\ s^{-1}$

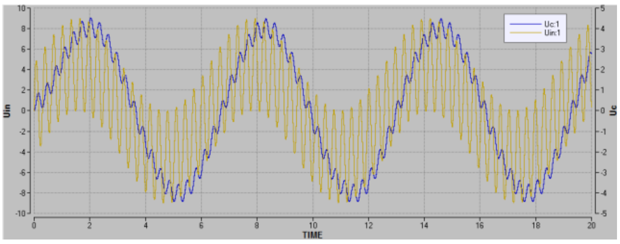

Abbildung 12: Parametrisierte Eingangsspannung mit $\omega_2 = 20\ s^{-1}$

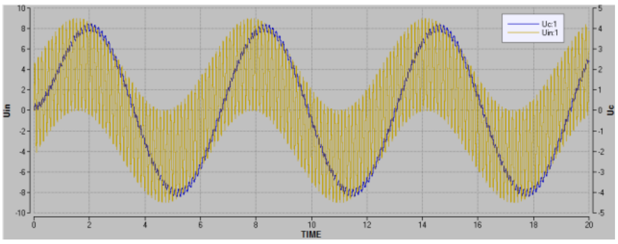

Abbildung 13: Parametrisierte Eingangsspannung mit $\omega_2 = 50\ s^{-1}$

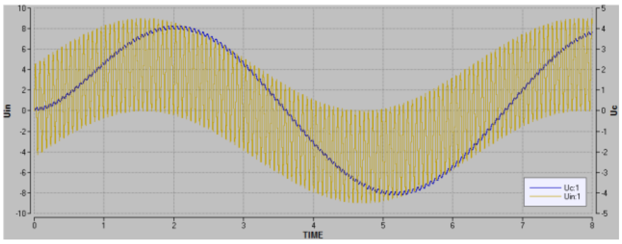

Abbildung 14: Parametrisierte Eingangsspannung mit $\omega_2 = 100\ s^{-1}$

Man erkennt, dass mit steigender Kreisfrequenz die Amplitude unseres Ausgangssignals immer stärker gedämpft wird. Dies können wir wiederum bestätigen, in dem wir den Ausgangssignalpegel L_u betrachten. Wir wählen in Berkeley-Madonna einen grösseren Zeitabstand ($t_{max} = STOPTIME - STARTTIME$) damit wir eine akzeptable Auflösung im Frequenzbereich erhalten und das Spektrum richtig interpretieren können.

$$L_u = 10 \cdot \log\left(\frac{{U_{out}}^2}{{U_{in}}^2}\right) [dB]$$

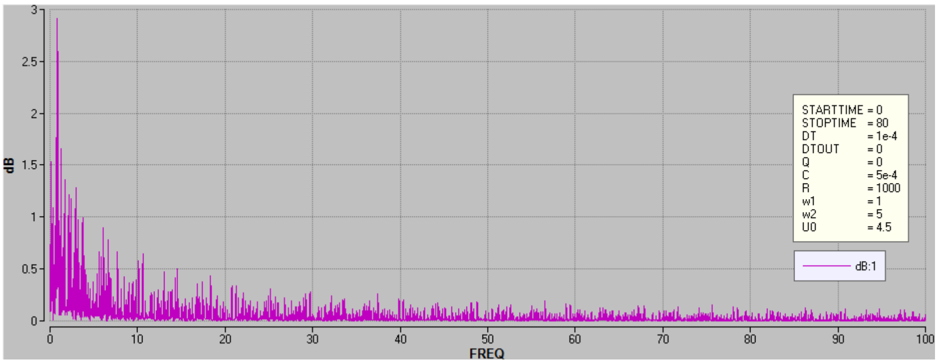

Abbildung 15: Veränderung des Signalpegels als Funktion der Frequenz

Daraus schliessen wir, dass Frequenzanteile im Eingangssignal ab einer Grenzfrequenz (Cutoff-Frequenz) soweit gedämpft werden, dass sie unterhalb der Hörschwelle des Menschen fallen und somit nicht mehr wahrnehmbar sind.

Bei der vorliegenden RC-Schaltung liegt die Cutoff-Frequenz (0.31 Hz) weit unterhalb unseres Hörbereichs (20 Hz – 18 kHz). Transponiert man aber diese Grenzfrequenz z. B. auf 500 Hz, so könnte man sich einen akustischen Eindruck dieses Tiefpassfilters machen. Ausgegeben über einen Tongenerator und Lautsprecher würde das Ausgangssignal dumpfer als das Eingangssignal klingen.

Teilauftrag B

Wir entwickeln einen eigenen RLC-Schaltkreis (Schwingkreis) und analysieren das Verhalten im Zeit- und Frequenzbereich.

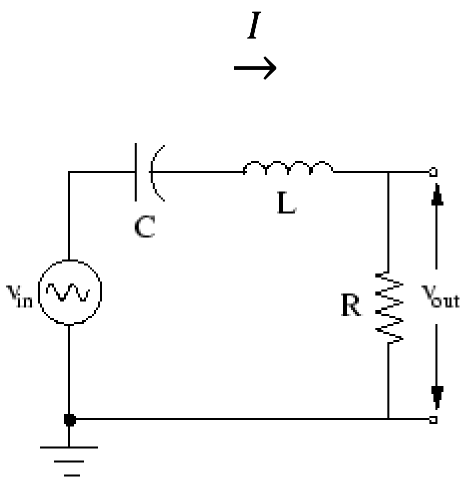

Abbildung 16: RLC-Schaltkreis mit Wechselspannungsquelle
Quelle: http://webpages.ursinus.edu

Für den Kondensator bestimmen wir die Ladung Q und für die Spule den Strom I.

Grössen	Elemente	Masche
$U_0 = 12\,V$ $R = 8\,\Omega$ $C = 5\,\mu F$ $L = 800\,\mu H$ $U_{in} = U_0 \cdot sin(\omega \cdot TIME \cdot sin(2\pi \cdot RANDOM(10, 20 \cdot TIME)))\,V$	$U_c = \frac{Q}{C}$ $U_L = L \cdot \frac{dI}{dt}$ $U_R = R \cdot I$ $I = \frac{dQ}{dt}$ $\frac{dI}{dt} = -\frac{Q}{LC} - \frac{R \cdot I}{L} + \frac{U_{in}}{L}$	$U_c + U_L + U_R - U_{in} = 0$ $U_0 = U_R - U_L + U_c$

$$U_R + U_L + U_C - U_{in} = R \cdot I + L \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} - U_{in} = 0$$

$$R \cdot I + L \cdot (-\frac{Q}{LC} - \frac{R \cdot I}{L} + \frac{U_{in}}{L}) + \frac{Q}{C} - U_{in} = 0$$

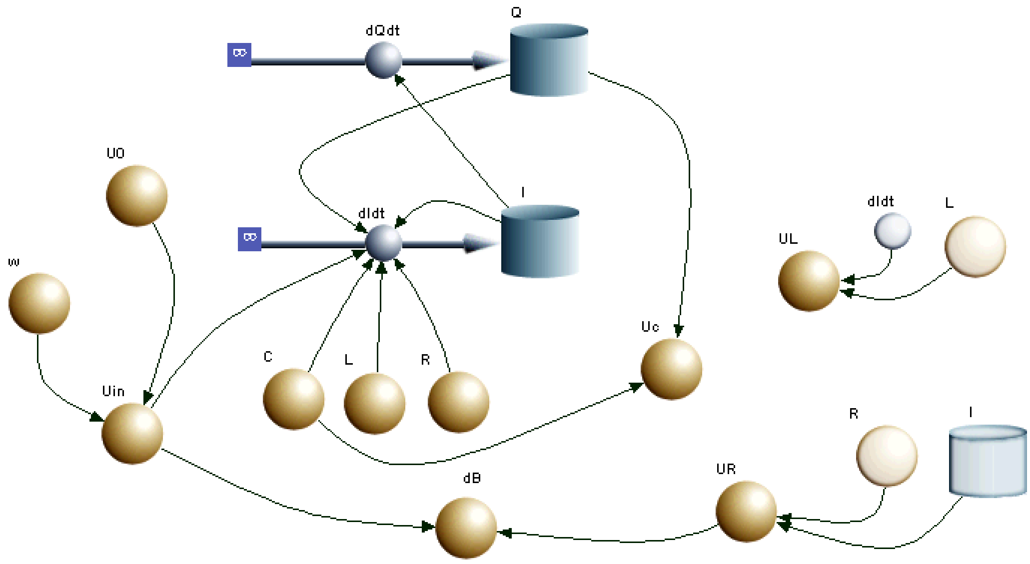

Abbildung 17: Berkeley-Madonna-Modell der RLC-Schaltung mit Wechselspannungsquelle

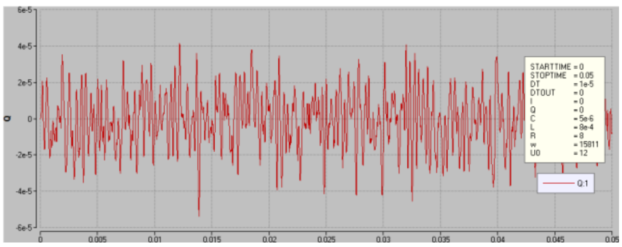

Abbildung 18: Ladung im Kondensator

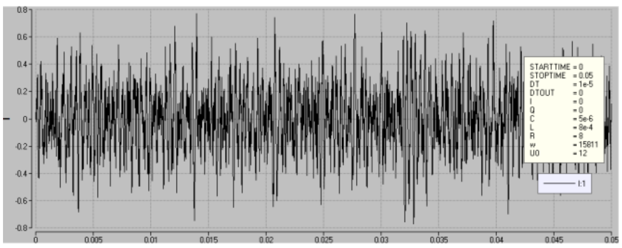

Abbildung 19: Strom durch die Spule

Für einen Schwingkreis können wir seine Resonanzfrequenz berechnen:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{800 \cdot 10^{-6}\, H \cdot 5 \cdot 10^{-6}\, C}} = 2516\, Hz$$

Oder als Kreisfrequenz:

$$\omega_0 = 2\pi \cdot f_0 = 2\pi \cdot 2516\, Hz = 15811\, s^{-1}$$

Zur besseren Darstellung des Verhaltens dieser Schaltung parametrisieren wir unser Eingangssignal in Berkeley-Madonna so, dass wir ein Rauschen über das gesamte Spektrum erhalten.

$$U_{in} = U_0 \cdot sin(\omega \cdot TIME \cdot sin(2\pi \cdot\ RANDOM(10, 20 \cdot TIME)))\ \{V\}$$

Wir betrachten die Spannung U_R über dem Lastwiderstand als unsere Ausgangsspannung.

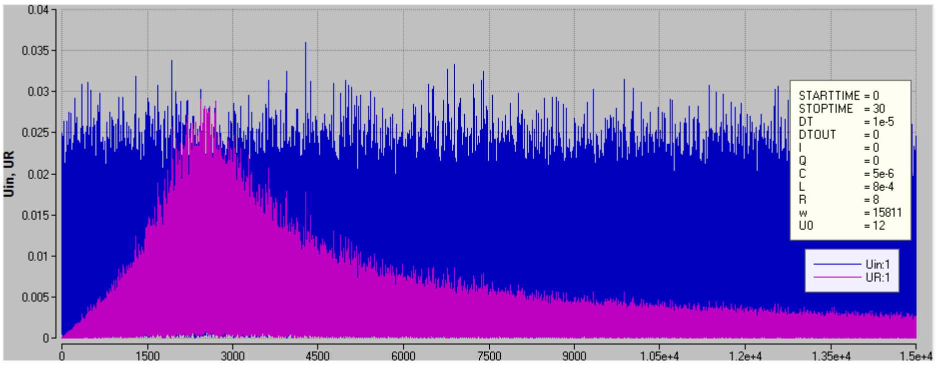

Abbildung 20: Eingangsspannung vs. Ausgangsspannung

In dieser Grafik lässt sich erkennen, dass diese RLC-Schaltung ein Bandpassfilter mit einem klar definierten Durchlassbereich ist. Uns interessieren im Weiteren die untere und obere Grenzfrequenz.

Sehen wir uns die Spannungen über dem Kondensator und der Spule getrennt an.

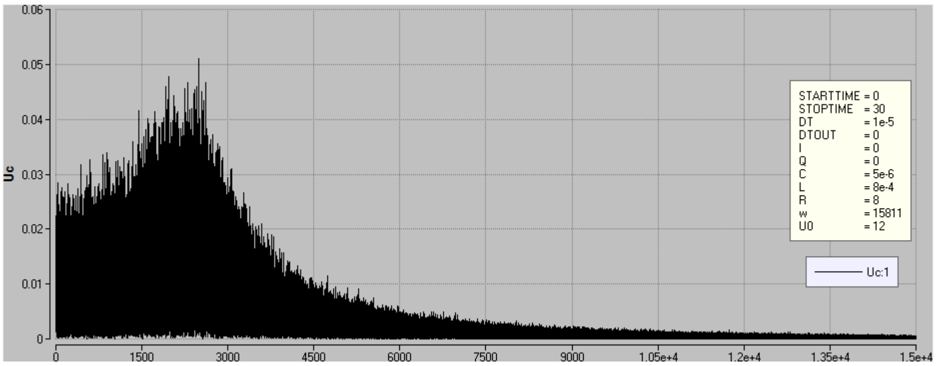

Abbildung 21: Spannung über dem Kondensator

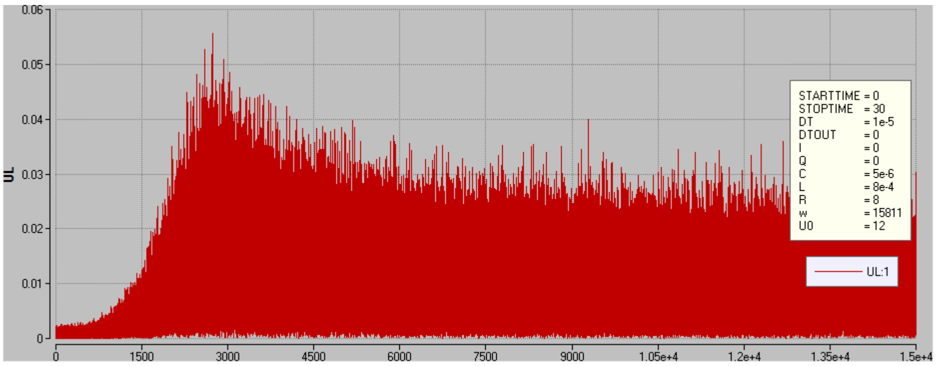

Abbildung 22: Spannung über der Spule

Wir stellen fest, dass der Kondensator die tiefen Frequenzen und die Spule die hohen Frequenzen passieren lässt. Tief- und Hochpassfilter kombiniert ergeben einen sehr einfachen Bandpassfilter 2. Ordnung.

Zwischen der unteren Grenzfrequenz f_L , der oberen Grenzfrequenz f_H und der Resonanzfrequenz f_0 besteht ein Zusammenhang.

$$f_0 = \sqrt{f_L \cdot f_H}$$

Aus den Diagrammen ersehen wir eine untere Grenzfrequenz f_L von etwa 1500 Hz. Nun können wir approximativ die obere Grenzfrequenz f_H bestimmen.

$$f_H = \frac{{f_0}^2}{f_L} \approx 4200\ Hz$$

Das bedeutet, dass unser Filter eine Bandbreite $(f_H - f_L)$ von rund 3000 Hz hat. Dieser Wert stimmt mit der Abbildung 20 überein.