Einige Aufgaben stammen aus früheren Semesterprüfungen.

Aufgabe 1

Gegeben ist die Tafel einer Häufigkeitsverteilung von 2000 Daten:

x von...bis unter...			rel. Summen-häufigkeit Srel		
300-500			0.12		
500 - 600			0.20		
600 - 900			0.63		
900 -1300			0.81		
1300-1800			0.92		
1800 - 2500			1.00		

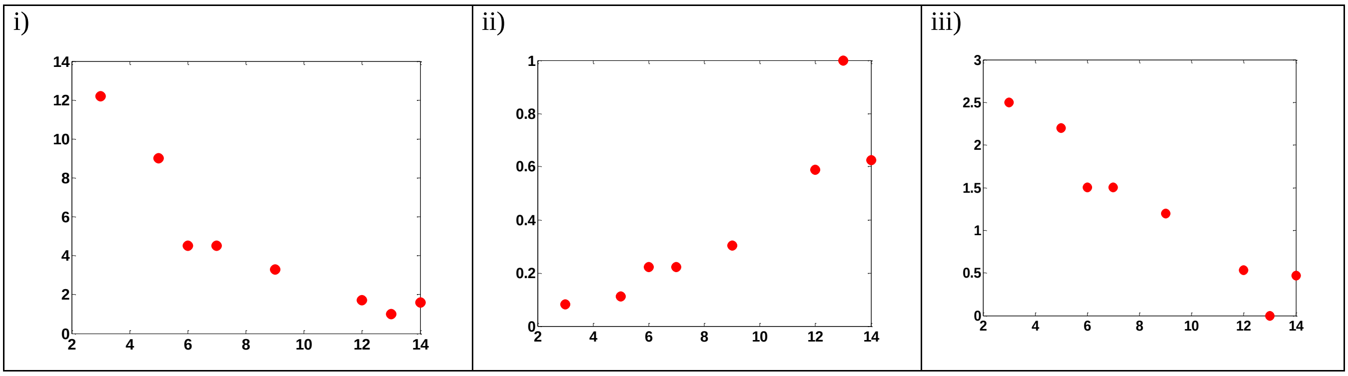
a) Bestimmen Sie den Median von x.
b) Zeichnen Sie ein Histogramm (Achsen beschriften).

Aufgabe 2

Gegeben sind N = 8 Datenpaare:

x	3	5	6	7	9	12	13	14
y	12.2	9	4.5	4.5	3.3	1.7	1	1.6

Man betrachte die Modelle i) $y = ax + b$ ii) $1/y = ax+b$ iii) $\ln(y) = ax + b$



a) im Modell i) bestimmen Sie die Regressionsgleichung sowie die Varianz der erklärten y-Werte
b) Welches ist das passendste Modell? Begründen Sie und bestimmen Sie die Mit Hilfe der Regressionsrechnung die Parameter a und b sowie den erklärten y Wert für x = 8.

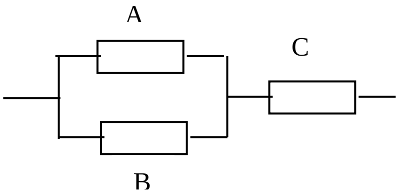
Aufgabe3

Die stetige Zufallsvariable X hat die Verteilungsfunktion $F(x) = 2x - x^2$ *in* $0 \le x \le 1$.

a) Berechnen Sie den Median von X.
b) Bestimmen Sie die Dichte von X und stellen Sie sie graphisch im Bereich $-2 \le x \le 3$ dar.
c) Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.

Aufgabe 4

Ein komplexes System ist als Schaltung dargestellt. die drei Komponenten A, B und C fallen mit den gleichen Wahrscheinlichkeiten p aus



a) Für welchen Wert von p ist das System mit Wahrscheinlichkeit 0.9 sicher?
b) Das System sei ausgefallen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dann die Komponente A ausgefallen (durch p ausdrücken)?

Aufgabe 5

Gegeben ist die uniforme Verteilung X~U(0,1)
Wir bilden eine Zufallsvariable wie folgt: man zieht eine Stichprobe vom Umfang n und wählt die grösste der gezogenen Zahlen: $V = \max(X_1,....,X_n)$

a) Überlege: $P(V > v) = 1 - P(X \le v)^n = 1 - v^n$
b) Leite aus a) die Verteilungsfunktion F(v) und die Dichte f(v) von V her.
c) Berechne die Kennwerte μ und σ von V.

Aufgabe 6

Die Prognose für eine Abstimmungsvorlage hat bei einer Stichprobe von Umfang n = 1200 580 JA Stimmen erbracht.

a) Bestimme ein 99% Vertrauensintervall für den Anteil in der Gesamtheit.
b) Ein Politiker meint, dass der Ja Anteil 52% sein werde. Kann man diese Hypothese statistisch unterstützen? Hinweis: Die Hypothese wird gestützt, wenn der behauptete Wert im 99%-VI liegt, andererseits wird sie abgelehnt.

Aufgabe 7

Die Zufallsvariablen X1, X2 sind uniform verteilt: Xi~U(0 , 1) (i =1,2), und sie sind voneinander unabhängig.

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz der ZV S = 3X1 + 2X2.
b) Sind die Ereignisse A: X1 > 0.6 und B: X1 < 0.7 von eineinander unabhängig?

Aufgabe 8

Von den 6000 Computern, die eine Firma kaufte, war eine gewisse Anzahl innerhalb der ersten 3 Jahre z.T. mehrmals defekt. Man nimmt an, dass die Anzahl Schäden pro PC poissonverteilt ist.

a) Die mittlere Anzahl Schäden pro PC sei 0.25. Wie viele PC's hatten demnach mehr als einen Schaden erlitten?
b) 4835 PC's waren immer intakt. Welches ist dann die erwartete gesamte Zahl aller Schadensvorfälle.

Aufgabe 9

Eine Autoverleihfirma will eine neue Flotte von Kleinautos beschaffen.

a) Man weiss, dass täglich durchschnittlich 40 Autos nachgefragt werden. Bestimmen Sie die benötigte Anzahl Autos so, dass mit 99 % iger Sicherheit genügend Autos im Angebot sind. Die Anzahl nachgefragte Autos kann als Poissonverteilt vorausgesetzt werden.

b) Die mittlere Lebensdauer eines Autos wird als μ = 12 Jahre angenommen, die Lebenszeit sei exponential verteilt. Zwei Autos bilden ein System, das so lange funktioniert, als mindestens ein Auto am Leben ist. T sei die Lebensdauer dieses Systems. Bestimme die Verteilungsfunktion, die Dichte und den Erwartungswert von T.

Aufgabe 10

Eine Versicherungsgesellschaft teilt ihre Kunden in drei Risikoklassen ein, abhängig davon, ob die Person im vergangenen Jahr in einen Unfall verwickelt war. Aufgrund der Akten ergaben sich die folgenden Zahlen:

Risikogruppe	Wahrsch. für Unfall in einem Jahr	Anteil Kunden
gut	0.05	20%
mittel	0.15	50%
schlecht	0.3	30%

a) Welcher Anteil der Bevölkerung hat dann erwartungsgemäss in einem bestimmten Jahr einen Unfall?
b) Ein Kunde hatte im letzten Jahr keinen Unfall. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er dann ein gutes Risiko?

Aufgabe 11

Kettenglieder mit der Länge X werden mit den Kennzahlen μ = 2cm σ = 0.2cm gefertigt.
Sn sei die Länge einer Kette mit n Gliedern.

a) Es sei n = 25. Schätzen Sie mit der Ungleichung von Tschebyscheff die Wahrscheinlichkeit ab, mit der Sn höchstens um 1.5cm von μ_{Sn} abweicht.
b) Es sei n = 300. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist Sn > 605cm? Wenden Sie den zentralen Grenzwertsatz an.

Aufgabe 12

a) Gegeben ist folgende Stichprobe aus einer Grundgesamtheit mit unbekanntem Mittelwert:
88.2 91.6 93.9 90.4 91.2 91.0 87.9 89.4 91.8
Berechnen Sie Punktschätzungen für die Grössen $\mu_{\overline{X}}$ *und* $\sigma_{\overline{X}}$

b) Eine andere Stichprobe vom Umfang n = 121 ergab $\bar{x} = 91.5$ und die Summe $\sum_{j=1}^{n}\left(x_j - \bar{x}\right)^2 = 37.8$

.

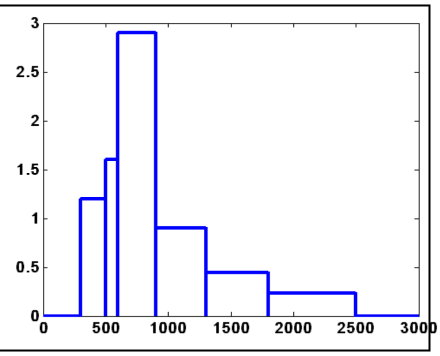
b1) Bestimmen Sie ein 99% - Konfidenzintervall für μ_X .
b2) Wie gross muss der Stichprobenumfang n gewählt werden, damit das Konfidenzintervall nur noch ein Viertel der Breite des Konfidenzintervalls von b1) hat (1 - α = 90%)?

Resultate

1) a) lineare Interpolation: $\frac{0.5-0.2}{x-600} = \frac{0.63-0.2}{900-600}$ x=809.3

b)

x von...bis unter...	**h**	**Dichte**	rel. Summen-häufigkeit Srel
300-500	**240**	**1.2**	0.12
500 - 600	**160**	**1.6**	0.20
600 - 900	**860**	**2.9**	0.63
900 -1300	**360**	**0.9**	0.81
1300-1800	**220**	**0.44**	0.92
1800 - 2500	**160**	**0.23**	1.00
	2000		



2) a) y = -0.882x+12.3 $s_{\hat{y}}^2 = s_y^2 \cdot R^2 = 12.65$

b) Modell iii) : $y = \exp(-0.208x + 3.03)$ $y(x=8) = 3.93$

3) a) F(x) = 0.5 x = 0.2929 b) f(x) = 2-2x $E[X] = \int_0^1 x \cdot f(x)dx = \frac{1}{3}$

4) a) $P_{sicher} = (1-p^2)(1-p) = 0.9$ $p \approx 0.092$ $P(A=0|S=0) = \frac{P(A=0 \wedge S=0)}{P(S=0)} = \frac{p(2-p)}{1+p-p^2}$

5) b) $P(V > v) = 1 - P(X \le v)^n \Rightarrow P(V \le v) = F(v) = v^n$ $f(v) = n \cdot v^{n-1}$

c) $\mu_V = \frac{n}{n+1}$ $\sigma_V^2 = \frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2}$

6) a) a = 0.483 e = 0.0372 0.99VI = [0.446 , 520]

b) $0.95VI = 0.483 \pm 0.0283 = [0.455, 0.512]]$ $0.52 \notin VI$, die Hypothese wird abgelehnt.

7) a) $\mu_S = 2.5$ $\sigma_S = \sqrt{\frac{13}{12}}$

b) $P(0.6 \le X \le 0.7) = 0.1$ $P(X > 0.6) \cdot P(X < 0.7) = 0.4 \cdot 0.7 = 0.28$ nicht unabhängig

8) a) $\lambda = 0.25$ $n \cdot P(X \le 1) = 159$ b) $P(X=0) = 4836/6000 = 0.806 = e^{\lambda}$ $n \cdot \lambda = 1295$

9) a) kleinstes k mit $P(X > k) \le 0.01$ k = 55

b) $F(t) = P(T \le t) = (1 - e^{-\lambda t})^2$, $f(t) = F'(t) = 2 \cdot \lambda e^{-\lambda t} - 2\lambda e^{-2\lambda t}$

Integrieren liefert $\mu = 2 \cdot 12 - 6 = 18$

10) a) U = Unfallwahrsch E [U] = 0.175

b) P(gutes Risiko | unfallfrei) = $\dfrac{P(gR)\cdot P(uf|gR)}{P(uf)} = \dfrac{0.2\cdot 0.95}{0.825} = 0.2303$

11) a) $\mu_{Sn} = 50 \quad \sigma_{Sn} = 1 \quad P(|X-50| \le 1.5) \ge 1-\dfrac{1}{1.5^2} = 0.56$

b) $\mu_{Sn} = 600 \quad \sigma_{Sn} = 3.46 \quad P(S_n > 605) = 0.0765$

12) a) $\hat{\mu}_{\overline{X}} = \overline{x} = 90.6 \qquad \hat{\sigma}_{\overline{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = 0.628$

b1) $0.99VI = 91.5 \pm \dfrac{\sqrt{\frac{37.8}{120}}}{\sqrt{121}} \cdot z_{0.995} = 91.5 \pm 0.131$

b2) $n = \dfrac{\frac{37.8}{120}}{\left(\frac{0.131}{4}\right)^2} \cdot z_{0.95}{}^2 = 795$