Übungsserie 13

Lösungen

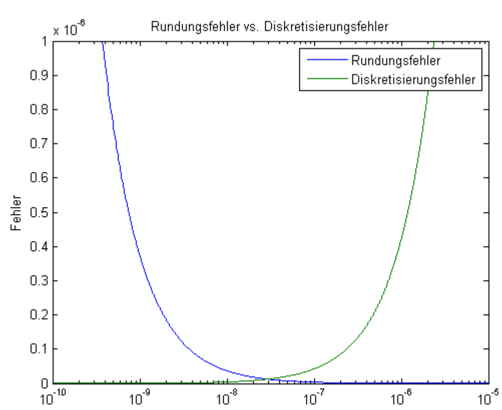
Die Lösungen der Aufgaben aus dem Skript sind für die Kapitel 6-10 unten aufgeführt. Vergessen Sie nicht, die entsprechenden Beispiele aus dem Skript und vor allem die Übungen aus den Serien in Ihre Prüfungsvorbereitung mit einzubeziehen.

Kapitel 6: Numerische Differentiation und Integration

Lösung Aufgabe 6.1:

h	$D_1 f(1,h)$	$\mid D_1 f(1,h) - f'(x_0) \mid$
10^{-2}	0.536085981011869	4.216324856270770e-03
10^{-4}	0.540260231418621	4.207444951864758e-05
10^{-6}	0.540301885121330	4.207468093930800e-07
10^{-8}	0.540302302898255	2.969885226633551e-09
10^{-10}	0.540302247387103	5.848103645789138e-08
10^{-12}	0.540345546085064	4.324021692392321e-05
10^{-14}	0.544009282066327	3.706976198186940e-03
10^{-15}	0.555111512312578	1.480920644443851e-02
10^{-16}	0	5.403023058681398e-01

- Bei der obigen Aufgabe stellen wir fest, dass der Fehler zunächst mit kleiner werdender Schrittweite h abnimmt, dann aber wieder zunimmt und schliesslich konstant bei 0.54... bleibt.
- Woran liegt das? Wir wissen aus Kapitel 1, dass die Maschinengenauigkeit sich für n-stellige Rechnung durch $eps = 5 \cdot 10^{-n}$ ausdrücken lässt.
- Für $h < eps$ wird für den Rechner $1 + h$ identisch mit 1, d.h. $D_1 f(1,h) = \frac{\sin(1+h)-\sin(1)}{h} = 0$ und $\mid D_1 f(1,h) - \cos(1) \mid = \cos(1) = 0.54...$.
- Aber bereits früher wird für den Rechner $\sin(1 + h)$ sehr ähnlich zu $\sin(1)$, d.h. es tritt Auslöschung auf. Bei der Division durch das immer kleiner werdende h verstärkt sich dies weiter.
- Das bedeutet, dass fals h zu gross gewählt wird, dann ist der Näherungs- oder Diskretisierungsfehler zu gross, wählt man h allerdings zu klein, dann werden Rundungsfehler dominant.



Aufgabe 6.2:

h	$D_1 f(1,h)$	$\mid D_1 f(1,h) - f'(x_0) \mid$
10^{-2}	0.54029330087	9.004993e-06
10^{-4}	0.54030230497	9.004295e-10
10^{-6}	0.54030230590	2.771694e-11
10^{-8}	0.54030230845	2.581230e-09
10^{-10}	0.54030224739	5.848104e-08
10^{-12}	0.54029003493	1.227093e-05
10^{-14}	0.54400928207	3.706976e-03
10^{-15}	0.55511151231	1.480921e-02
10^{-16}	0.55511151231	1.480921e-02
10^{-17}	0	5.403023e-01

- Bei $h = 10^{-6}$ erreicht der Fehler sein Minimum. In Aufg. 6.1 geschieht dies erst bei $h = 10^{-8}$.

Lösung Aufgabe 6.3:

$$\begin{aligned}
f(x_0+h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}h^3 + \frac{f^{(4)}(z_1)}{24}h^4 \\
f(x_0-h) &= f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 - \frac{f'''(x_0)}{6}h^3 + \frac{f^{(4)}(z_2)}{24}h^4 \\
\Rightarrow f(x_0+h) + f(x_0-h) &= 2f(x_0) + f''(x_0)h^2 + \frac{f^{(4)}(z_1) + f^{(4)}(z_2)}{24}h^4 \\
\Rightarrow f''(x_0)h^2 &= f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0) - \frac{f^{(4)}(z_1) + f^{(4)}(z_2)}{24}h^4 \\
\Rightarrow f''(x_0) &= \underbrace{\frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}}_{D_5 f(x_0,h)} - \underbrace{\frac{f^{(4)}(z_1) + f^{(4)}(z_2)}{24}h^2}_{O(h^2)}
\end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 6.4 [1]:

Lösung: Wir bilden das zugehörige Dreiecksschema mit $n = 3$ und erhalten (bei 10-stelliger Rechnung):

h	D_{i0}	D_{i1}	D_{i2}	D_{i3}
0.1	0.497363753			
		0.540725867		
0.05	0.51904481		0.5403068043	
		0.54041157		0.5403023157
0.025	0.52972819		0.5403028767	
		0.54033005		
0.0125	0.53502912			

Die zugehörigen Fehler $E_{ik} := |D_{ik} - f'(1)|$ sind:

h	E_{i0}	E_{i1}	E_{i2}	E_{i3}
0.1	0.0429385529			
		$4.235611 \cdot 10^{-4}$		
0.05	0.0212574959		$4.4984 \cdot 10^{-6}$	
		$1.092641 \cdot 10^{-4}$		$9.8 \cdot 10^{-9}$
0.025	0.0105741159		$5.708 \cdot 10^{-7}$	
		$2.77441 \cdot 10^{-5}$		
0.0125	0.0052731859			

Wir beobachten Folgendes:

- Innerhalb einer Spalte werden die Fehler von oben nach unten kleiner. Grund dafür ist natürlich, dass die verwendeten Schrittweiten nach unten kleiner werden und damit der Diskretisierungsfehler kleiner wird.
- Innerhalb des Schemas werden die Fehler von links nach rechts kleiner. Grund ist, dass die verwendeten Fehlerordnungen durch die Extrapolation immer höher werden. ■

Lösung Aufgabe 6.5 [1]:

Berechnen Sie mit der Differenzenformel $D_2 f(x_0, h)$ mit $f(x) = \sin x$ und den Schrittweiten $h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125$ Näherungswerte für $f'(1)$ und verbessern Sie diese anschließend mit Extrapolation.

Lösung: Da die Formel $D_2 f$ eine Fehlerentwicklung nach geraden Potenzen von h besitzt, verwenden wir hier h^2-Extrapolation, um das Dreiecksschema aufzustellen. Diese Methode ist so genau, dass wir diesmal 15-stellige Rechnung verwenden, um die durch die Extrapolation erzielten Verbesserungen deutlich zu machen. Wir erhalten

h	D_{i0}	D_{i1}	D_{i2}	D_{i3}
0.1	0.539402			
		0.5403021993		
0.05	0.540077		0.54030230586644	
		0.5403022988		0.540302305868097
0.025	0.540246		0.54030230586807	
		0.5403023054		
0.0125	0.540288			

Die zugehörigen Fehler $E_{ik} := |D_{ik} - f'(1)|$ sind:

h	E_{i0}	E_{i1}	E_{i2}	E_{i3}
0.1	$9.00053698380 \cdot 10^{-4}$			
		$1.12529487 \cdot 10^{-7}$		
0.05	$2.25097821710 \cdot 10^{-4}$		$1.696 \cdot 10^{-12}$	
		$7.034683 \cdot 10^{-9}$		$4.3 \cdot 10^{-14}$
0.025	$5.6279731440 \cdot 10^{-5}$		$7.0 \cdot 10^{-14}$	
		$4.39733 \cdot 10^{-10}$		
0.0125	$1.4070262660 \cdot 10^{-5}$			

Zu beobachten sind die gleichen Phänomene wie in Beispiel 7.5: Abnehmender Fehler von oben nach unten und links nach rechts im Dreiecksschema. Nur nimmt der Fehler hier noch wesentlich stärker ab als in Beispiel 7.5, da sich die Fehlerordnung von Spalte zu Spalte nicht nur um 1, sondern gleich um 2 erhöht. Die Extrapolation bringt hier also mit sehr wenig Aufwand einen enormen Gewinn an Genauigkeit. ■

Lösung Aufgabe 6.6 [1]:

Lösung: $n = 4$, also $h = 0.5$. Die summierte Mittelpunktsregel liefert (siehe Bild 7.4)

$$
\begin{aligned}
Rf(0.5) &= 0.5 \cdot \sum_{i=0}^{3} f(2 + i \cdot 0.5 + 0.25) \\
&= 0.5 \cdot (f(2.25) + f(2.75) + f(3.25) + f(3.75)) = 0.6912\ldots
\end{aligned}
$$

Mit der summierten Trapezregel erhält man (siehe Bild 7.5)

$$
\begin{aligned}
Tf(0.5) &= 0.5 \left(\frac{f(2) + f(4)}{2} + \sum_{i=1}^{3} f(2 + i \cdot 0.5) \right) \\
&= 0.5 \left(\frac{f(2) + f(4)}{2} + f(2.5) + f(3) + f(3.5) \right) = 0.6970\ldots
\end{aligned}
$$

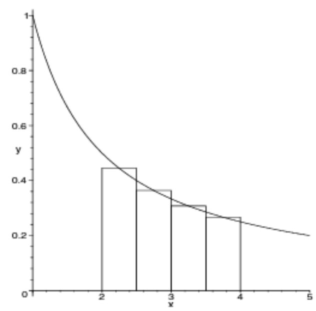


Bild 7.4 Summierte Mittelpunktsregel für $\int_2^4 x^{-1}\,dx$ und $n = 4$

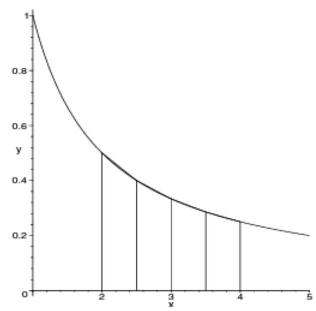


Bild 7.5 Summierte Trapezregel für $\int_2^4 x^{-1}\,dx$ und $n = 4$

Der exakte Wert ist $0.6931\ldots$, die Ergebnisse der summierten Formeln sind also deutlich besser als die der einfachen Formeln (wie zu erwarten). ∎

Lösung Aufgabe 6.7:

- Wir verwenden die Definition der summierten Trapez- und Rechteckregel:

$$
\begin{aligned}
Rf(h) &= h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + \frac{h}{2}) \\
Tf(h) &= h \cdot \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right)
\end{aligned}
$$

- Damit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{3}\left(Tf(h) + 2Rf(h)\right) &= \frac{1}{3}\left(h \cdot \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) + 2h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + \frac{h}{2}) \right) \\
&= \frac{h}{3}\left(\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right) \right) \right) \\
&= \frac{h}{3}\left(\frac{1}{2} f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) + \frac{1}{2} f(b) \right) \\
&= \frac{h}{3}\left(\frac{1}{2} f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2} \right) + \frac{1}{2} f(b) \right) \\
&= Sf(h)
\end{aligned}
$$

Lösung Aufgabe 6.8 [1]:

Mit $f(x) := \mathrm{e}^{-x^2}$ haben wir gemäß (7.20) h so zu bestimmen, dass

$$|I - Tf(h)| \le \frac{h^2}{12}\,(0.5-0)\max_{x\in[0,0.5]}|f''(x)| \overset{!}{\le} 10^{-5}$$

gilt. Wir haben auf $[0, 0.5]$

$$|f''(x)| = 2\,\underbrace{\mathrm{e}^{-x^2}}_{\le 1}\,|1-2\,x^2| \le 2\,(1-2\,x^2) \le 2.$$

Unsere Forderung an h lautet also $\frac{h^2}{12} \overset{!}{\le} 10^{-5}$, d. h., $h \le 0.01095\ldots$ Wegen $N = (0.5-0)/h$ reicht demnach $N = 46$ aus. Mit $h = 0.5/46$ erhalten wir $Tf(h) = 0.4612733389$.

Lösung Aufgabe 6.9:

- Wir erhalten für $n = 3$

$$\begin{aligned} Rf &= 0.462186069773049 \\ Tf &= 0.459474030911070 \\ Sf &= 0.461282056819056 \\ G_3 f &= 0.461281280092515 \end{aligned}$$

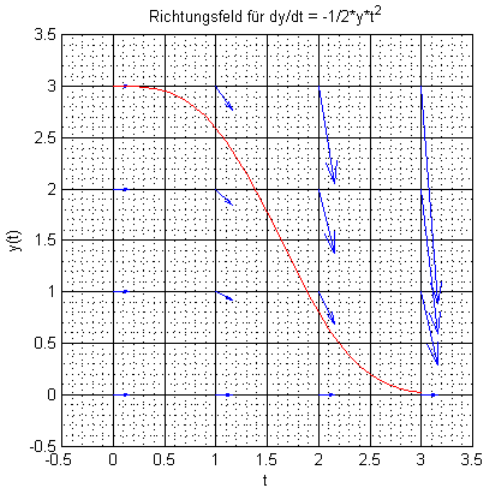
Lösung Aufgabe 6.10:

h	Ti0	Ti1	Ti2	Ti3
0.5	0.44470019577			
		0.46137108619		
0.25	0.45720336359		0.46128072233	
		0.46128637007		0.46128100673
0.125	0.46026561845		0.46128100229	
		0.46128133778		
0.0625	0.46102740795			

Kapitel 7: Einführung in gewöhnliche Differentialgleichungen

Lösung Aufgabe 7.1:

$\frac{dy}{dt}$	$t_0 = 0$	$t_1 = 1$	$t_2 = 2$	$t_3 = 3$
$y_0 = 0$	0.0	0.0	0.0	0.0
$y_1 = 1$	0.0	-0.5	-2.0	-4.5
$y_2 = 2$	0.0	-1.0	-4.0	-9.0
$y_3 = 3$	0.0	-1.5	-6.0	-13.5

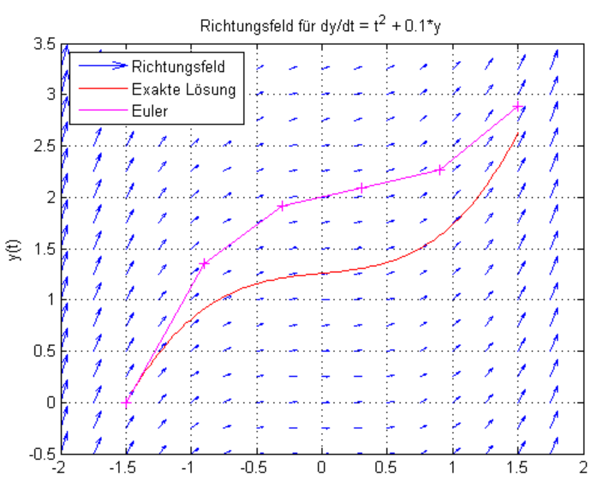


Lösung Aufgabe 7.2:

$$
\begin{aligned}
n &= 5 \Rightarrow h = \frac{b-a}{n} = \frac{1.5-(-1.5)}{5} = 0.6 \\
t_i &= a + ih = -1.5 + i \cdot 0.6 \quad (i = 0, 1, ..., 5)
\end{aligned}
$$

$$
y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) = y_i + h(t_i^2 + 0.1y_i)
$$

$$
\begin{aligned}
y_0 &= y(t_0) = 0 \\
y_1 &= y_0 + h(t_0^2 + 0.1y_0) = 0 + 0.6\left((-1.5)^2 + 0.1 \cdot 0\right) = 1.35 \\
y_2 &= y_1 + h(t_1^2 + 0.1y_1) = 1.35 + 0.6\left((-0.9)^2 + 0.1 \cdot 1.35\right) = 1.917 \\
y_3 &= y_2 + h(t_2^2 + 0.1y_2) = 1.917 + 0.6\left((-0.3)^2 + 0.1 \cdot 1.917\right) = 2.08602 \\
y_4 &= y_3 + h(t_3^2 + 0.1y_3) = 2.08602 + 0.6\left((0.3)^2 + 0.1 \cdot 2.08602\right) = 2.2651812 \\
y_5 &= y_4 + h(t_4^2 + 0.1y_4) = 2.2651812 + 0.6\left((0.9)^2 + 0.1 \cdot 2.2651812\right) = 2.887092072
\end{aligned}
$$



- Die Abweichung kommt von der (zu) grossen Schrittweite h.

Lösung Aufgabe 7.3:

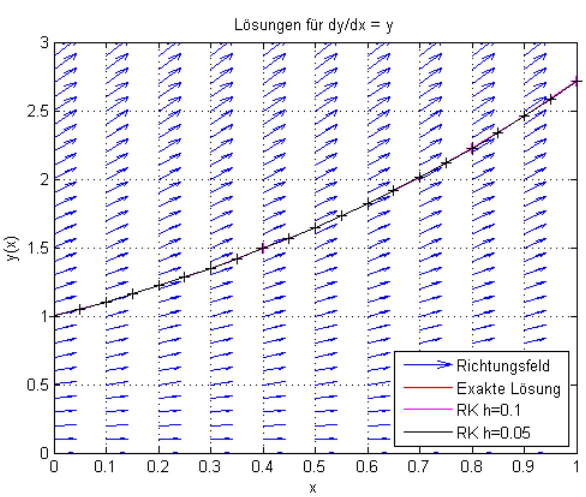
- $h = 0.1,\ x_0 = 0,\ y_0 = 1,\ i = 0:$

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_0, y_0) = y_0 = 1 \\
k_2 &= f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1) = y_0 + \frac{h}{2}k_1 = 1 + 0.05 \cdot 1 = 1.05 \\
k_3 &= f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_2) = y_0 + \frac{h}{2}k_2 = 1 + 0.05 \cdot 1.05 = 1.0525 \\
k_4 &= f(x_i + h, y_i + hk_3) = y_0 + hk_3 = 1 + 0.1 \cdot 1.0525 = 1.10525 \\
x_1 &= x_0 + h = 0.1 \\
y_1 &= y_0 + h \cdot \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1.105171 \\
y_{exakt}(x_1) &= \mathrm{e}^{0.1} = 1.1051709
\end{aligned}
$$

- $h = 0.1$: alle Werte

i	x_i	y_{exakt}	y_i	k_1	k_2	k_3	k_4	y_{i+1}
0	0.0	1.00000	1.00000	1.000000	1.050000	1.052500	1.105250	1.105171
1	0.1	1.105171	1.105171	1.105171	1.160429	1.163192	1.221490	1.221403
2	0.2	1.221403	1.221403	1.221403	1.282473	1.285526	1.349955	1.349858
3	0.3	1.349859	1.349858	1.349858	1.417351	1.420726	1.491931	1.491824
4	0.4	1.491825	1.491824	1.491824	1.566415	1.570145	1.648839	1.648721
5	0.5	1.648721	1.648721	1.648721	1.731157	1.735278	1.822248	1.822118
6	0.6	1.822119	1.822118	1.822118	1.913224	1.917779	2.013896	2.013752
7	0.7	2.013752	2.013752	2.013752	2.114439	2.119474	2.225699	2.225540
8	0.8	2.225540	2.225540	2.225540	2.336817	2.342380	2.459778	2.459601
9	0.9	2.459603	2.459601	2.459601	2.582581	2.588730	2.718474	2.718280
10	1.0	2.718282	2.718280	-	-	-	-	-

- Plot:



Lösung Aufgabe 7.4:

- Lösung für $h = 0.1$:

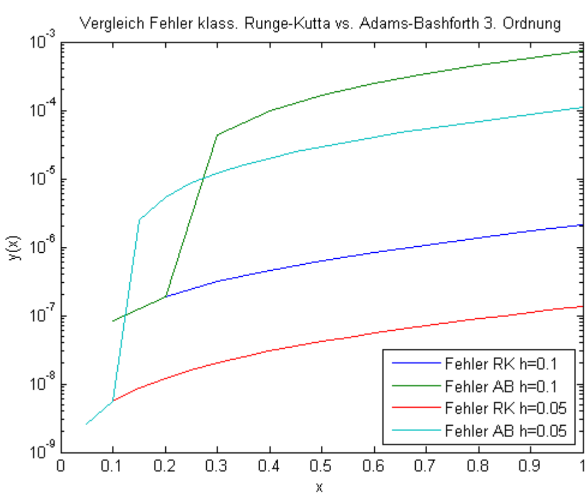
  Beispiel für $i = 2$:

$$
\begin{aligned}
y_3 &= y_2 + \frac{h}{12}\left(23f(x_2,y_2) - 16f(x_1,y_1) + 5f(x_0,y_0)\right) \\
&= 1.221403 + \frac{0.1}{12}\left(23y_2 - 16y_1 + 5y_0\right) \\
&= 1.221403 + \frac{0.1}{12}\left(23 \cdot 1.221403 - 16 \cdot 1.105171 + 5 \cdot 1.000000\right) \\
&= 1.349815
\end{aligned}
$$

  Alle weiteren Werte:

i	x_i	y_{exakt}	y_i Runge-Kutta $h = 0.1$	y_i Adams-Bash. 3. Ordn. $h = 0.1$
0	0.0	1.00000	1.00000	-
1	0.1	1.105171	1.105171	-
2	0.2	1.221403	1.221403	-
3	0.3	1.349859	1.349858	1.349815
4	0.4	1.491825	1.491824	1.491725
5	0.5	1.648721	1.648721	1.648555
6	0.6	1.822119	1.822118	1.821874
7	0.7	2.013752	2.013752	2.013414
8	0.8	2.225540	2.225540	2.225092
9	0.9	2.459603	2.459601	2.459024
10	1.0	2.718282	2.718280	2.717551

- Plot der Fehler (Achtung: es werden Verfahren unterschiedlicher Ordnung verglichen!):



Lösung Aufgabe 7.5:

- Lösung zu 1.:
  - Auflösen nach der höchsten Ableitung: $y^{(4)} = \sin x + 5 - 1.1y''' + 0.1y'' + 0.3y$

– Neue Funktionen einführen:

$$\begin{aligned} z_1(x) &= y(x) \\ z_2(x) &= y'(x) \\ z_3(x) &= y''(x) \\ z_4(x) &= y'''(x) \end{aligned}$$

– Neue Funktionen ableiten:

$$\begin{aligned} z_1'(x) &= y'(x) = z_2(x) \\ z_2'(x) &= y''(x) = z_3(x) \\ z_3'(x) &= y'''(x) = z_4(x) \\ z_4'(x) &= y^{(4)}(x) = \sin x + 5 - 1.1y''' + 0.1y'' + 0.3y \\ &= \sin x + 5 - 1.1 \cdot z_4(x) + 0.1 \cdot z_3(x) + 0.3 \cdot z_1(x) \end{aligned}$$

– Damit erhält man das Anfangswertproblem in vektorieller Form

$$\mathbf{z}' = \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \\ z_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ \sin x + 5 - 1.1 \cdot z_4 + 0.1 \cdot z_3 + 0.3 \cdot z_1 \end{pmatrix} = f(x, \mathbf{z}) \text{ und } \mathbf{z}(0) = z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

– Oder auch als lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{z}'(x) = A(x) \cdot \mathbf{z}(x) + \mathbf{b}(x)$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0 & 0.1 & -1.1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sin x + 5 \end{pmatrix}$$

- Lösung zu 2.:
  – Auflösen nach der höchsten Ableitung: $y'' = \frac{1}{x^2}\left(-xy' - (x^2 - n^2)y\right) = -\frac{1}{x}y' - (1 - \frac{n^2}{x^2})y$
  – Neue Funktionen einführen:

$$\begin{aligned} z_1(x) &= y(x) \\ z_2(x) &= y'(x) \end{aligned}$$

– Neue Funktionen ableiten:

$$\begin{aligned} z_1'(x) &= y'(x) = z_2(x) \\ z_2'(x) &= y''(x) = -\frac{1}{x}y' - (1 - \frac{n^2}{x^2})y \\ &= -\frac{1}{x} \cdot z_2(x) - (1 - \frac{n^2}{x^2}) \cdot z_1(x) \end{aligned}$$

– Damit erhält man das Anfangswertproblem in vektorieller Form

$$\mathbf{z}' = \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ -\frac{1}{x} \cdot z_2 - (1 - \frac{n^2}{x^2}) \cdot z_1 \end{pmatrix} = f(x, \mathbf{z}) \text{ und } \mathbf{z}(1) = z_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

– Oder auch als lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{z}'(x) = A(x) \cdot \mathbf{z}(x) + \mathbf{b}(x)$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(1 - \frac{n^2}{x^2}) & -\frac{1}{x} \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung Aufgabe 7.6:

Lösung zu a):

- Wir haben das Gleichungssystem

$$z'(x) = A(x)z(x) + b(x) \text{ mit } z(0) = z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$A(x) = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0 & 0.1 & -1.1 \end{pmatrix} \; b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sin x + 5 \end{pmatrix}$$

Für die Diskretisierung benötigen wir

$$x_n = x_0 + hn = 0 + hn = hn \text{ und } b_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sin x_n + 5 \end{pmatrix} \text{ und } A_n = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0 & 0.1 & -1.1 \end{pmatrix}$$

- Euler:

$$\begin{aligned}
z_{n+1} &= z_n + h(A_n z_n + b_n), \text{ wobei} \\
z_1 &= z_0 + h(Az_0 + b_0) \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.1 \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0 & 0.1 & -1.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sin 0 + 5 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 2 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

  - Runge-Kutta:

$$\begin{aligned}
k_1 &= Az_0 + b_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \\
k_2 &= A(z_0 + \frac{h}{2}k_1) + b_{\frac{1}{2}} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0 & 0.1 & -1.1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.05 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sin(0.05) + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0.25 \\ 4.8050 \end{pmatrix} \\
k_3 &= A(z_0 + \frac{h}{2}k_2) + b_{\frac{1}{2}} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0 & 0.1 & -1.1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.05 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0.25 \\ 4.8050 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sin(0.05) + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.125 \\ 0.2402 \\ 4.8170 \end{pmatrix} \\
k_4 &= A(z_0 + hk_3) + b_1 \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0 & 0.1 & -1.1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0.125 \\ 0.2402 \\ 4.8170 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sin(0.1) + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0063 \\ 0.0120 \\ 0.2409 \\ 4.8661 \end{pmatrix} \\
z_1 &= z_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 0.2001 \\ 2.0044 \\ 0.0204 \\ 0.4852 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Lösung zu b):

- Wir haben das Gleichungssystem

$$z'(x) = A(x)z(x) + b(x) \text{ mit } z(1) = z_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(1-\frac{N^2}{x^2}) & -\frac{1}{x} \end{pmatrix} \; b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(das ursprüngliche n^2 haben wir durch ein N^2 ersetzt, um es nicht mit dem Index n zu verwechseln). Für die Diskretisierung benötigen wir

$$x_n = x_0 + hn = 1 + hn \text{ und } A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(1-\frac{N^2}{x_n^2}) & -\frac{1}{x_n} \end{pmatrix}$$

  - Euler:

$$\begin{aligned}
z_{n+1} &= z_n + h(A_n z_n), \text{ wobei} \\
z_1 &= z_0 + h(A_0 z_0) \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 0.1\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(1-\frac{N^2}{1}) & -\frac{1}{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 0.1\begin{pmatrix} 2 \\ -2+2N^2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2 \\ 1.6+0.2N^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

  - Runge-Kutta: einfachheitshalber setzen wir $N^2 = 1$, also $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(1-\frac{1}{x_n^2}) & -\frac{1}{x_n} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
k_1 &= A_0 z_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4+2N^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \\
k_2 &= A_{\frac{1}{2}}(z_0 + \frac{h}{2}k_1) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(1-\frac{1}{(1.05)^2}) & -\frac{1}{1.05} \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 0.05\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1.9 \\ -2.0048 \end{pmatrix} \\
k_3 &= A_{\frac{1}{2}}(z_0 + \frac{h}{2}k_2) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(1-\frac{1}{(1.05)^2}) & -\frac{1}{1.05} \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 0.05\begin{pmatrix} 1.9 \\ -2.0048 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1.8998 \\ -2.0041 \end{pmatrix} \\
k_4 &= A_1(z_0 + hk_3) + b_1 \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(1-\frac{1}{(1.01)^2}) & -\frac{1}{1.01} \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 0.1\begin{pmatrix} 1.8998 \\ -2.0041 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1.7996 \\ -2.0161 \end{pmatrix} \\
z_1 &= z_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 2.125 \\ 1.8661 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Kapitel 8: Interpolation

Lösung Aufgabe 8.1 [1]:

$$
\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{x-0.7}{0.6-0.7}\frac{x-0.8}{0.6-0.8} \Rightarrow l_0(0.66) = 0.28 \\
l_1(x) &= \frac{x-0.6}{0.7-0.6}\frac{x-0.8}{0.7-0.8} \Rightarrow l_1(0.66) = 0.84 \\
l_2(x) &= \frac{x-0.6}{0.8-0.6}\frac{x-0.7}{0.8-0.7} \Rightarrow l_2(0.66) = -0.12
\end{aligned}
$$

Somit ist

$$P_2(0.66) = 0.28 \cdot 0.8136 + 0.84 \cdot 0.9967 - 0.12 \cdot 1.1944 = 0.921708.$$

Lösung Aufgabe 8.2:

- $n+1 = 3$, also benötigen wir die dritte Ableitung von $f(x) = 2^x = e^{x \cdot \ln 2}$. Diese ist $f'''(x) = (\ln 2)^3 e^{x \cdot \ln 2} = (\ln 2)^3 2^x$ und steigt monton im Intervall [-1, 3] und daher gilt max $\mid f^{(n+1)}(\xi) \mid = (\ln 2)^3 2^3 = 8 \cdot (\ln 2)^3$.
- Damit haben wir $\mid f(2) - P_n(2) \mid \leq \frac{|(2+1)(2-1)(2-3)|}{6} 8 \cdot (\ln 2)^3 = 1.3321$.
- Man sieht, dass das eine recht grobe Abschätzuns ist.
- Für das Interpolationspolynom gilt

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} l_i(x) y_i = 0.5 \cdot l_0(x) + 2 \cdot l_1(x) + 8 \cdot l_2(x).$$

Die Lagrangepolynome berechnen sich zu

$$
\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1)(x-3)}{(-2)(-4)} = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8} \\
l_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-3)}{(2)(-2)} = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \\
l_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(4)(2)} = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir $P_2(x) = 0.5 \cdot l_0(x) + 2 \cdot l_1(x) + 8 \cdot l_2(x) = \frac{9}{16}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{11}{16}$ bzw. $P_2(2) = 4.4375$ und für den Fehler damit $\mid f(2) - P_n(2) \mid = \mid 4 - 4.4375 \mid = 0.4375$

Aufgabe 8.3 [1]:

Mit dem Algorithmus 6.2 erhält man für $z = 0.52$ das Aitken-Nevilleschema

0.5	**0.6915**			
0.6	**0.7257**	**0.6983400**		
0.7	**0.7580**	**0.6998600**	**0.69849200**	
0.8	**0.7881**	**0.7038200**	**0.69827600**	**0.69847760**

also das Resultat $P_3(0.52) = 0.69847760$.

Lösung Aufgabe 8.4:

- Siehe Übungsserie 11.

Lösung Aufgabe 8.5:

- Siehe Übungsserie 11.

Kapitel 9: Ausgleichsrechnung

Lösung Aufgabe 9.1 [1]:

Lösung: Wir haben hier die Ansatzfunktionen $f_1(x) = \mathrm{e}^x$ und $f_2(x) = 1$ zu verwenden. Das Fehlergleichungssystem hat dann die folgende Form

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{y} \iff \begin{pmatrix} 1.0 & 1.0 \\ 2.718281828 & 1.0 \\ 7.389056099 & 1.0 \\ 20.08553692 & 1.0 \\ 54.59815003 & 1.0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 30 \\ 80 \\ 140 \end{pmatrix}$$

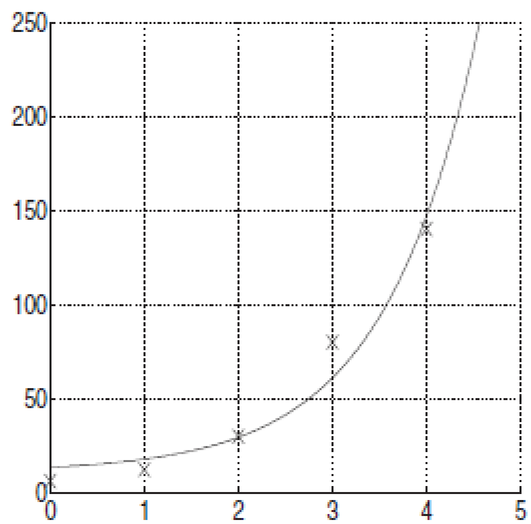
Das zugehörige Normalgleichungssystem lautet dann

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \iff \begin{pmatrix} 3447.373987 & 85.79102488 \\ 85.79102488 & 5.0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} 9510.875023 \\ 268.0 \end{pmatrix}$$

Dieses hat die Lösung $\boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} 2.486883919 \\ 10.92953597 \end{pmatrix}$, sodass die gesuchte Ausgleichsfunktion

$$f(x) = 2.486883919\,\mathrm{e}^x + 10.92953597$$

lautet. Bild 6.2 zeigt die Daten zusammen mit dieser Ausgleichsfunktion.



Lösung Aufgabe 9.2:

- Für den Startwert $\boldsymbol{\lambda}^{(0)} = (1,1)^T$ erhält man ab

$$\boldsymbol{\lambda}^{(8)} = \begin{pmatrix} 4.037373597 \\ 4.884097673 \end{pmatrix}$$

keine Veränderung mehr in den ersten 10 Stellen.

Kapitel 10: Fourier-Reihen und Fourier-Transformation

Lösung Aufgabe 10.1 [8]:

Die aus *Parabelbögen* bestehende (periodische) Funktion ist *gerade* (spiegelsymmetrisch zur y-Achse), die Fourier-Reihe kann daher *keine* Sinusglieder enthalten. Somit ist $b_n = 0$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ und es gilt:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(2nt) \qquad \left(\text{mit } \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2\right)$$

Berechnung des Fourier-Koeffizienten a_0

$$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_{(T)} f(t)\, dt = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} (-t^2 + \pi t)\, dt = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{2} \pi t^2 \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{3} \pi^3 + \frac{1}{2} \pi^3 - 0 - 0 \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{6} \pi^3 = \frac{1}{3} \pi^2$$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten a_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$)

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{(T)} f(t) \cdot \cos(n\omega_0 t)\, dt = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} (-t^2 + \pi t) \cdot \cos(2nt)\, dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left\{ - \underbrace{\int_0^{\pi} t^2 \cdot \cos(2nt)\, dt}_{I_1} + \pi \cdot \underbrace{\int_0^{\pi} t \cdot \cos(2nt)\, dt}_{I_2} \right\} = \frac{2}{\pi} (-I_1 + \pi \cdot I_2)$$

Berechnung der Teilintegrale I_1 und I_2:

$$I_1 = \underbrace{\int_0^{\pi} t^2 \cdot \cos(2nt)\, dt}_{\text{Integral 233 mit } a = 2n} = \left[\frac{2t \cdot \cos(2nt)}{4n^2} + \frac{(4n^2 t^2 - 2) \cdot \sin(2nt)}{8n^3} \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2\pi \cdot \cos(2n\pi)}{4n^2} + \frac{(4n^2\pi^2 - 2) \cdot \sin(2n\pi)}{8n^3} - 0 + \frac{2 \cdot \sin 0}{8n^3} = \frac{2\pi}{4n^2} = \frac{\pi}{2n^2}$$

(unter Berücksichtigung von $\cos(2n\pi) = 1$ und $\sin(2n\pi) = \sin 0 = 0$)

$$I_2 = \underbrace{\int_0^{\pi} t \cdot \cos(2nt)\, dt}_{\text{Integral 232 mit } a = 2n} = \left[\frac{\cos(2nt)}{4n^2} + \frac{t \cdot \sin(2nt)}{2n} \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{\cos(2n\pi)}{4n^2} + \frac{\pi \cdot \sin(2n\pi)}{2n} - \frac{\cos 0}{4n^2} - 0 = \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{4n^2} = 0$$

(wegen $\cos(2n\pi) = \cos 0 = 1$ und $\sin(2n\pi) = 0$)

Damit erhalten wir für die Fourier-Koeffizienten a_n folgende Werte:

$$a_n = \frac{2}{\pi}(-I_1 + \pi \cdot I_2) = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2n^2} + \pi \cdot 0 \right) = \frac{\cancel{2}}{\cancel{\pi}} \left(-\frac{\cancel{\pi}}{\cancel{2}n^2} \right) = -\frac{1}{n^2}$$

Die *Fourier-Reihe* der parabelförmigen Impulsfolge lautet daher wie folgt ($\omega_0 = 2$):

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(2nt) = \frac{1}{6}\pi^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \cos(2nt) =$$

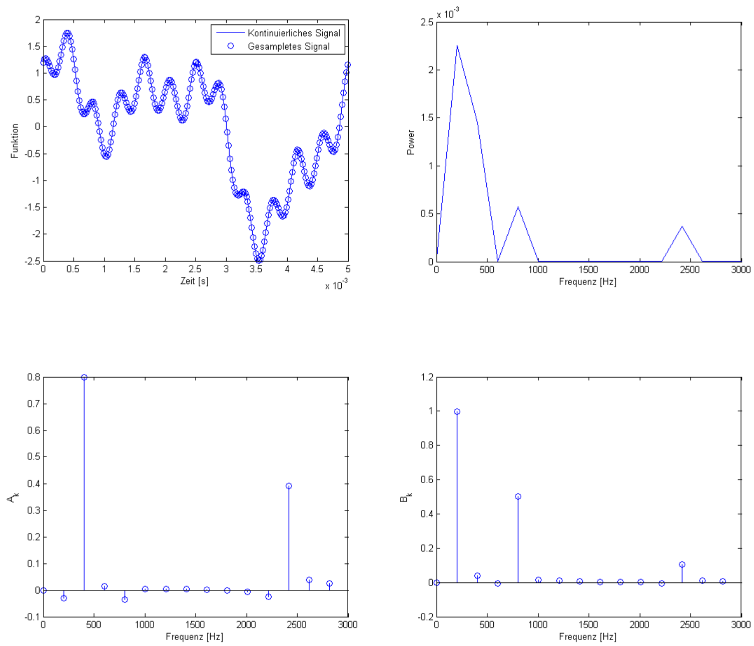
$$= \frac{1}{6}\pi^2 - \left(\frac{1}{1^2} \cdot \cos(2t) + \frac{1}{2^2} \cdot \cos(4t) + \frac{1}{3^2} \cdot \cos(6t) + \ldots \right)$$

Lösung Aufgabe 10.2:

```
function [kp, Ak, Bk] = DFT(t,f)
% Calculate the discrete fourier transform%...%

n = floor(length(f)/2);
T = t(2*n)-t(1);
dt = T/(2*n-1);
omega = 2*pi/T;

% Initialize output variables
kp = [0:n];
Ak = zeros(1,n+1);
Bk = zeros(1,n+1);

% Calculate A_0 and A_n
Ak(1)=sum(f(1:2*n))/(2*n);
for i = 1:2*n
    Ak(n+1)=Ak(n+1)+f(i)*cos(n*omega*t(i));
end
Ak(n+1)=Ak(n+1)/(2*n);

% Calculate all the other coefficients
for k=2:n
    Ak(k)=0;
    Bk(k)=0;
    for i=1:2*n
        Ak(k)=Ak(k)+f(i)*cos((k-1)*omega*t(i));
        Bk(k)=Bk(k)+f(i)*sin((k-1)*omega*t(i));
    end
    Ak(k)=Ak(k)/n;
    Bk(k)=Bk(k)/n;
end

end
```

Lösung Aufgabe 10.3:

```
%Definition Konstanten
nu0 = 200;
dt = 1/(44.1e3);

%Definition der Funktion und Inputparameter für DFT
f = @(t) sin(2*pi*nu0*t)+0.5*sin(2*pi*4*nu0*t)+...
    0.8*cos(2*pi*2*nu0*t)+0.4*cos(2*pi*12*nu0*t);

ti = 0:dt:0.005;
fi = f(ti);

[kp Ak Bk] = DFT(ti,fi);

%Plot des Power Spektrums und der Funktion
n = floor(length(fi)/2);
T = ti(2*n)-ti(1);
nui = kp/T;

pow = 1/4*(Ak.^2+Bk.^2)/n;

figure(1)
plot(ti,fi,ti,fi,'bo')

figure(2)
plot(nui,pow),xlim([0 3000]),xlabel('Frequenz [Hz]')
ylabel('Power')

%Plot der Koeffizienten
figure(3)
stem(nui,Ak,'bo'),xlabel('Frequenz [Hz]'),ylabel('A_k')
xlim([0 3000])

figure(4)
stem(nui,Bk,'bo'),xlabel('Frequenz [Hz]'),ylabel('B_k')
xlim([0 3000])
```


Kontinuierliches Signal
Gesampletes Signal
Funktion
Zeit [s]
x 10^-3
Power
Frequenz [Hz]
A_k
Frequenz [Hz]
B_k
Frequenz [Hz]