Übungsserie 12

Keine Abgabe

Die folgenden Aufgaben sind Repetitionsaufgaben über die Kapitel 1-5.

Aufgabe 1:

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \cos(x)$. Untersuchen Sie anhand der Konditionszahl, für welche Werte von $x \in \mathbb{R}$ die Funktionsauswertung ein gut konditioniertes und für welche Werte sie ein schlecht konditioniertes Problem ist. Machen Sie anschliessend je ein konkrektes Zahlenbeispiel in der Umgebung von x, wo die Funktionsauswertung gut bzw. schlecht konditioniert ist.

Aufgabe 2:

Für die Funktion $f(x) = \sin(x) \cdot \mathrm{e}^x$ erzeugen die folgenden MATLAB Befehle die untenstehende Tabelle (ohne Numerierung der Zeilen). Beantworten Sie die folgenden Fragen:

a) Was wird hier eigentlich berechnet?

b) Welchen Wert würden Sie als Resultat weiterverwenden?

c) Was passiert für kleine Werte von h und weshalb?

```
x = 1;
df_exact = cos(x)*exp(x)+sin(x)*exp(x);
fprintf(1, '   h \t\t [f(x+h)-f(x)]/h \tabsolute error\trelative error\n')
for i = 0:10;
        h=10^(-2*i);
        df = (sin(x+h)*exp(x+h)-sin(x)*exp(x))/h;
        err_abs = abs(df-df_exact);
        err_rel = abs(err_abs/df_exact);
        fprintf(1, '%1.1e\t\t%1.8f\t\t%e\t%e\n', h, df, err_abs, err_rel)
end

   h                   [f(x+h)-f(x)]/h         absolute error   relative error
1.0e+000               4.43149441              6.754452e-001    1.798286e-001
1.0e-002               3.77070850              1.465927e-002    3.902842e-003
1.0e-004               3.75619609              1.468667e-004    3.910137e-005
1.0e-006               3.75605070              1.468263e-006    3.909064e-007
1.0e-008               3.75604916              6.650881e-008    1.770712e-008
1.0e-010               3.75604436              4.862672e-006    1.294624e-006
1.0e-012               3.75610654              5.730982e-005    1.525800e-005
1.0e-014               3.73034936              2.569986e-002    6.842260e-003
1.0e-016               0.00000000              3.756049e+000    1.000000e+000
1.0e-018               0.00000000              3.756049e+000    1.000000e+000
1.0e-020               0.00000000              3.756049e+000    1.000000e+000
```

Aufgabe 3:

Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass die Gleichung

$$x = \frac{1}{5}(x^3 + 3)$$

auf dem Intervall [0, 1] genau eine Lösung hat. Bestimmen Sie diese Lösung auf 3 Nachkommastellen genau.

Aufgabe 4:

Der Tangens Hyperbolicus ist defniert als

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Versuchen Sie, die Nullstelle der Funktion

$$f(x) = 6\tanh(x) + x$$

mit dem Newton-Verfahren und dem Startwert $x_0 = 4$ zu bestimmen. Schreiben Sie die Iterationsgleichung explizit auf. Konvergiert die Iteration? Erstellen Sie eine Grafik mit $f(x)$ sowie mit der ersten und zweiten Tangenten und beschreiben Sie, was passiert.

Aufgaben 5 (aus dem Skript):

2.5 Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $2\sin x = x$ bis auf einen nachgewiesenen absoluten Fehler von max. 10^{-3}.

2.6 Das Bauer-Ziege-Wiese-Problem: Ein Bauer besitzt eine kreisrunde Wiese vom Radius R. Am Rand dieser Wiese bindet er eine Ziege an mit einer Leine der Länge r, und zwar so, dass die Ziege genau die Hälfte der Wiese abgrasen kann (s. Bild 2.4). Wie groß ist r?

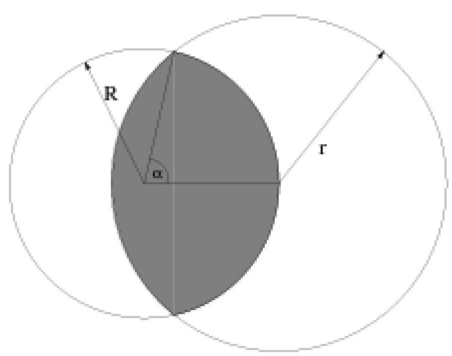

Bild 2.5

Mit dem Kosinussatz erhält man $r = R\sqrt{2(1-\cos\alpha)}$. Das Problem führt auf folgende Gleichung für den Winkel α (im Bogenmaß):

$$\frac{\pi}{2\cos\alpha} + \alpha - \pi - \tan\alpha = 0.$$

Offensichtlich kann diese Gleichung nicht durch geschicktes Umformen nach α aufgelöst werden. Die Hilfe numerischer Methoden ist daher nötig. Bestimmen Sie ein Intervall, in dem sich die gesuchte Lösung befindet und bestimmen Sie die Lösung mit einem Verfahren Ihrer Wahl bis auf einen gesicherten absoluten Fehler von 0.0001.

2.7 Wenden Sie das Newton-Verfahren, das vereinfachte Newton-Verfahren und das Sekantenverfahren zur näherungsweisen Bestimmung der Nullstelle von $f(x) = x^2 - 2$ an.

Aufgabe 6:

Ein Düngemittelhersteller möchte durch die Kombination von drei bestehenden Düngersorten eine neue Mischung herstellen, welche 32.4% Kalium, 26.4% Stickstoff und 41.2% Phosphor enthält. Die bestehenden Düngersorten enthalten:

- Dünger A: 64% Kalium, 16% Stickstoff, 20% Phosphor
- Dünger B: 16% Kalium, 68% Stickstoff, 16% Phosphor
- Dünger C: 20% Kalium, 16% Stickstoff, 64% Phosphor

a) Wieviele Tonnen werden von jedem dieser Dünger benötigt, wenn insgesamt 100 Tonnen der neuen Mischung hergestellt werden sollen? Stellen Sie dafür das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ auf und berechnen Sie die Lösung manuell mit dem Gauss-Algorithmus (ohne Spaltenpivotisierung).

b) Berechnen Sie manuell die LR-Zerlegung von A.

c) Kurz vor Produktionsstart stellt sich heraus, dass die neue Mischung bzgl. Kalium und Phosphor nur mit einer Genauigkeit von $\pm 0.5\%$ hergestellt werden kann, d.h. der neue Dünger wird aus $32.4\% \pm 0.5\%$ Kalium, 26.4% Stickstoff und $41.2\% \pm 0.5\%$ Phosphor bestehen. Was ist also der maximale absolute und relative Fehler der Lösung von a)? Was schliessen Sie daraus bzgl. der Konditionierung des Problems?

Aufgabe 7:

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 2 \\ 5 & 20 & 8 \\ 15 & 5 & 30 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 62 \\ 116 \\ 280 \end{pmatrix}.$$

a) Überprüfen Sie, ob das obige System bzgl. dem Jacobi-Verfahren konvergiert.

b) Berechnen Sie auf vier Stellen nach dem Komma die Näherung $x^{(2)}$ mit dem Jacobi-Verfahren ausgehend vom Startvektor $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

c) Schätzen Sie a-priori die Anzahl Iterationsschritte ab, damit der berechnete Näherungsvektor in jeder Kompnente maximal um 10^{-4} von der exakten Lösung $x = (4, 2, 7)^T$abweicht.

Aufgabe 8 (aus dem Skript):

Der Druck, der benötigt wird, damit ein grosser, schwerer Gegenstand in einem weichen, auf einem harten Untergrund liegenden, homogenen Boden absinkt, kann über den Druck vorhergesagt werden, der zum Absinken kleinerer Gegenstände in demselben Boden benötigt wird. Speziell der Druck p, der benötigt wird, damit ein runder flacher Gegenstand vom Radius r um d cm tief in den weichen Boden sinkt, kann über eine Gleichung der Form

$$p = k_1 e^{k_2 r} + k_3 r$$

approximiert werden, wobei k_1, k_2 und k_3 Konstanten mit $k_2 > 0$ sind, die von d und der Konsistenz des Bodens, aber nicht vom Radius des Gegenstandes abhängen. Der harte Untergrund liege in einer Entfernung $D > d$ unter der Oberfläche.

a) Bestimmen Sie die Werte von k_1, k_2 und k_3, falls angenommen wird, dass ein Gegenstand vom Radius 1 cm einen Druck von 10 N/cm^2 benötigt, um 30 cm tief in einen schlammigen Boden zu sinken, ein Gegenstand vom Radius 2 cm einen Druck von 12 N/cm^2 benötigt, um 30 cm tief zu sinken und ein Gegenstand vom

Radius 3 cm einen Druck von 15 N/cm^2 benötigt, um ebensoweit abzusinken (vorausgesetzt, der Schlamm ist tiefer als 30 cm). Benutzen Sie den Startvektor

$$k^{(0)} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0.1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

.

b) Sagen Sie aufgrund Ihrer Berechnungen aus Übung a) die minimale Grösse eines runden Gegenstandes voraus, der eine Belastung von 500 N aushält und dabei weniger als 30 cm tief sinkt.