MATLAB Übungsserie 1

Abgabe KW 39

Scannen Sie ihre manuellen Lösung für die Aufgabe 1 die Datei *Name_ Vorname_Klasse_ S1_Aufg1.pdf* und fassen Sie diese mit den MATLAB-Dateien für Aufgabe 2 und 3 zusammen in die ZIP-Datei *Name_ Vorname_Klasse_S1.zip*. Laden Sie dieses File vor der nächsten Übungsstunde nächste Woche auf OLAT hoch. Die einzelnen m-Files müssen ausführbar sein und in den Kommentarzeilen (beginnen mit %) soll bei Funktionen ein Beispiel eines funktionierenden Aufrufs angegeben werden. Verspätete Abgaben können nicht mehr berücksichtigt werden.

Aufgabe 1 (30 Minuten):

a) Nähern Sie die Funktion $f(x) = e^x$ in der Umgebung von $x_0 = 0$ mittels des Satzes von Taylor durch ein Polynom $p(x)$ vom Grad 7 an (ohne Restglied).

b) Wie gross ist der absolute Fehler dieser Näherung bei $x = 1$ (auf vier Nachkommastellen genau)?

c) Wie kann man die Eulerische Zahl e als eine unendliche Summe rationaler Zahlen (also Brüche) schreiben?

Aufgabe 2 (60 Minuten):

Schreiben Sie ein Skript `Name_Vorname_Klasse_S1_Aufg2.m`, welches Ihnen die folgenden Aufgaben löst:

- Vergleichen Sie in tabellarischer Form die Werte von $D_1 f$ und $D_2 f$ für $f(x) = \ln(x^2)$ und $x_0 = 2$ mit verschiedenen Werten für $h = 10^{-1}, 10^{-2}, ..., 10^{-16}, 10^{-17}$ und den dabei auftretenden Diskretisierungsfehlern. Bei welchem h wird der Fehler für D_1 bzw. D_2 möglichst klein? Geben Sie für D_1 mindestens 8 Nachkommastellen und für D_2 mindestens 12 Nachkommastellen an. Benuten Sie dazu den Befehl `fprintf()`. Für die Berechnung des Diskretisierungsfehlers berechnen Sie den exakten Wert der Ableitung analytisch.
- Bestimmen Sie mit der in der Vorlesung verwendeten Faustformel die optimalen Schrittweite h_{opt} für $D_1 f$ mit binärer Basis und $n = 52$. Wie gross ist $D_1 f$ und der Diskretisierungsfehler für die optimale Schrittweite? Entspricht das Ihrer Erwartung gemäss Tabelle? Schreiben Sie dies als Kommentar in Ihr Skript.
- Die Faustformel für $D_2 f$ ist (ohne Beweis):

$$h_{opt} \approx \sqrt[3]{6 \cdot eps \frac{\mid f(x_0) \mid}{\mid f'''(x_0) \mid}}$$

  Berechnen Sie auch hier $D_2 f$ für dieses h_{opt} und vergleichen Sie mit der Tabelle. Schreiben Sie dies als Kommentar in Ihr Skript.

Aufgabe 3 (ca. 45 Min.):

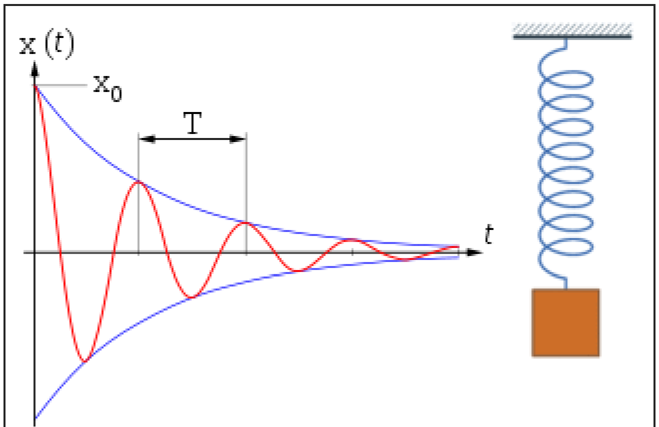
a) Schreiben Sie eine Funktion `dx = Name_Vorname_Klasse_S1_Aufg3a(x,y)`, welche Ihnen die erste Ableitung dx der durch die Wertepaare $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$ definierten Funktion $y = y(x)$ berechnet. Die eindimensionalen Arrays dx, x und y haben also alle die gleiche Anzahl Elemente n. Benutzen Sie für das erste Wertepaar die Vorwärtsdifferenz, für das letzte Wertepaar die Rückwärtsdifferenz, und dazwischen die zentrale Differenz. Benutzen Sie für den Abstand h jeweils die diskrete Variante (dies deckt den Fall ab, dass die Werte in x nicht äquidistant sein müssen):

$$\begin{aligned} h_{vorw\ddot{a}rts} &= x_{i+1} - x_i \\ h_{zentral} &= x_{i+1} - x_{i-1} \\ h_{r\ddot{u}ckw\ddot{a}rts} &= x_i - x_{i-1} \end{aligned}$$

b) Schreiben Sie ein Skript `Name_Vorname_Klasse_S1_Aufg3b.m`, welches Ihnen für die zeitabhängige gedämpfte Schwingung $x(t)$ eines Fedependels definiert durch $(t_i, x_i)_{1 \leq i \leq n}$

$$\begin{aligned} t_i &= 0 + i \cdot 0.1 \\ x_i &= 10 \cdot e^{-0.05 \cdot t_i} \cdot \cos(0.2\pi t_i) \\ n &= 1000 \end{aligned}$$

die Auslenkung $x(t)$, die Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ und die Beschleunigung $\ddot{x}(t)$ ins gleiche Grafikfenster plottet (siehe auch die folgende Abbildung aus Wikipedia). Wo hat die Geschwindigkeit die Nulldurchgänge, wo liegen die relativen Extrema der Beschleunigung? Was bedeutet das in Bezug auf die Bewegung des Pendels? Schreiben Sie Ihren Kommentar ins Skript.



Darstellung des zeitlichen Verlaufs der Größe $x(t)$ bei einer freien gedämpften Schwingung.