

Übungsserie 11

Abgabe KW 49

Fassen Sie Ihre Lösungen zusammen in die ZIP-Datei *Name_Vorname_Gruppe_S11.zip*. Laden Sie dieses File vor der nächsten Übungsstunde nächste Woche auf OLAT hoch. Die einzelnen m-Files müssen ausführbar sein und in den Kommentarzeilen (beginnen mit %) soll bei Funktionen ein Beispiel eines funktionierenden Aufrufs angegeben werden. Verspätete Abgaben können nicht mehr berücksichtigt werden.

Aufgabe 1 (40 Minuten):

Die Dichte ϱ von Wasser ist abhängig von der Temperatur T . Messungen ergeben

T_i [°C]	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
ϱ_i [g/l]	999.9	999.7	998.2	995.7	992.2	988.1	983.2	977.8	971.8	965.3	958.4

Approximieren Sie die Ausgleichsfunktion $p(T) = aT^2 + bT + c$ an die obigen Daten optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate. Erstellen Sie dazu ein Skript *Name_Vorname_Klasse_S11_Aufg1.m*, welches Ihnen durch Lösung der Normalgleichung die Koeffizienten a, b, c berechnet und sowohl die Daten als auch $p(t)$ grafisch darstellt. Berechnen Sie die Konditionszahl der auftretenden Matrix $A^T A$. Was fällt Ihnen auf? Vergleichen Sie Ihre Werte a, b, c mit den Koeffizienten der MATLAB Funktion `polyfit()`. Schreiben Sie Ihre Erkenntnisse als Kommentar in Ihr Skript.

Aufgabe 2 (80 Minuten):

Wenn Benzin in einen Tank gepumpt wird, werden Kohlenwasserstoff-Dämpfe aus dem Tank in die umgebende Atmosphäre gepresst. Die Masse m_{CH} der entwichenen Dämpfe hängt hauptsächlich von den folgenden vier Einflussgrößen ab:

- Anfangstemperatur T_{Tank} [F] im Tank,
- Temperatur des eingefüllten Benzins T_{Benzin} [F],
- Gasdruck p_{Tank} [psi] im Tank,
- Gasdruck des eingefüllten Benzins p_{Benzin} [psi].

Unter kontrollierten Bedingungen wurden die vier Einflussgrößen in 32 Versuchen variiert und die Masse m_{CH} [g] der dabei entwichenen Kohlenwasserstoff-Dämpfe gemessen (siehe Datenset am Schluss der Aufgabenstellung). Für m_{CH} soll nachfolgend eine lineare Ausgleichsrechnung von der Form

$$m_{CH} = \lambda_1 \cdot T_{Tank} + \lambda_2 \cdot T_{Benzin} + \lambda_3 \cdot p_{Tank} + \lambda_4 \cdot p_{Benzin} + \lambda_5$$

mit den zu bestimmenden Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sowie λ_5 vorgenommen und untersucht werden. Erstellen Sie dazu ein Skript *Name_Vorname_Klasse_S11_Aufg2.m*:

- Kopieren Sie das Datenset (am Schluss der Aufgabenstellung bzw. auf Olat) und führen Sie mit Hilfe der Normalgleichungen die Ausgleichsrechnung durch. Erzeugen Sie eine Grafik, die Ihnen sowohl die Messpunkte für m_{CH} als auch den Fit aus Ihrer Ausgleichsrechnung zeigt.

- b) Wir müssen annehmen, dass die Messungen für m_{CH} fehlerbehaftet sind. Wir wollen wissen, wie sensitiv die numerische Lösung aus Aufgabe a) auf diese Messungenauigkeiten reagiert: Verwenden Sie den MATLAB random generator `rand()` und stören Sie die vorhandenen Messdaten zufällig mit wachsenden relativen Fehlern in den Kategorien $\delta m_{CH} = \pm 1, 2, \dots, 10\%$ (Beachten Sie, dass die Störungen jeweils zufällig beide Vorzeichen haben sollen). Lösen Sie das System der Normalgleichungen mit den gestörten Daten jeweils für mehrere (z.B. 1000) Durchgänge pro Fehlerkategorie. Bestimmen Sie pro Fehlerkategorie jeweils das minimale und maximale Fehlerfunktional und stellen Sie diese graphisch dar als Funktion der Fehlerkategorie.

Datenset:

T_{Tank}	T_{Benzin}	p_{Tank}	p_{Benzin}	m_{CH}
33.00	53.00	3.32	3.42	29.00
31.00	36.00	3.10	3.26	24.00
33.00	51.00	3.18	3.18	26.00
37.00	51.00	3.39	3.08	22.00
36.00	54.00	3.20	3.41	27.00
35.00	35.00	3.03	3.03	21.00
59.00	56.00	4.78	4.57	33.00
60.00	60.00	4.72	4.72	34.00
59.00	60.00	4.60	4.41	32.00
60.00	60.00	4.53	4.53	34.00
34.00	35.00	2.90	2.95	20.00
60.00	59.00	4.40	4.36	36.00
60.00	62.00	4.31	4.42	34.00
60.00	36.00	4.27	3.94	23.00
62.00	38.00	4.41	3.49	24.00
62.00	61.00	4.39	4.39	32.00
90.00	64.00	7.32	6.70	40.00
90.00	60.00	7.32	7.20	46.00
92.00	92.00	7.45	7.45	55.00
91.00	92.00	7.27	7.26	52.00
61.00	62.00	3.91	4.08	29.00
59.00	42.00	3.75	3.45	22.00
88.00	65.00	6.48	5.80	31.00
91.00	89.00	6.70	6.60	45.00
63.00	62.00	4.30	4.30	37.00
60.00	61.00	4.02	4.10	37.00
60.00	62.00	4.02	3.89	33.00
59.00	62.00	3.98	4.02	27.00
59.00	62.00	4.39	4.53	34.00
37.00	35.00	2.75	2.64	19.00
35.00	35.00	2.59	2.59	16.00
37.00	37.00	2.73	2.59	22.00