Übungsserie 13

Aufgaben aus dem Skript zur Repetition

Die Aufgaben aus dem Skript sind für die Kapitel 6-10 unten aufgeführt. Die Musterlösungen dazu werden demnächst auf OLAT aufgeschaltet. Vergessen Sie nicht, die entsprechenden Beispiele aus dem Skript und vor allem die Übungen aus den Serien in Ihre Prüfungsvorbereitung mit einzubeziehen.

Kapitel 6: Numerische Differentiation und Integration

Aufgabe 6.1:

- Testen Sie die Vorwärtsdifferenz $D_1 f(x_0, h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ für $f(x) = \sin(x)$ und $x_0 = 1$ für verschiedene Werte von $h \in \{10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}, 10^{-10}, 10^{-15}, 10^{-16}\}$ und beobachten Sie, wie sich der Diskretisierungsfehler $\mid D_1 f(x_0, h) - f'(x_0) \mid$verhält.

Aufgabe 6.2:

- Testen Sie die Formel für $D_2 f$ für $f(x) = \sin x$ und $x_0 = 1$ mit verschiedenen Werten für $h \in \{10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}, 10^{-10}, 10^{-15}, 10^{-16}, 10^{-17}\}$ und den dabei auftretenden Diskretisierungsfehler $\mid D_2 f(x_0, h) - f'(x_0) \mid$. Bei welchem h wird der Fehler möglichst klein? Vergleichen Sie mit Aufgabe 6.1.

Aufgabe 6.3:

- Leiten Sie mittels der Gleichungen 6.1 und 6.2 die zentrale Differenz $D_5 f(x_0, h)$ her und bestimmen Sie deren Fehlerordnung.

Aufgabe 6.4:

- Berechnen Sie mit der Differenzenformel $D_1 f(x_0, h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ für $f(x) = \sin(x)$ und den Schrittweiten $h = 0.1,\ 0.05,\ 0.025,\ 0.0125$ Näherungswerte für $f'(1)$ und verbessern Sie diese Näherung anschliessend durch Extrapolation, d.h. berechnen Sie die D_{ik} für $i = 0, 1, 2, 3$ und $k = 0, 1, 2, 3$ mit obigem Dreiecksschema ($h-$Extrapolation). Berechnen Sie jeweils für jeden Extrapolationsschritt den zugehörigen Fehler $E_{ik} = \mid D_{ik} - f'(1) \mid$. Was beobachten Sie?

Aufgabe 6.5:

- Wiederholen Sie Aufgabe 6.4, aber diesmal mit $D_2 f$ (h^2-Extrapolation).

Aufgabe 6.6:

- Berechnen Sie $\int_2^4 \frac{1}{x} dx$ näherungsweise mit der summierten Mittelpunkts- bzw. Trapezregel mit $n = 4$.

Aufgabe 6.7:

- Zeigen Sie, dass die summierte Simpsonregel als gewichtetes Mittel der summierten Trapez- und Rechteckregel interpretiert werden kann:

$$Sf(h) = \frac{1}{3}\left(Tf(h) + 2Rf(h)\right)$$

Aufgabe 6.8:

- Sie wollen

$$I = \int_0^{0.5} \mathrm{e}^{-x^2} dx$$

näherungsweise mit der summierten Trapezregel auf einen absoluten Fehler von maximal 10^{-5} genau berechnen. Bestimmen Sie eine geeignete Schrittweite h und berechnen Sie entsprechend den Wert der summierten Trapezregel.

Aufgabe 6.9:

- Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_0^{0.5} \mathrm{e}^{-x^2} dx$$

mit der summierten Rechtecks-, Trapez-, und Simpsonformel für $n = 3$ und vergleichen Sie den Wert mit der Gaussformel $G_3 f$.

Aufgabe 6.10:

- Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_0^{0.5} \mathrm{e}^{-x^2} dx$$

mit der summierten Trapezformel und Extrapolation für die Schrittweiten $h_i = \frac{b-a}{2^i}$ $(i = 0, 1, 2, ..., 3)$.

Kapitel 7: Einführung in gewöhnliche Differentialgleichungen

Aufgabe 7.1:

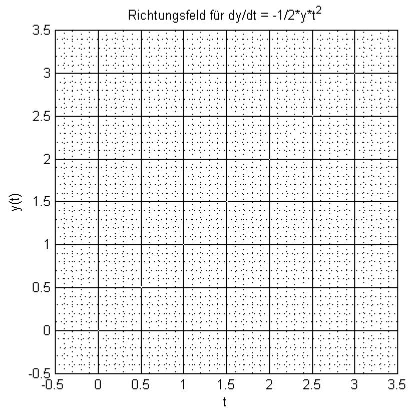
- Tragen Sie für die DGL

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2} \cdot y \cdot t^2$$

die Steigung $\frac{dy}{dt}$ für die Punkte $(t_i, y_j) = (i, j)$ für $i, j = 0, 1, 2, 3$ in die untenstehende Tabelle ein und zeichnen Sie damit von Hand das entsprechende Richtungsfeld in untenstehendes Koordinatensystem. Zeichnen Sie anschliessend die (ungefähre) Lösungskurve für den Anfangswert $y(0) = 3$ ein.

- Lösung:

$\frac{dy}{dt}$	$t_0 = 0$	$t_1 = 1$	$t_2 = 2$	$t_3 = 3$
$y_0 = 0$				
$y_1 = 1$				
$y_2 = 2$				
$y_3 = 3$				



Aufgabe 7.2:

- Berechnen Sie mit dem Euler-Verfahren die numerische Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) \quad = \quad f\left(t, y(t)\right) = t^2 + 0.1 \cdot y(t)$$

mit $y(-1.5) = 0$ auf dem Intervall $[a, b] = [-1.5, 1.5]$ und $n = 5$.

- Zeichnen Sie Ihre Lösung mit MATLAB in ein Koordinatensystem und vergleichen Sie mit der exakten Lösung

$$y(t) \quad = \quad -10t^2 - 200t - 2000 + 1722.5 \cdot e^{0.05(2t+3)}$$

- Offensichtlich weicht das Euler-Verfahren stark von der exakten Lösung ab. Woran liegt das?

Aufgabe 7.3:

- Berechnen Sie für die Differentialgleichung $y'(x) = y(x)$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ die Lösung auf dem Intervall $x \in [0, 1]$ mit dem klassischen vierstufigen Verfahren von Runge-Kutta und den Schrittweiten $h = 0.1$ und $h = 0.05$ und vergleichen Sie die numerische Lösung mit dem exakten Wert.

Aufgabe 7.4:

- Berechnen Sie wie in Aufgabe 7.3 für die Differentialgleichung $y'(x) = y(x)$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ die Lösung auf dem Intervall $x \in [0, 1]$ mit der Adams-Bashforth Methode 3. Ordnung für $h = 0.1$ und $h = 0.05$ und vergleichen Sie die numerische Lösung mit dem exakten Wert sowie mit den Resultaten für das Runge-Kutta Verfahren aus Aufg. 7.3.

Aufgabe 7.5:

- Führen Sie die folgenden linearen Differentialgleichungen auf ein System erster Ordnung zurück:
  $y^{(4)} + 1.1y''' - 0.1y'' - 0.3y = \sin x + 5$ mit $y(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$ und $y'(0) = 2$
  $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ mit $y(1) = y'(1) = 2$

Aufgabe 7.6:

- Benutzen Sie die Gleichungssysteme der Aufgabe 7.5 und berechnen Sie je den ersten Schritt des Euler-Verfahrens und des klassischen vierstufigen Verfahrens von Runge-Kutta mit $h = 0.1$ (setzen Sie bei b) $n^2 = 1$).

Kapitel 8: Interpolation

Aufgabe 8.1:

- Wir betrachten die Funktion $f(x) = \int_0^x e^{\sin t} dt$ aus Beispiel 8.1. Berechnen Sie den Wert $f(0.66) =?$ anhand der drei Punkte (mit Polynom-Interpolation)

x	0.6	0.7	0.8
y	0.8136	0.9967	1.1944

Aufgabe 8.2:

- Von der Funktion $y = f(x) = 2^x$ seien die drei Stützpunkte

x	-1	1	3
y	0.5	2	8

gegeben. Wie gross ist der Interpolationsfehler im Punkt $x = 2$, wenn diese Punkte durch ein Polynom interpoliert werden? Man schätze den Fehler mittels der obigen Fehlerabschätzung und berechne anschliessend das (allgemeine) Polynom und den exakten Fehler.

Aufgabe 8.3:

- Von der Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-x^2}{2}}$ kennt man die unten angegebenen Werte. Interpolieren Sie für $x = 0.52$ unter Verwendung des Aitken-Neville Schemas für alle Stützpunkte.

x	0.5	0.6	0.7	0.8
y	0.6915	0.7257	0.7580	0.7881

Aufgabe 8.4:

- Zu den folgenden Stützpunkten soll die natürliche kubische Splinefunktion bestimmt werden, d.h. bestimmen Sie die Koeffizienten a_i, b_i, c_i, d_i der kubischen Polynome S_i für $i = 0, 1, 2$:

x_i	0	1	2	3
y_i	2	1	2	2

Aufgabe 8.5:

- Implementieren Sie den obigen Algorithmus in MATLAB für eine beliebige vorgegebene Reihe von Stützpunkten. Ihre Funktion soll die Stützpunkte sowie die natürliche kubische Splinefunktion plotten.
- Testen Sie Ihren Algorithmus an der Zeitreihe der Bevölkerungszahl (in Mio.) der USA:

t	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
p(t)	75.995	91.972	105.711	123.203	131.669	150.697	179.323	203.212	226.505	249.633	281.422

- Benutzen Sie die MATLAB-Funktionen
  - spline,
  - splinetool

  um diese Messreihe durch eine Splinefunktion zu interpolieren und vergleichen Sie das Resultat.

Kapitel 9: Ausgleichsrechnung

Aufgabe 9.1:

- Bestimmen Sie für die folgenden Daten die Funktion der Form $f(x) = ae^x + b$, die diese Daten bestmöglich im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate approximiert:

x_i	0	1	2	3	4
y_i	6	12	30	80	140

Aufgabe 9.2:

- Bestimmen Sie für die folgenden Daten die Funktion der Form $f(x) = a\ln(x+b)$, die diese Daten bestmöglich im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate approximiert (gedämpftes Gauss-Newton-Verfahren):

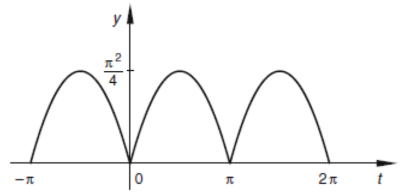
x_i	1	2	3	4
y_i	7.1	7.9	8.3	8.8

Kapitel 10: Fourier-Reihen und Fourier-Transformation

Aufgabe 10.1:

- Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der unten dargestellten parabelförmigen periodischen Funktion (mit Periode $T = \pi$) :

$$f(t) = -t^2 + \pi t,\ t \in [0, \pi]$$



Aufgabe 10.2:

- Programmieren Sie die DFT in MATLAB als function `[kp Ak Bk] = DFT(t,f)`. Input sind die beiden Vektoren `t` und `f` mit der Anzahl von $2n$ Elementen für die unabhängige Variable t und die abhängige Variable $f = f(t)$. Output sind die Vektoren `[kp Ak Bk]` mit je n Elementen, welche den Index k sowie die Koeffizienten A_k und B_k enthalten.

Aufgabe 10.3:

- Das menschliche Gehör kann Frequenzen bis 20 kHz wahrnehmen (also Töne mit 20'000 Schwingungen pro Sekunde). Um ein analoges Audiosignal zu digitialsieren (z.B. bei der Herstellung einer CD), muss das Signal mit mindestens der doppelten Rate abgetatestet werden (hier also mindestens 40'000 mal pro Sekunde). Diese sogn. Sampling-Rate beträgt bei der Herstellung einer CD standardmässig 44.1 kHz. Betrachten wir z.B. das Signal

$$f(t) = \sin(2\pi \cdot \nu_0 \cdot t) + 0.5 \cdot \sin(2\pi \cdot 4\nu_0 \cdot t) + 0.8\cos(2\pi \cdot 2\nu_0 \cdot t) + 0.4\cos(2\pi \cdot 12\nu_0 \cdot t)$$

  mit der Frequenz $\nu_0 = 200$ Hz (also $\omega_0 = 2\pi\nu_0$). Verwenden Sie eine Sampling-Rate von 44.1 kHz, um $f(t)$ auf dem Intervall von $t = 0$ bis $t = 0.005$ [s] zu diskretisieren (also mit Zeitschritten von $\Delta t = 1/(44.1 \cdot 10^3)$ [s]) und berechen sie die DFT von $f(t)$. Plotten Sie anschliessend (i) die Funktion, (ii) ihr Power-Spektrum als Funktion der Frequenz und (iii) die Koeffizienten A_k und B_k jeweils separat mittels des MATLAB-Befehls `stem`.