## 0.1 Résolution par la méthode d'Euler implicite

**Definition des variables et des paramètres :** On définit tout d'abord les différentes variables dont on a besoin pour décrire les équations du schéma d'Euler implicite :

— On fixe comme paramètres $a = 0.2$ et $b = 1.3$ pour satisfaire les conditions $(a+b)^3 > b - a$ et $b > a$.

— On appelle $N_x$ le nombre d'itérations sur la variable d'espace, avec $x$ variant entre 0 et 1, on a donc $dx = \frac{1}{N_x}$. On a pris ici $N_x = 30$.

— On garde la notation $c = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, qui sera de taille $2N_x$.

— Le pas de temps doit être assez petit, $dt = 10^{-3}$ suffit, en dessous, le schéma diverge. On prend de plus une plage de temps suffisamment grande pour que les modes puissent apparaître, par exemple $N_t = 50000$, voire plus si nécessaire.

— Dans une variable *stock* (tableau de taille $(2N_x, N_t)$)sont stockées toutes les valeurs de $u$ et $v$.

**Initialisation autour de la solution d'équilibre :**
On se place autour de la solution d'équilibre, calculée comme étant $u_{eq} = a + b$ et $v_{eq} = \frac{b}{(a+b)^2}$, en ajoutant un nombre aléatoire compris entre $-10^{-4}$ et $10^{-4}$.

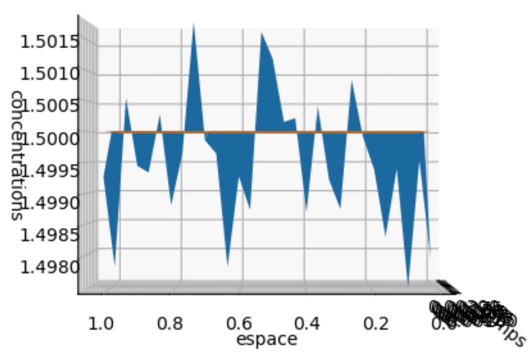


Figure 1 – Conditions initiales aléatoires autour de l'équilibre

**Matrices du Laplacien et de Diffusion :**
Nous avons besoin de l'opérateur Laplacien discret dont la matrice, de taille $(N_x, N_x)$, s'écrit :

$$Lp = \frac{1}{dx^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & -2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne, écrite par blocs ($1^{er}$ bloc appliqué à $u$, le $2^{nd}$ à $v$) :

$$A = \begin{pmatrix} Lp & 0 \\ 0 & Lp \end{pmatrix}$$

Il nous faut également la matrice de diffusion, qui s'écrit simplement par blocs, pour un coefficient de diffusion $d$ et en notant $I$ la matrice identité de dimensions $(N_x, N_x)$ :

$$D = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & dI \end{pmatrix}$$

Si on note $c^n = \begin{pmatrix} u^n \\ v^n \end{pmatrix}$ le vecteur $c$ à l'instant $t_n = ndt$, le schéma d'Euler implicite s'écrit :

$$c^{n+1} = c^n + dt(DAc^{n+1} + \delta f(c^{n+1})) \tag{1}$$

On utilise ici un schéma d'Euler simplifié dans le sens où on remplace $f(c^{n+1})$ par simplement $f(c^n)$. On obtient ainsi :

$$c^{n+1} = c^n + dt(DAc^{n+1} + \delta f(c^n))$$

$$c^{n+1} = (I + dtDA)^{-1}(c^n + dt\delta f(c^n)) \tag{2}$$

On itère ainsi ce schéma $N_t$ fois, et à chaque itération, on stock le résultat en remplissant la $n^{ième}$ ligne de la matrice *stock* :

$$stock(n, 1 : 2N_x) = c^n \tag{3}$$

**Résultats :**

On se place à $d = 30$ et $\delta = 120$. Sur le diagramme de Turing, on anticipe la stabilité des deux premiers modes, et on s'attend à voir apparapître le mode 2. C'est en effet ce que l'on observe :

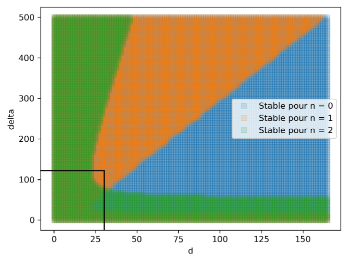


FIGURE 2 – Diagramme de Turing : instabilité du mode 2

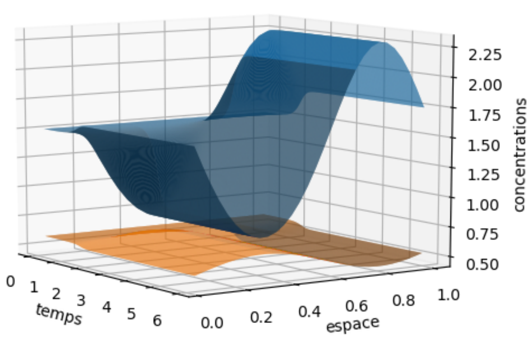


FIGURE 3 – Concentrations u et v pour $d = 30$ et $\delta = 120$

On peut examiner d'autres cas, où les modes instables se superposent :

Remarque : plus on est proche du $d_critique$, environ 23, plus les concentrations mettent du temps à converger vers une solution indépendante du temps.

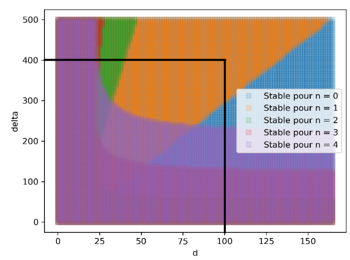


FIGURE 4 – Diagramme de Turing : superposition de modes instables

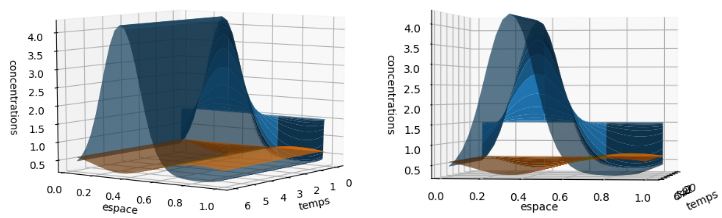


FIGURE 5 – Concentrations pour $d = 100$ et $\delta = 400$

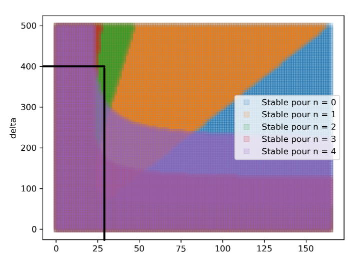


FIGURE 6 – Diagramme de Turing : superposition de modes instables 2

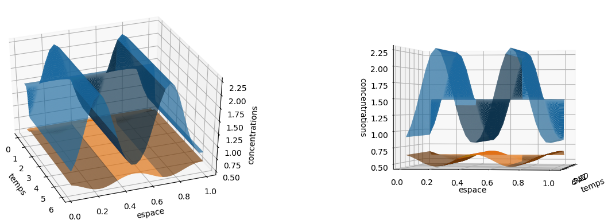


FIGURE 7 – Concentrations pour $d = 30$ et $\delta = 400$ (mode 3 instable

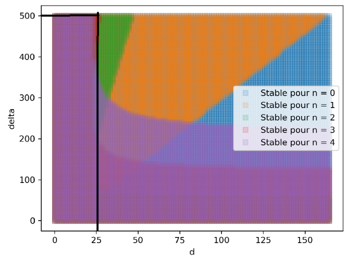


FIGURE 8 – Diagramme de Turing : instabilité du mode 4

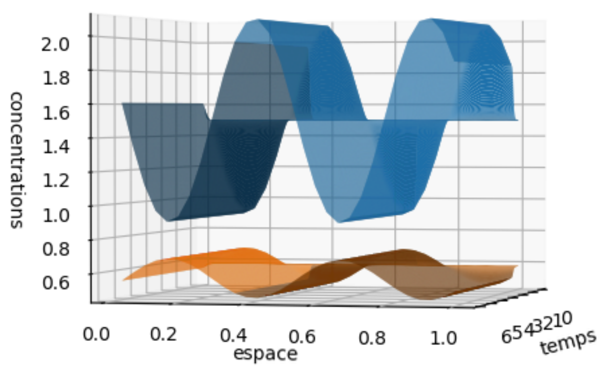


FIGURE 9 – Concentrations u et v pour $d = 26$ et $\delta = 500$ (mode 4 instable)

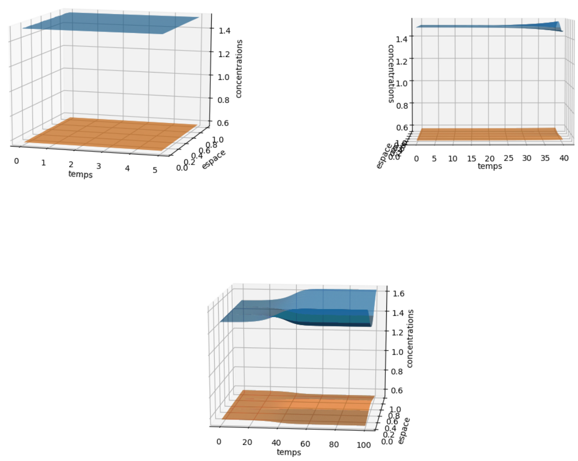


FIGURE 10 – Concentrations pour $d = 23.1$ et $\delta = 150$ : convergence après 50 secondes de temps