Compte rendu de projet Éléments Finis

Cyril NEDERVEEN

Problématique Mon projet EF consiste à comparer les déformations d'une simple plaque en acier avec une tôle ondulée dans une même configuration i.e. soumis à son propre poids et encastré en ses extrémités. Le but étant de savoir laquelle des deux toitures se déforme le moins ; pour en juger, on se limitera au critère de flèche minimale.
Une première résolution « à la main » pour la plaque uniforme et une résolution sous Castem pour la tôle permettra d'estimer la flèche pour chacune des deux toitures.

1 Étude de la plaque d'acier

Dans le cadre de cette étude nous nous limiterons à un modèle simplifié en déformations planes. On définit l'épaisseur e, la largeur L, longueur l, module de Young E, poids volumique ρ et le moment d'inertie I. La plaque sera ainsi modélisée par un arc plan élastique encastré en ses extrémités et chargé dans le plan selon $q = \rho g e l$.

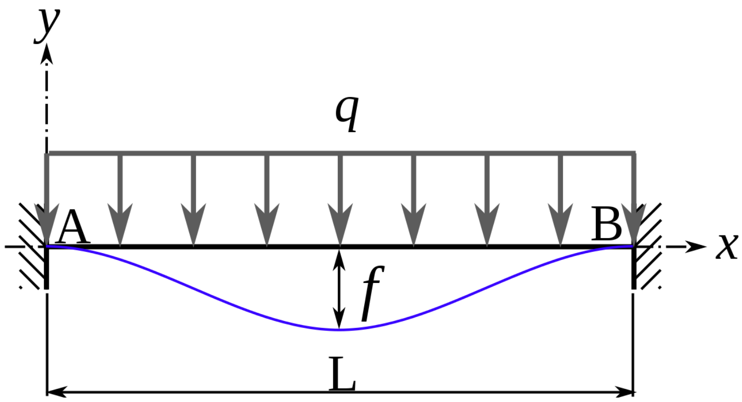


Figure 1 – Plaque de métal bi-encastrée

La réaction en B se présente sous la forme $\underline{R_B} = Y\underline{e_y}$ avec $Y = \frac{qL}{2}$ en ayant appliqué le théorème de la résultante en statique ; et se compose aussi d'un moment d'amplitude M_B. Ainsi le moment de flexion dans le tronçon AB est :

$$M(x) = M_B + \frac{q}{2}(Lx - x^2) \tag{1}$$

Par intégration on obtient $\theta(x) = \frac{1}{EI}[\frac{q}{2}(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}) + M_B x]$ et la condition $\theta(B) = 0$ donne $M_B = -\frac{qL^2}{12}$ ce qui permet de déduire :

$$\xi_y(x) = \frac{q}{12EI}[Lx^3 - \frac{x^4}{2} - \frac{L^2x^2}{2}] \tag{2}$$

Fonction dont l'allure apparaît sur la figure 1, et de minimum atteint en $x = \frac{L}{2}$ caractérisé par :

$$f = \frac{qL^4}{384EI} \tag{3}$$

Or $I = \dfrac{le^3}{12}$ d'où la simplification :

$$f = \frac{\rho g L^4}{32 E e^2} \tag{4}$$

2 Étude de la tôle

Dans l'idéal, on souhaiterait modéliser cette tôle par une sinusoïde possédant une certaine « épaisseur ». Mais ne pouvant utiliser que des droites, arcs de cercles et arcs de paraboles, j'ai opté pour des arcs de paraboles pour représenter les ondulations.
Les caractéristiques géométriques et de matériaux ont été choisis selon le produit suivant trouvé sur le site ManoMano :

Tôle ondulée galvanisée pour couverture métallique 2100x900 mm BOTAN® Référence : ME8616156

Longueur : 2100 mm
Largeur : 836 mm
Hauteur : 18 mm
Surface recouverte : 1.75 m^2
Nombre d'ondes : 11
Poids $/m^2$: $6.51 kg/m^2$
Matière : Acier 0.50 mm
Coloris : Galvanisé
Usage : Couverture
Usage : Bardage
Gamme : BOTAN

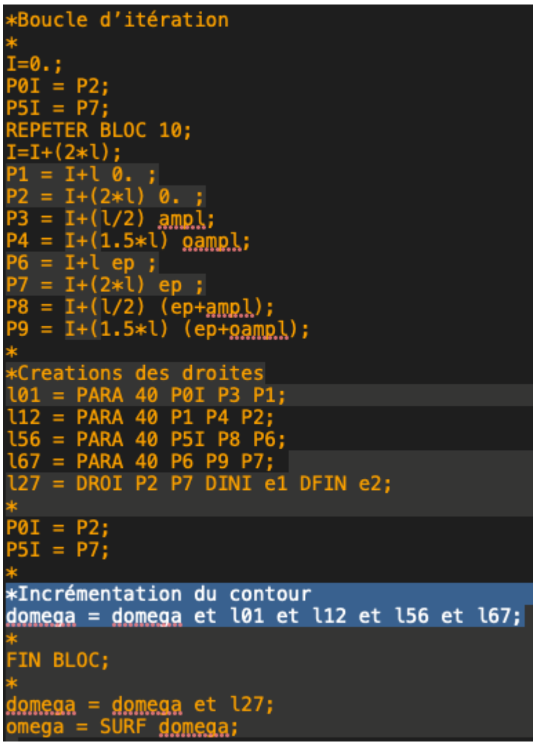
Ainsi la longueur d'une ondulation sera de 76 mm, pour une largeur L de 836 mm et d'épaisseur $e = 0.5mm$.

J'ai récupéré les caractéristiques du matériau dans « Dimensionnement des structures », édition Hermès 1999 de Daniel GAY, Jacques GAMBELIN : $E = 205000\ MPa,\ \upsilon = 0.3\ et\ \rho = 7800\ Kg/m^3$ (acier S235)

Concernant les spécificités du code Castem, le point assez délicat était d'implémenter le maillage. Pour représenter un relativement grand nombre d'ondulation, il a nécessairement fallu une boucle d'itération. Ainsi j'ai utilisé la fonction REPE permettant de répéter un certain nombre de fois un bloc d'instruction dans lequel j'incrémentais à chaque itération des arcs et des droites sur un contour domega pour finalement le fermer après la boucle comme on peut le voir sur la figure 2.

Une fois le code lancé sous Castem, on observe la déformée sur la figure 3. Ainsi, la flèche vaut pour la tôle :

$$f = 4,75cm \tag{5}$$



```
*Boucle d'itération
*
I=0.;
P0I = P2;
P5I = P7;
REPETER BLOC 10;
I=I+(2*l);
P1 = I+l 0. ;
P2 = I+(2*l) 0. ;
P3 = I+(l/2) ampl;
P4 = I+(1.5*l) oampl;
P6 = I+l ep ;
P7 = I+(2*l) ep ;
P8 = I+(l/2) (ep+ampl);
P9 = I+(1.5*l) (ep+oampl);
*
*Creations des droites
l01 = PARA 40 P0I P3 P1;
l12 = PARA 40 P1 P4 P2;
l56 = PARA 40 P5I P8 P6;
l67 = PARA 40 P6 P9 P7;
l27 = DROI P2 P7 DINI e1 DFIN e2;
*
P0I = P2;
P5I = P7;
*
*Incrémentation du contour
domega = domega et l01 et l12 et l56 et l67;
*
FIN BLOC;
*
domega = domega et l27;
omega = SURF domega;
```

FIGURE 2 – Bloc d'itération

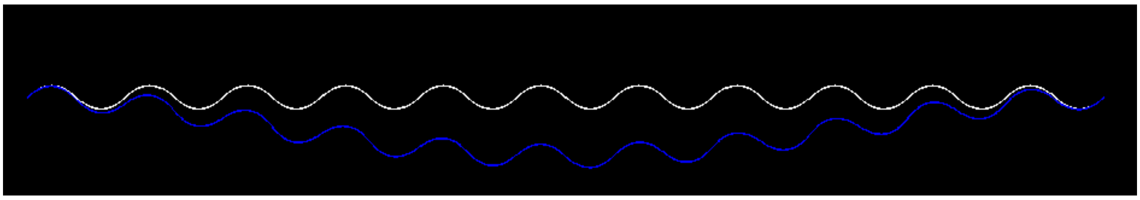


FIGURE 3 – Déformée de la tôle

3 Conclusion

En reprenant le résultat établi en première partie avec les caractéristiques géométriques et de matériaux i.e. $e = 0.5mm$, $L = 836mm$, $E = 205000\ MPa$, $v = 0.3\ et\ \rho = 7800\ Kg/m^3$, on obtient pour la plaque d'acier uniforme une flèche de :

$$f = 2,28cm \tag{6}$$

Ainsi la fléche de la plaque uniforme est inférieure à la flèche de la tôle d'environ un facteur 2. L'étude montre alors que pour des toitures il vaut mieux utiliser des plaques uniformes. Non seulement cela représenterait un avantage mais aussi une économie puisqu'une tôle est plus coûteuse qu'une plaque uniforme pour des mêmes dimensions (en largeur et longueur).