

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Дисциплина «Дискретная математика»

Курсовая работа
Часть 1
Вариант 6

Студент
Левченко Ярослав Алексеевич
Р3118

Преподаватель
Поляков Владимир Иванович

Функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ принимает значение 1 при $0 < |x_1x_2x_4 - x_3x_5| \leq 2$ и неопределенное значение при $|x_1x_2x_4 - x_3x_5| = 5$

Таблица истинности

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$x_1x_2x_4$	x_3x_5	$x_1x_2x_4$	x_3x_5	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1
2	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1
3	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
4	0	0	1	0	0	0	2	0	2	1
5	0	0	1	0	1	0	3	0	3	0
6	0	0	1	1	0	1	2	1	2	1
7	0	0	1	1	1	1	3	1	3	1
8	0	1	0	0	0	2	0	2	0	1
9	0	1	0	0	1	2	1	2	1	1
10	0	1	0	1	0	3	0	3	0	0
11	0	1	0	1	1	3	1	3	1	1
12	0	1	1	0	0	2	2	2	2	0
13	0	1	1	0	1	2	3	2	3	1
14	0	1	1	1	0	3	2	3	2	1
15	0	1	1	1	1	3	3	3	3	0
16	1	0	0	0	0	4	0	4	0	0
17	1	0	0	0	1	4	1	4	1	0
18	1	0	0	1	0	5	0	5	0	d
19	1	0	0	1	1	5	1	5	1	0
20	1	0	1	0	0	4	2	4	2	1
21	1	0	1	0	1	4	3	4	3	1
22	1	0	1	1	0	5	2	5	2	0
23	1	0	1	1	1	5	3	5	3	1
24	1	1	0	0	0	6	0	6	0	0
25	1	1	0	0	1	6	1	6	1	d
26	1	1	0	1	0	7	0	7	0	0
27	1	1	0	1	1	7	1	7	1	0
28	1	1	1	0	0	6	2	6	2	0
29	1	1	1	0	1	6	3	6	3	0
30	1	1	1	1	0	7	2	7	2	d
31	1	1	1	1	1	7	3	7	3	0

Аналитический вид

Каноническая ДНФ:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 x_5$$

Каноническая КНФ:

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5)$$

Минимизация булевой функции методом Квайна–Мак-Класки

Кубы различной размерности и простые импликанты

$K^0(f)$			$K^1(f)$		$Z(f)$
m_1	00001	C	m_4-m_6	001X0	001X0
m_2	00010	C	m_2-m_6	00X10	00X10
m_4	00100	C	m_8-m_9	0100X	0100X
m_8	01000	C	m_1-m_9	0X001	0X001
m_6	00110	C	m_2-m_{18}	X0010	X0010
m_9	01001	C	m_4-m_{20}	X0100	X0100
m_{20}	10100	C	m_6-m_7	0011X	0011X
m_{18}	10010	C	m_9-m_{11}	010X1	010X1
m_7	00111	C	m_9-m_{13}	01X01	01X01
m_{11}	01011	C	m_6-m_{14}	0X110	0X110
m_{13}	01101	C	$m_{20}-m_{21}$	1010X	1010X
m_{14}	01110	C	m_9-m_{25}	X1001	X1001
m_{21}	10101	C	$m_{21}-m_{23}$	101X1	101X1
m_{25}	11001	C	m_7-m_{23}	X0111	X0111
m_{23}	10111	C	$m_{14}-m_{30}$	X1110	X1110
m_{30}	11110	C			

Таблица импликант

Вычеркнем строки, соответствующие существенным импликантам (это те, которые покрывают вершины, не покрытые другими импликантами), а также столбцы, соответствующие вершинам, покрываемым существенными импликантами. Затем вычеркнем импликанты, не покрывающие ни одной вершины.

Простые импликанты		0-кубы													
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	
		0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	
		0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	
		0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	
		1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	
			2	4	6	7	8	9	1	1	14	20	21	23	
A	001X0			X	X										
B	00X10		X		X										
	0100X						X	X							
	0X001	X						X							
C	X0010		X												
D	X0100			X								X			
E	0011X				X	X									
	010X1						X	X							
	01X01						X		X						
F	0X110				X						X				
G	1010X											X	X		
	X1001						X								
H	101X1												X	X	
I	X0111					X								X	
J	X1110										X				

Ядро покрытия:

$$T = \begin{matrix} & 0X001 \\ & \cdot & \\ & 0100X \\ & \cdot & \\ & 010X1 \\ & \cdot & \\ & 01X01 \end{matrix}$$

Получим следующую упрощенную импликантную таблицу:

Простые импликанты		0-кубы							
		0	0	0	0	0	1	1	1
		0	0	0	0	1	0	0	0
		0	1	1	1	1	1	1	1
		1	0	1	1	1	0	0	1
		0	0	0	1	0	0	1	1
		2	4	6	7	14	20	21	23
A	001X0		X	X					
B	00X10	X		X					
C	X0010	X							
D	X0100		X				X		
E	0011X			X	X				
F	0X110			X		X			
G	1010X						X	X	
H	101X1							X	X
I	X0111				X				X
J	X1110					X			

Метод Петрика:

Запишем булево выражение, определяющее условие покрытия всех вершин:

$$Y = (B \vee C) (A \vee D) (A \vee B \vee E \vee F) (E \vee I) (F \vee J) (D \vee G) (G \vee H) (H \vee I)$$

Приведем выражение в ДНФ:

$$Y = AB \vee EF \vee GH \vee AB \vee EGH \vee J \vee AB \vee F \vee GI \vee AB \vee GI \vee J \vee AC \vee DHI \vee AC \vev EF \vev GH \vev AC \vev EGH \vev J \vev AC \vev F \vev GI \vev AC \vev GI \vev J \vev B \vev DE \vev F \vev H \vev B \vev DE \vev H \vev J \vev B \vev DF \vev GI \vev B \vev DF \vev H \vev B \vev D \vev GI \vev B \vev DHI \vev C \vev DE \vev F \vev H \vev C \vev DE \vev GI \vev C \vev DE \vev H \vev J \vev C \vev DF \vev GI \vev C \vev DF \vev HI$$

Возможны следующие покрытия:

$$C = \begin{matrix} & T \\ A & B \\ E & F \\ G & H \end{matrix} = \begin{matrix} & 0X001 \\ & 0100X \\ & 010X1 \\ .01X01 \\ 001X0 \\ 00X10 \\ "0011X" \\ . \\ 0X1010X \\ 101X1 \end{matrix}$$
$$\begin{aligned} S_1^a &= 40 \\ S_1^b &= 50 \end{aligned}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0X001 \\ 0100X \\ 010X1 \\ 01X01 \\ 001X0 \\ 00^3X10 \\ 0011X \\ 00101X1 \\ X1110 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} T \\ A \\ B \\ E \\ G \\ H \\ J \end{matrix}$$

$$C_3 = \begin{matrix} & & & & 0X0011 \\ & & & & 0100X \\ & & T & & 010X11 \\ & & & & 01X011 \\ A & & & & \\ B & & & & \\ F & & & & 001X0 \\ & & & & 00X10 \\ & & & & 0X110 \\ & & & & 1010X \\ & & & & X0111 \end{matrix}$$

$$C_4 = \begin{matrix} & T \\ A \\ B \\ G \\ I \\ J \end{matrix} \begin{matrix} 0X001 \\ 0100X \\ 010X1 \\ 01X01 \\ 00X10 \\ 1010X \\ X0111 \\ X1110 \end{matrix}$$

$$C = \begin{matrix} & T & A & C \\ D & & & \\ H & & & \\ I & & & \\ J & & & \end{matrix} = \begin{matrix} & 0100X & 010X1 & 011X01 \\ & 001X0 & X0010 & X0100 \\ & & & X0111 \\ & & & X1110 \end{matrix}$$

$$S_{\mathfrak{S}} = 40$$

$$C = \begin{matrix} & T \\ A & \\ E & \\ F & \\ G & \\ H & \end{matrix} = \begin{matrix} .0X001 \\ .0100X \\ .010X1 \\ .01X01 \\ .001X0 \\ .X0010 \\ .0011X \\ .01010X \\ .101X1 \end{matrix}$$

$$S^b = 50$$

$$\frac{a}{b} = \frac{5}{0}$$

$$\frac{S_6}{6}$$

0X001,

. 0X001.

, 0X001,

0X001

, 0X001,

, 0X001,

0X001

, 0X001,

, 0X001,

0X001

, 0X001,

, 0X001,

$$C_{19} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} T \\ C \\ D \\ F \\ G \\ I \end{array} \begin{array}{c} 0X001, \\ 0100X \\ 010X1, \\ 01X01 \\ X0010 \\ X0100 \\ 0X110, \\ 1010X \\ X0111 \end{array} \end{array}$$

$$S_{19}^a = 36$$

$$S_{19}^b = 45$$

$$C_{20} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} T \\ C \\ D \\ F \\ H \\ I \end{array} \begin{array}{c} 0X001, \\ 0100X \\ 010X1 \\ 01X01, \\ X0010 \\ X0100 \\ 0X110, \\ 101X1 \\ X0111 \end{array} \end{array}$$

$$S_{20}^a = 36$$

$$S_{20}^b = 45$$

Рассмотрим следующее минимальное покрытие:

$$C_{\min} = \begin{array}{c} 0X001, \\ 0100X \\ 010X1 \\ 01X01, \\ 001X0 \\ 00X10 \\ 0X110, \\ 1010X \\ X0111 \end{array}$$

$$S^a = 36$$

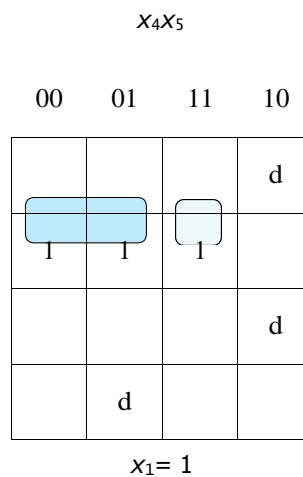
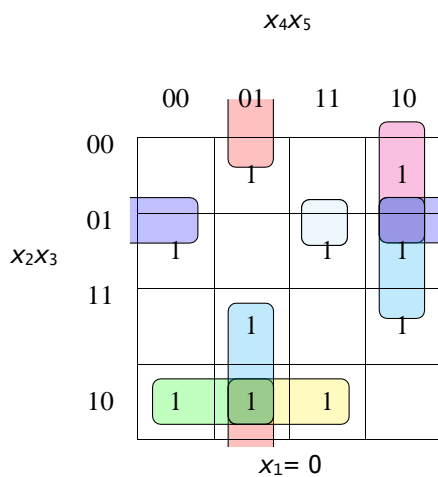
$$S^b = 45$$

Этому покрытию соответствует следующая МДНФ:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_5 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} x_5$$

Минимизация булевой функции на картах Карно

Определение МДНФ



$$C_{\min} = \begin{array}{c} 0X001, \\ 0100X \\ 010X1 \\ 01X01, \\ 001X0 \\ 00X10 \\ 0X110, \\ 1010X \\ X0111 \end{array}$$

$$S^a = 36$$

$$S^b = 45$$

$$f = x_1 x_3 x_4 x_5 \vee x_1 x_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_3 x_5 \vee x_1 x_2 x_4 x_5 \vee x_1 x_2 x_3 x_5 \vee x_1 x_2 x_4 x_5 \vee x_1 x_3 x_4 x_5 \vee x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$$

Определение МКНФ

		x_4x_5			
		00	01	11	10
x_2x_3	00	0		0	
	01		0		
	11	0		0	
	10				0
		$x_1 = 0$			

		x_4x_5			
		00	01	11	10
x_2x_3	00	0	0	0	d
	01				0
	11	0	0	0	d
	10	0	d	0	0
		$x_1 = 1$			

$$C_{\min} = \begin{matrix} x0000 \\ x0011 \\ 00101 \\ x1010 \\ x1100 \\ x1111 \\ 1x0xx \\ 1xx10 \\ 11xxx \end{matrix}$$

$$S^a = 32$$

$$S^b = 41$$

$$f = (x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5) (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5) (\bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \vee x_5) (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \vee x_5) (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5) (\bar{x}_1 \vee x_3) (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4 \vee x_5) (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$$

Преобразование минимальных форм булевой функции

Факторизация и декомпозиция МДНФ

$$f = \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4 x_5 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 x_3 x_4 x_5$$

$$S_Q = 45 \quad \tau = 2$$

$$f = \bar{x}_1 \bar{x}_5 (x_4 (\bar{x}_2 \vee x_3) \vee \bar{x}_2 x_3) \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 (\bar{x}_4 \vee x_5) \vee \bar{x}_1 \bar{x}_4 x_5 (x_2 \vee \bar{x}_3) \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 x_3 x_4 x_5$$

$$S_Q = 36 \quad \tau = 5$$

$$\phi = \bar{x}_2 x_3$$

$$\bar{\phi} = x_2 \vee \bar{x}_3$$

$$f = \bar{x}_1 \bar{x}_5 (x_4 (\bar{x}_2 \vee x_3) \vee \phi) \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 (\bar{x}_4 \vee x_5) \vee \bar{x}_1 \bar{x}_4 x_5 \bar{\phi} \vee \phi x_1 \bar{x}_4 \vee \phi x_4 x_5$$

$$S_Q = 33 \quad \tau = 5$$

Факторизация и декомпозиция МКНФ

$$f = (x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5) (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5) (\bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \vee x_5) (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5) (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \vee x_5) (\bar{x}_1 \vee x_3) (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4 \vee x_5) (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$$

$$S_Q = 41 \quad \tau = 2$$

$$f = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 x_3) ((x_2 \vee x_3) (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \vee (x_4 \vee x_5) (\bar{x}_4 \vee \bar{x}_5)) (\bar{x}_4 \vee x_5 \vee \bar{x}_1 (\bar{x}_2 \vee x_3)) (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5)$$

$$S_Q = 34 \quad \tau = 4$$

$$\phi = \bar{x}_2 x_3$$

$$\bar{\phi} = x_2 \vee \bar{x}_3$$

$$f = (\bar{x}_1 \vee \phi) ((x_2 \vee x_3) (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \vee (x_4 \vee x_5) (\bar{x}_4 \vee \bar{x}_5)) (\bar{x}_4 \vee x_5 \vee \bar{x}_1 (\bar{x}_2 \vee x_3)) (\bar{\phi} \vee x_1 \vee x_4 \vee \bar{x}_5)$$

$$S_Q = 34 \quad \tau = 4$$

Декомпозиция нецелесообразна

$$f = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 x_3) ((x_2 \vee x_3) (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \vee (x_4 \vee x_5) (\bar{x}_4 \vee \bar{x}_5)) (\bar{x}_4 \vee x_5 \vee \bar{x}_1 (\bar{x}_2 \vee x_3)) (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5)$$

$$S_Q = 34 \quad \tau = 4$$

Синтез комбинационных схем

Будем анализировать схемы на следующих наборах аргументов:

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 1]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1]) = 1$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0]) = 1$$

Булев базис

Схема по упрощенной МДНФ:

$$f = \bar{x}_1 \bar{x}_5 (x_4 (\bar{x}_2 \vee x_3) \vee \phi) \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 (\bar{x}_4 \vee x_5) \vee \bar{x}_1 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \phi \vee \phi x_1 \bar{x}_4 \vee \phi x_4 x_5 \quad (S_Q = 33, \tau = 5)$$

$$\phi = \bar{x}_2 x_3$$

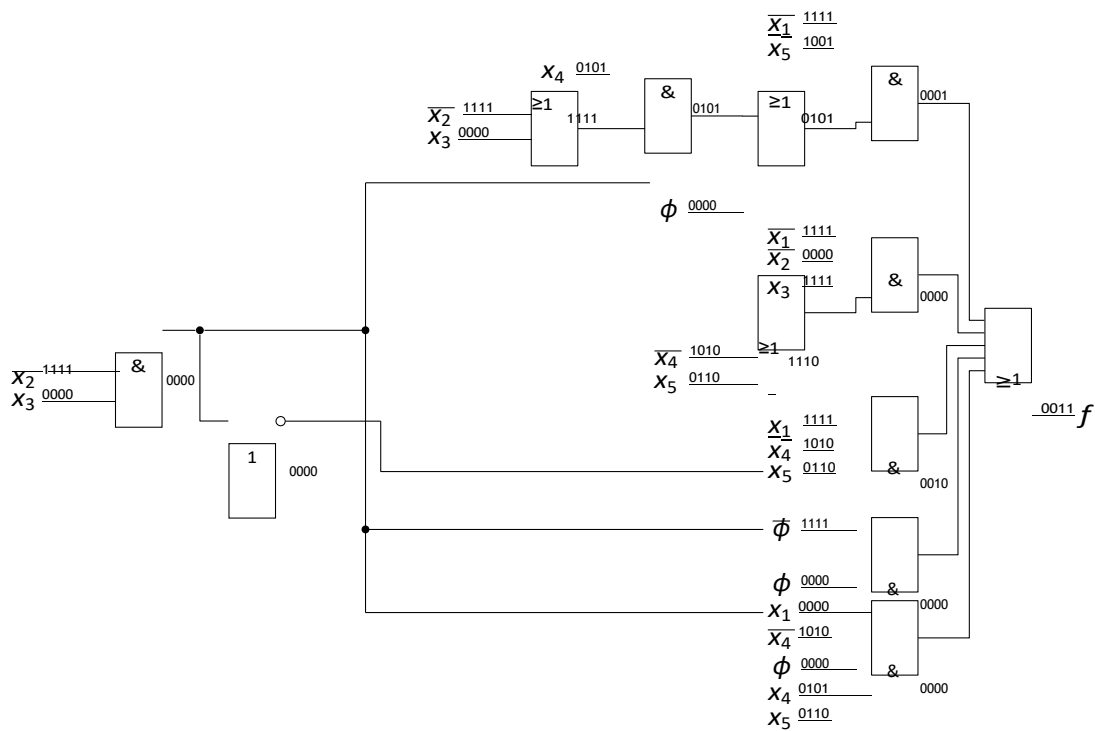
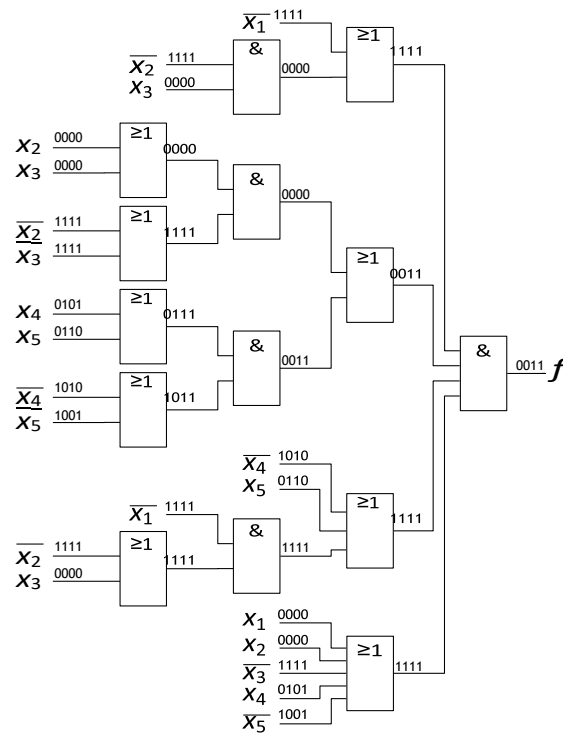


Схема по упрощенной МКНФ:

$$f = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} x_3) ((x_2 \vee x_3) (\overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \vee (x_4 \vee x_5) (\overline{x_4} \vee \overline{x_5})) (\overline{x_4} \vee x_5 \vee \overline{x_1} (\overline{x_2} \vee x_3)) (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) \quad (S_Q = 34, \tau = 4)$$



Сокращенный булев базис (И, НЕ)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{\overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5} x_1 x_4 x_5 x_2 x_3} x_1 x_4 x_5 \phi \phi \overline{x_1 x_5} \phi x_1 \overline{x_4} \phi x_4 x_5} \quad (S_Q = 43, \tau = 6)$$

$$\phi = \overline{x_2} x_3$$

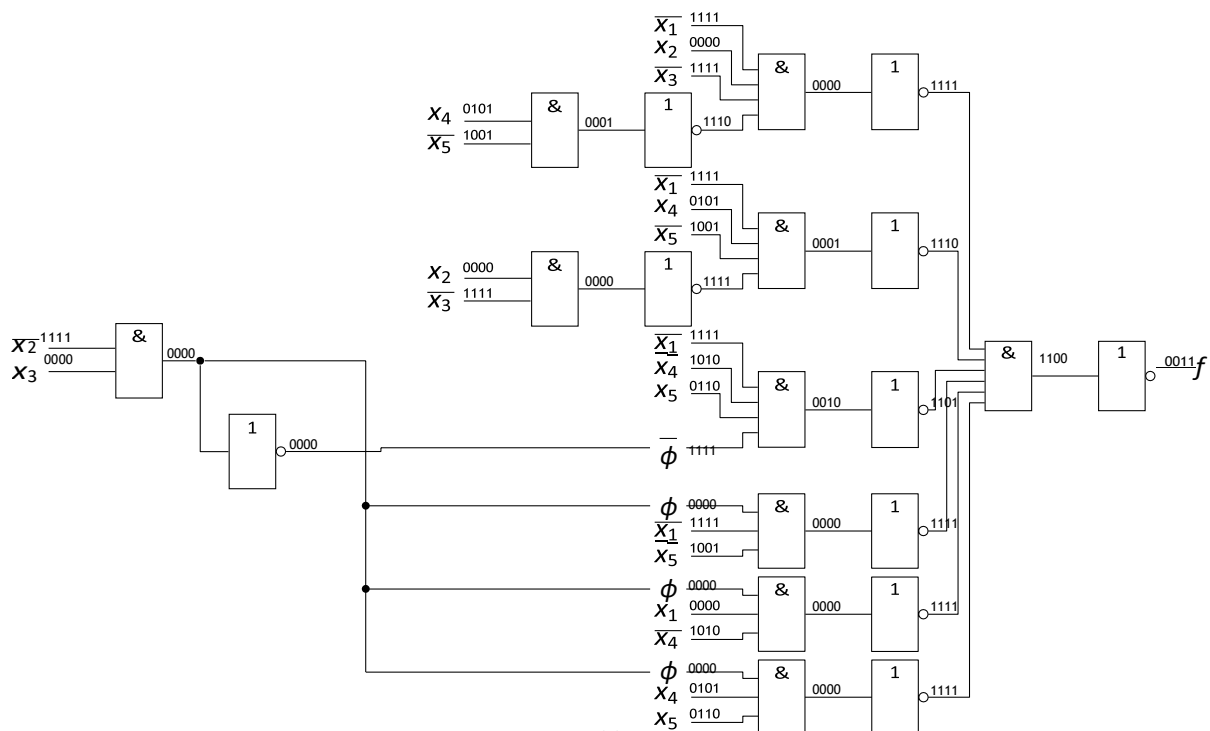
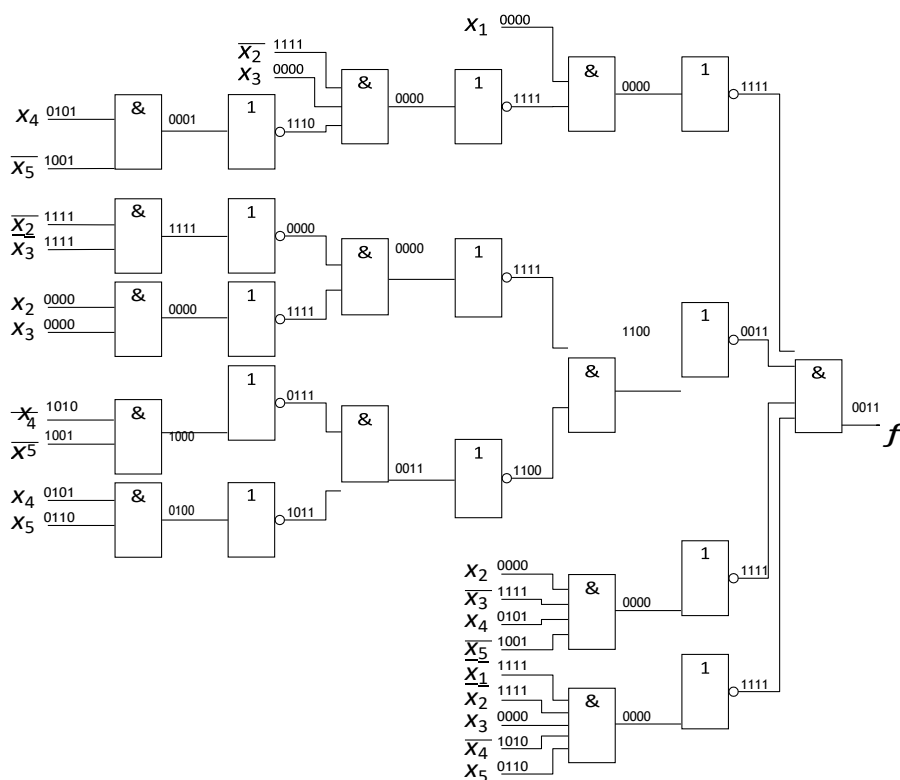


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5} \overline{x_2 x_3} \overline{x_2 x_3 x_4 x_5} \overline{x_4 x_5} \overline{x_2 x_3 x_4 x_5} \overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5} \quad (S_Q = 46, \tau = 7)$$



Универсальный базис (И-НЕ, 2 входа)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{x_1 x_5 x_4 x_2 x_3} \phi \overline{x_2 x_3 x_4 x_5 x_4 x_5} \phi \phi \overline{x_1 x_4 x_4 x_5} \quad (S_Q = 44, \tau = 9)$$

$$\phi = \overline{x_2 x_3}$$

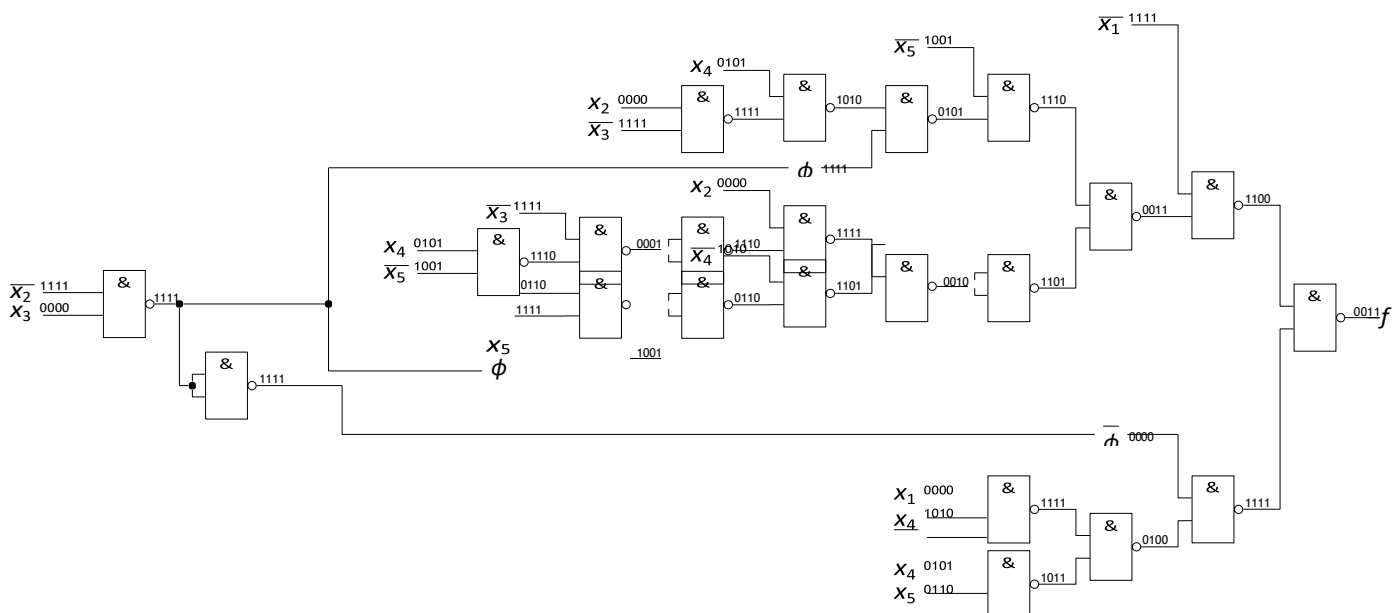


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \quad (S_Q = 54, \tau = 9)$$

