

SME0827 - Estruturas de Dados

Grafos Aula 14



Professor: André C. P. L. F. de Carvalho, ICMC-USP
PAE: Moisés Rocha dos Santos
Monitor: Marília Costa Rosendo Silva

Estradas entre cidades



© André de Carvalho - ICMC/USP

4

Hoje

- Grafos
- Redes complexas
- Árvores
- Árvores Binárias
- Operações básicas em árvores binárias

© André de Carvalho - ICMC/USP

2

Grafos

- Estão presentes em várias situações
 - Malhas rodoviárias
 - Disposição de componentes em circuitos eletrônicos
 - Sistemas de distribuição de energia
 - Redes de comunicação
 - Relações entre
 - Pessoas
 - Proteínas

André de Carvalho - ICMC/USP

5

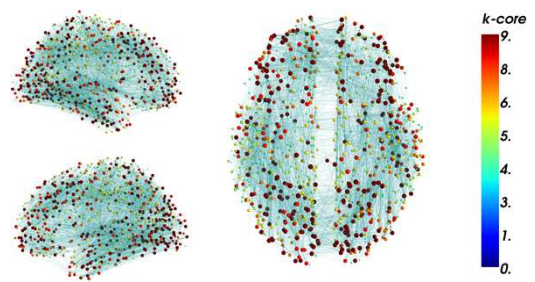
Grafos

- Um grafo é um par (V, E) , onde
 - V é um conjunto de nós, chamados vértices
 - E é um conjunto de arestas conectando vértices pertencentes a V
 - Cada aresta é representada por um par de vértices
 - Nós conectados por uma aresta são nós adjacentes
- Exemplo:
 - Mapa das cidades do estado de São Paulo
 - Vértice = cidade
 - Aresta = rodovia entre duas cidades

© André de Carvalho - ICMC/USP

3

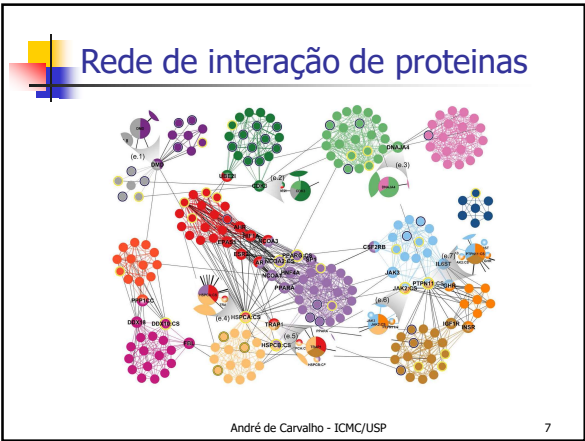
Conexões entre neurônios



k-core: maximal subgraph with minimum degree $\geq k$

André de Carvalho - ICMC/USP

6



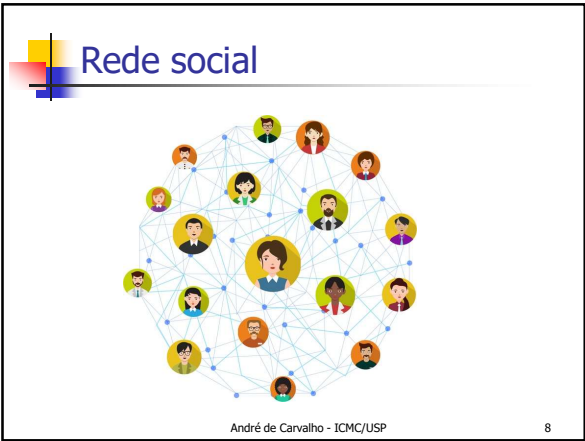
7

Problema caixeiro viajante (TSP)

- Caixeiro viajante pretende visitar um grupo de cidades
 - Cada cidade uma única vez
 - Percorrer menor distância
 - Voltar à cidade inicial
- Aparentemente simples

07/05/2020 André de Carvalho - ICMC/USP

10



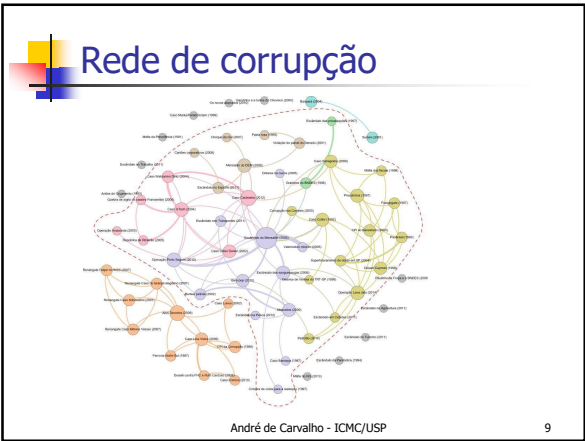
8

TSP

- A simplicidade da definição do problema engana
 - NP-completo
 - Um dos problemas mais estudados em matemática computacional e IA
 - Não existe nenhuma solução eficiente para o caso geral
 - Quem resolver este problema para o caso geral receberá um prêmio de \$1,000,000 do Clay Mathematics Institute

07/05/2020 André de Carvalho - ICMC/USP

11



9

TSP como problema combinatorial

#Cidades	$(n-1)!$	Tempo total estimado em PC
5	24	Insignificante
10	362.880	0,003 s
15	87 bilhões	20 min
20	$1,2 \times 10^{17}$	73 anos
25	$6,2 \times 10^{23}$	470 milhões de anos

07/05/2020 André de Carvalho - ICMC/USP

12

Solução computacional

- TSP pode ser representado por:
 - Grafo
 - Nós: cidades
 - Arestas ponderadas: distância entre cidades

- Mapa com latitude e longitude das cidades

07/05/2020 André de Carvalho - ICMC/USP 13

Redes Complexas

- Topologias
 - Mundo pequeno (*Small-world*)
 - De um nó chega-se a qualquer outro nó sem passar por muitos nós no caminho (caminho mínimo)
 - Quantas pessoas separam você de uma outra pessoa qualquer
 - Livre de escala (*Scale-free*)
 - Distribuição de nós segue uma lei de potência
 - Poucos vértices de grau alto, enquanto muitos vértices apresentam grau baixo

16

Redes Complexas

- Representação de conhecimento em estruturas topológicas
 - Grafos
- Diversas medidas foram propostas para caracterizar a topologia de um grafo
- Combinam conceitos de várias áreas
 - Biologia, computação, física, economia, matemática, ciências sociais, ...

14

Grafos

- Grau de um nó:
 - Número de arestas ligadas a ele
- Cadeia:
 - Sequência de arestas $C = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{k-1}, v_k)\}$ com k vértices distintos, $k \leq n$
 - Ex.: $C = \{(A, C), (C, D)\}$
- Ciclo:
 - Cadeia que contém a aresta (v_k, v_1)
 - Ex.: $C = \{(A, C), (C, D), (D, A)\}$

© André de Carvalho - ICMC/USP 17

Redes Complexas

- Algumas medidas
 - Grau médio
 - Caminho mínimo médio
 - Distribuição de graus dos vértices
 - Coefficiente de agrupamento de comunidades
- Características
 - Nós *hub*
 - Nós com muitos vizinhos (nós adjacentes)

15

Grafos

- Podem ser ainda:
 - Direcionados x não direcionados
 - Ponderados x não ponderados
 - Com ou sem peso nas arestas
 - Conexos e não conexos
 - De cada nó pode-se chegar a qualquer outro nó do grafo
 - Cíclicos x acíclicos
 - Pelo menos um ciclo

© André de Carvalho - ICMC/USP 18

Estruturas de dados para grafos

■ Matriz de adjacências

0

1

2

3

4

0

1

2

3

4

0

1

2

3

4

0

1

2

3

4

■ Lista encadeada

0

1

2

3

4

→

→

→

→

→

→

→

→

→

→

→

→

→

→

→

→

→

→

→

→

3

0

4

1

2

André de Carvalho - ICMC/USP

19

Árvores

■ Definições importantes

■ Dado um nó x:

■ Profundidade (x): Número de arestas no caminho entre x e o nó inicial (raiz)

■ Maior profundidade = altura da árvore

■ Altura (x): número de arestas no caminho entre x e a folha de maior profundidade

■ Altura de uma árvore: altura de seu nó raiz

■ Nível (x): comprimento do caminho da raiz até x

■ Grau (x): Número de filhos de x

A

D

E

B

F

© André de Carvalho - ICMC/USP

22

Árvores

■ Grafos acíclicos conexos em que cada nó tem apenas um antecedente (pai)

Nó raiz→ A

Nós intermediários→ B C

Nós folha→ G H

C é pai de F
F é filho de C

A

B

C

D

E

F

G

H

© André de Carvalho - ICMC/USP

20

Árvores binárias

■ Árvores em que cada nó é uma folha ou tem grau ≤ 2

■ Cheia: árvore binária em que cada nó é uma folha ou tem grau exatamente igual a 2

■ Completa: árvore binária cheia em que todas as folhas estão no mesmo nível

4

1

2

16

9

10

8

7

12

Árvore binária cheia

4

1

2

16

9

10

Árvore binária completa

© André de Carvalho - ICMC/USP

23

Árvores geradoras

■ Spanning Trees

■ Dado um grafo G não direcionado e conectado G

■ Uma árvore de geradora de G é um subgrafo que:

■ É uma árvore

■ Contém todos os vértices de G (abrange o grafo G)

G

spanning tree of G

André de Carvalho - ICMC/USP

21

Exemplo 1

■ Árvore binária associada a uma expressão aritmética

■ Nós internos: operadores

■ Nós externos: operandos

■ Exemplo: árvore de expressão aritmética para a expressão $(3 \times (a - 1) + (4 \times b))$

+

×

×

2

-

4

b

a

1

Adaptada de © 2013 Goodrich, Tamassia, Goldwasser

24

Exemplo 2

■ Árvores de decisão

Nó raiz

Nós intermediários

Nós folha

Dor

Febre

Hospital

Casa

sim

não

alta

baixa

Casa

Casa

© André de Carvalho - ICMC/USP

25

Hoje

■ Grafos

■ Aplicações

■ Redes complexas

■ Árvores

■ Árvores Binárias

■ Operações básicas em árvores binárias

© André de Carvalho - ICMC/USP

26

Perguntas

© André de Carvalho - ICMC/USP

27