

# Die Brachistochrone

## Eine Einführung in die Variationsrechnung

W-Seminar Mathematische Optimierung

2022-24

A. Gaugler

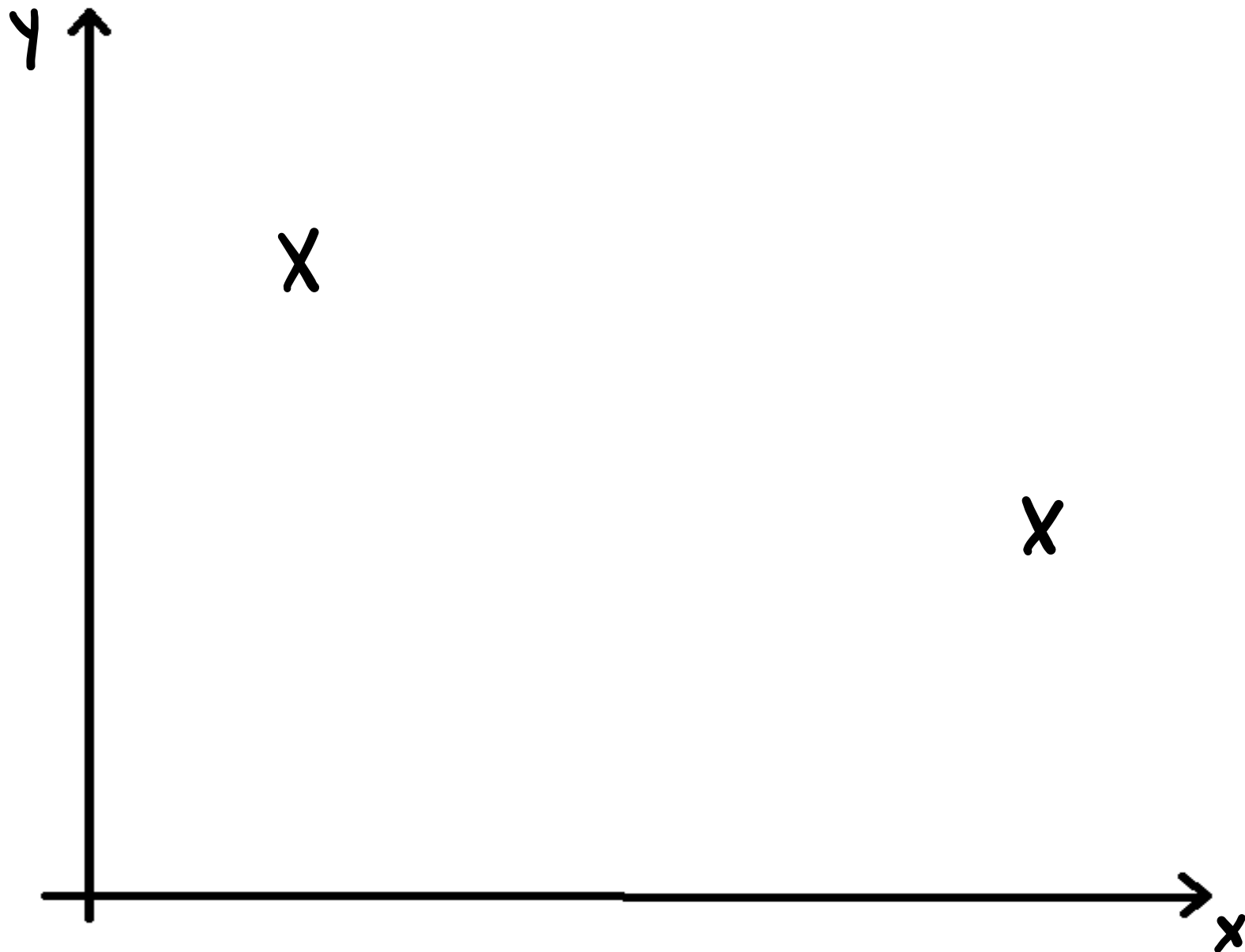
# Weihnachtsübung zur Analysis III

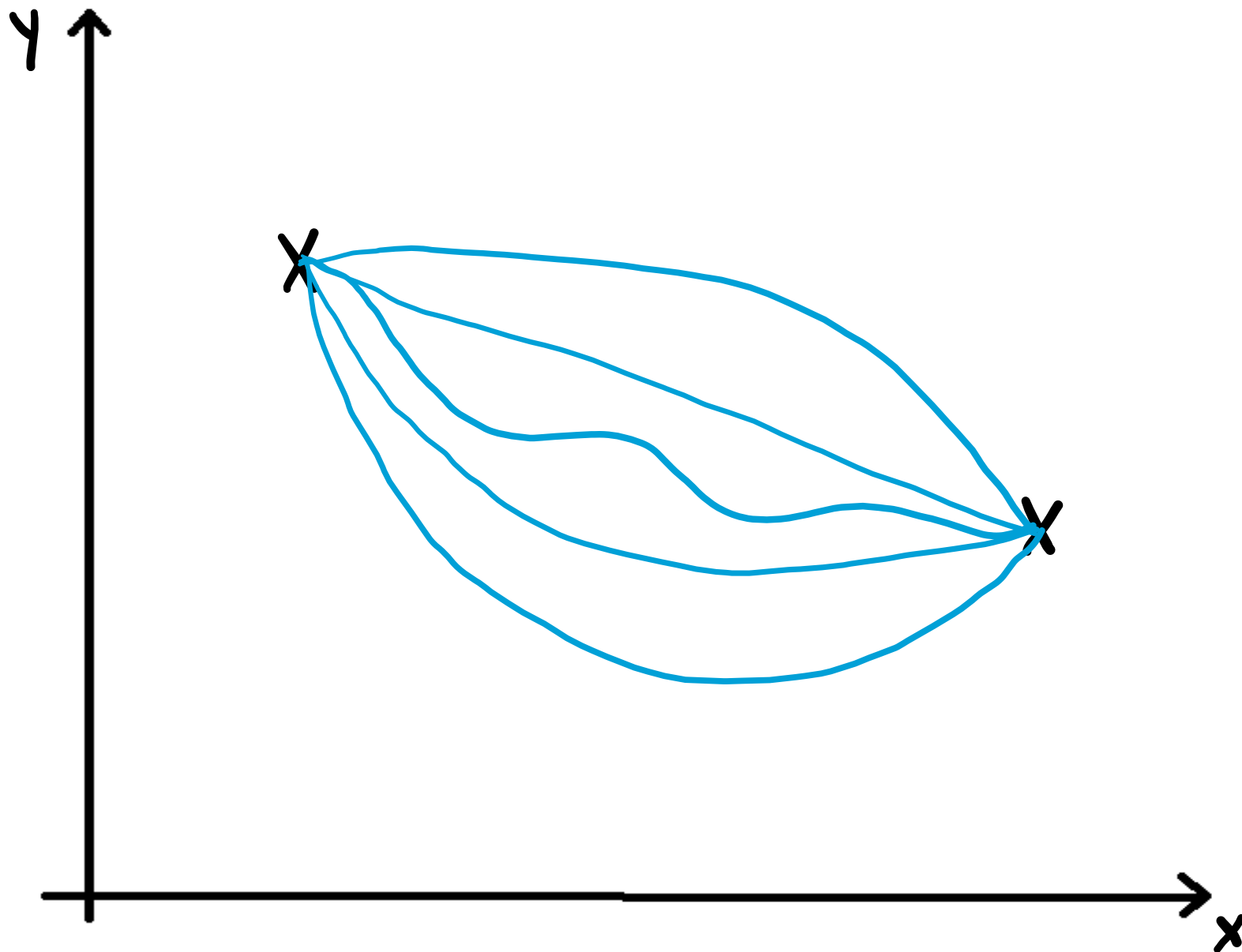
Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen      Lukas Stoll, M. Sc.

06. Dezember 2022 – 12. Januar 2023 \*

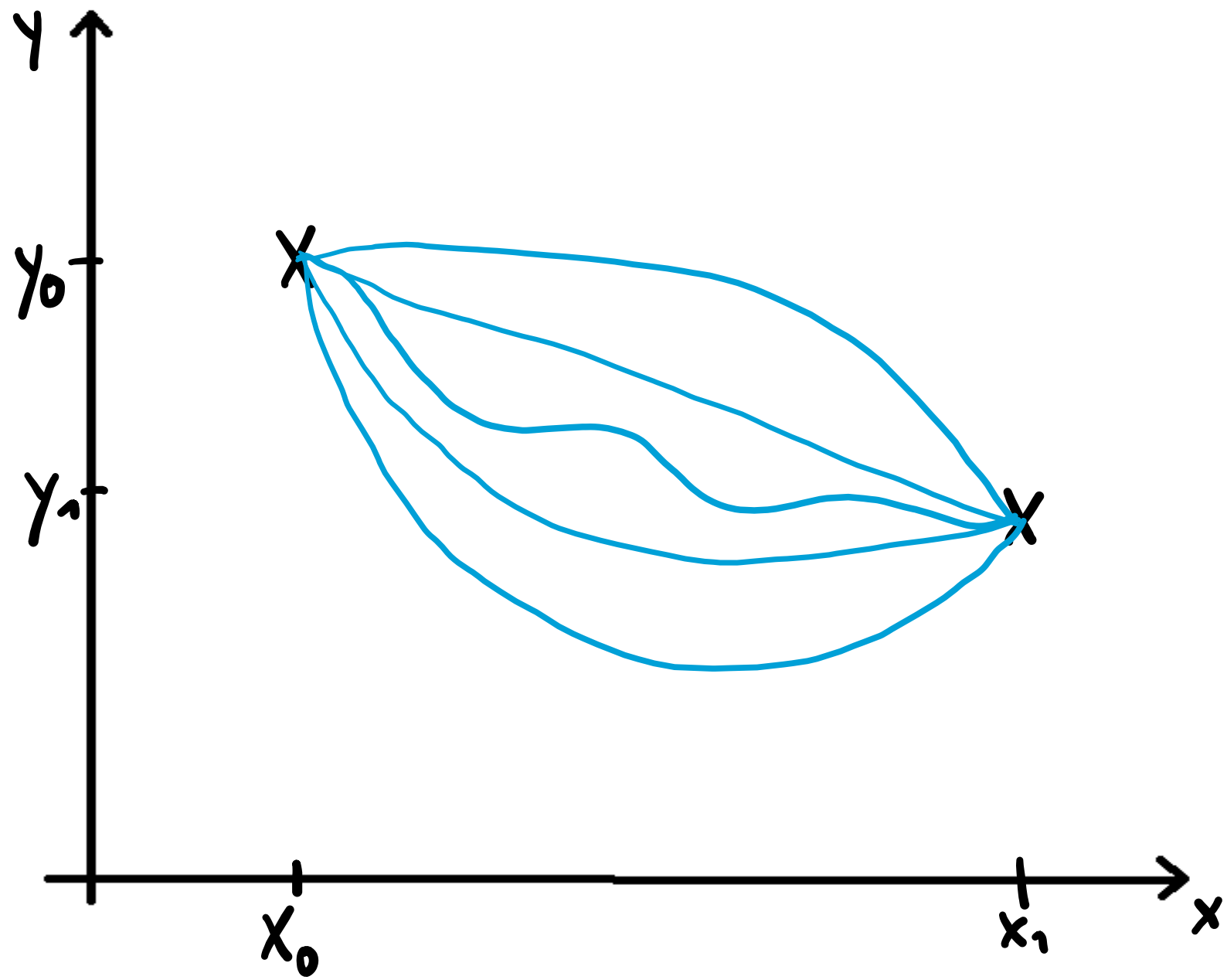
- 294.** Es muß wohl kurz vor Weihnachten und nach einem sehr langen Arbeitstag gewesen sein, als die Oberbürgermeisterin der Stadt Augsburg beschloß: „Augsburg braucht ein neues Schwimmbad! Und zwar soll es die schnellste Rutschbahn haben, die möglich ist!“







?



# Funktionale

Wir sind Funktionen gewöhnt wie  
z.B.  $f(x) = x^2$ , oder auch:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Jetzt nehmen wir eine  
Funktion, die als Input eine  
andere Funktion nimmt und  
uns als Output eine reelle  
Zahl gibt.

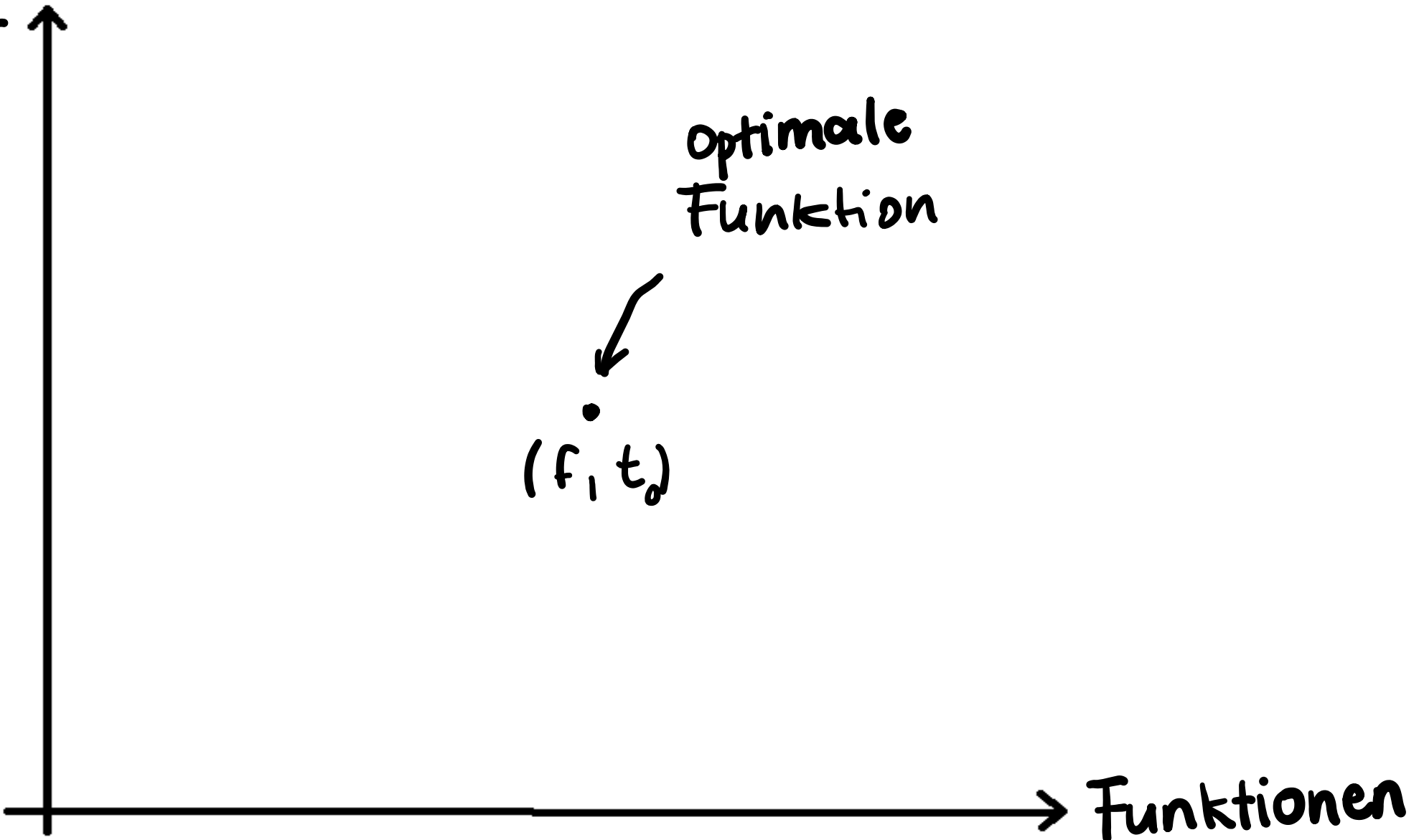
$$\begin{aligned} J: \{ \text{Funktionen} \} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_{x_0}^{x_1} F(x, f(x), f'(x)) \, dx \end{aligned}$$

Rutsch-  
zeit

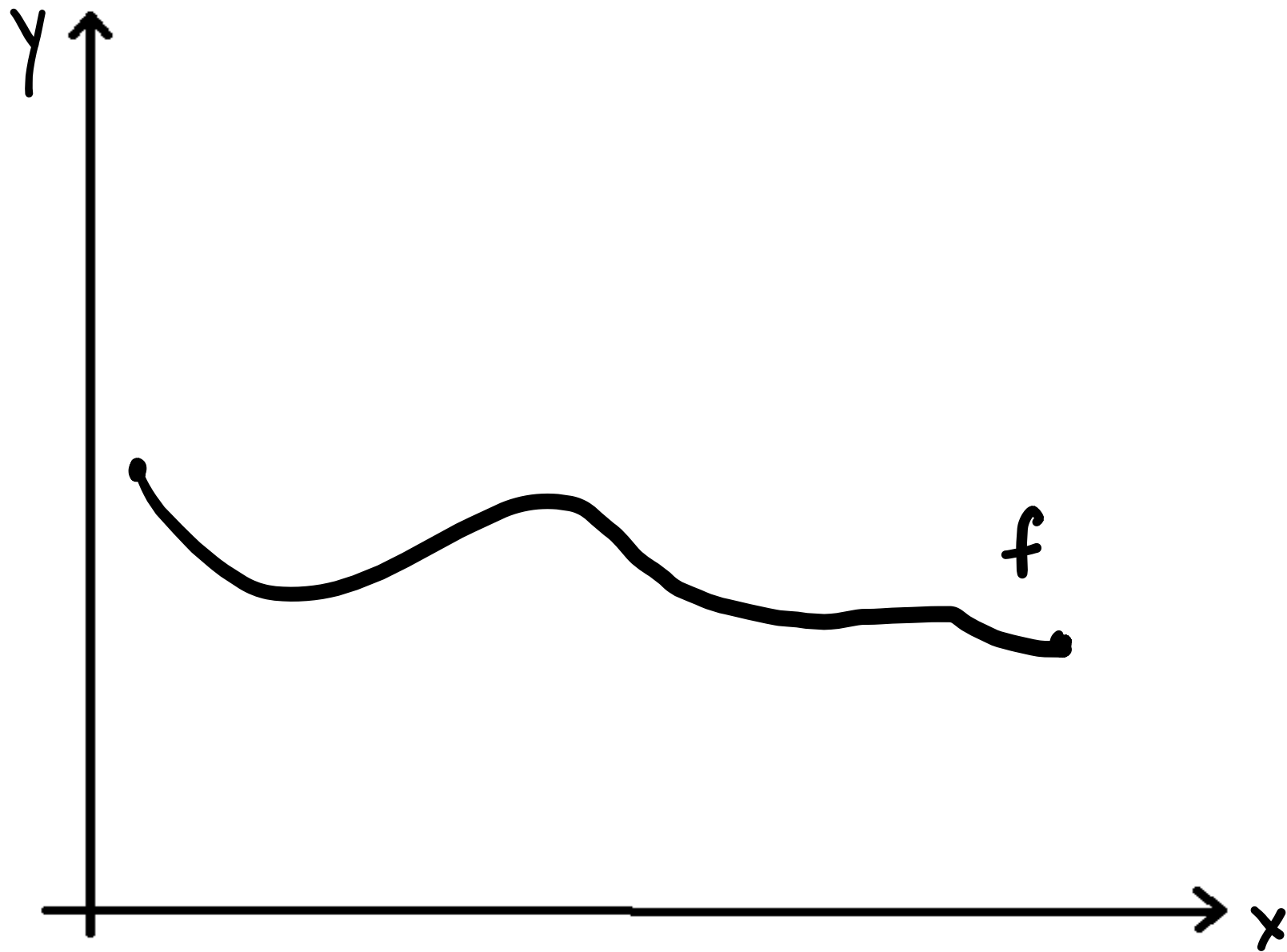
optimale  
Funktion

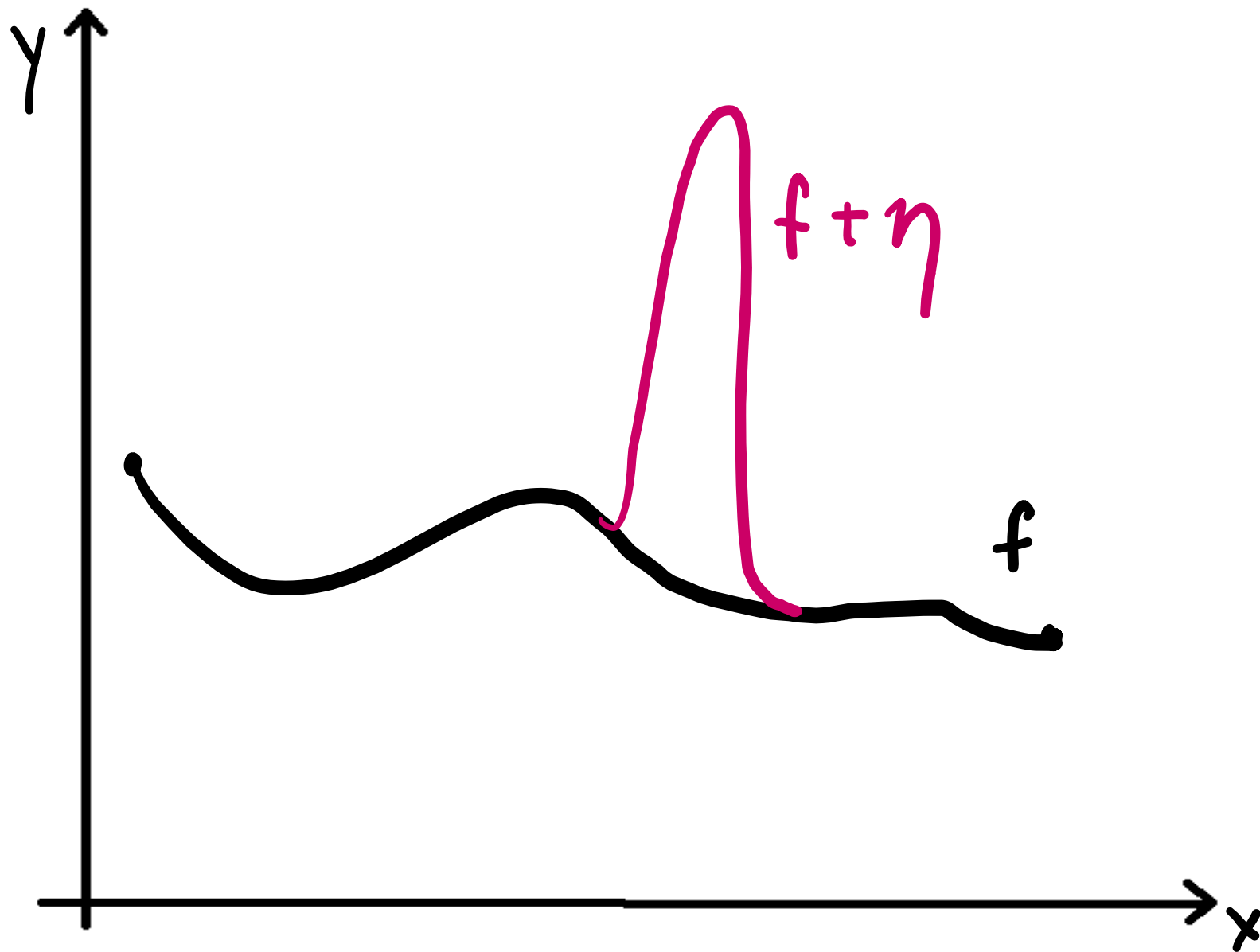
$(f_1, t_0)$

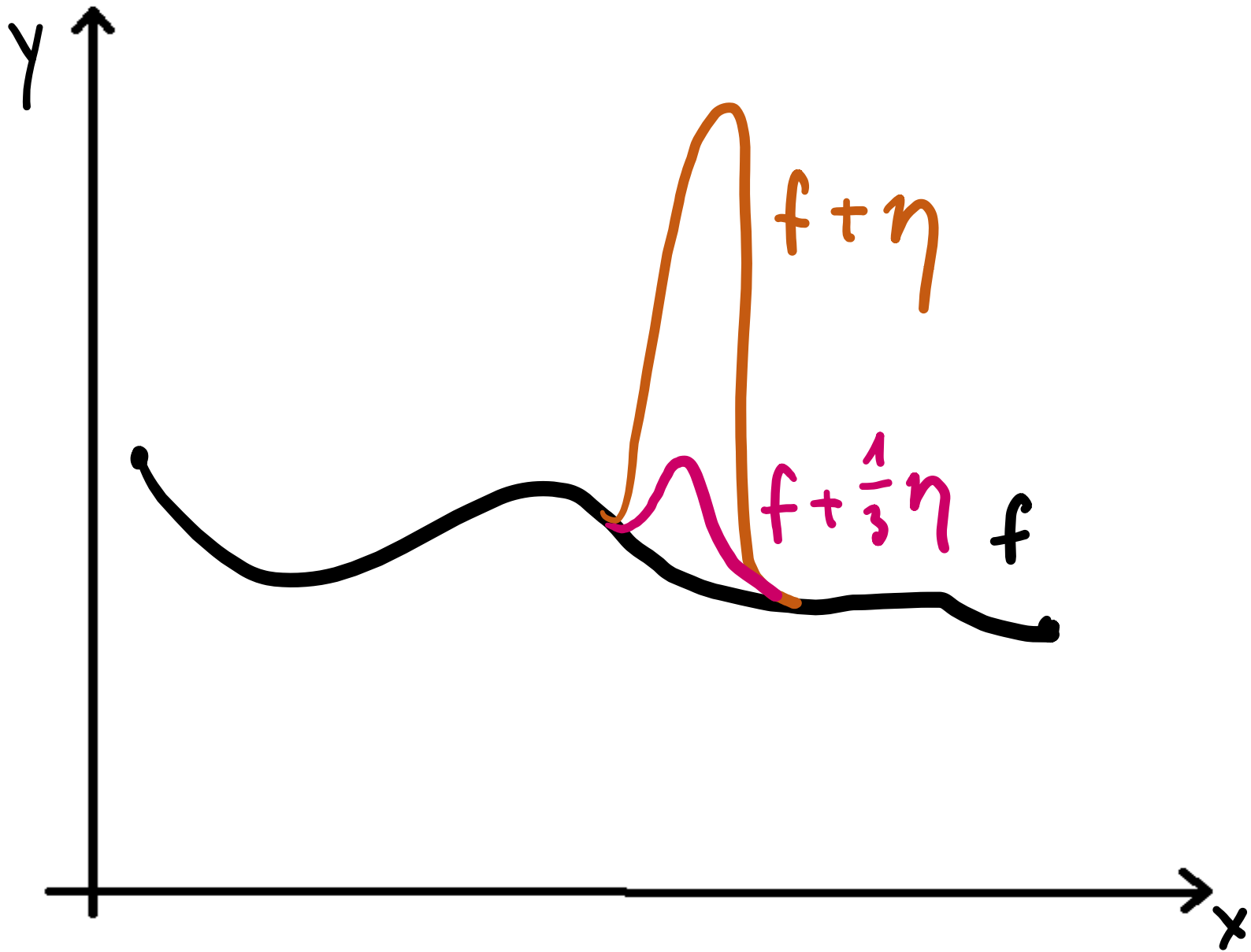
Funktionen

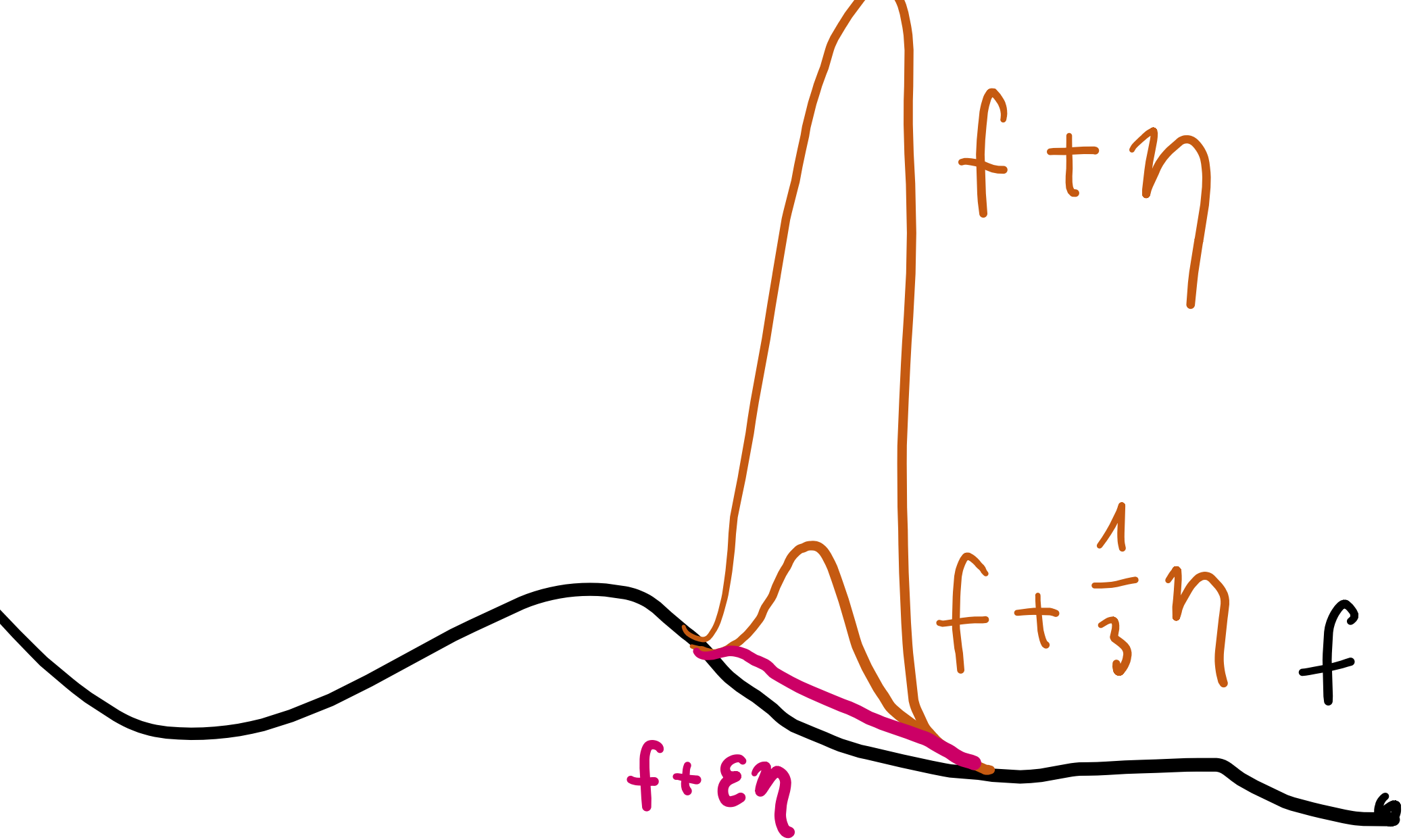


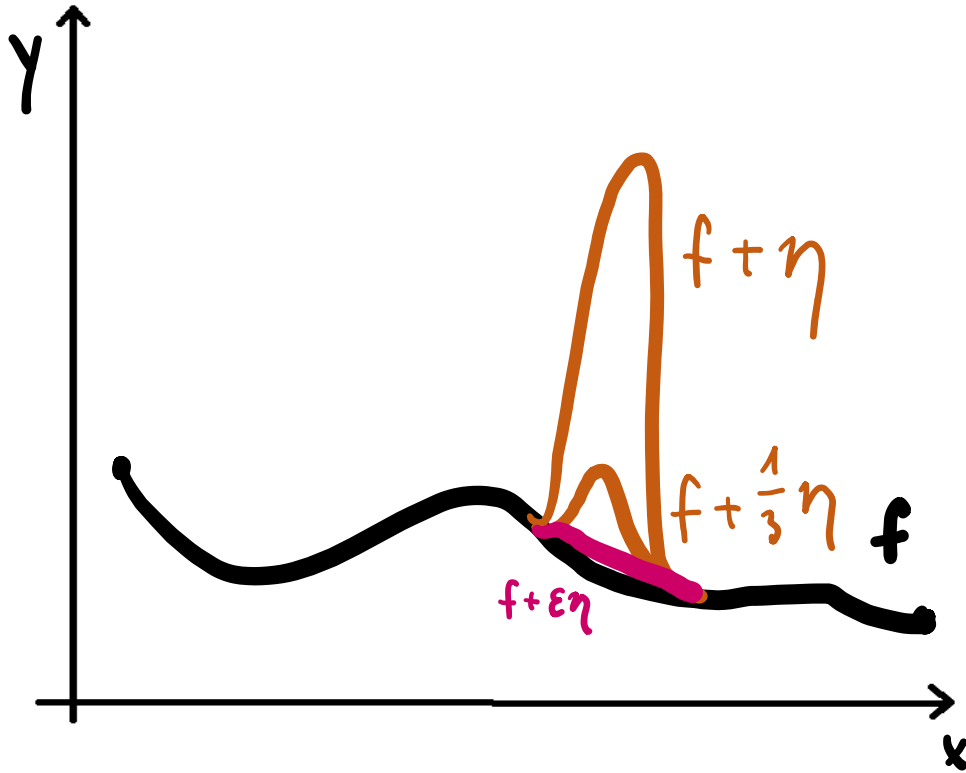








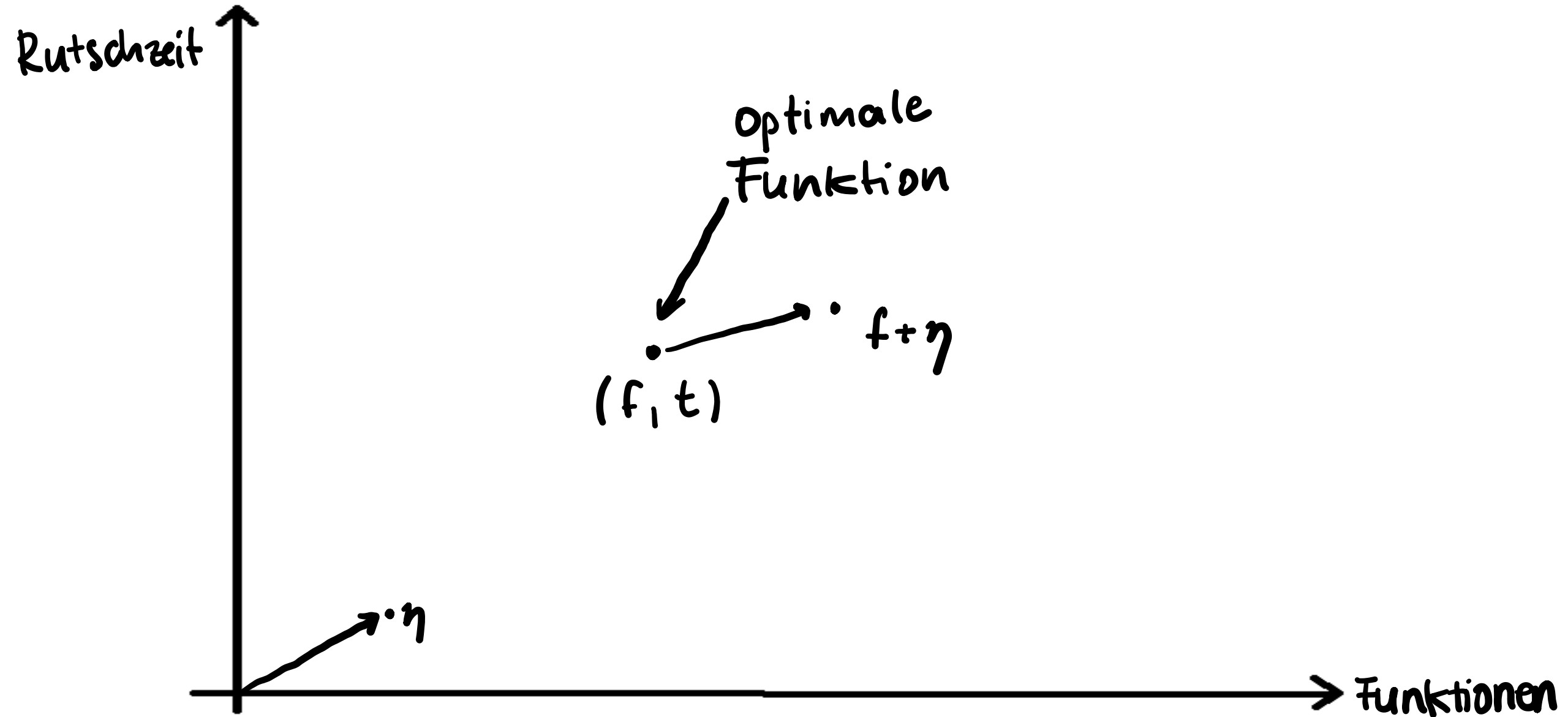


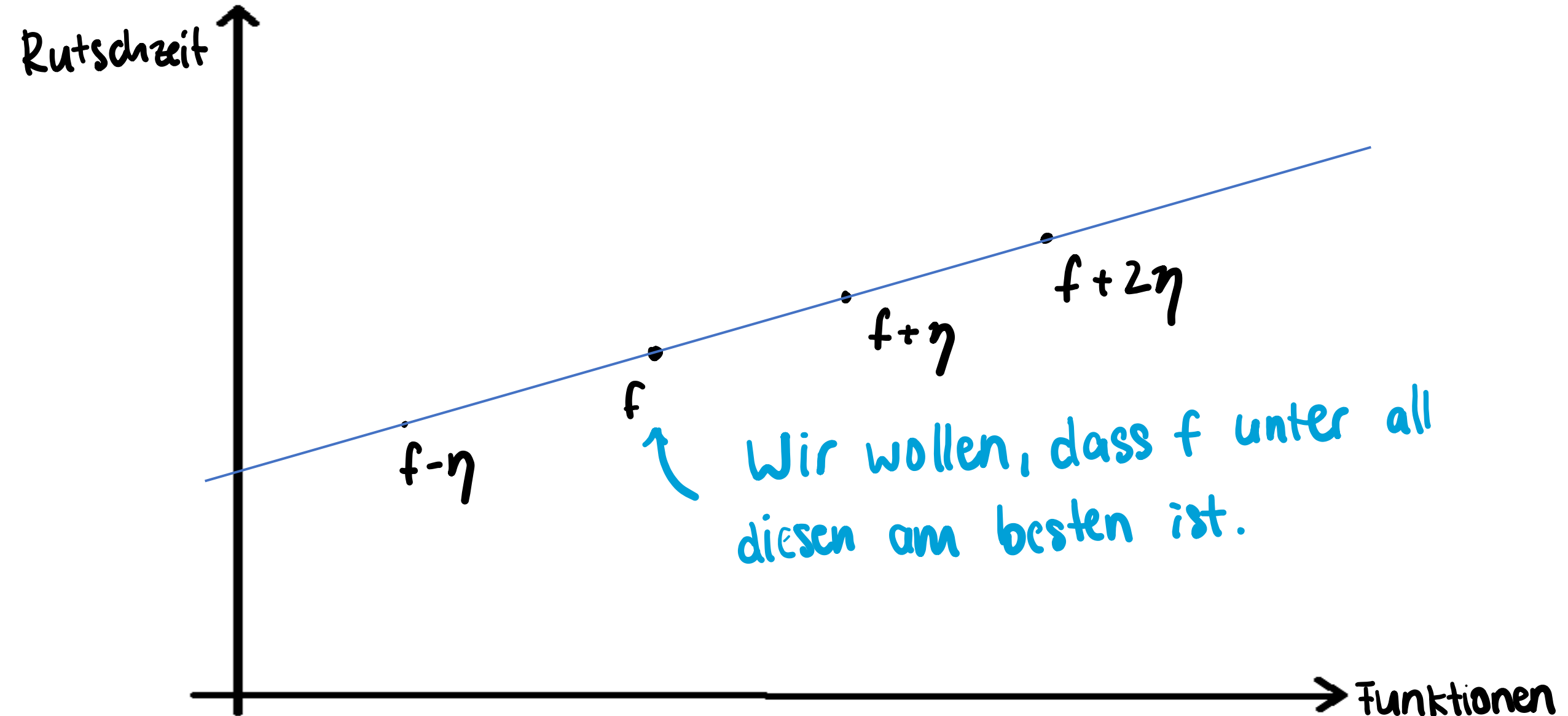


Idee:

Wenn bei einer kleinen Veränderung der Funktion eine bessere Zeit herauskommt, nehmen wir diese als unsere neue optimale Funktion, und zwar so lange, bis wir eine bessere finden. Diesen Vorgang wird so häufig wiederholt, bis man eine perfekte Funktion gefunden hat.

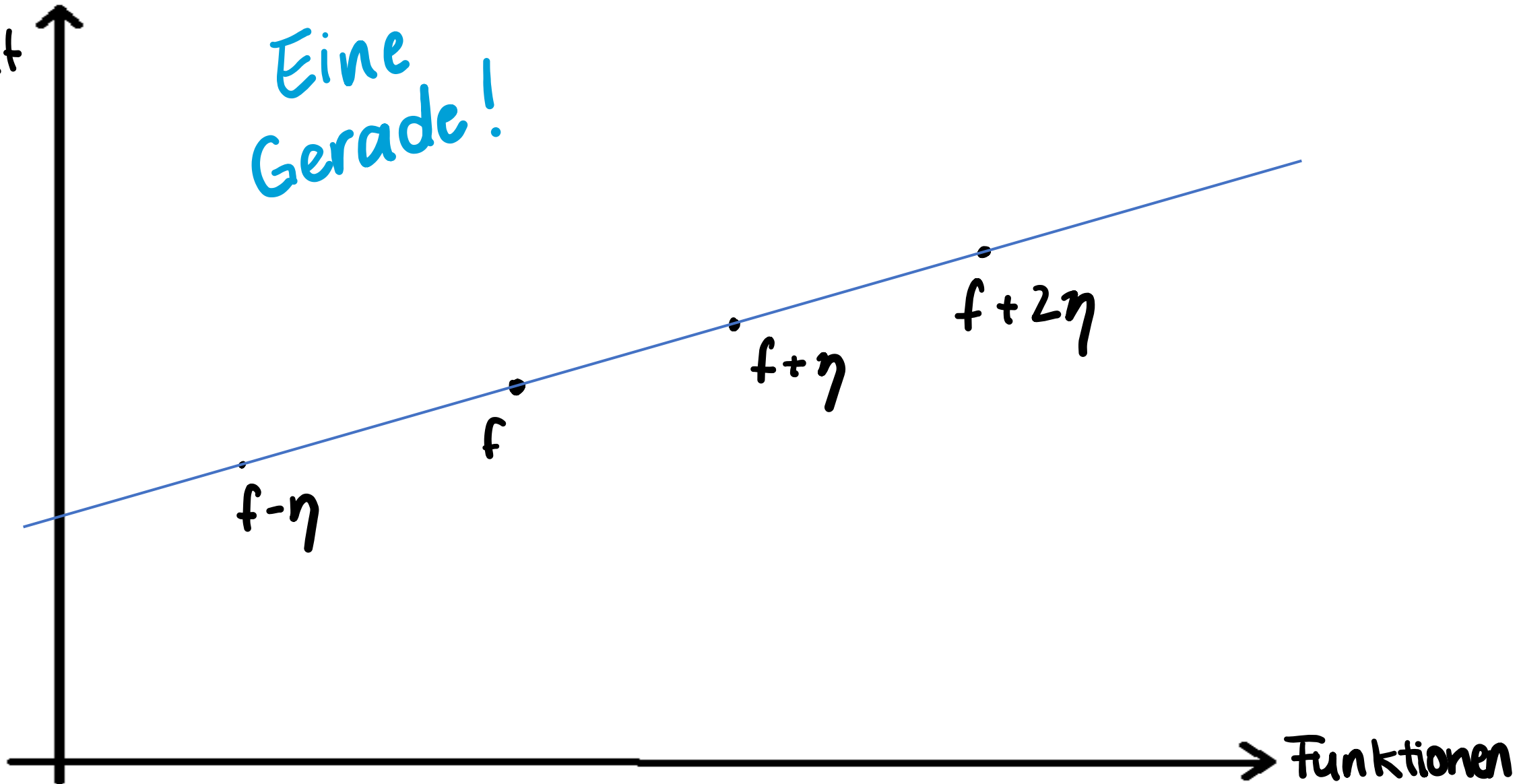
⇒ perfekte Funktion



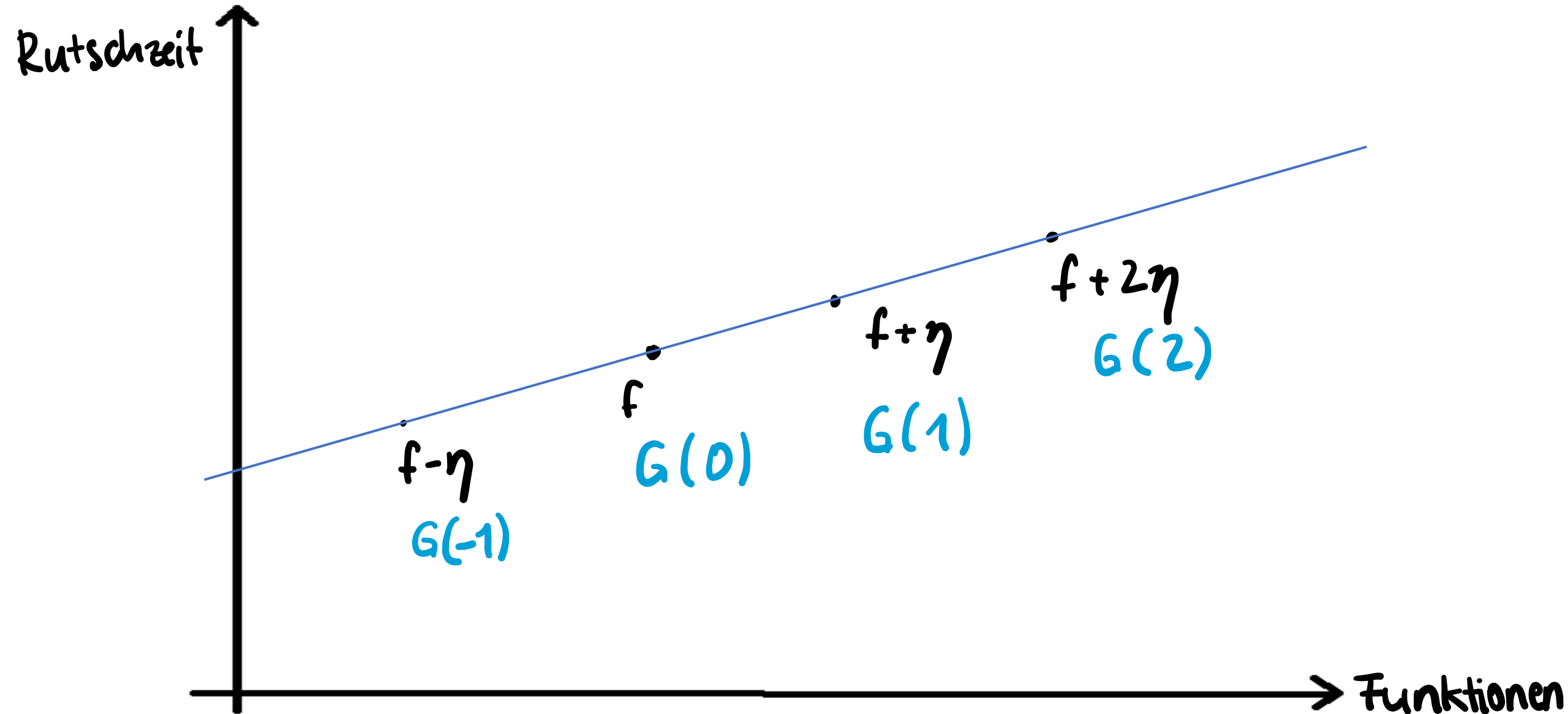


Rutschzeit

Eine  
Gerade!

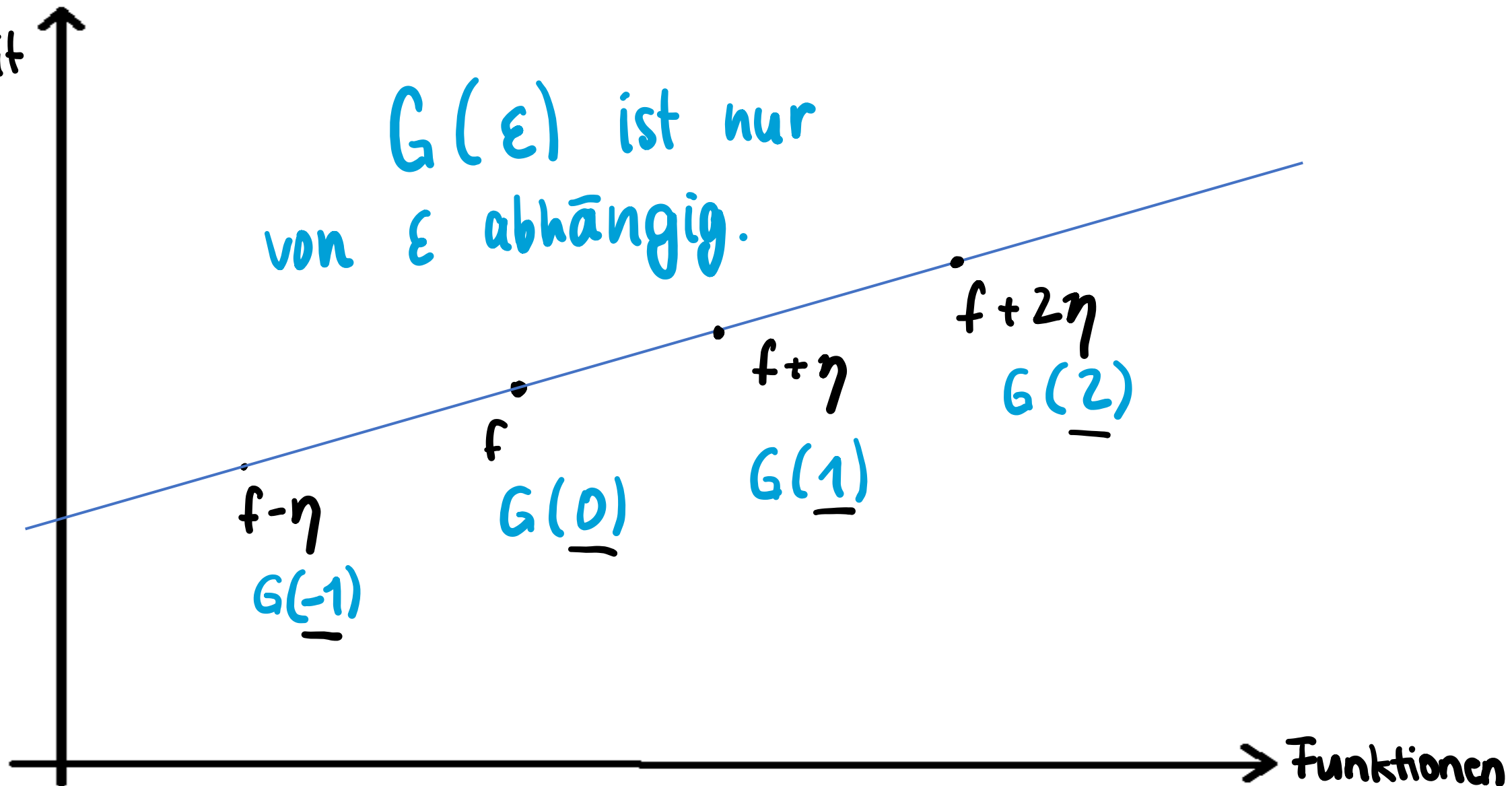


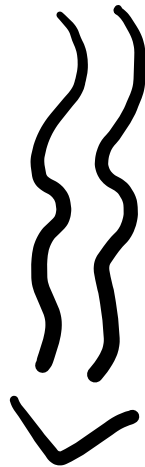




Rutschzeit

$G(\epsilon)$  ist nur  
von  $\epsilon$  abhängig.





$$G'_\eta(0) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \int_{x_0}^{x_1} F(x, f(x) + \varepsilon\eta, f'(x) + \varepsilon\eta') \, dx$$

Ableitung nach  $\varepsilon$ :  
G hängt von  
der Änderung  
 $\varepsilon$  ab

Addition von  $\varepsilon\eta$  bzw.  $\varepsilon\eta'$   
für Veränderung

$$G'_\eta(0) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \int_{x_0}^{x_1} F(x, f(x) + \varepsilon\eta, f'(x) + \varepsilon\eta') dx$$

für perfekte f  
brauchen wir keine  
Veränderung  $\varepsilon$

kommt vom  
Funktional ]



$t = 0$



$$t = ?$$



$$t = ??$$

# Gleitzeit (Mechanik)

$$x'(t) = \sqrt{\frac{2g \cdot (y_0 - f(x(t)))}{1 + f'(x(t))^2}}$$

Inverses,  
Integrieren



$$T = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1 + f'(x)^2}{2g \cdot (y_0 - f(x))}} dx =: F$$



# Gleitzeit (Mechanik)

$$x'(t) = \sqrt{\frac{2g(y_0 - f(x(t)))}{1 + f'(x(t))^2}}$$

Inverses,  
Integrieren

$$T = \int_{x_0}^x \sqrt{\frac{1 + f'(x)^2}{2g \cdot (y_0 - f(x))}} dx =: F$$

← was wir  
in J einsetzen

▽ Differentialgleichung ▽

# Differentialgleichungen

Gleichungen, in denen Ableitungen der gesuchten Variable (Differentialle) im Term vorkommen.

z.B.  $y' = x \cdot y'$



# Euler-Lagrange-Formalismus

Schon wieder helfen uns Ergebnisse der theoretischen Physik.  
Hier ist ein Formalismus für das Vereinfachen von  
Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial f'} = 0$$

hier  $T$  (Zeit)

die Funktion der Rutsche

# Einsetzen von T in Euler-Lagrange

Nach sehr vielen Umformungen:

$$(y_0 - f)(1 + (f')^2) = \text{const.}$$

  
Differentialgleichung

# Lösung

$$\begin{aligned}x &= r \cdot (\varphi - \sin \varphi) \\ y &= r \cdot (-1 + \cos \varphi)\end{aligned}$$

$$r = \frac{2 \cdot y_0}{\pi}$$

↑  
Radius

← hat etwas mit  
Kreisen zu tun

## Equations [\[ edit \]](#)

---

The cycloid through the origin, generated by a circle of radius  $r$  rolling over the  $x$ -axis on the positive side ( $y \geq 0$ ), consists of the points  $(x, y)$ , with

$$\begin{aligned}x &= r(t - \sin t) \\ y &= r(1 - \cos t),\end{aligned}$$

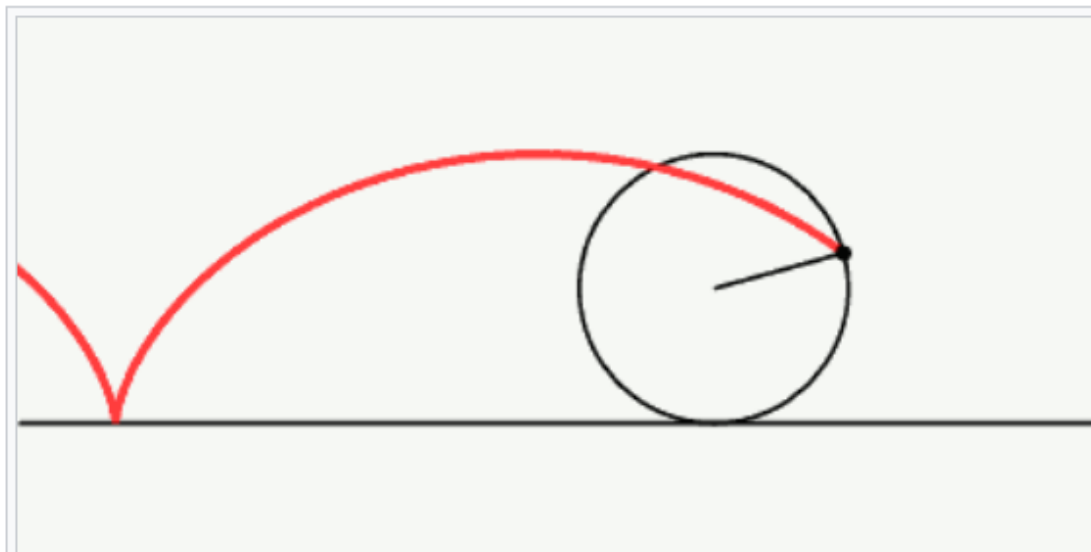
where  $t$  is a real [parameter](#) corresponding to the angle through which the rolling circle has rotated. For given  $t$ , the circle's centre lies at  $(x, y) = (rt, r)$ .

From Wikipedia, the free encyclopedia

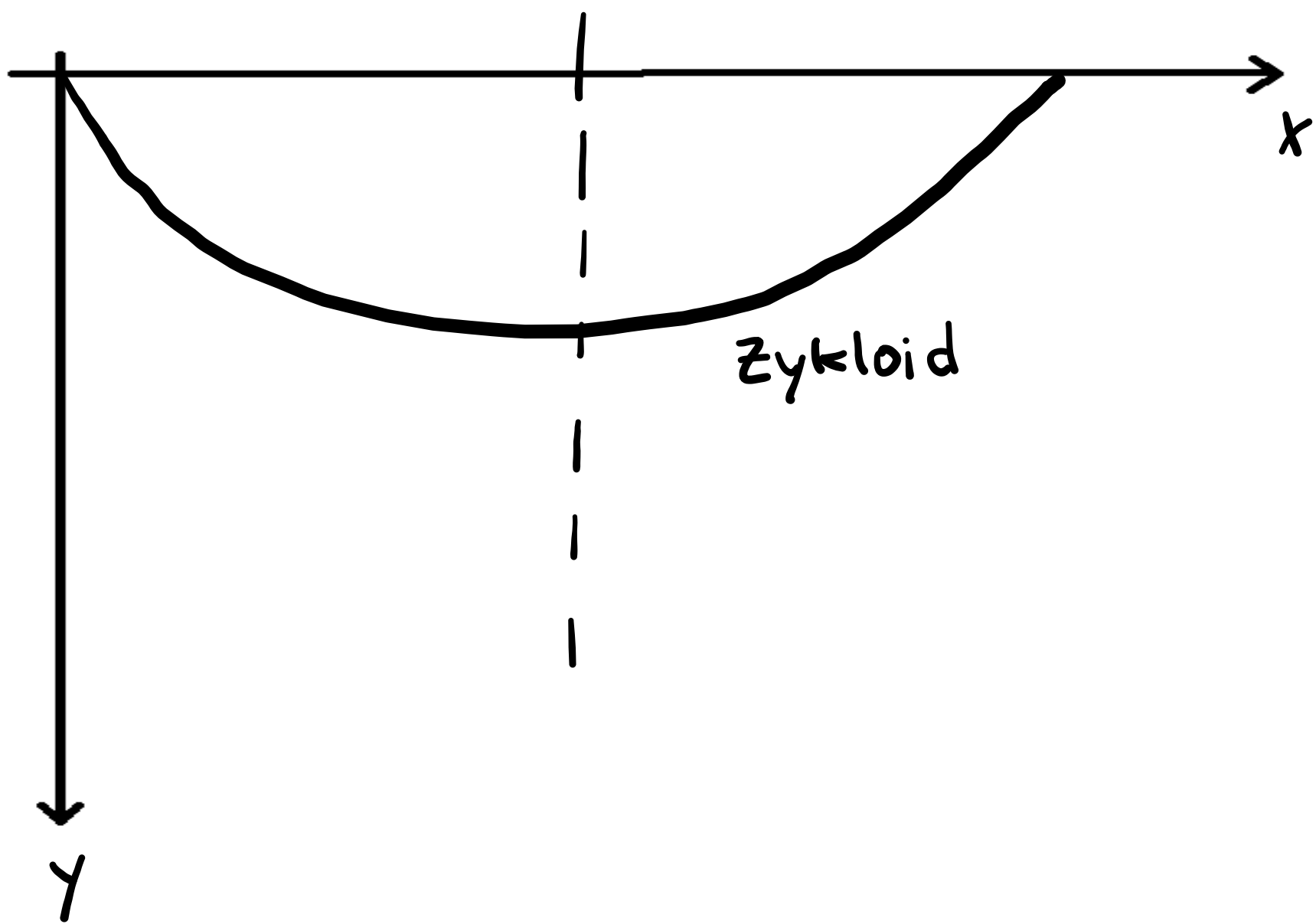
*For other uses, see [Cycloid \(disambiguation\)](#).*

In [geometry](#), a **cycloid** is the [curve](#) traced by a point on a [circle](#) as it [rolls](#) along a [straight line](#) without slipping. A cycloid is a specific form of [trochoid](#) and is an example of a [roulette](#), a curve generated by a curve rolling on another curve.

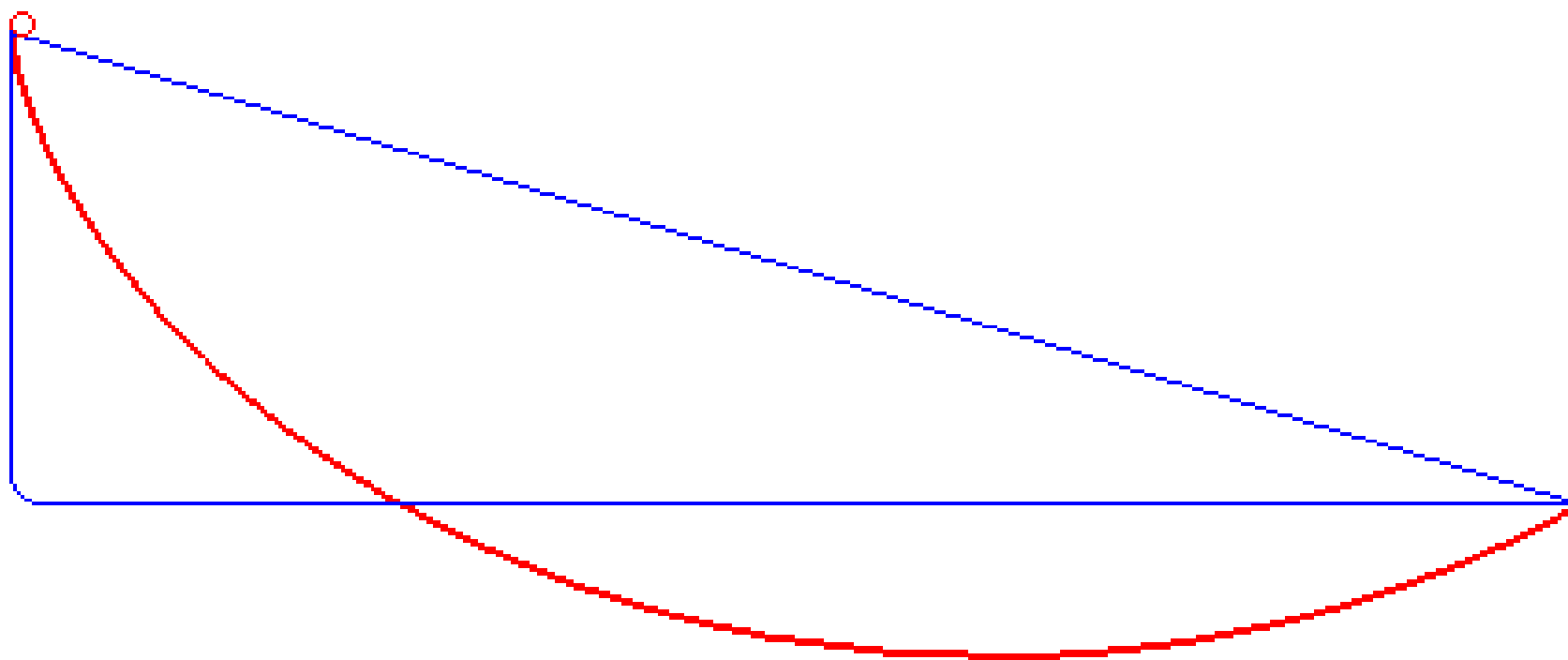
The cycloid, with the [cusps](#) pointing upward, is the curve of fastest descent under uniform [gravity](#) (the [brachistochrone curve](#)). It is also the form of a curve for which the [period](#) of an object in [simple harmonic motion](#) (rolling up and down repetitively) along the curve does not depend on the object's starting position (the [tautochrone curve](#)). In physics, when a charged particle at rest is put under a uniform [electric](#) and [magnetic field](#) perpendicular to one another, the particle's trajectory draws out a cycloid.



A cycloid generated by a rolling circle







- (k) Warum wurden die Pläne der Augsburger Oberbürgermeisterin trotz allem nicht realisiert?
- (i) Man kann sich am Anfang der Rutschbahn nicht hinsetzen.
  - (ii) Rutschen macht Spaß; deshalb sollte es lange dauern.
  - (iii) Die Stadt Augsburg spart, indem sie die Materialkosten minimiert.
  - (iv) Um dafür Sorge zu tragen, daß die Reibungskräfte vernachlässigt werden können, wird zuviel Schmierseife benötigt.

# Weiterführendes

- Seminararbeit und zusätzliches Material online  
⇒github: @august-gaugler
- Formalisierung der Beweisführung in Lean/Agda
- Seminare zu Inhalt und Entstehungsprozess
  - WIP: Uni Augsburg, Zirkel auf dem Mathecamp 2025/26
  - Evtl. Vortrag auf 38c3

