Die Brachistochrone

Eine Einführung in die Variationsrechnung

W-Seminar Mathematische Optimierung

A. Gaugler

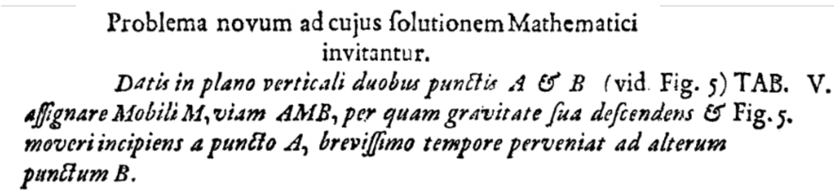
08.02.2024

Zusammenfassung

Gesucht wird die schnellstmögliche Rutschbahn im euklidischen $\mathbb{R}^2$. Dabei wenden wir Verfahren aus der Variationsrechnung und den Euler-Lagrange-Formalismus an. Es stellt sich heraus, dass eine zeitlich optimale Kurve einen Teil eines *Zykloiden* umfasst, was ein überraschend greifbares Ergebnis für den relativ hohen Abstraktionsgrad ist.

1 Das Problem

1696 ist die Frage nach einem Graphen, der bezüglich der Rutschzeit optimiert ist, genannt das *Brachistochronen-Problem*, zum ersten Mal von Johann Bernoulli I. gestellt worden. Das Brachistochronen-Problem ist das Leuchtturmproblem eines zu dem damaligen Zeitpunkt ganz neu entstehenden Zweiges der Mathematik: die Variationsrechnung.


Problema novum ad cujus solutionem Mathematici invitantur.

Datis in plano verticali duobus punctis A & B (vid. Fig. 5) TAB. V. *assignare Mobili M, viam AMB, per quam gravitate sua descendens &* Fig. 5. *moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B.*

Abbildung 1: Ursprüngliche Fragestellung.

Hier wird nach einer Funktion gefragt, von der nichts bekannt ist außer ihr Start- und Endpunkt. Solche Probleme werden angegangen, indem man eine Funktion überall ein wenig verschiebt, also variiert, und die Veränderung der gesuchten Variablen betrachtet. Daraus können dann Schlüsse auf die tatsächliche Funktion geschlossen werden.

2 Herangehensweise bei dem Brachistochronenproblem

1. **Einführung von Funktionalen.** Funktionen mit anderen Funktionen als Input, und wie diese dargestellt werden können.
2. **Variation einer Funktion.** Durch kleine Änderungen im Graphen und Anpassung beim Finden einer besseren Funktion kann Schritt für Schritt eine optimale Funktion gefunden werden.
3. **Familien an Funktionen.** Überprüfen, dass die optimale Funktion für jede mögliche Änderung auch tatsächlich optimal ist.
4. **Gleitzeit.** Beschreibung der Rutschdauer für ein Stück Graph mit dessen zugehöriger Funktionsvorschrift und deren Einsetzung in die davor gefundene Gleichung.
5. **Euler-Lagrange-Formalismus.** Vereinfachung dieser Gleichung durch ein Verfahren für Differentialgleichungen.
6. **Auflösung** Man erhält ein Gleichungssystem, das einen Zykloiden bildet. Somit ist die schnellstmögliche Rutsche gefunden.

3 Lösung

Beschreibung des Gleichungssystems mit Bild von einem Zykloiden Schlussendlich kommt man auf ein Gleichungssystem der Form:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot (\varphi - \sin\varphi); \\ y &= r \cdot (-1 + \cos\varphi); \\ r &= \frac{2 \cdot y_0}{\pi}. \end{aligned}$$

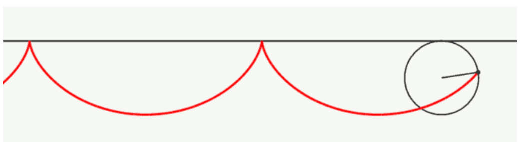


Abbildung 2: Graph der Lösungsfunktion: ein Zykloid. Die Lösung ist ein Teil eines Bogens.