Die Brachistochrone: Eine Einführung in die Variationsrechung

W-Seminar Mathematische Optimierung

2022-24

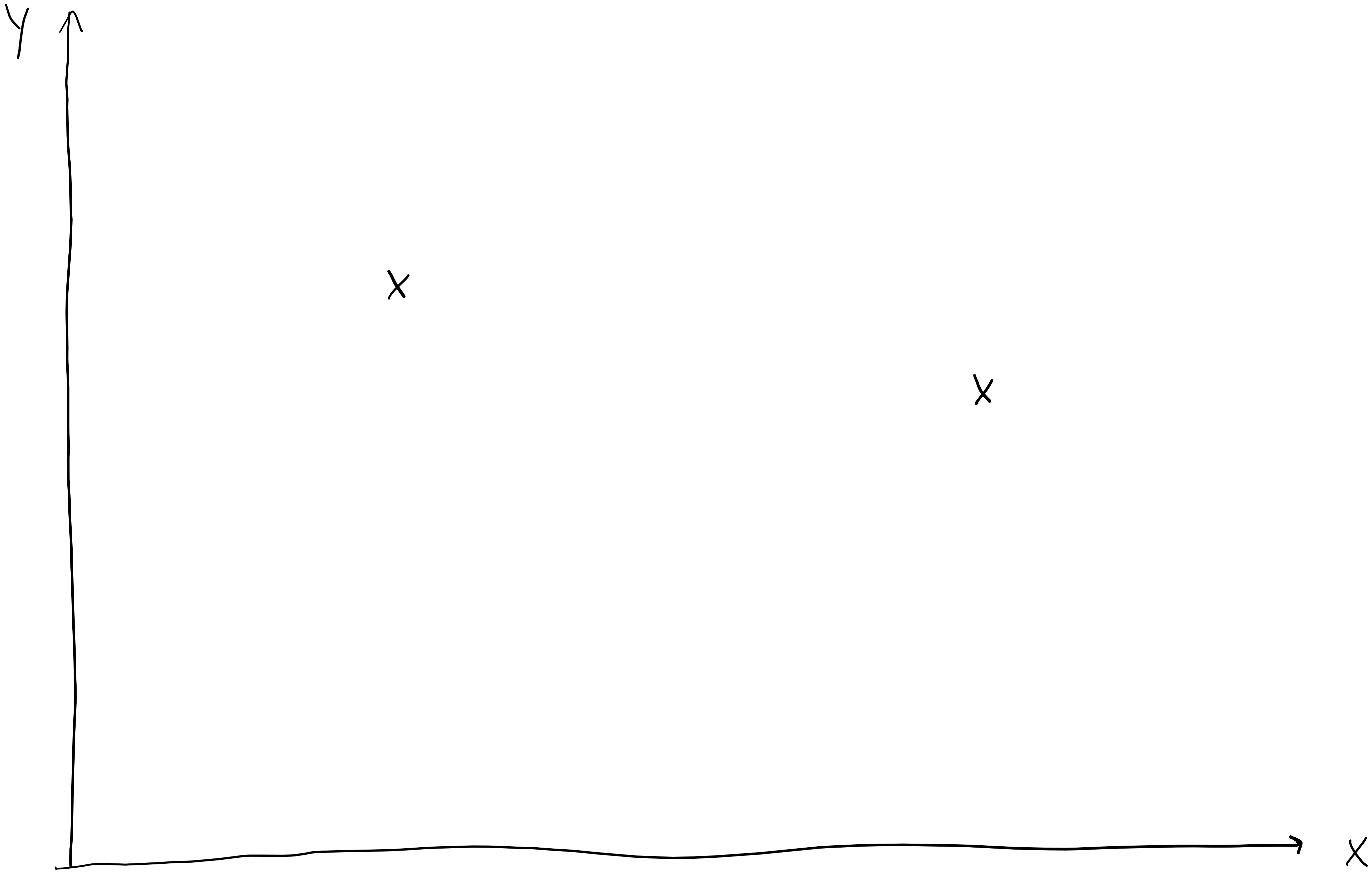
Anna Gaugler

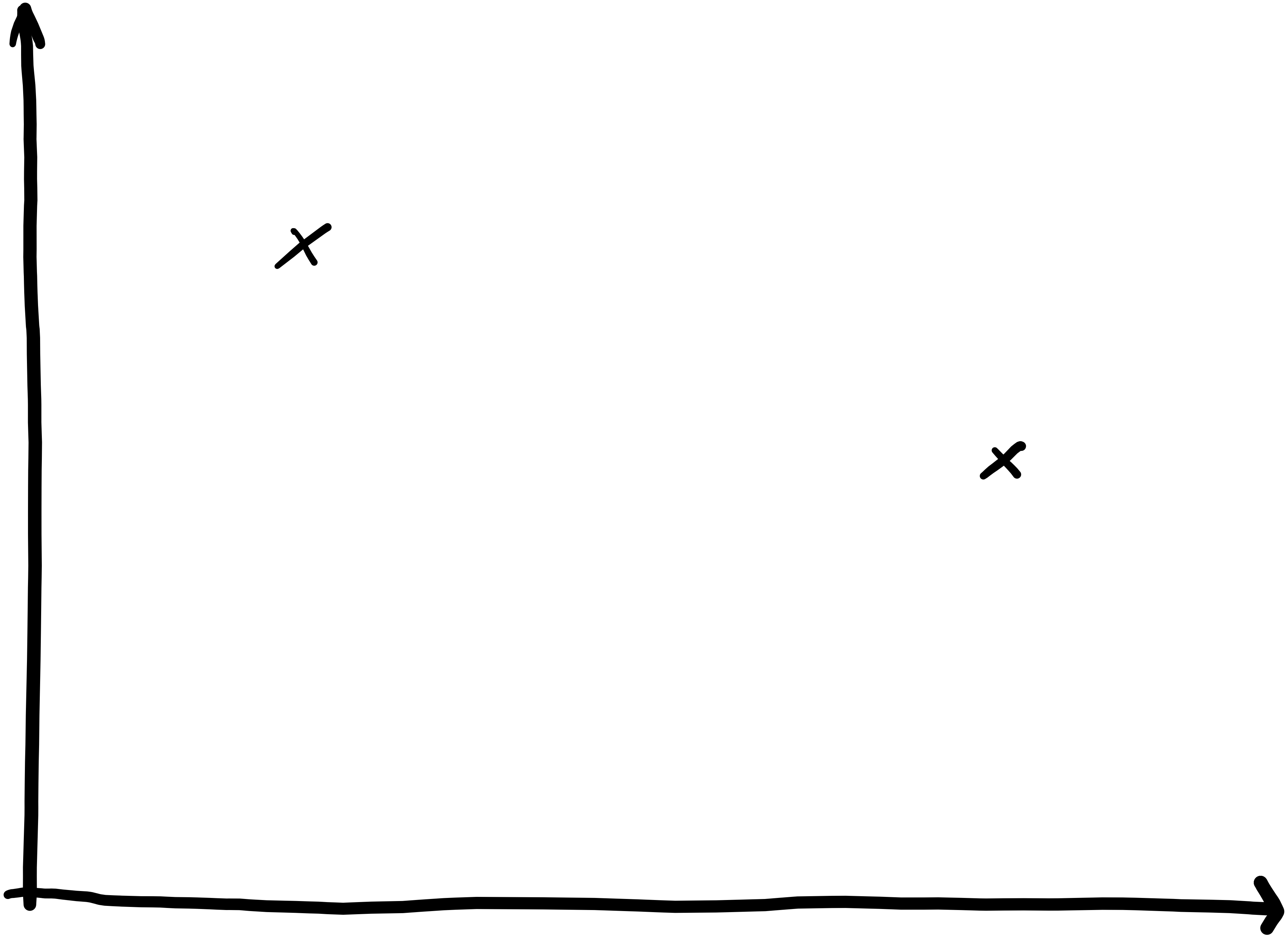
Weihnachtsübung zur Analysis III

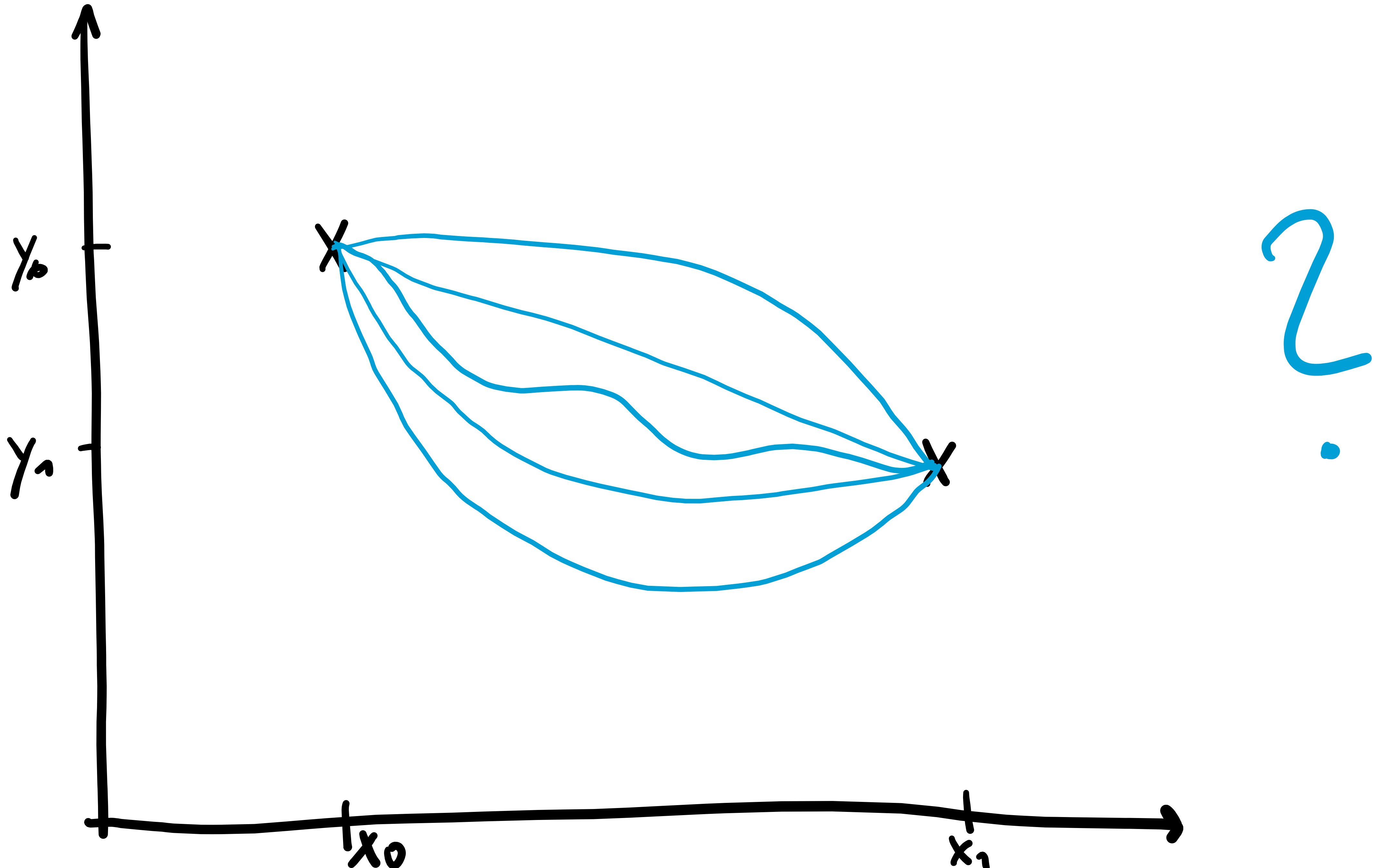
Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Lukas Stoll, M. Sc.

06. Dezember 2022 – 12. Januar 2023 *

294. Es muß wohl kurz vor Weihnachten und nach einem sehr langen Arbeitstag gewesen sein, als die Oberbürgermeisterin der Stadt Augsburg beschloß: „Augsburg braucht ein neues Schwimmbad! Und zwar soll es die schnellste Rutschbahn haben, die möglich ist!“


Y
X





y_0
y_1
x_0
x_1
?

wir wollen alle möglichen Rutschen $f: [x_0, x_1] \to [y_0, y_1]$ betrachten, deren genaue Vorschrift wir noch nicht kennen

Wir sind gewöhnt:

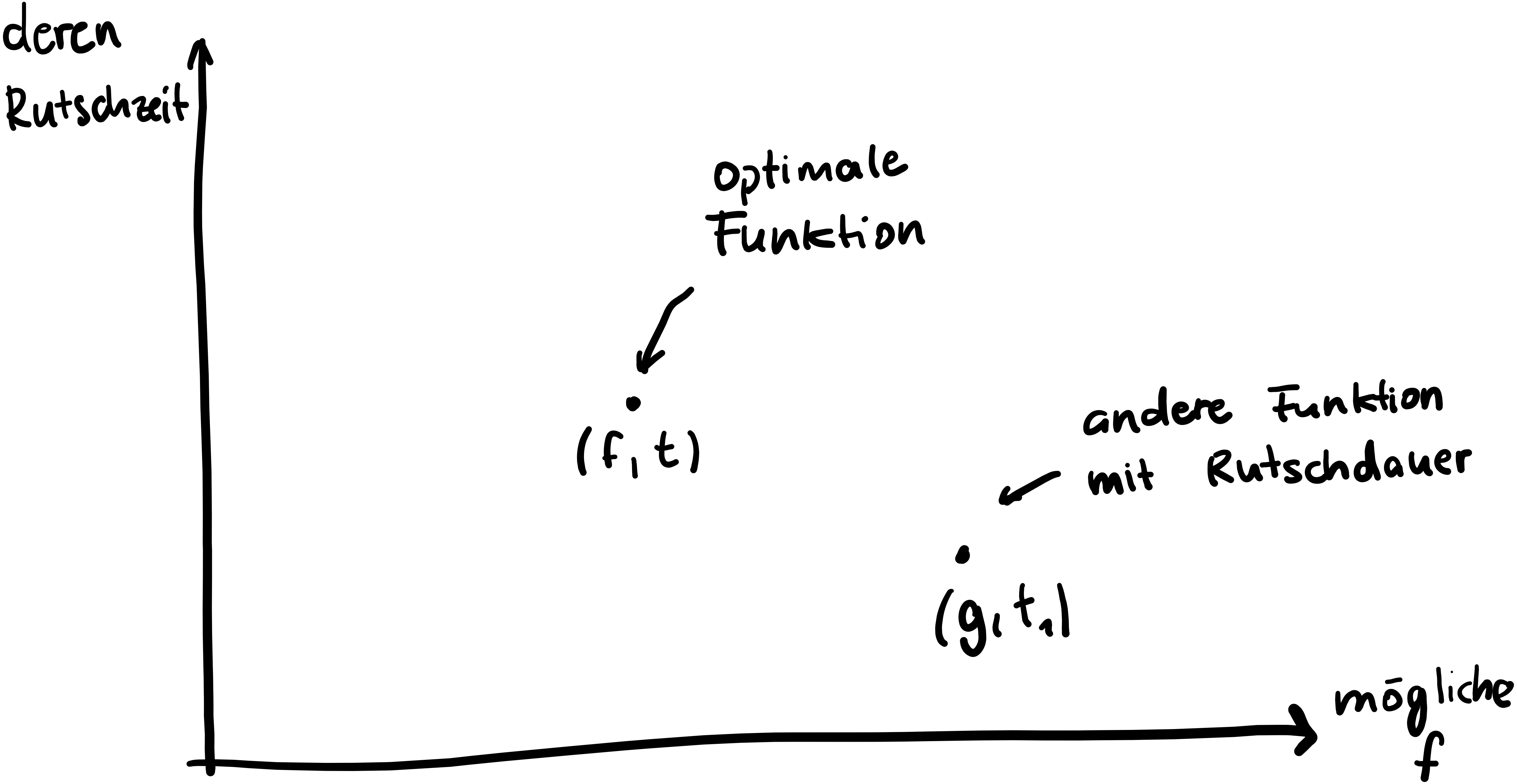
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2$$

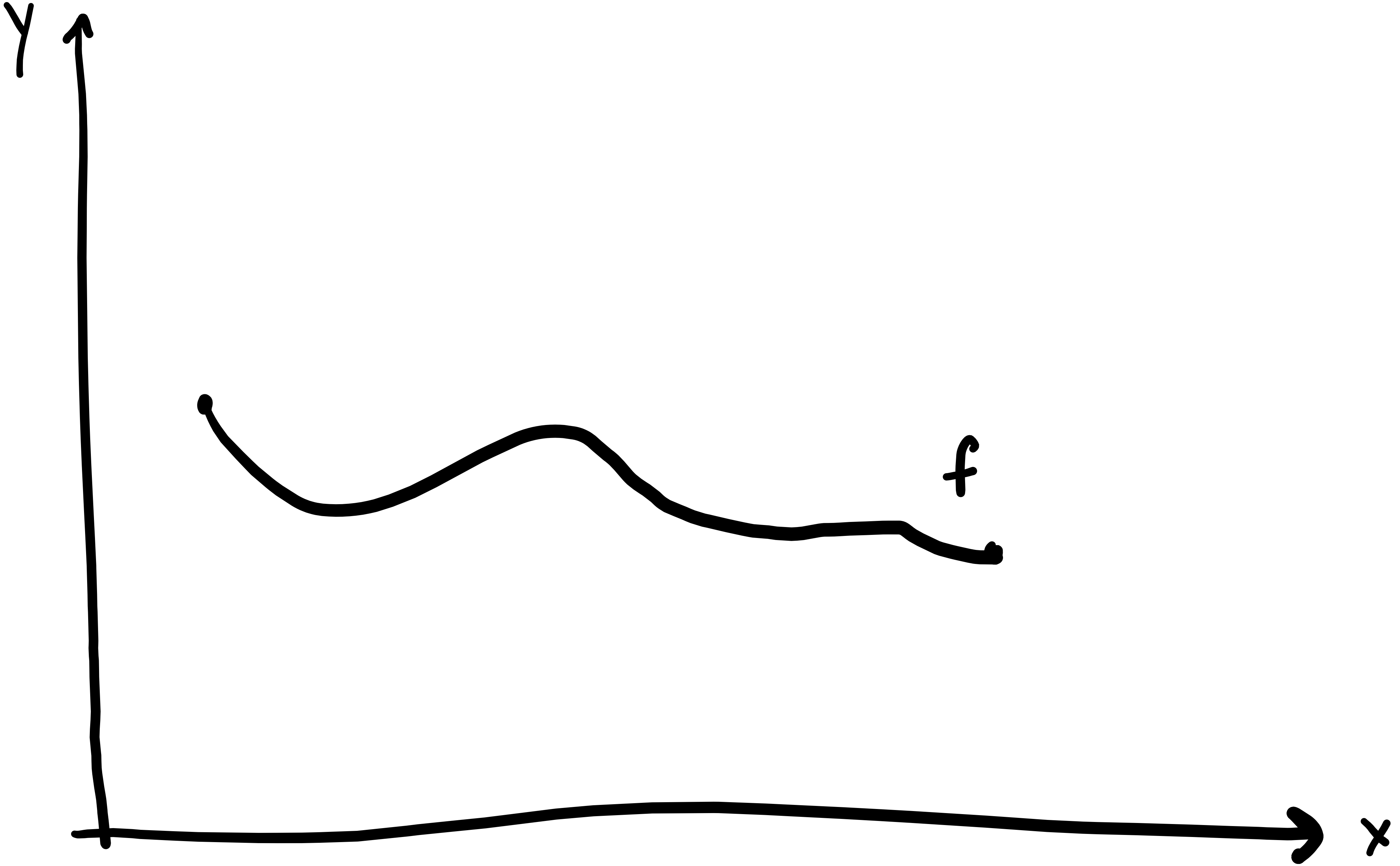
"Funktion von Funktionen"

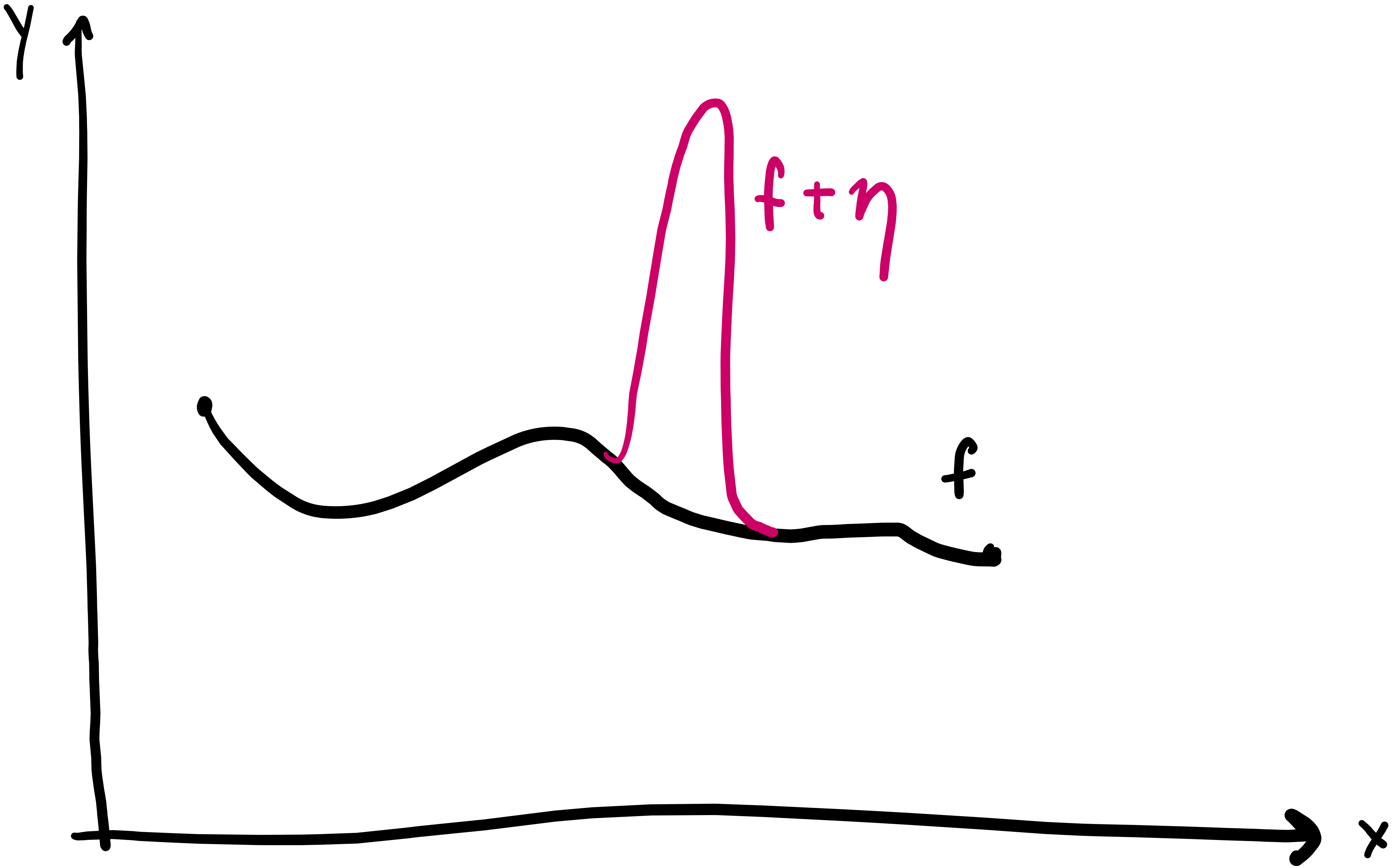
Funktional

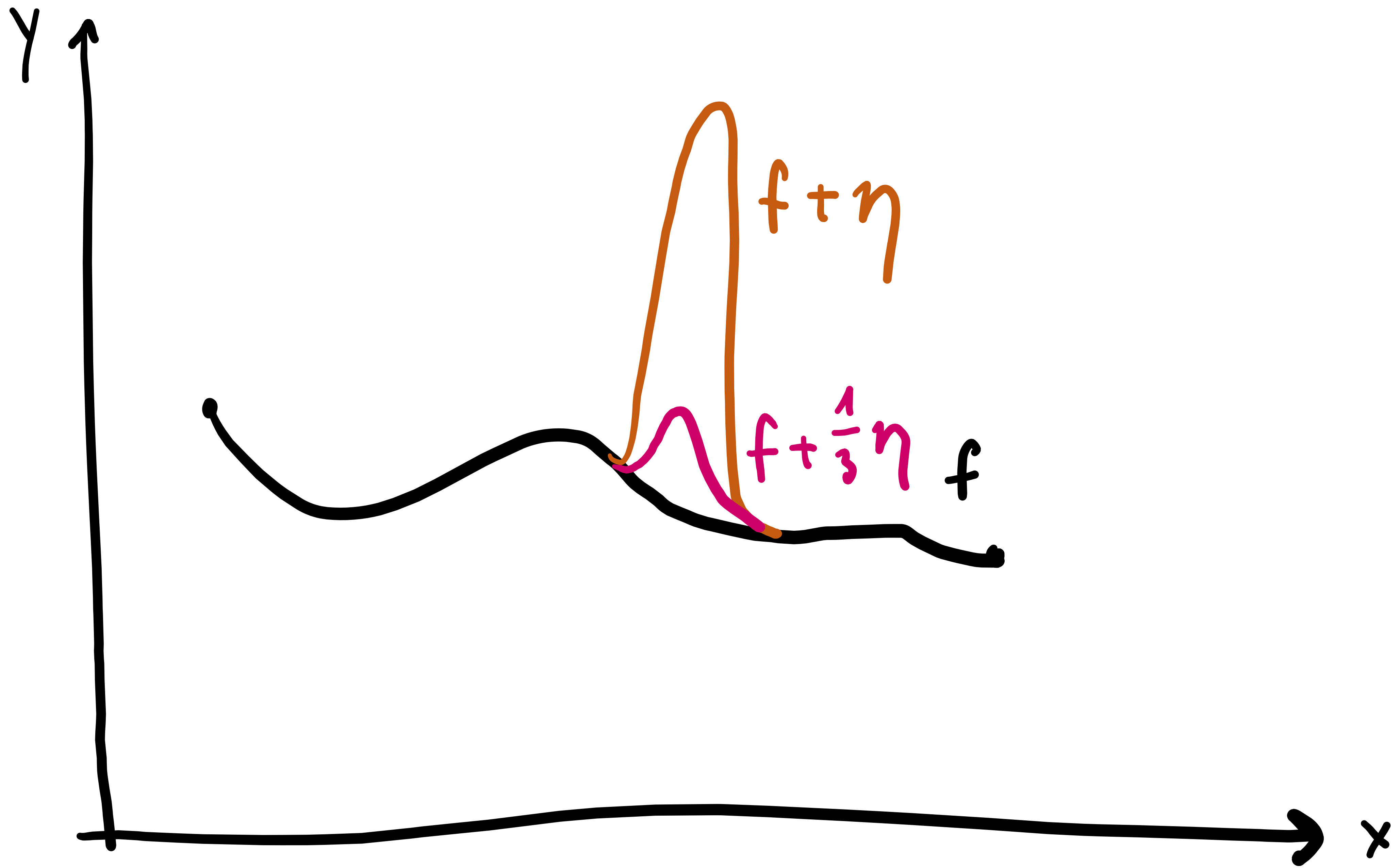
$$J : \{\text{Funktionen}\} \to \mathbb{R}$$

$$f \mapsto \underbrace{\int_{x_0}^{x_1} F(x, f(x), f'(x))}_{\text{Ausrechnen der Rutschdauer}} \overset{?}{[dx]}^{?}$$

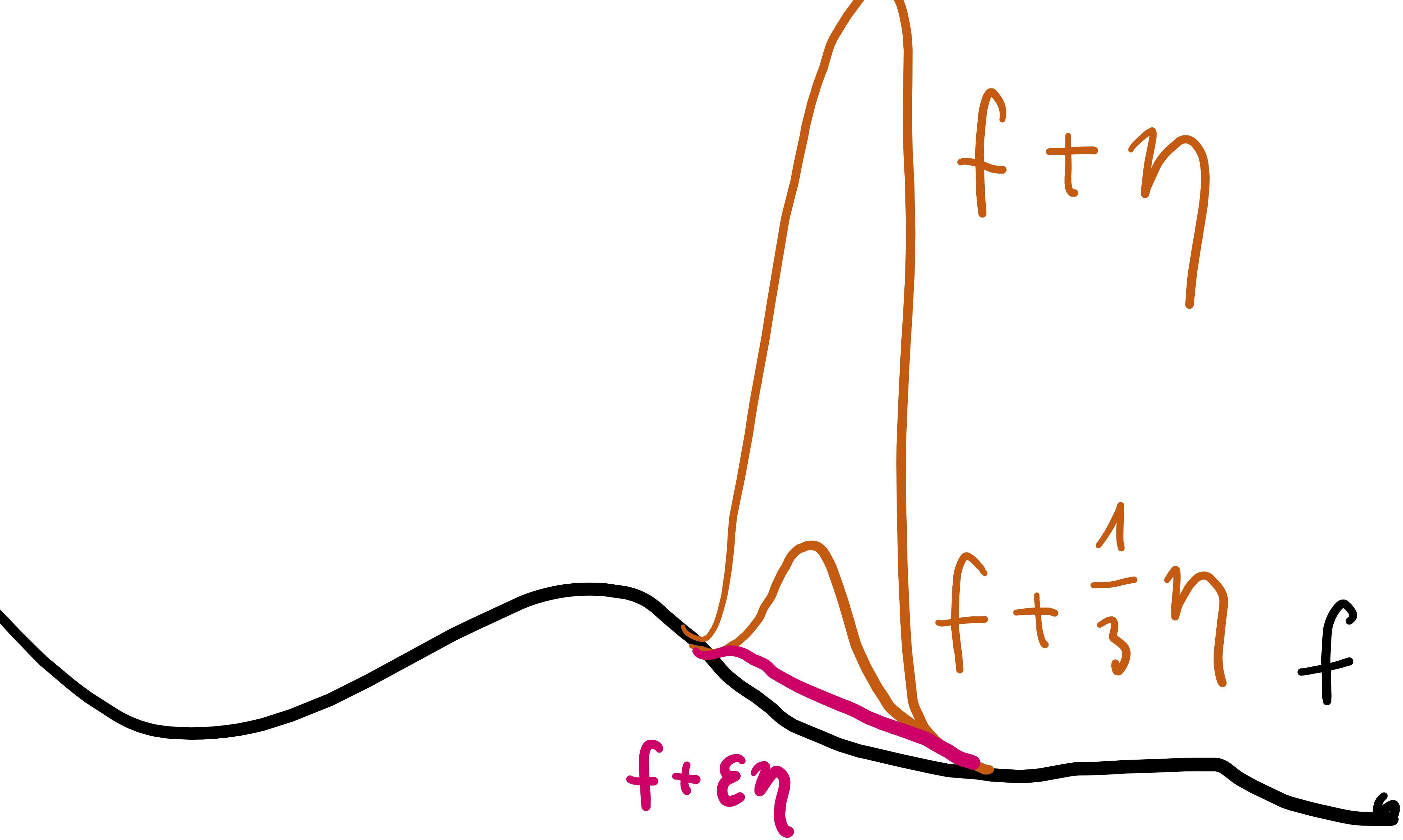

deren Rutschzeit
Optimale Funktion
(f, t)
andere Funktion mit Rutschdauer
(g, t_1)
mögliche f


y
x
f

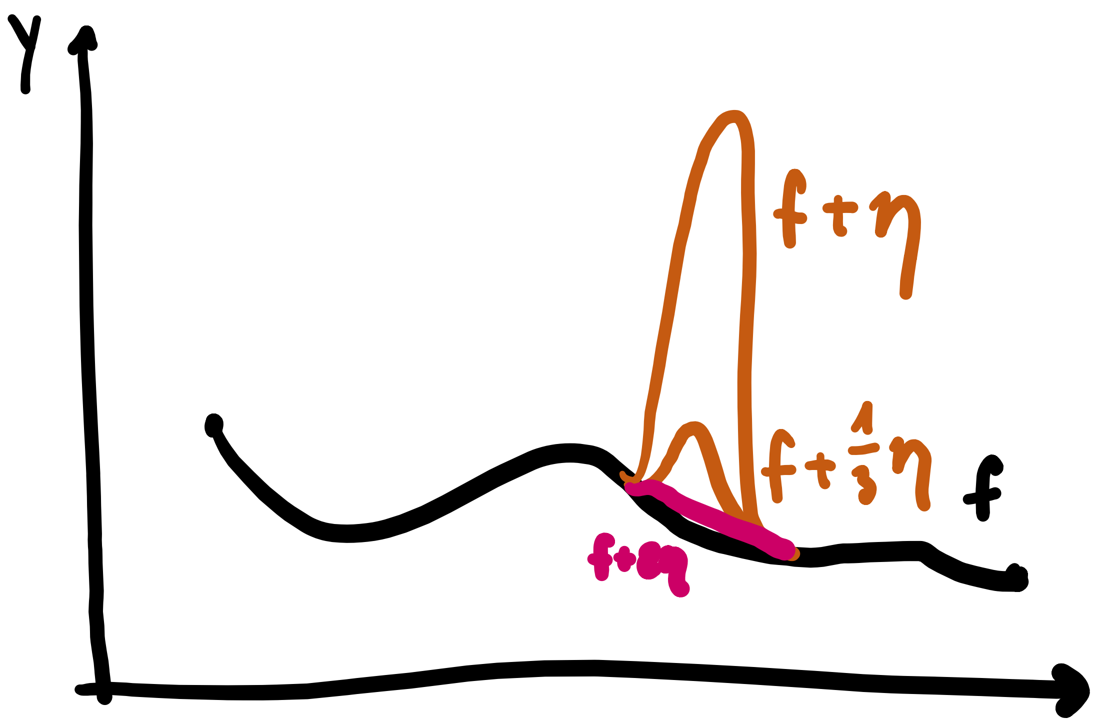

Y
X
f
f+η



Y
f + η
f + 1/3 η
f
x



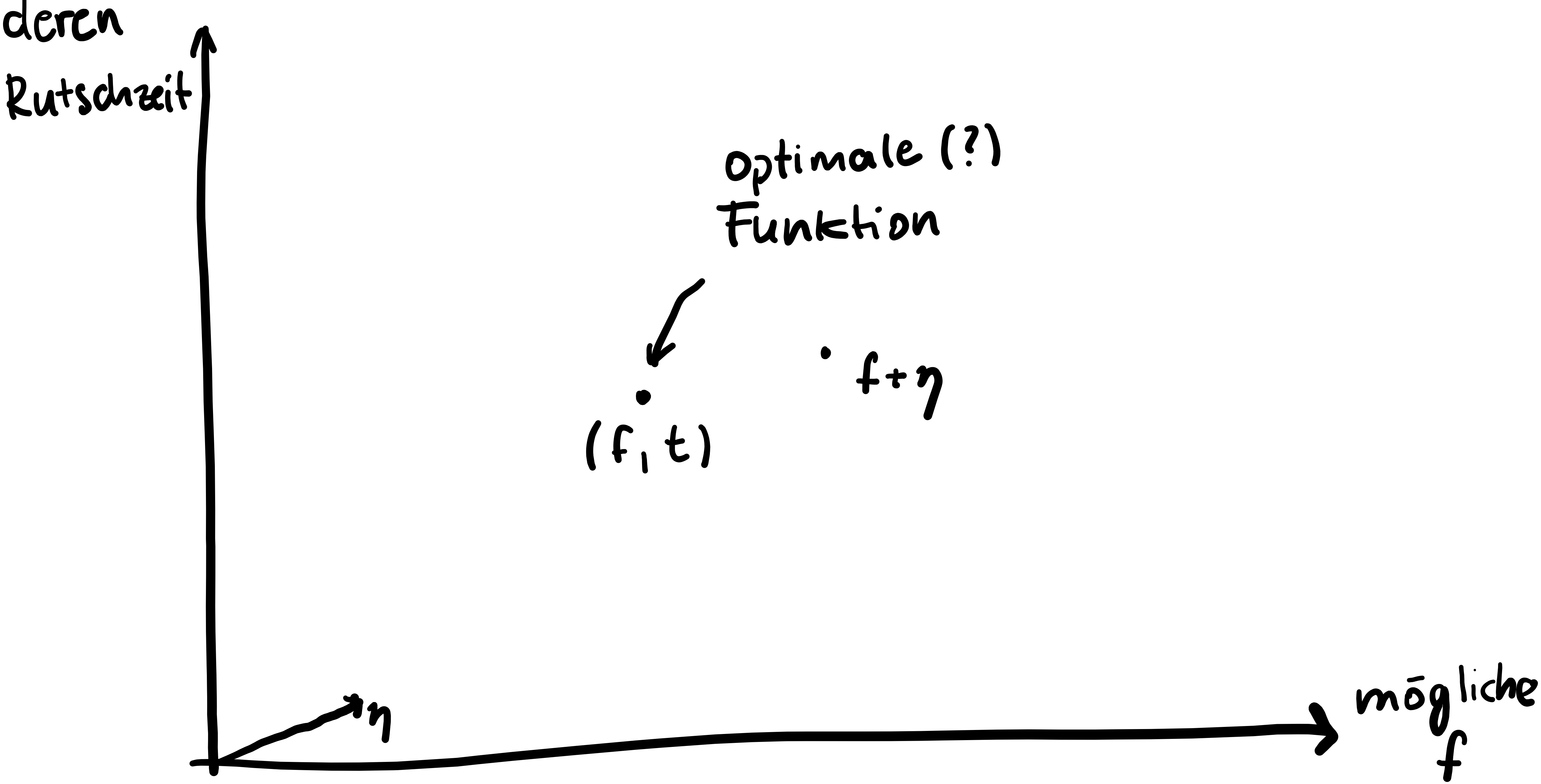
$f+\eta$
$f+\frac{1}{3}\eta$
f
$f+\varepsilon\eta$

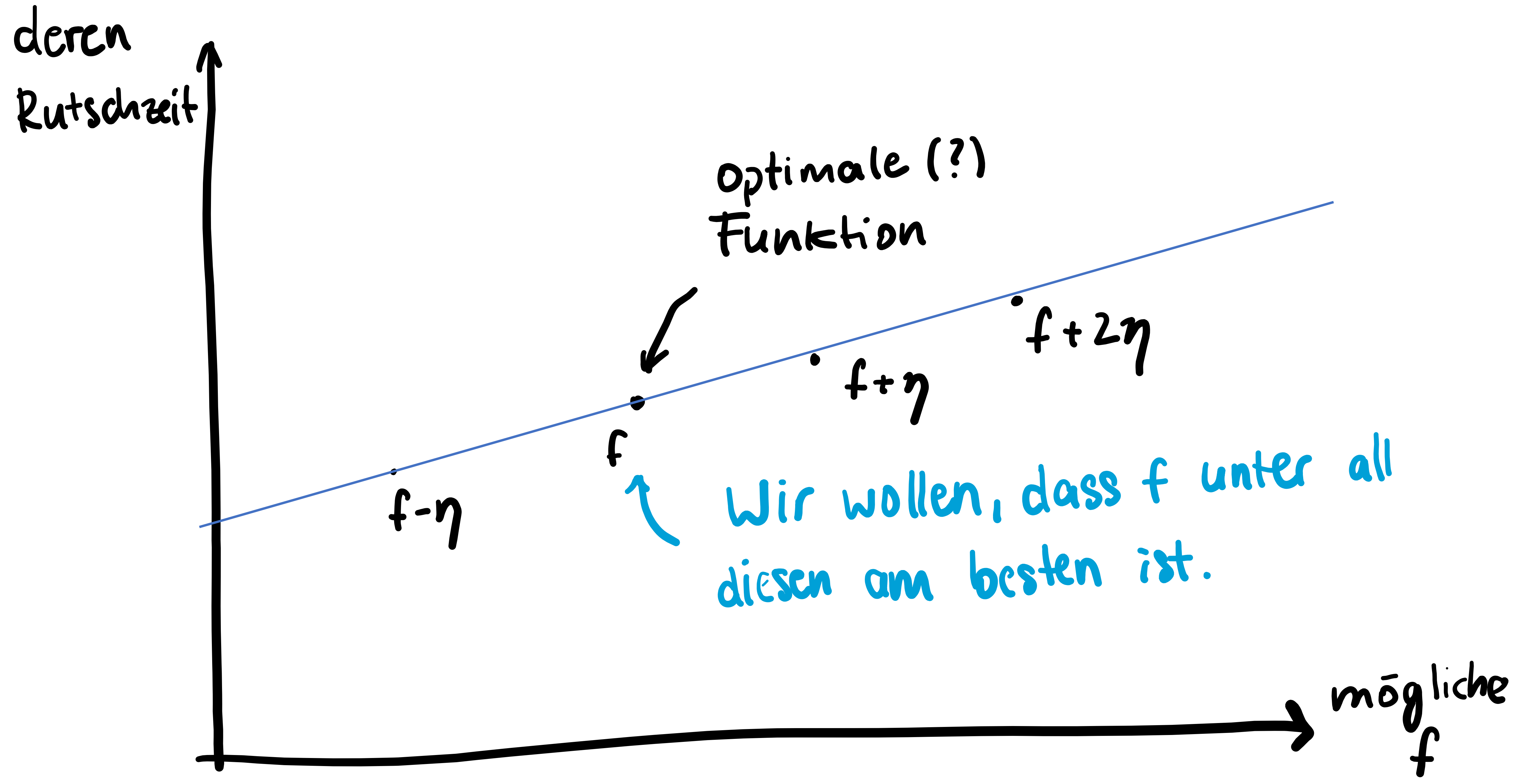


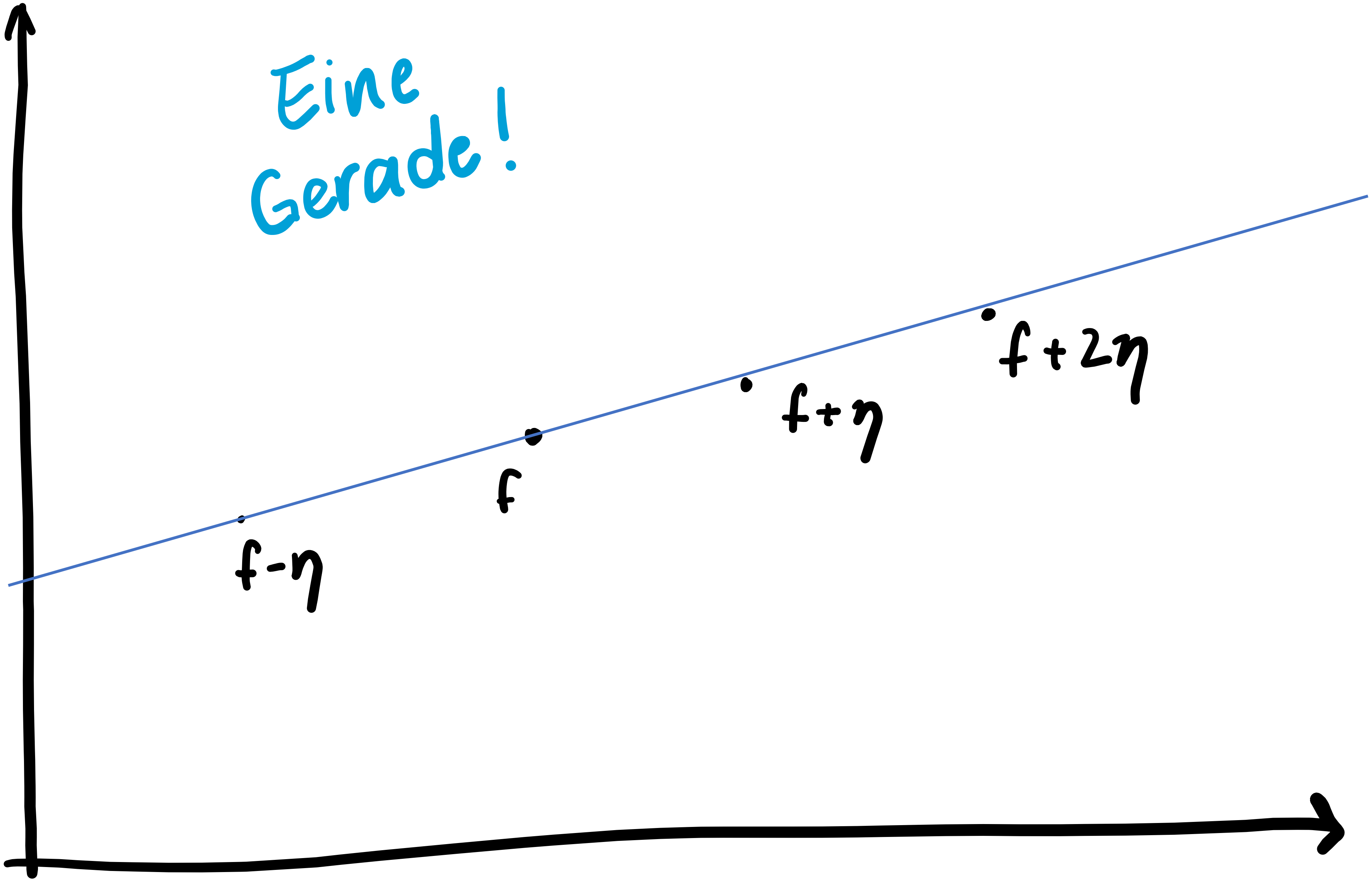
Idee:

Wenn bei einer kleinen Veränderung der Funktion eine bessere Zeit herauskommt, ist dies unsere neue 'optimale' Funktion – bis wir eine bessere finden.

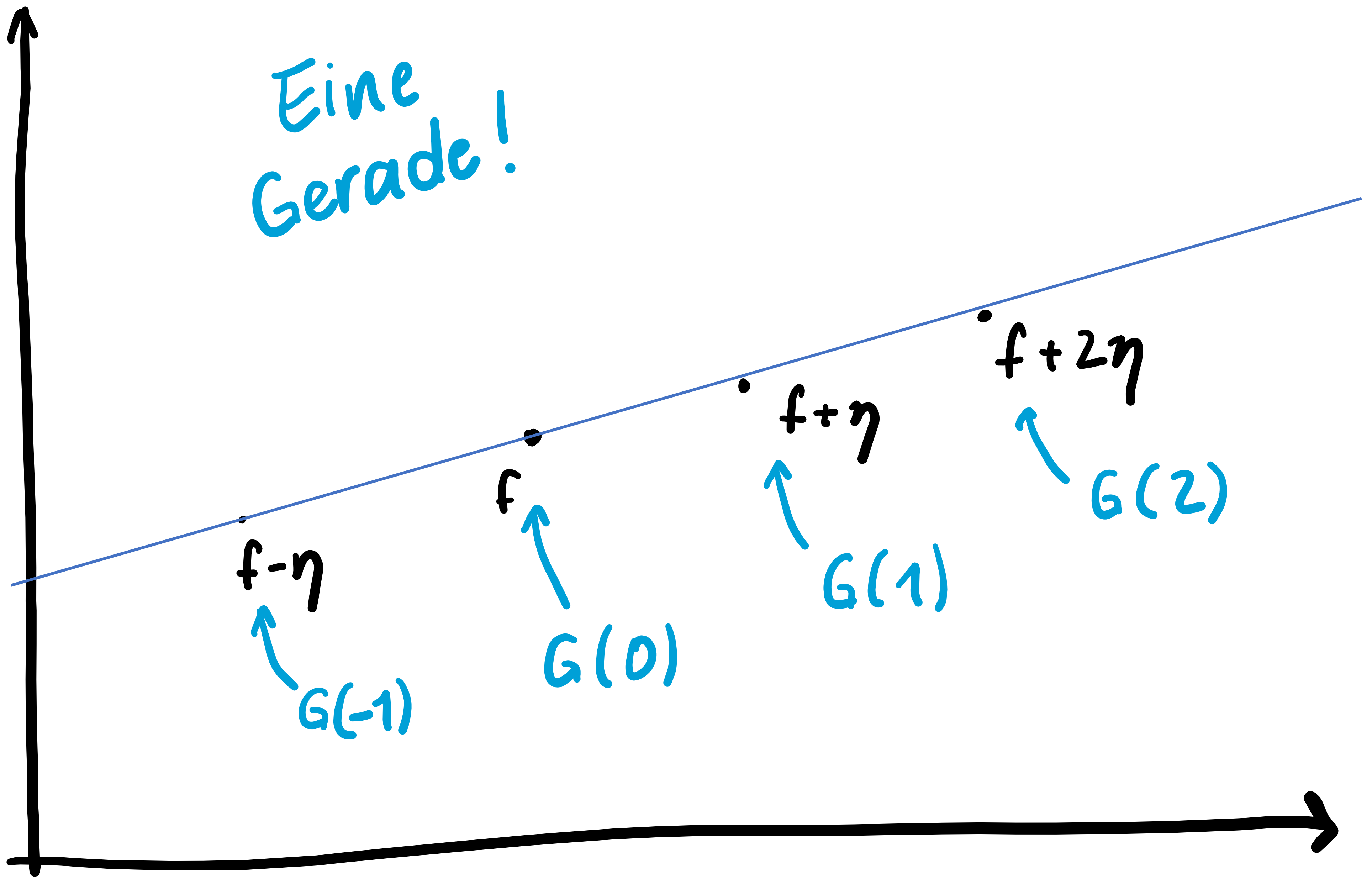
⇒ Optimales f!

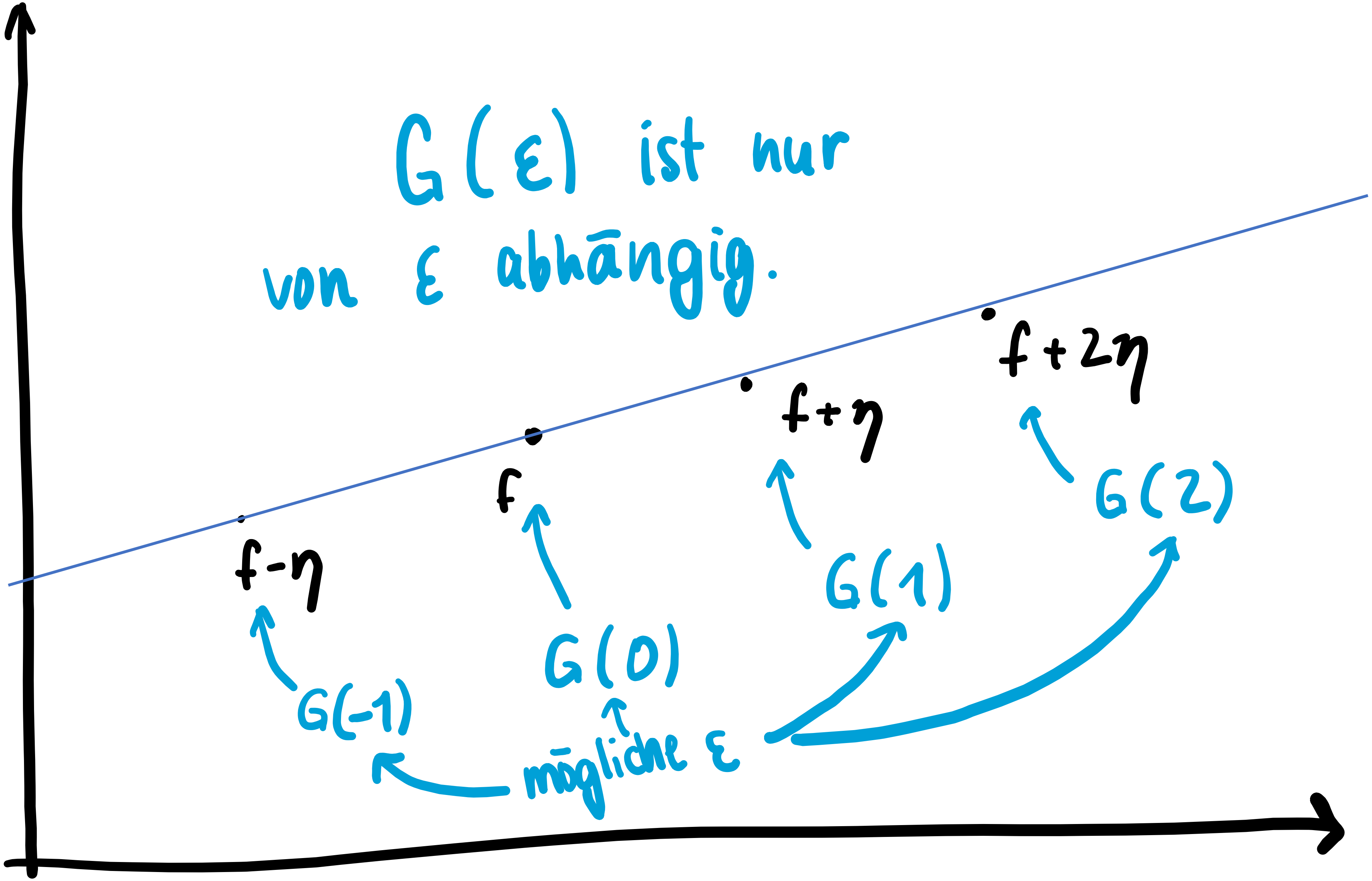

deren
Rutschzeit
Optimale (?)
Funktion
(f, t)
$f+\eta$
η
mögliche
f


deren Rutschzeit
Optimale (?) Funktion
f+2η
f+η
f
f-η
Wir wollen, dass f unter all diesen am besten ist.
mögliche f



Eine Gerade!
$f-\eta$
f
$f+\eta$
$f+2\eta$


Eine Gerade!
f-η
f
f+η
f+2η
G(-1)
G(0)
G(1)
G(2)


G(ε) ist nur von ε abhängig.
f+2η
f+η
f
f-η
G(2)
G(1)
G(0)
G(-1)
mögliche ε

$$G'_{\eta}(0) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \int_{x_0}^{x_1} F(x, f(x) + \varepsilon\eta, f'(x) + \varepsilon\eta')\,\mathrm{d}x$$

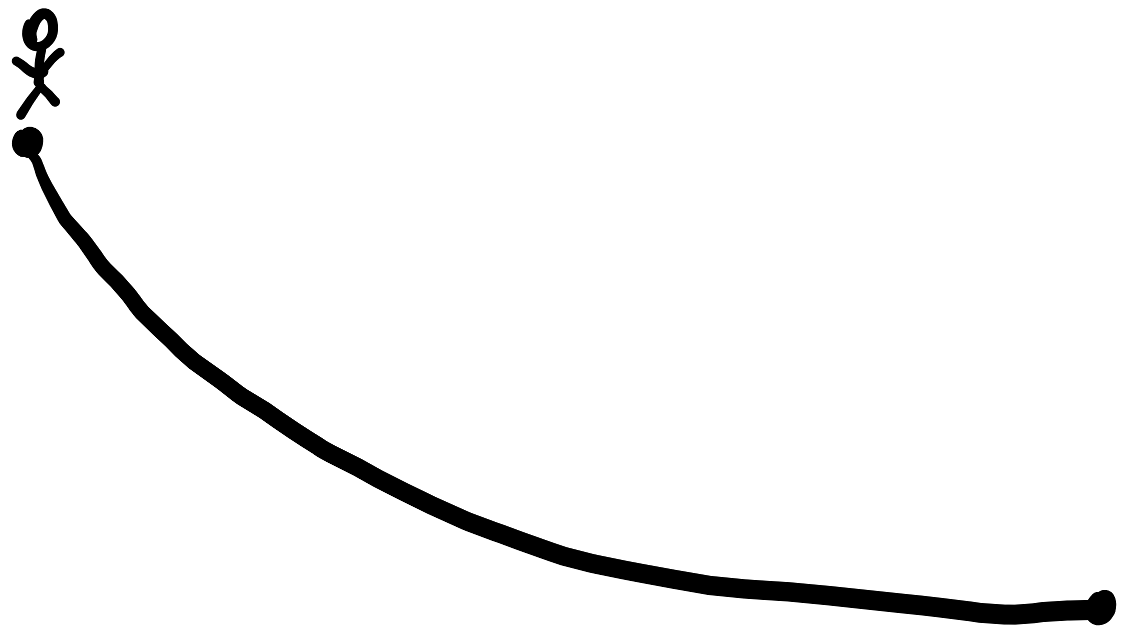
Ableitung nach ε:

G hängt von der Änderung ε ab

$$G'_\eta(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \int_{x_0}^{x_1} F\big(x, \overbrace{f(x) + \varepsilon\eta}^{\text{Addition von } \varepsilon\eta \text{ auf die Funktion}}, \underbrace{f'(x) + \varepsilon\eta'}_{\text{Addition von } \varepsilon\eta' \text{ auf deren Ableitung}}\big)\,\mathrm{d}x$$

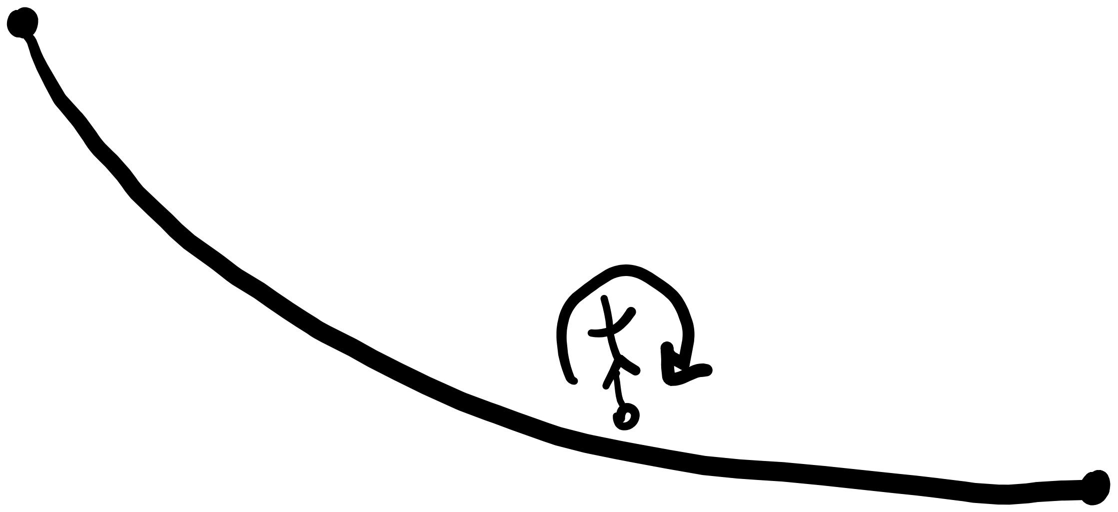
für perfektes f ist die notwendige Veränderung gar keine, $\varepsilon = 0$

kommt vom Funktional



$t = 0$

$t = ?$



$t = ?$

Gleitzeit. (Mechanik)

$$x'(t) = \sqrt{\frac{2g(y_0 - f(x(t))}{1 + f'(x(t))^2}}$$

$$\Rightarrow \quad t'(x) = \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{x'(t)} = \sqrt{\frac{1 + f'(x(t))^2}{2g(y_0 - f(x(t))}}$$

Durch Integration:

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1 + f'(x)^2}{2g \cdot (y_0 - f(x))}} .$$

Das ist unser neues F aus dem Funktional: T gibt uns eine Zahl für jede Rutschenform (jedes f).

Theoretische Physik

- Euler-Lagrange-Formulismus fürs Vereinfachen von Differentialgleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial f} = \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial f'}.$$

Setzen wir T in Euler-Lagrange ein:

* nach sehr viel Vereinfachen *

$$(y_0 - f)(1 + (f')^2) = \text{const.}$$

Das ist eine Differentialgleichung.

Ihre Lösungen zu finden ist nicht trivial.

Aber ich habe sie gefunden.

$$x = r \cdot (\varphi - \sin \varphi).$$

$$y = r \cdot (-1 + \cos \varphi).$$

$$r = \frac{2 \cdot y_0}{\pi}$$

Cycloid

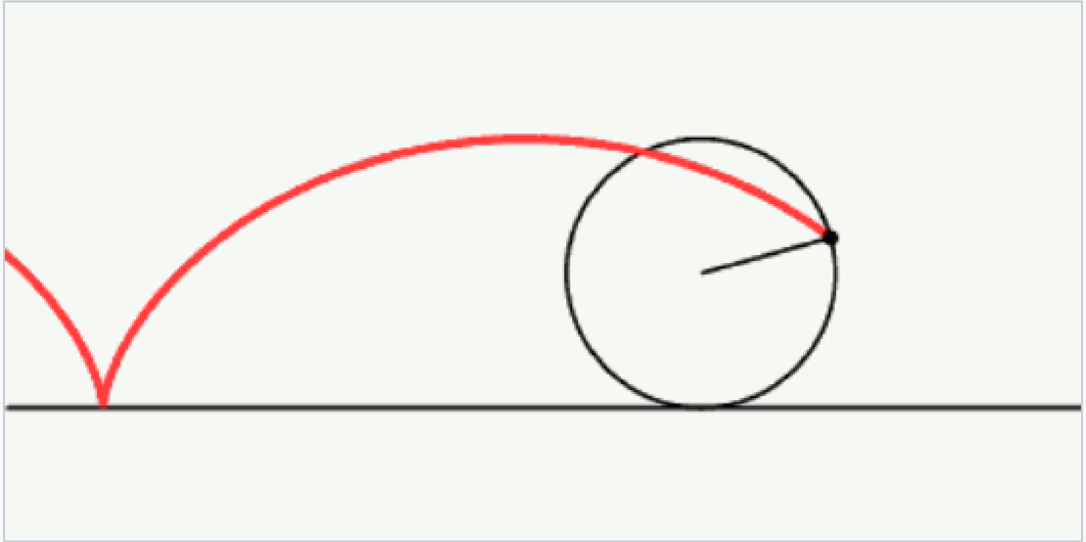
47 languages

Article Talk Read Edit View history Tools

From Wikipedia, the free encyclopedia

For other uses, see Cycloid (disambiguation).

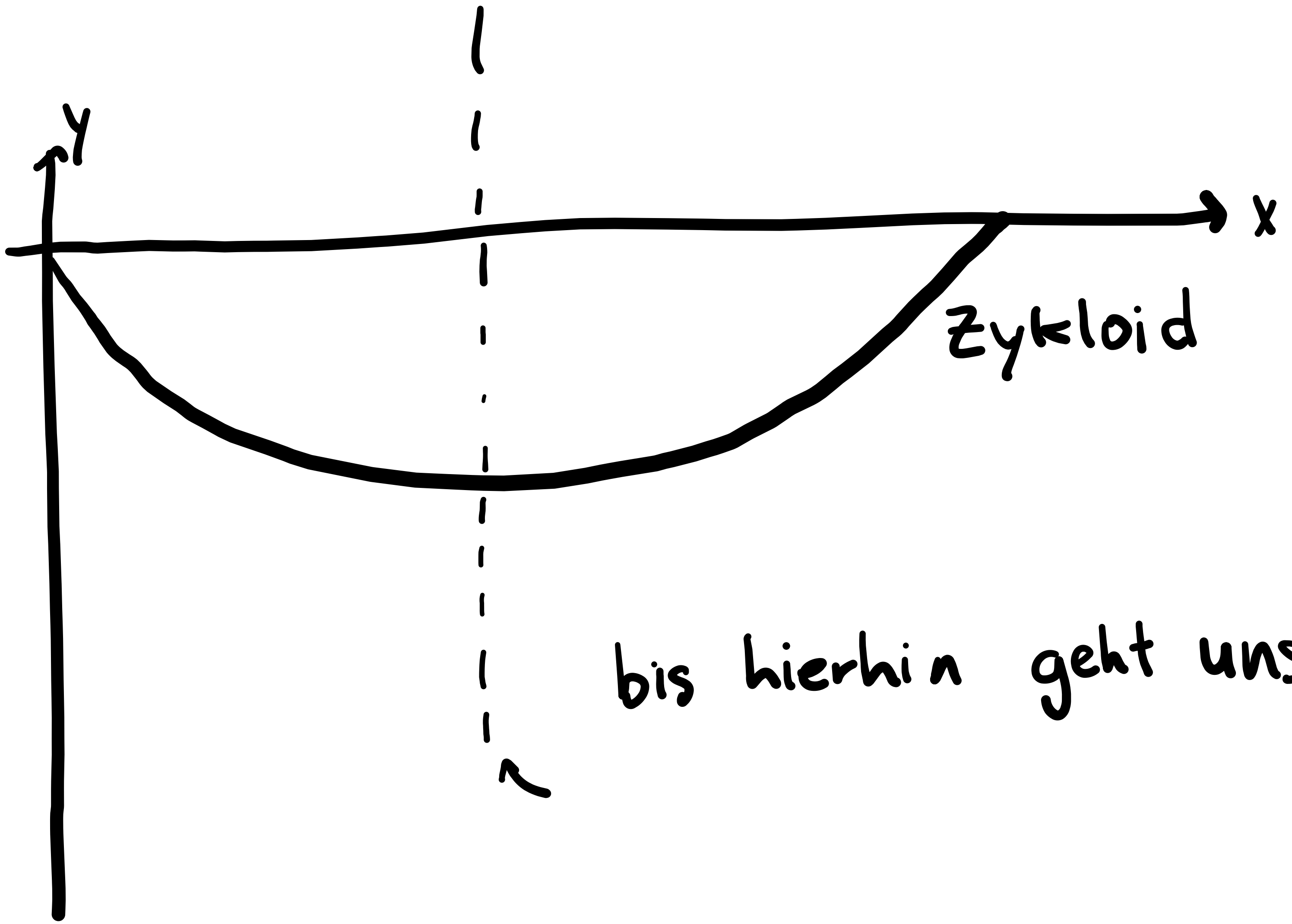
In geometry, a **cycloid** is the curve traced by a point on a circle as it rolls along a straight line without slipping. A cycloid is a specific form of trochoid and is an example of a roulette, a curve generated by a curve rolling on another curve.



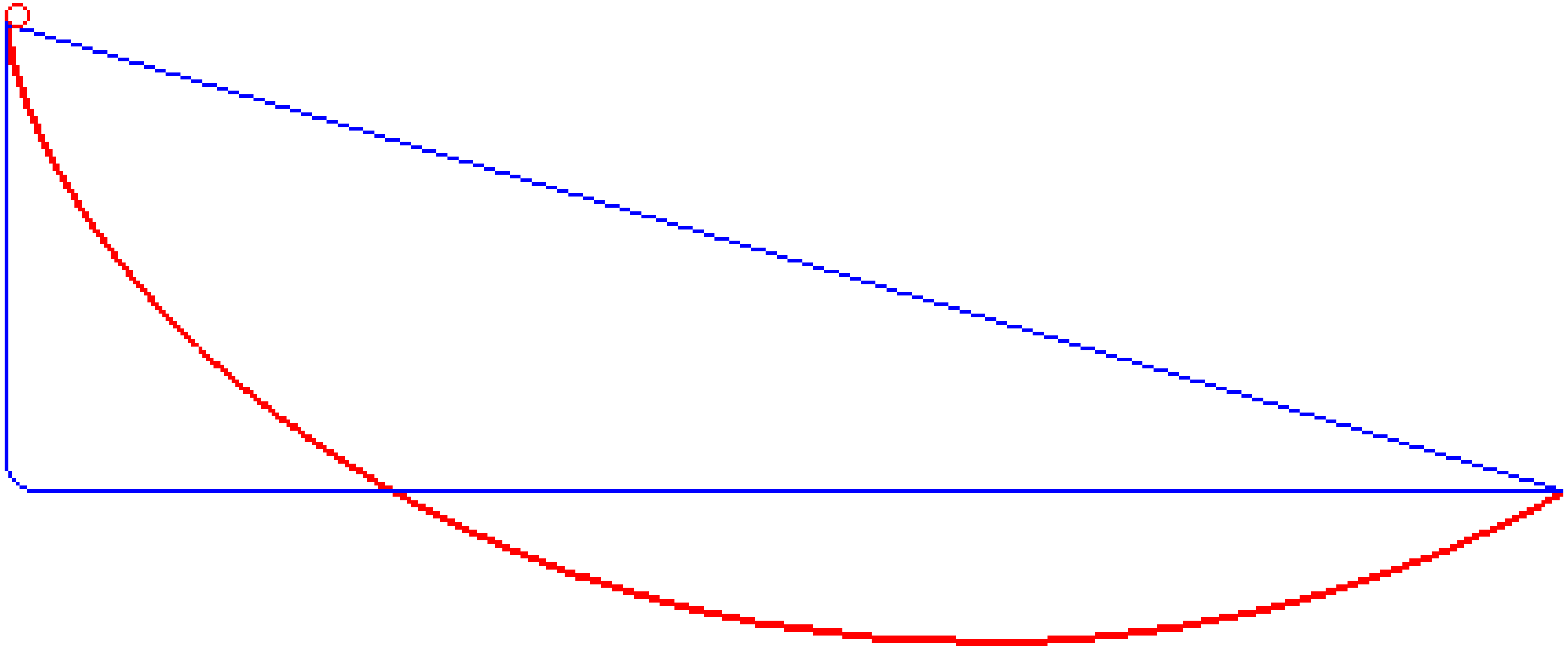
A cycloid generated by a rolling circle

The cycloid, with the cusps pointing upward, is the curve of fastest descent under uniform gravity (the brachistochrone curve). It is also the form of a curve for which the period of an object in simple harmonic motion (rolling up and down repetitively) along the curve does not depend on the object's starting position (the tautochrone curve). In physics, when a charged particle at rest is put under a uniform electric and magnetic field perpendicular to one another, the particle's trajectory draws out a cycloid.

Umklappen !



bis hierhin geht unsere Rutsche



die perfekte Rutschform!

(k) Warum wurden die Pläne der Augsburger Oberbürgermeisterin trotz allem nicht realisiert?

(i) Man kann sich am Anfang der Rutschbahn nicht hinsetzen.

(ii) Rutschen macht Spaß; deshalb sollte es lange dauern.

(iii) Die Stadt Augsburg spart, indem sie die Materialkosten minimiert.

(iv) Um dafür Sorge zu tragen, daß die Reibungskräfte vernachlässigt werden können, wird zuviel Schmierseife benötigt.

Quellen

https://ana.mathe.sexy/uebungW.pdf
https://en.wikipedia.org/wiki/Cycloid
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/63/Brachistochrone.gif