Die Brachistochrone
Eine Einführung in die Variationsrechung

W-Seminar Mathematische Optimierung

2022-24

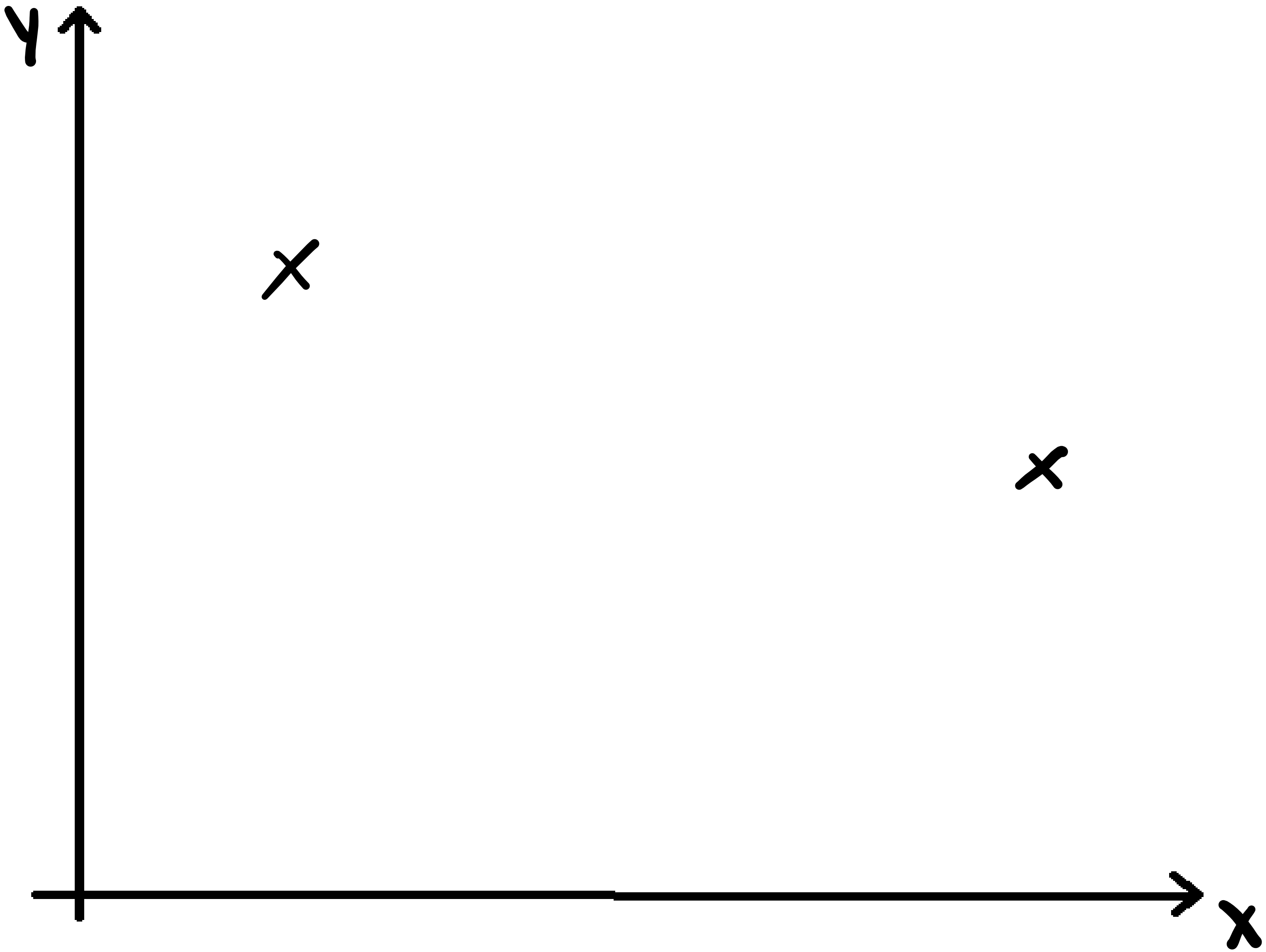
A. Gaugler

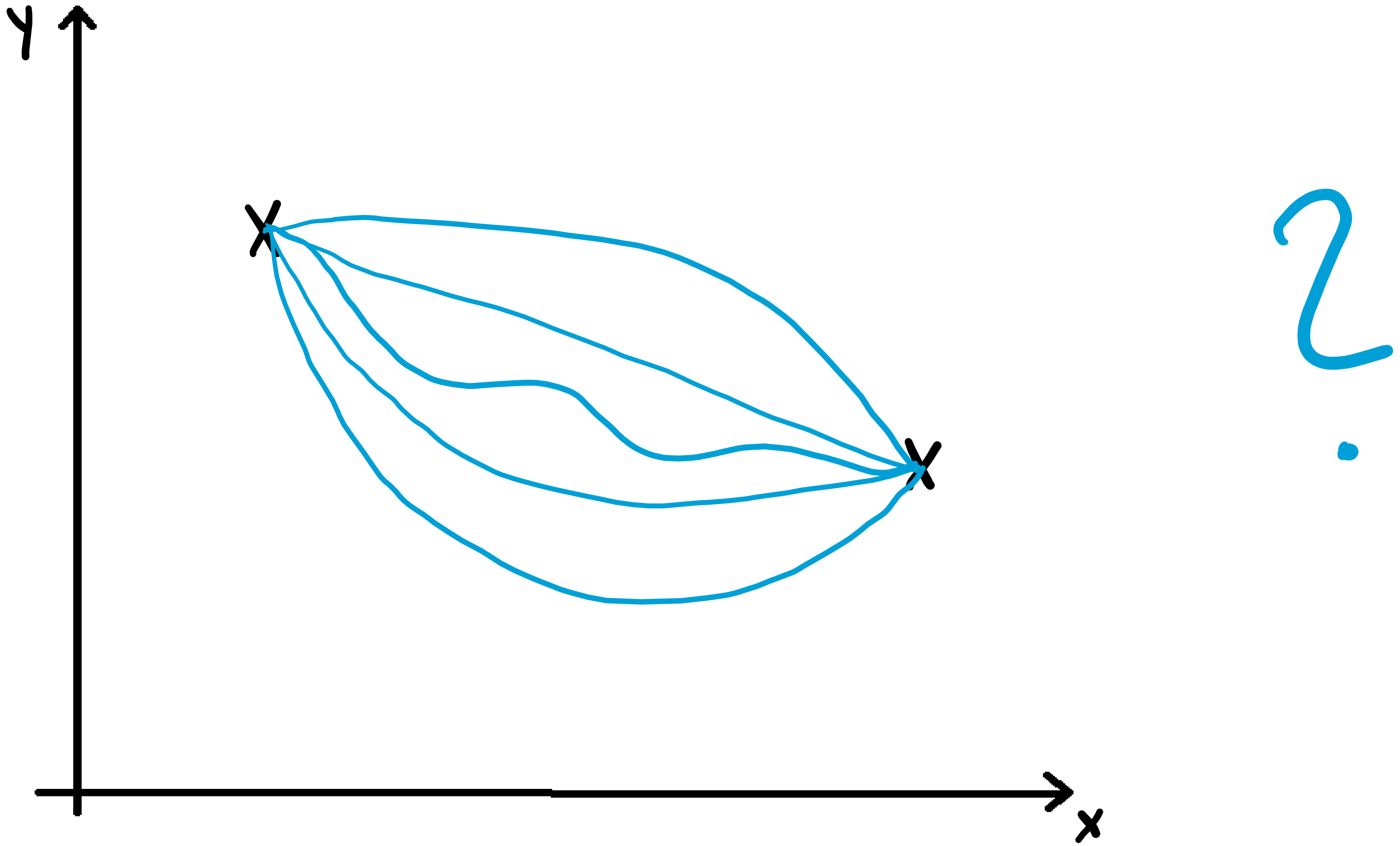
Weihnachtsübung zur Analysis III

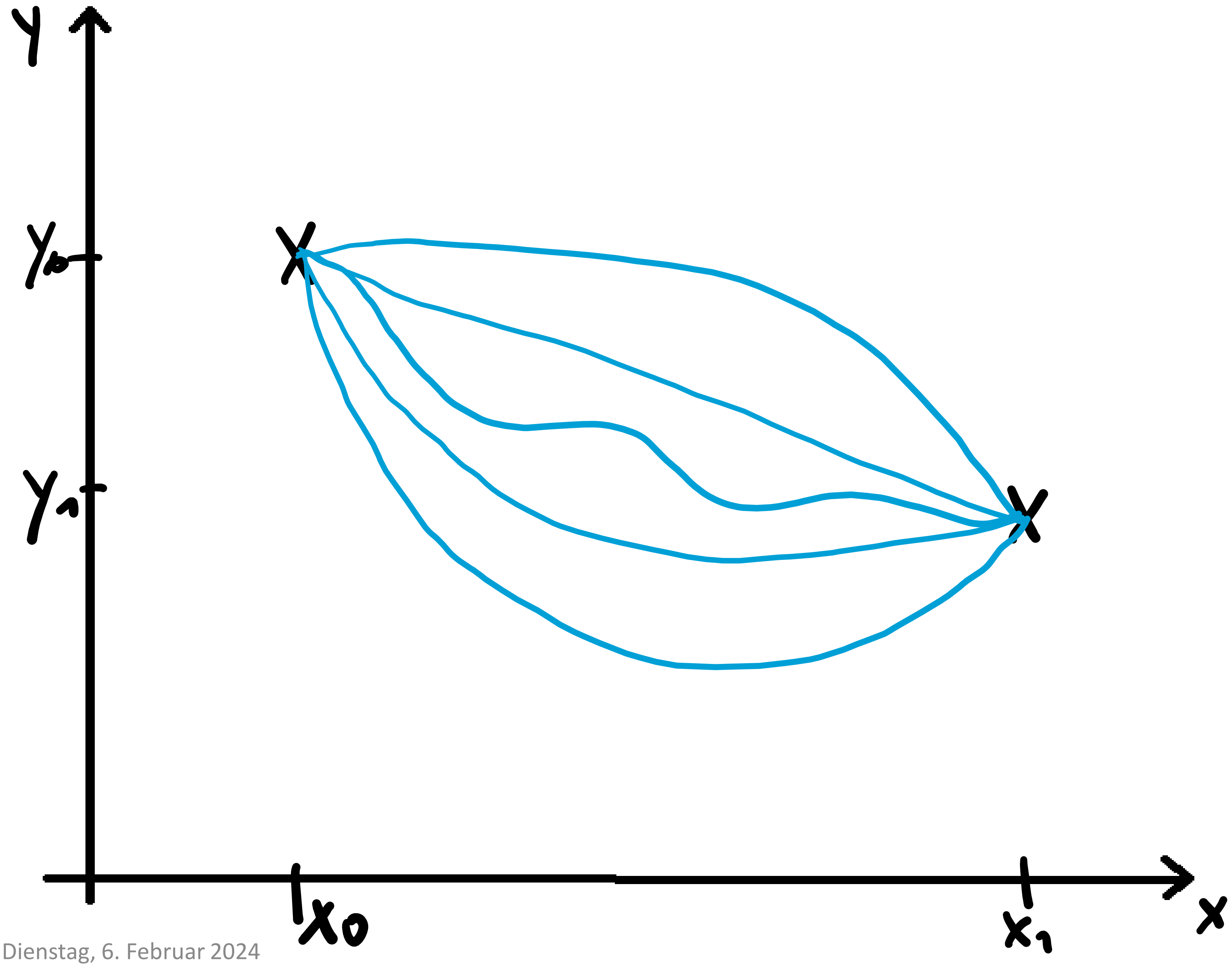
Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Lukas Stoll, M. Sc.

06. Dezember 2022 – 12. Januar 2023 *

294. Es muß wohl kurz vor Weihnachten und nach einem sehr langen Arbeitstag gewesen sein, als die Oberbürgermeisterin der Stadt Augsburg beschloß: „Augsburg braucht ein neues Schwimmbad! Und zwar soll es die schnellste Rutschbahn haben, die möglich ist!"


y
x


y
x
?


y
y0
y1
x0
x1
x

?

Wir wollen alle möglichen Rutschen, also Funktionen betrachten, deren genaue Vorschrift wir noch nicht kennen. Was aber bekannt ist:

$$f : [x_0, x_1] \to [y_0, y_1]$$

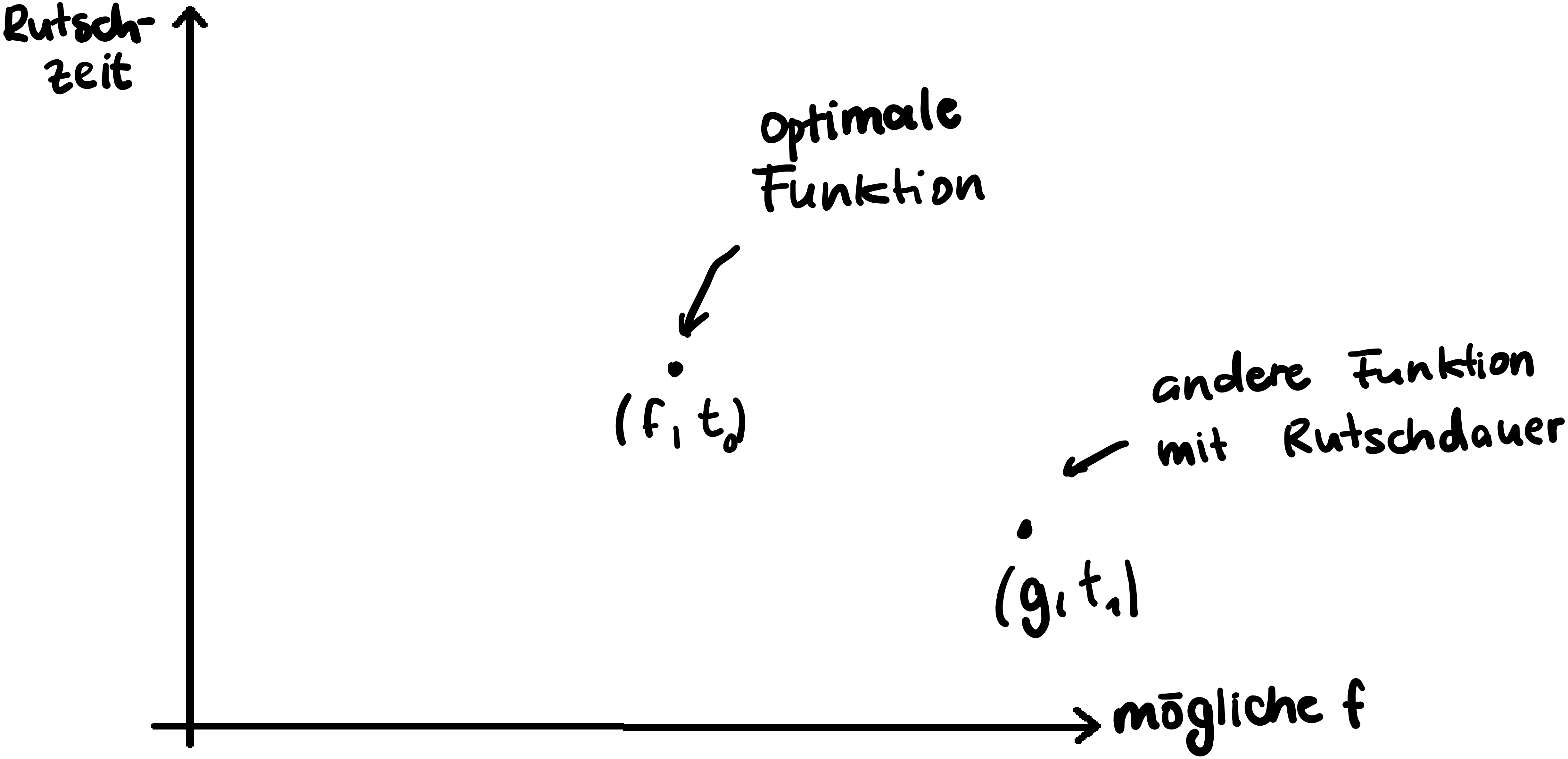
Funktionale

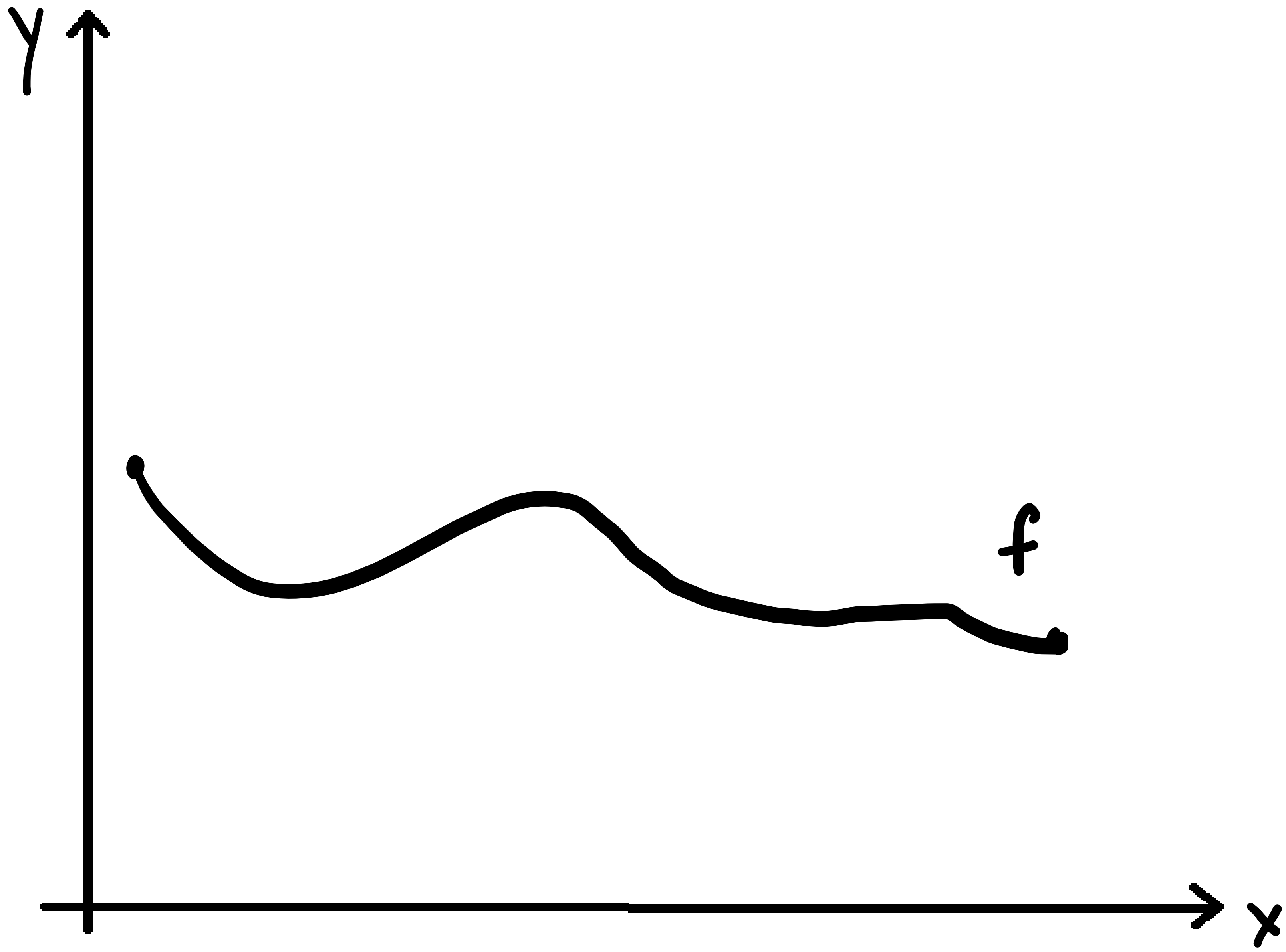
Wir sind Funktionen gewöhnt wie z.B. $f(x) = x^2$, oder auch:

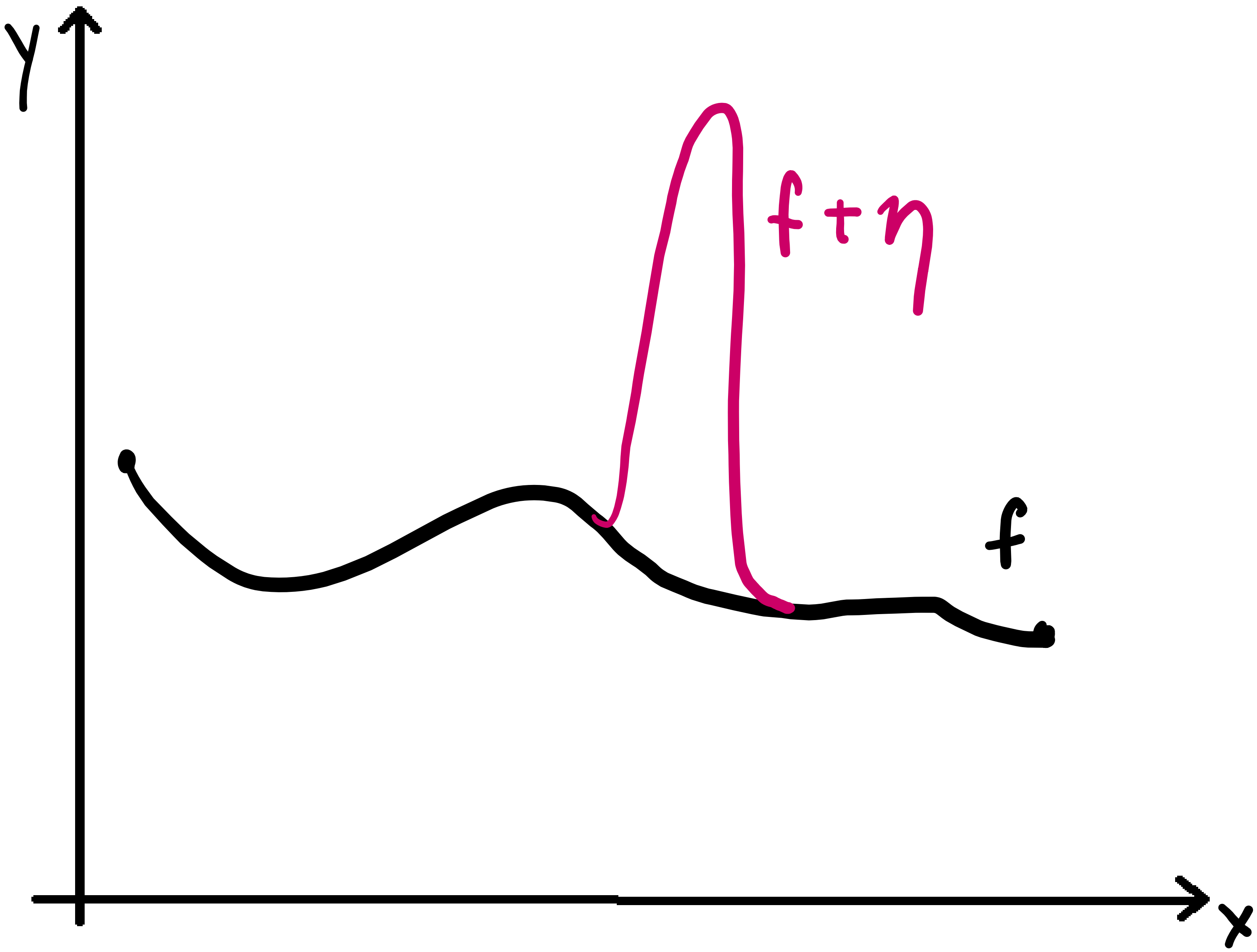
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2$$

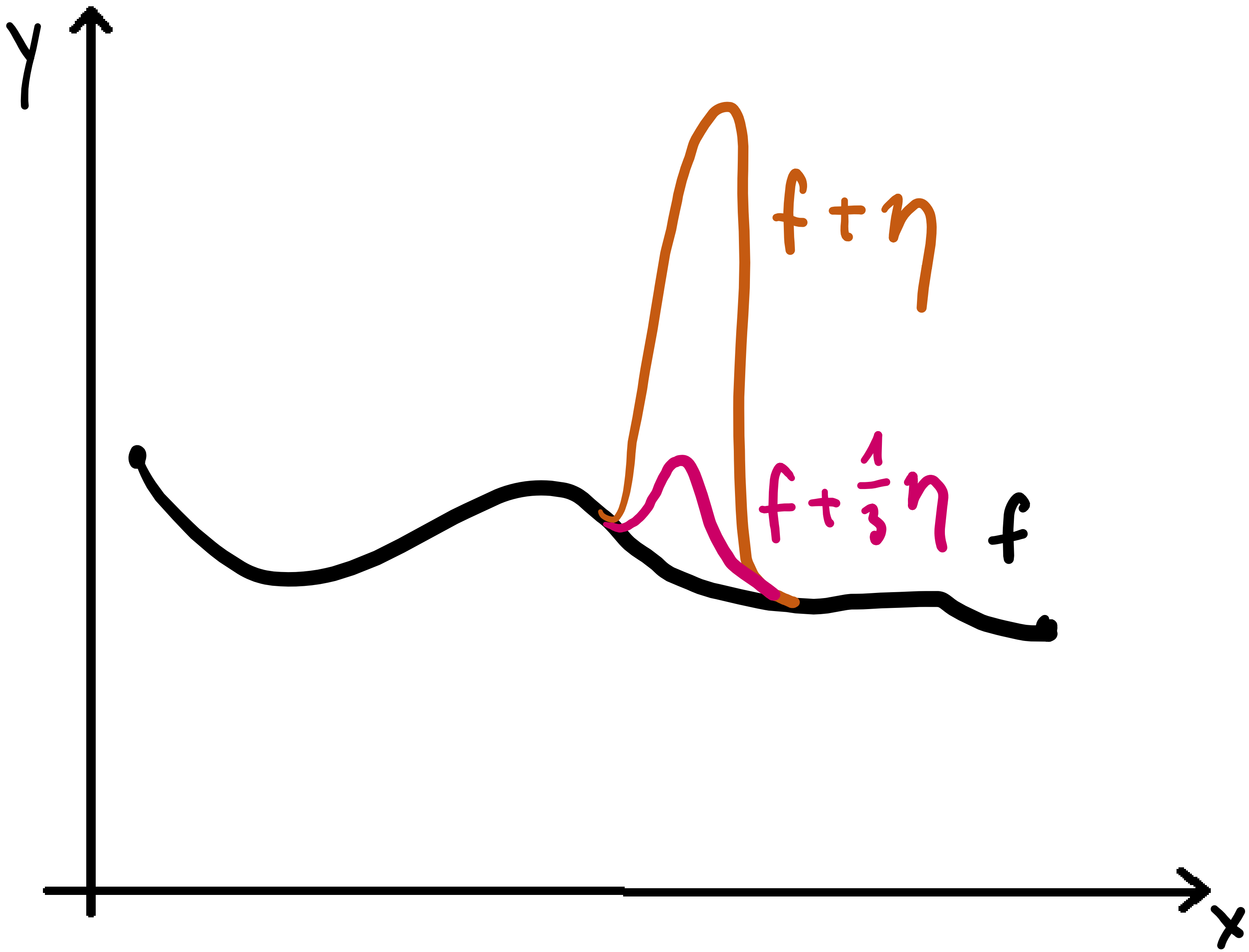
Jetzt nehmen wir eine Funktion, die als Input eine andere Funktion nimmt und uns als Output eine reelle Zahl gibt.

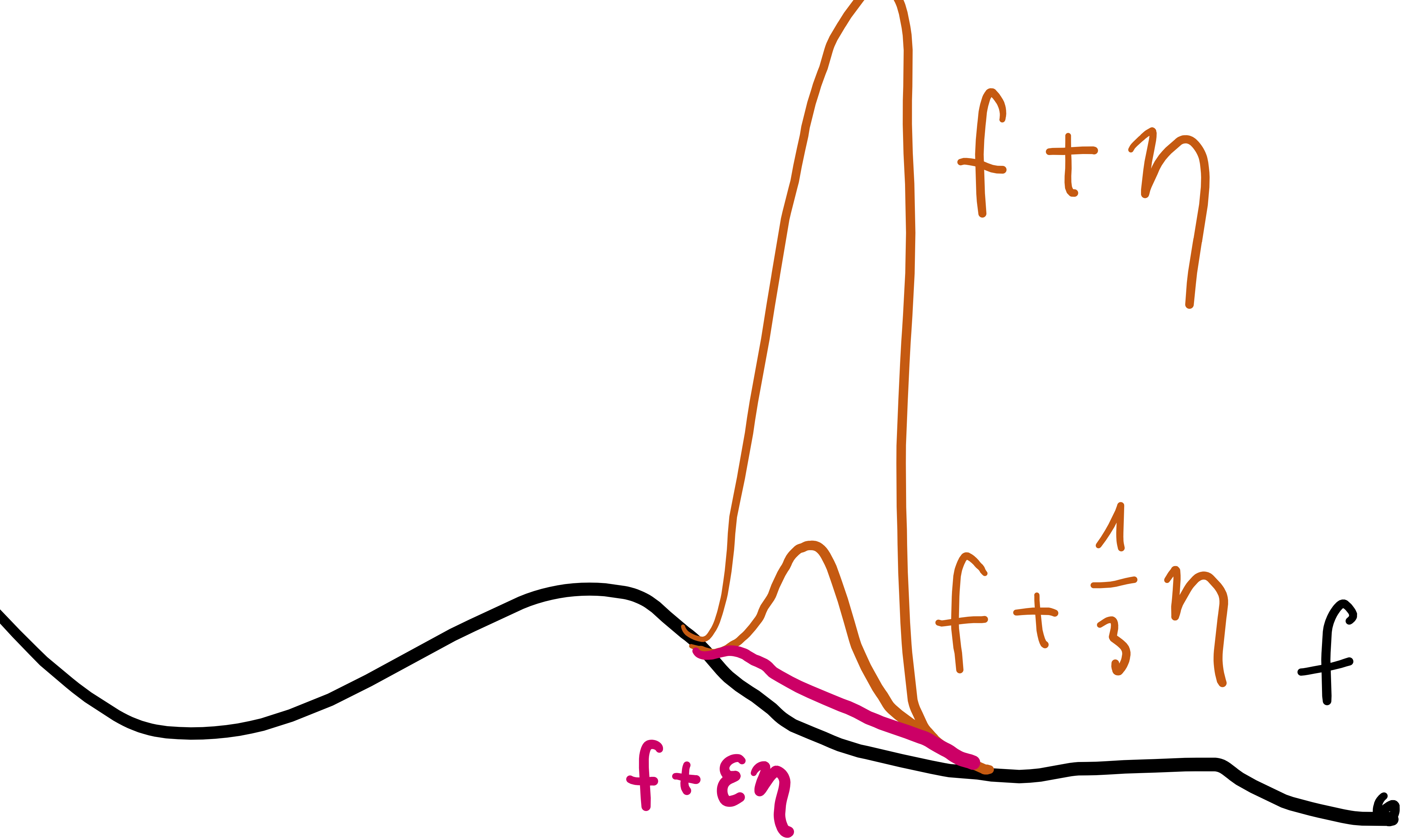
$$J\colon \{Funktionen\} \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto \int_{x_0}^{x_1} F\big(x, f(x), f'(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

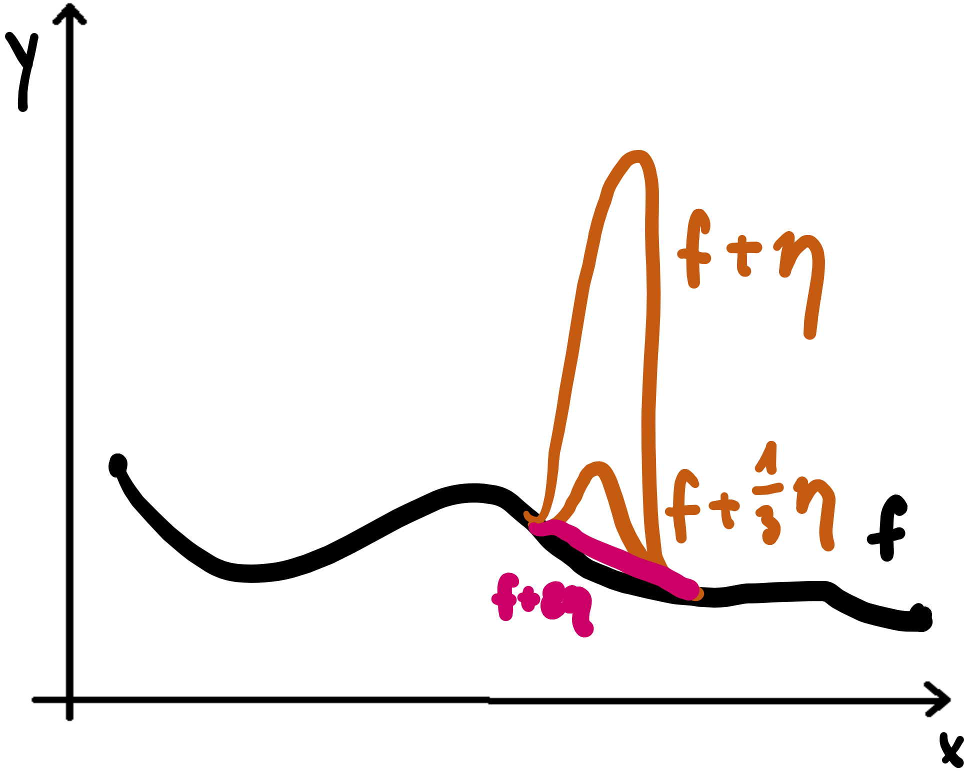

Rutsch-
zeit
Optimale
Funktion
(f, t₀)
andere Funktion
mit Rutschdauer
(g, t₁)
mögliche f


y
f
x


y
x
f
f + η


y
$f+\eta$
$f+\frac{1}{3}\eta$
f
x

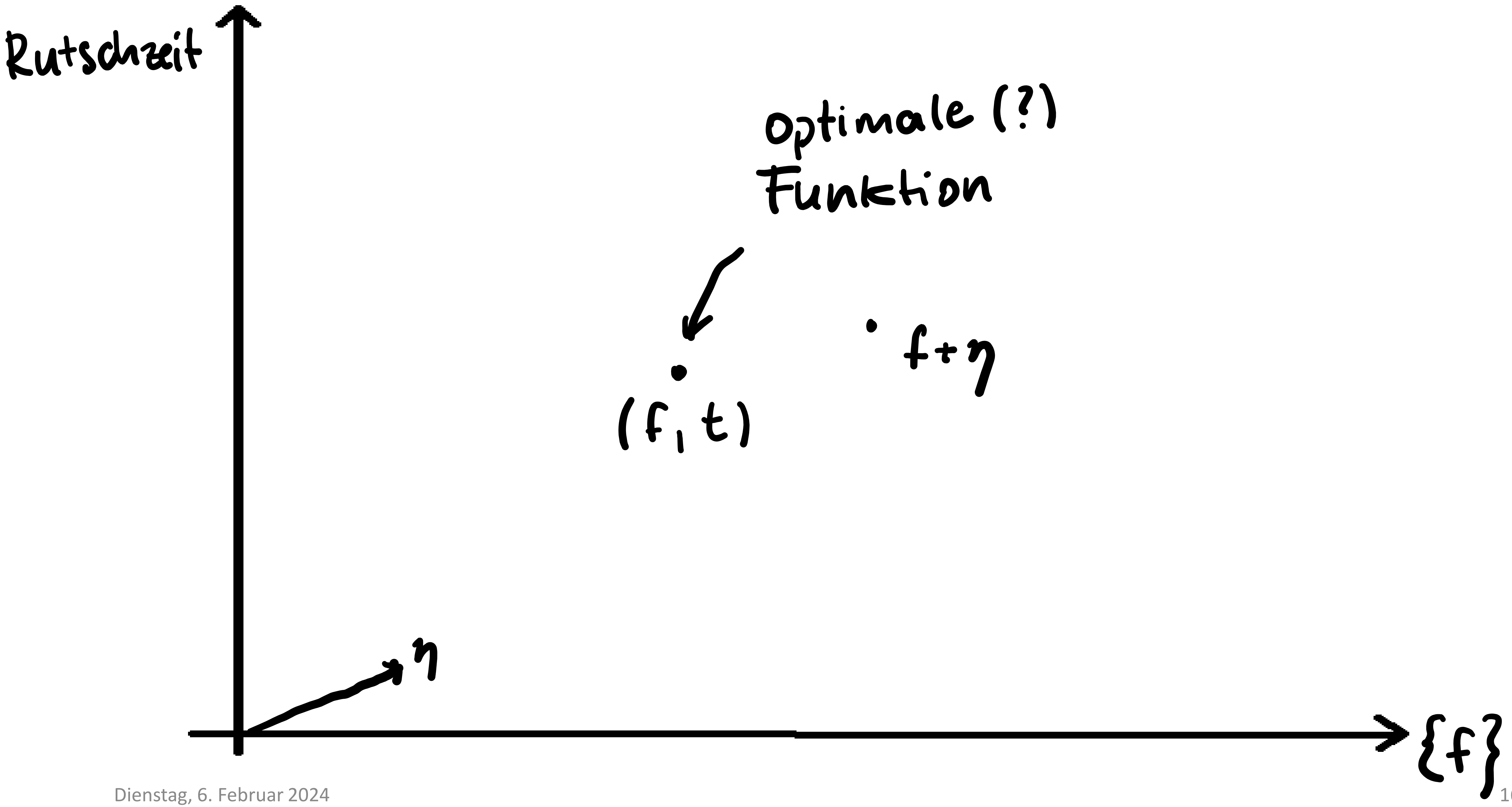

$f + \eta$
$f + \frac{1}{3}\eta$
f
$f + \varepsilon\eta$

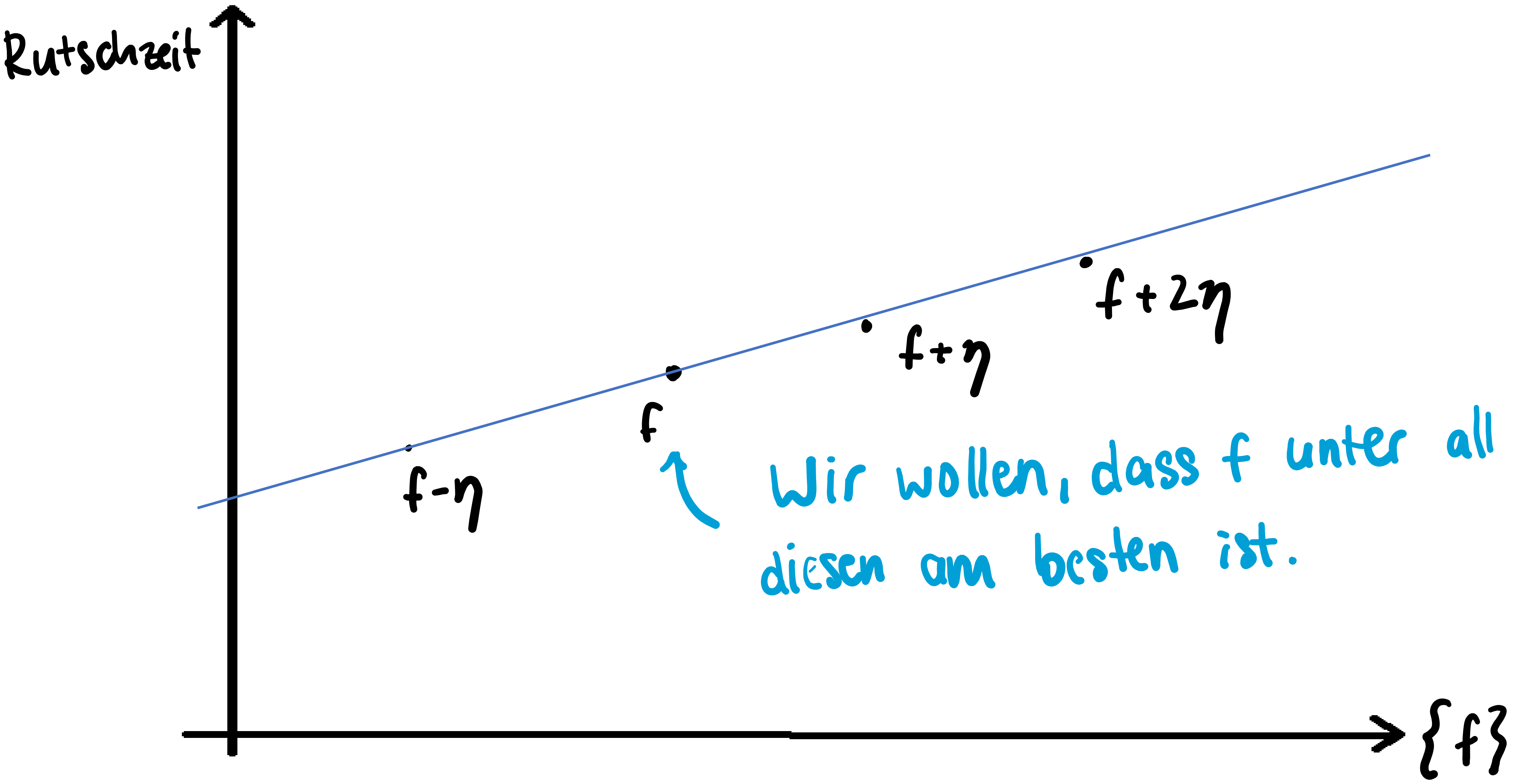


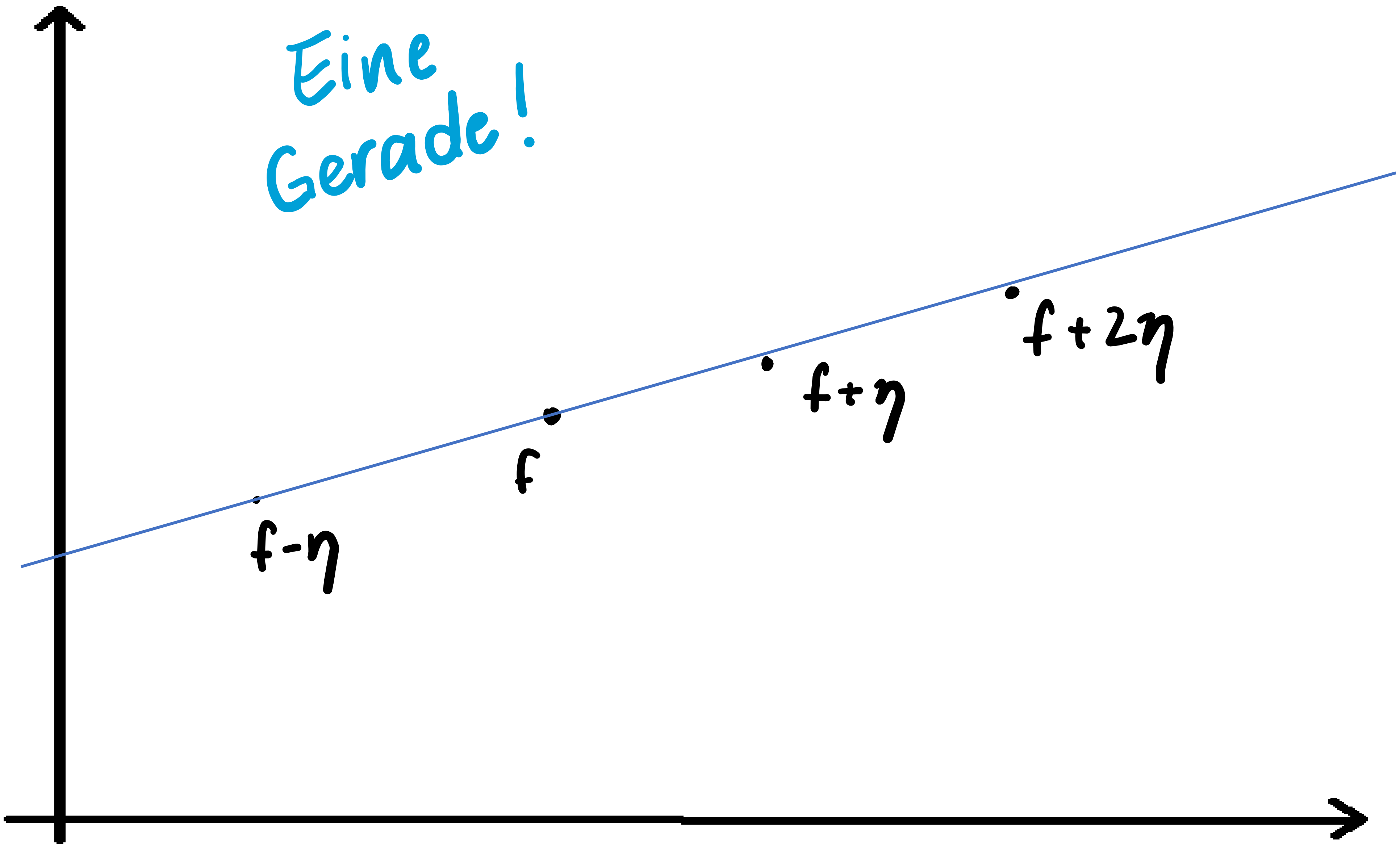
Idee:

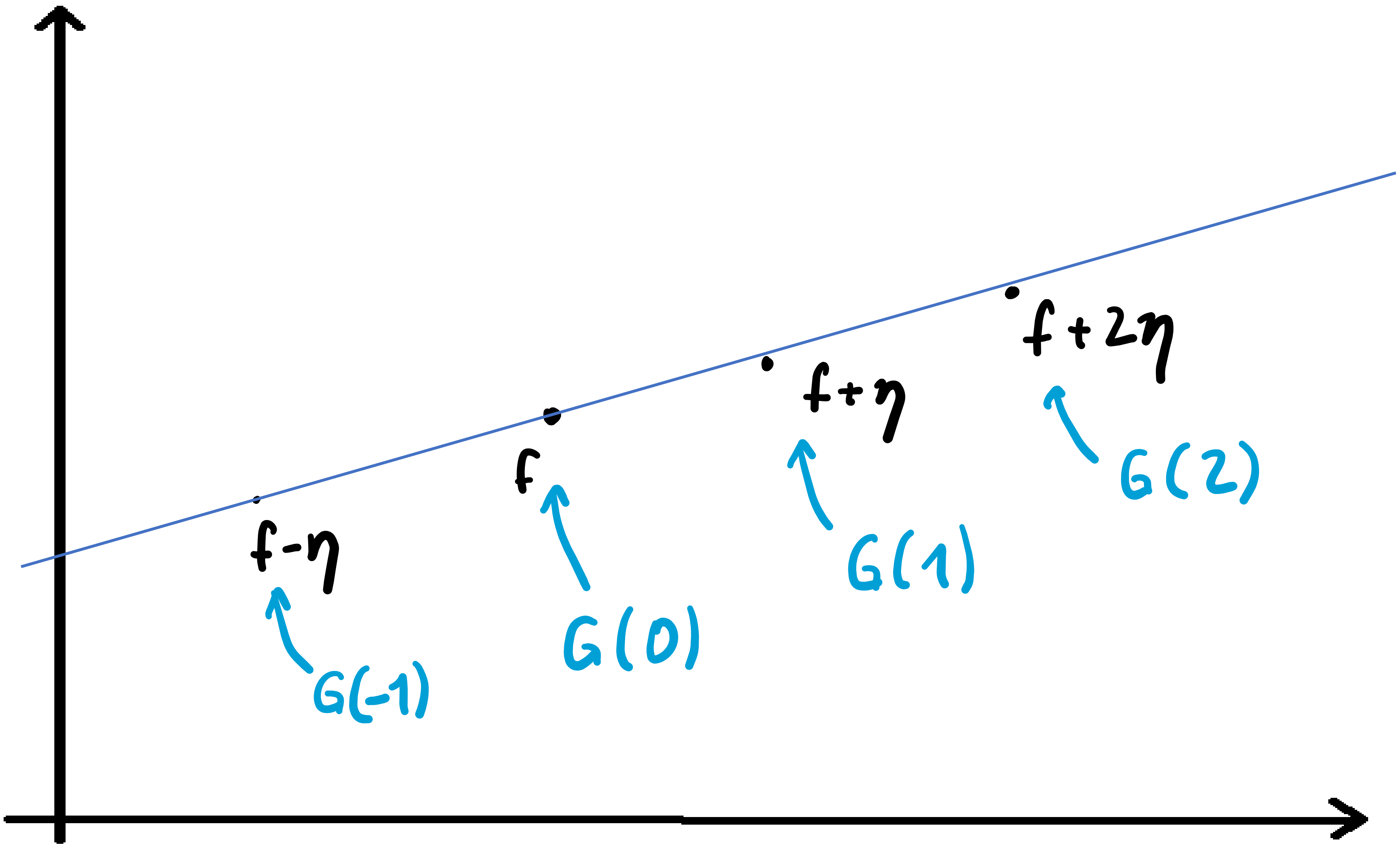
Wenn bei einer kleinen Veränderung der Funktion eine bessere Zeit herauskommt, nehmen wir diese als unsere neue optimale Funktion, und zwar so lange bis wir eine bessere finden. Diesen Vorgang wird so häufig wiederholt, bis man eine perfekte Funktion gefunden hat.

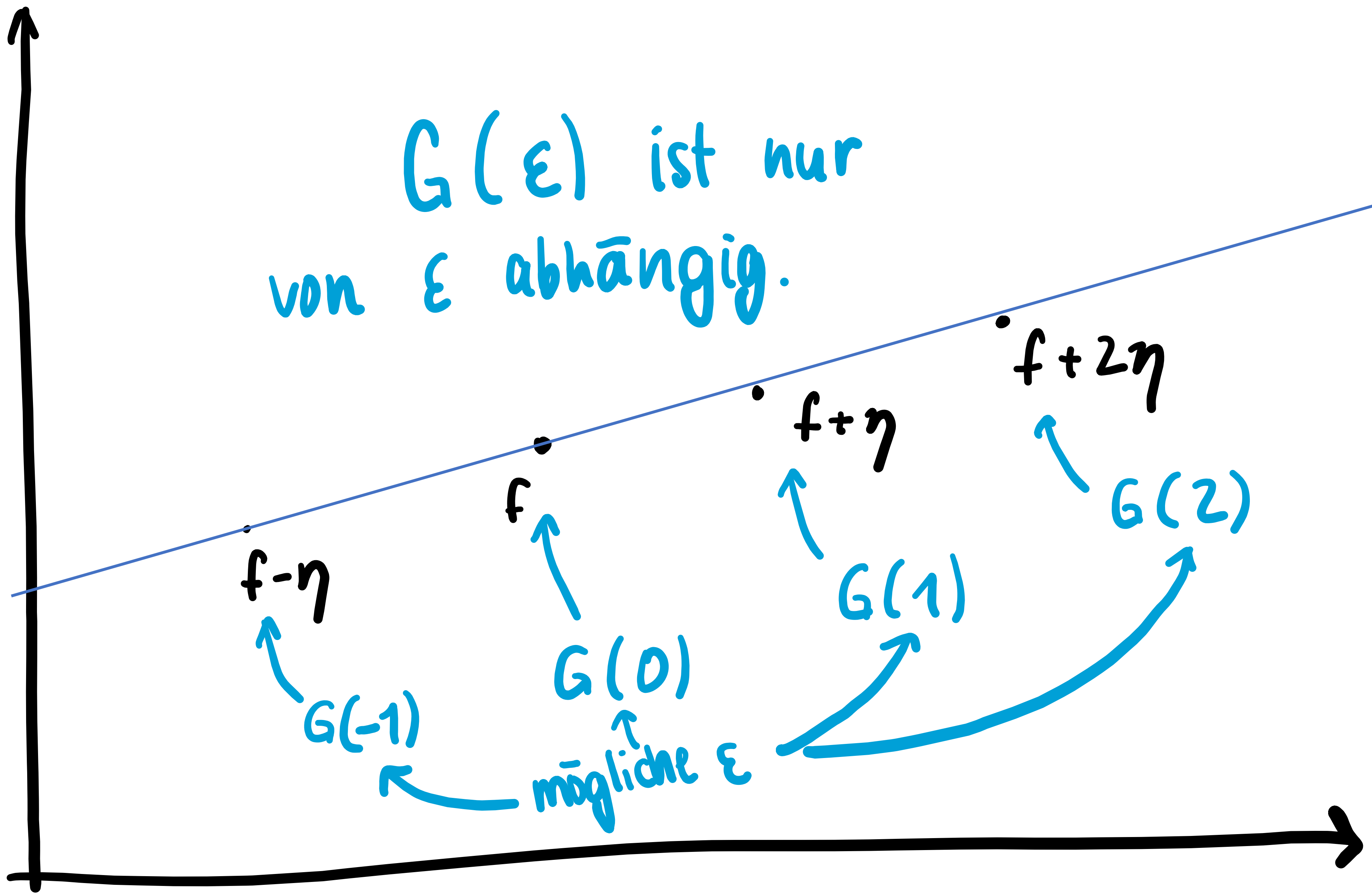
$\Rightarrow$ optimales f!


Rutschzeit
Optimale (?) Funktion
(f, t)
f+η
η
{f}


Rutschzeit
f-η
f
f+η
f+2η
{f}
Wir wollen, dass f unter all diesen am besten ist.


Eine Gerade!
f-η
f
f+η
f+2η


$f-\eta$
f
$f+\eta$
$f+2\eta$
G(-1)
G(0)
G(1)
G(2)


G(ε) ist nur
von ε abhängig.
f+2η
f+η
f
f-η
G(2)
G(1)
G(0)
G(-1)
mögliche ε

$$G_\eta'(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \int_{x_0}^{x_1} F\big(x, f(x) + \varepsilon\eta, f'(x) + \varepsilon\eta'\big)\,\mathrm{d}x.$$

Ableitung nach ε:

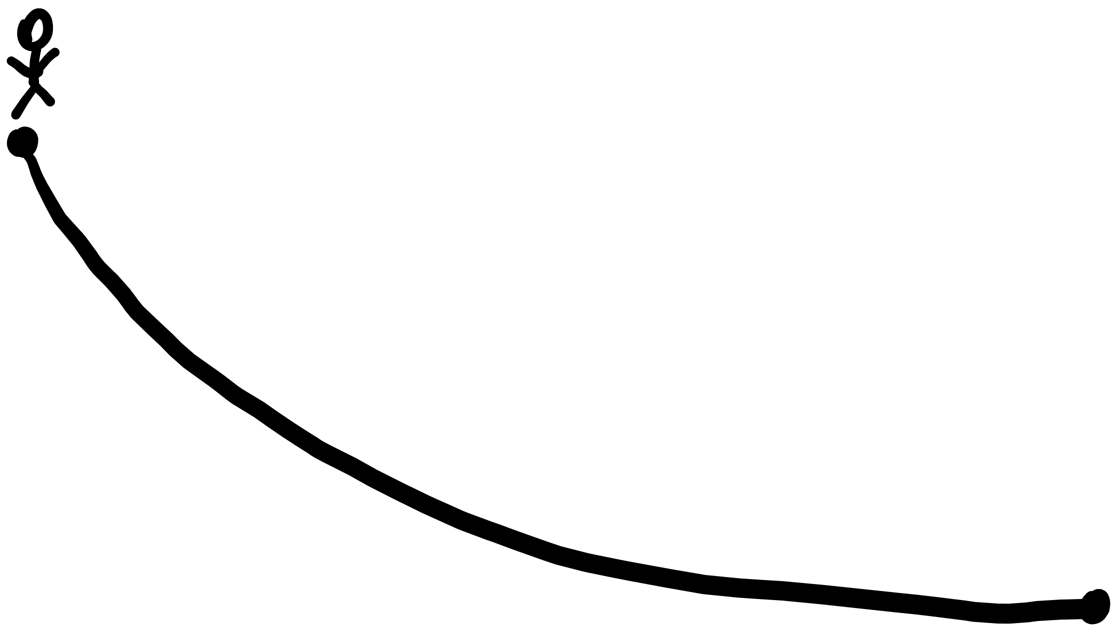
G hängt von der Änderung ε ab

Addition von $\varepsilon\eta$ bzw. $\varepsilon\eta'$ für Veränderung

$$G_\eta'(0) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \int_{x_0}^{x_1} F(x, f(x) + \varepsilon\eta, f'(x) + \varepsilon\eta')\,\mathrm{d}x$$

für perfekte f brauchen wir keine Veränderung ε

kommt vom Funktional J



$t = 0$

$t = ?$

$t = ??$

Gleitzeit (Mechanik)

$$x'(t) = \sqrt{\frac{2g(y_0 - f(x(t)))}{1 + f'(x(t))^2}}$$

Inverses, Integrieren

$$T = \int_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{1+f'(x)^2}{2g\cdot(y_0-f(x))}}\,\mathrm{d}x. =: F.$$

Gleitzeit (Mechanik)

$$x'(t) = \sqrt{\frac{2g(y_0 - f(x(t))}{1 + f'(x(t))^2}}$$

Inverses, Integrieren

$$T = \int_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{1+f'(x)^2}{2g\cdot(y_0-f(x))}}\,\mathrm{d}x. =: F.$$

was wir in J einsetzen

! Differentialgleichung !

Euler-Lagrange-Formalismus

Schon wieder helfen uns Ergebnisse der theoretischen Physik. Hier ein Formalismus für das Vereinfachen von Differentialgleichungen:

hier T (Zeit)

$$\frac{\partial F}{\partial f} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\partial F}{\partial f'} .$$

die Funktion der Rutsche

Einsetzen von T in Euler-Lagrange

Nach sehr viel Vereinfachen:

$$(y_0 - f)(1 + (f')^2) = \text{const.}$$

Differentialgleichung

Lösung

$$x = r \cdot (\varphi - \sin\varphi).$$
$$y = r \cdot (-1 + \cos\varphi).$$
$$r = \frac{2 \cdot y_0}{\pi}.$$

hat etwas mit Kreisen zu tun

Equations [edit]

The cycloid through the origin, generated by a circle of radius r rolling over the x-axis on the positive side ($y \geq 0$), consists of the points (x, y), with

$$\begin{aligned} x &= r(t - \sin t) \\ y &= r(1 - \cos t), \end{aligned}$$

where t is a real parameter corresponding to the angle through which the rolling circle has rotated. For given t, the circle's centre lies at $(x, y) = (rt, r)$.

Cycloid

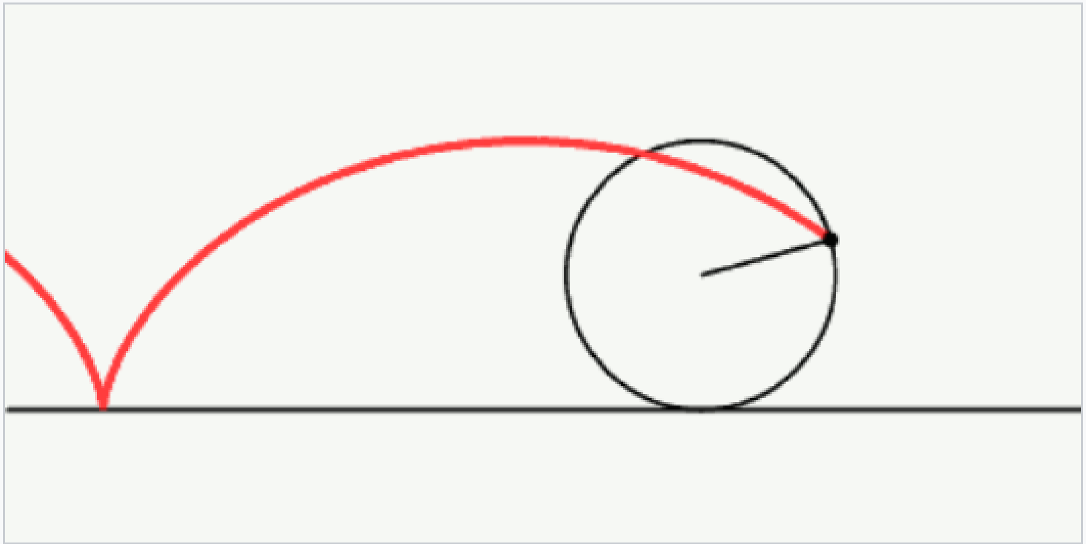
47 languages

Article Talk Read Edit View history Tools

From Wikipedia, the free encyclopedia

For other uses, see Cycloid (disambiguation).

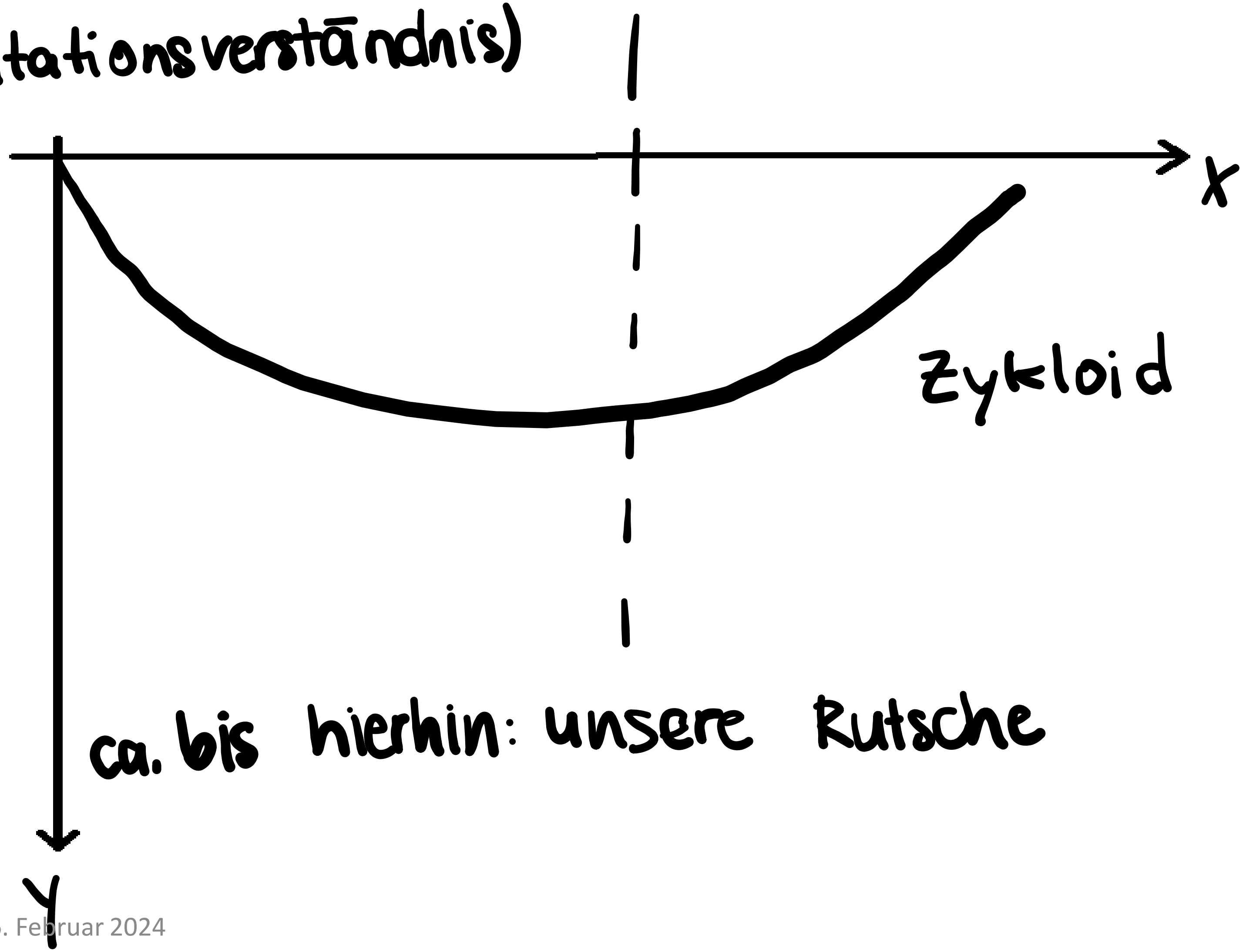
In geometry, a **cycloid** is the curve traced by a point on a circle as it rolls along a straight line without slipping. A cycloid is a specific form of trochoid and is an example of a roulette, a curve generated by a curve rolling on another curve.

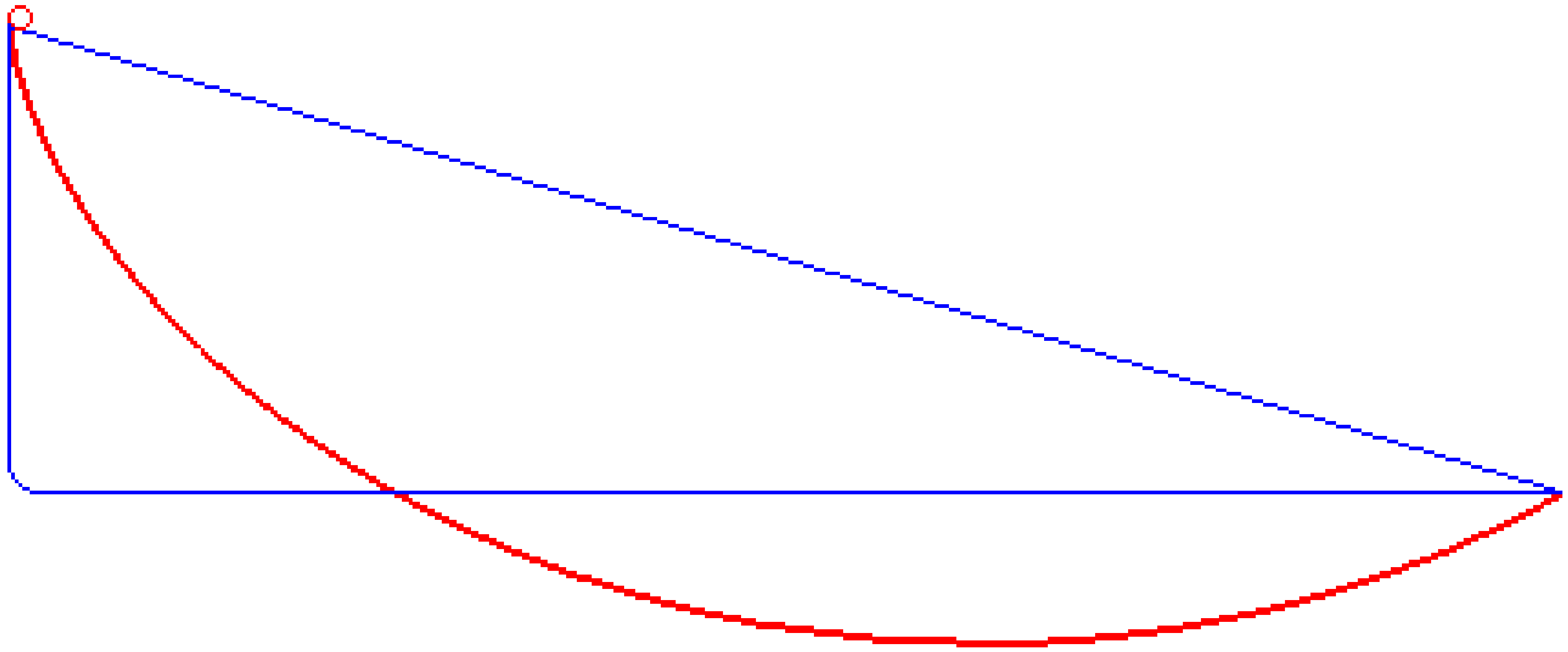


A cycloid generated by a rolling circle

The cycloid, with the cusps pointing upward, is the curve of fastest descent under uniform gravity (the brachistochrone curve). It is also the form of a curve for which the period of an object in simple harmonic motion (rolling up and down repetitively) along the curve does not depend on the object's starting position (the tautochrone curve). In physics, when a charged particle at rest is put under a uniform electric and magnetic field perpendicular to one another, the particle’s trajectory draws out a cycloid.

Umgeklappt:
(für ein intuitives Gravitationsverständnis)





die perfekte Rutschform!

(k) Warum wurden die Pläne der Augsburger Oberbürgermeisterin trotz allem nicht realisiert?

(i) Man kann sich am Anfang der Rutschbahn nicht hinsetzen.

(ii) Rutschen macht Spaß; deshalb sollte es lange dauern.

(iii) Die Stadt Augsburg spart, indem sie die Materialkosten minimiert.

(iv) Um dafür Sorge zu tragen, daß die Reibungskräfte vernachlässigt werden können, wird zuviel Schmierseife benötigt.

Weiterführendes

- Seminararbeit und zusätzliches Material online (github: @august-gaugler)
- Formalisierung der Beweisführung in Lean/Agda
- Seminare zu Inhalt und Entstehungsprozess
  - WIP: Uni Augsburg, Zirkel auf dem Mathecamp 2025/26
  - Evtl. Vortrag auf 38c3

Bildquellen

- https://ana.mathe.sexy/uebungW.pdf
- https://en.wikipedia.org/wiki/Cycloid
- https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/63/Brachistochrone.gif