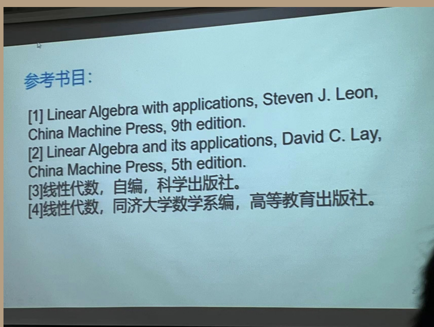
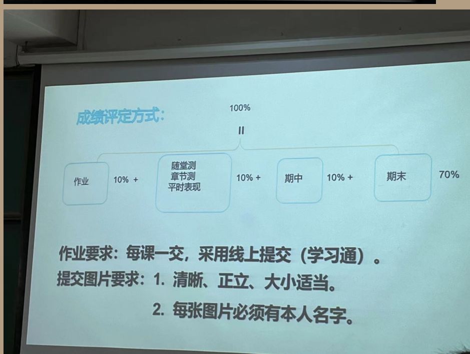
线性代数


参考书目：
[1] Linear Algebra with applications, Steven J. Leon, China Machine Press, 9th edition.
[2] Linear Algebra and its applications, David C. Lay, China Machine Press, 5th edition.
[3]线性代数，自编，科学出版社。
[4]线性代数，同济大学数学系编，高等教育出版社。


成绩评定方式：
100%
=
作业
10% +
随堂测
章节测
平时表现
10% +
期中
10% +
期末
70%
作业要求：每课一交，采用线上提交（学习通）。
提交图片要求：1. 清晰、正立、大小适当。
2. 每张图片必须有本人名字。

T

(一次)

解的分类

- 有解
  - 唯一解
  - 无穷解
- 无解

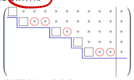
$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

假设有两解 $(k_1 \dots k_n)$ $(l_1 \cdots l_n)$

易得 $a_1\left(\frac{k_1+l_1}{2}\right)+\cdots+a_n\left(\frac{k_n+l_n}{2}\right)=b_1$

∴不存在两解

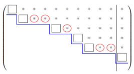
增广矩阵的行阶梯形:



- 蓝色阶梯线以下元素全是0;
- 首元(都是1)所对应的变量称为**首变量**(正方形盒子框);
  首元所在的列称为**首元列**
- 剩下的变量称为**自由变量**(圆形盒子圈出);

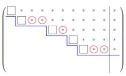
增广矩阵的行阶梯形决定了线性方程组的解的情况:

(1) 无解(不相容):



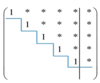
出现0=1

(2) 无穷解:



有解, 且有自由变量.

(3) 唯一解:



有解; 但没有自由变量.

矩阵 (Matrix)

- 系数矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
- 增广矩阵 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right)$　计算机思维
  - ↓高斯消元法
- 行阶梯形矩阵 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & y & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$　✗ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 \end{array}\right)$ → 无解
  - ↳ 行最简形矩阵 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \end{array}\right)$ → 得出解
  - (首1所在的列全为0)

- 齐次线性方程组: 常数项全为0
- 非齐次 ~ : 常数项不全为0

矩阵的运算

- 矩阵的一般表示
  - $n\times n$矩阵：n阶方程/矩阵
  - $1\times n$矩阵：n元行向量
  - $n\times 1$矩阵：n元列向量（又称n维欧氏空间，记作R^n）
- 线性运算
  - $A+B$，αA
  - $A+B=B+A$
  - $(A+B)+C=A+(B+C)$
  - $\alpha A=A\alpha$
  - $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$
  - $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$，$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$
- 零矩阵
  - 元素全为0，记作O_{mn}
  - $0A=O$
- 乘法运算：
  - ① $A: m\times n$　$B: a\times b$
  - ② $AB: m\times b$
  - ③ $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots \\ a_{21} & \\ \vdots & \end{bmatrix}$　a_{13}：A的第1行×B的第3列
  - ④ $(AB)C=A(BC)$
    - $A^k=A^{k-1}A=AA^{k-1}$
    - $(A+B)C=AC+BC$
    - $C(A+B)=CA+CB$
    - $(\alpha A)B=A(\alpha B)=\alpha(AB)$
- 矩阵的转置运算
  - ① $A=a_{ij}\to A^T=b_{ij}$ 满足 $b_{ij}=a_{ji}$
    - $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\xrightarrow{T}[1,2,3]$　$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\3&1\end{pmatrix}$
  - ② $(A+B)^T=A^T+B^T$
    - $(AB)^T=B^TA^T$
    - $(rA)^T=rA^T$
    - $(A^T)^T=A$
- 特殊矩阵
  - 对称矩阵　$A^T=A$　$\begin{pmatrix}1&2\\2&0\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1&2\\2&0\end{pmatrix}$
  - 反对称矩阵　$A^T=-A$　$\begin{pmatrix}0&2\\-2&0\end{pmatrix}^T=-\begin{pmatrix}0&-2\\-2&0\end{pmatrix}$
  - 上三角矩阵　$\begin{pmatrix}4&1\\0&-1\end{pmatrix}$
  - 下三角矩阵　$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$
  - 对角矩阵　$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

一般

1. $AB\neq BA$ 矩阵乘法不可交换
2. 若$AB=O$，不可推出$A=O/B=O$
3. $AB=AC$，不能推出$B=C$

若$AB=BA$，则A和B可交换

若$(AB)^T=A^TB^T$，当且仅当$AB=BA$（利用$(BA)^T=A^TB^T$）

$\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c&0\\0&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac&0\\0&bd\end{pmatrix}$ 当$ac=0$且$bd=0$ 则可能$AB=0$，$\neq A=0/B=0$

$\boxed{uu^T\neq I\quad (1,0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}$

- 单位矩阵：$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ $IA=AI=A$

- 逆矩阵：若存在一个矩阵B使得$AB=BA=I$，则称$n\times n$矩阵A为非奇异的或可逆的，矩阵B称为A的乘法逆元，唯一．$B=A^{-1}$

- 一个$n\times n$矩阵不可逆，则称为奇异的

- 若A和B为非奇异的$n\times n$矩阵，则AB也为非奇异的，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

- $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}\quad(k\neq0)$

$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

$|A^{-1}|=|A|^{-1}$

$(A^{-1})^{-1}=A$

$(A+B)^{-1}\neq A^{-1}+B^{-1}$

T

设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，对 $\forall B=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$，若 $ad-bc\neq 0$，$AB\neq I$

$Ax=b \Rightarrow A^{-1}Ax=A^{-1}b \Rightarrow Ix=A^{-1}b \Rightarrow x=A^{-1}b$

矩阵方程 $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 已知 $Ax=B$，$YA=B$

$\because 2\times 4-3\times 3\neq 0$ $\therefore$ A可逆

$\therefore$ $x=A^{-1}B$ $Y=BA^{-1}$ （同乘 A^{-1}）

（左乘≠右乘）

设A是m×n矩阵，$b\in R^m$，线性方程组 $Ax=b$ 有解当且仅当b可以表示成A中列向量的线性组合

e.g. A是2×3矩阵，其三个列向量为 a_1, a_2, a_3 若 $a_1+2a_3=0$

则说明 $Ax=0$ 有解

$a_1+2a_3=0 \rightarrow a_1+0\cdot a_2+2a_3=0$

$(1,0,2)^T$ 方程有无穷解。

$$(a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}=0$$

再如 $a_1+2a_2+a_3=b$ 且 $a_1+2a_3=0$

则说明 $Ax=b$ 有无穷解

初等矩阵

- 初等变换 (对单位矩阵 I 只作一次行/列变换)
  - 类型1. 互换行/列 1次
  - 类型2. 对某行/列乘非零倍数
  - 类型3. 将某行/列的倍数加到另一行/列
- 初等矩阵的性质
  - (1) 2. 初等矩阵的性质

    定理1 设 E 为一 m 阶初等矩阵，A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $k\times m$ 矩阵，则
    (1) EA 相当于对 A 作相应的初等行变换.
    (2) BE 相当于对 B 作相应的初等列变换.

    例 1 设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3&7\\1&3\end{pmatrix}$, 求初等矩阵 E,F 使得 $B=EA$ 及 $C=BF$.

    EA 行变换
    BE 列变换
    ① $E=BA^{-1}$, $F=B^{-1}C$ | ② $E=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$, $F=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$
  - (2) $E^{-1}=E$
  - (3) 行等价 $B=E_1E_2\dots A$ ($A\cong B$ 行等价)；列等价 $B=AE_1E_2\dots$ ($A\cong B$ 列等价)
- 重要知识
  设A为一方阵,则以下条件等价：
  (1) A可逆(非奇异)
  (2) $Ax=b\,(\forall b)$ 有唯一解 $x=A^{-1}b$
  (3) $Ax=0$ 只有零解(平凡解) $x=0$
  (4) $A\cong I$ 行等价
  (5) A等于一系列初等矩阵的乘积.
- 方程A是 奇异的充要条件是 $Ax=0$ 有非零解

$AB=AC$ 若A可逆 则 $B=C$

1. 若 $AB=I \Rightarrow BA=I$ 且A和B均可逆

$\because \det(AB)=\det(A)\cdot\det(B)=1$

$\therefore \det(A)\neq 0 \quad \therefore$ A可逆

$\therefore A^{-1}AB=A^{-1}I \rightarrow BA=A^{-1}IA=I$

$\therefore$ 同理得证

☆ 计算 A^{-1}

$(A|I)\rightarrow(I|A^{-1})$

e.g. $A=\begin{bmatrix}3&0&0\\1&1&0\\1&1&4\end{bmatrix}$, 求解矩阵方程

(1) $AX-A=2X$

$(A-2)X=A$

$X=(A-2I)^{-1}A$

(2) $XA-A=2X$

$XA\cdot A^{-1}-AA^{-1}=2XA^{-1}$

$X-I=2XA^{-1}$

$X(I-2A^{-1})=I$

$X=(I-2A^{-1})^{-1}$

- 分块矩阵
  - 分类
    - 按列分块
    - 按行分块
    - 分块对角矩阵
  - 运算
    - 1. 尺寸相同（乘法）
    - 2. 矩阵乘法不同表达形式
      - (1) $A=\begin{bmatrix} r_1 \\ \cdots \\ r_m \end{bmatrix}$ $B=[b_1 \ldots\ldots b_s]$

        $AB=\begin{pmatrix} \times & \times & \cdots \\ \times & \times & \\ & \cdots & \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} r_1 \\ \cdots \\ r_m \end{bmatrix}B=\begin{bmatrix} r_1B \\ \cdots\cdots \\ r_mB \end{bmatrix}$
      - (2) 特别地，对于 $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $A=(a_1 \ldots\ldots a_n)$

        $Ax=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$

        即可通过 x 的取值取出对应 A 中元素
    - 3. 逆运算（设逆，待定系数法）

      $A^{-1}=\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & O \\ O & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$ $A=\begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix}$

n阶下三角 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots \\ a_{21} & \ddots & 0 \\ \vdots & & a_{mn} \end{bmatrix}$

$\det(A)=a_{11}a_{22}\cdots a_{mn}$

n阶上三角 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & 0 & a_{mn} \end{bmatrix}$

$\det(A)= a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{m1}$

推论1. 若A中某行(列)全为0，则 $\det(A)=0$

2. $\det(A^T)=\det(A)$

矩阵 M_{21} 去第二行和第一列

代余 $A_{21}=(-1)^3\det(M_{21})$

代数 $\det(A)$

行列式（数）

(1) $\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

$\det(A)\neq 0$ 可逆

$=0$ 奇异

(2) 一阶 $A=(a)$ $\det(A)=|a|=a$

$ax=b$

(3) 三阶 $A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

(4) $\det(A)=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{33}a_{21}a_{12}$

$=a_{11}\begin{vmatrix} & \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} & \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} & \end{vmatrix}$

(5) 代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}\det(M_{ij})$

行列式其它计算方式 按行分别展开×系数×代余

$\begin{cases} aA_{21} & a\text{为}\,a_{21} \\ A_{21}=(-1)^3\det(M_{21}) \\ \det(M_{21}) \end{cases}$

$\det(A^T)=\det(A)$

行列式的性质

分行(列)相加性

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

交换行列式的两行(列)后所得的新行列式只改变符号.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

若矩阵A中存在两行(列)相等，则 $\det(A)=0$ #

某行某列 $\times k \Leftrightarrow$ 原行列式的k倍.

若存在两行(列)成比例，则 $\det(A)=0$

设E_2为第二型初等矩阵 $\det(E_2)=k$

将某行/列 $\times k$ 加到另一行(列)后得到的新行列式相同.

比例为0

范德蒙行列式(必须从0次开始)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (c-b)(c-a)(b-a)$$

← a归左侧

eg.
$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 & 0 \\ 1-a & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$=(a+3)(a-1)^3$$

按列A归上侧

#对应公式

eg2.
$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2$$

证明:

$$原式 \underset{2\times(-a)+3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix} \overset{1\times(-a)+2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & (c-b)(c-a) \end{vmatrix}$$

$$=(c-b)(c-a)(b-a)$$

$|A|=0$ ⟨ 无穷 / 无解

$|A|\neq 0$ 唯一解

1. 计算行列式 $D_5=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$.

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

划的基础 剩的列

$$= -\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 5$$

定理1. A可逆 $\Leftrightarrow \det(A)\neq 0$

推论. A奇异 $\Leftrightarrow \det(A)=0$

定理2. $\det(AB)=\det(A)\det(B)=\det(BA)$

$\because AA^{-1}=I$

$\therefore \det$-I

$\therefore |A||A^{-1}|=1$ (互为倒数)

定理3. 设A是n阶矩阵, $\det(kA)=k^n\det(A)$

$n\geq 2$时 $\det(A+B)\neq\det(A)+\det(B)$

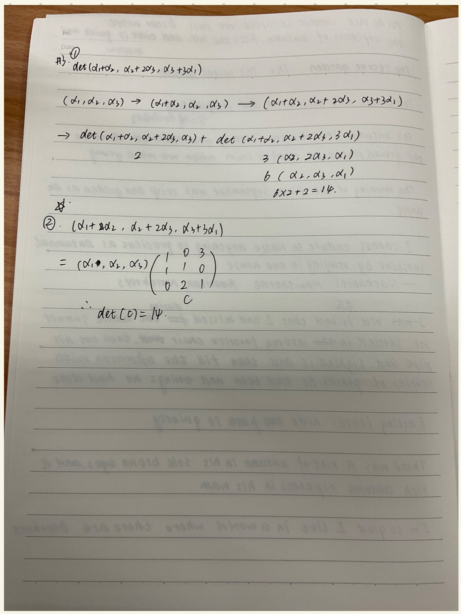
eg. $A+B=2I \quad A=B=I$

$\because |A+B|=2^n$

$|A|+|B|=2$

3. 已知 $\det(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=2$， 求：$\det(\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+2\alpha_3, \alpha_3+3\alpha_1)$

其中 $\alpha_i\in R^3, (i=1,2,3)$.



解. ①

$\det(\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+2\alpha_3, \alpha_3+3\alpha_1)$

$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\rightarrow(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)\longrightarrow(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+3\alpha_1)$

$\rightarrow \det(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3)+\det(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,3\alpha_1)$

2

$3(\alpha_2,2\alpha_3,\alpha_1)$

$6(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1)$

$6\times 2+2=14.$

或.

② $(\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+2\alpha_3, \alpha_3+3\alpha_1)$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&3\\1&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}}_{C}$$

$\therefore \det(C)=14.$

eg. $\det(A+B^{-1})=$

$\det(A)=1 \qquad \det(A^{-1})=1$

$\det(B)=2 \qquad \det(B^{-1})=\frac{1}{2}$

$\det(A^{-1}+B)=2$

$\cancel{(A^{-1}+B)^{-1}=A+B^{-1}}$ ✗

$(A+B^{-1})=A(A^{-1}+B)B^{-1}$

传统方法：法1.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3^2 & x_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & 0 \\ 1 & x_2^2 & x_2^2(x_2-x_1) \\ 1 & x_3^2 & x_3^2(x_3-x_1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & (x_2+x_1)(x_2-x_1) & x_2^2(x_2-x_1) \\ 1 & (x_3+x_1)(x_3-x_1) & x_3^2(x_3-x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2+x_1)\underline{(x_2-x_1)}x_3^2\underline{(x_3-x_1)}$$

$$-(x_3+x_1)\underline{(x_3-x_1)}\underline{(x_2-x_1)}x_2^2$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\left(x_3^2(x_2+x_1) - x_2^2(x_3+x_1)\right)$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\left(x_2x_3(x_3-x_2)+x_1(x_3^2-x_2^2)\right)$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_2x_3+x_1x_2+x_1x_3)$$

法2.

转置不改变行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix} = (x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1)\left[(x_4-x_3)(x_4-x_2)(x_4-x_1)\right]$$

$$= A_{41} + \underline{A_{42}x_4} + A_{43}x_4^2 + A_{44}x_4^3$$

x_4的系数

$$= x_3x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4$$

$$= (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x_4$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3^2 & x_3^3 \end{vmatrix} = \Leftrightarrow M_{42} = A_{42}$$

$\therefore M_{42} = (x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$

同法1.

§ 伴随矩阵

1. $A(\mathrm{adj}A) = (\mathrm{adj}A)A = |A|I$

$\hookrightarrow \dfrac{A(\mathrm{adj}A)}{|A|} = I$

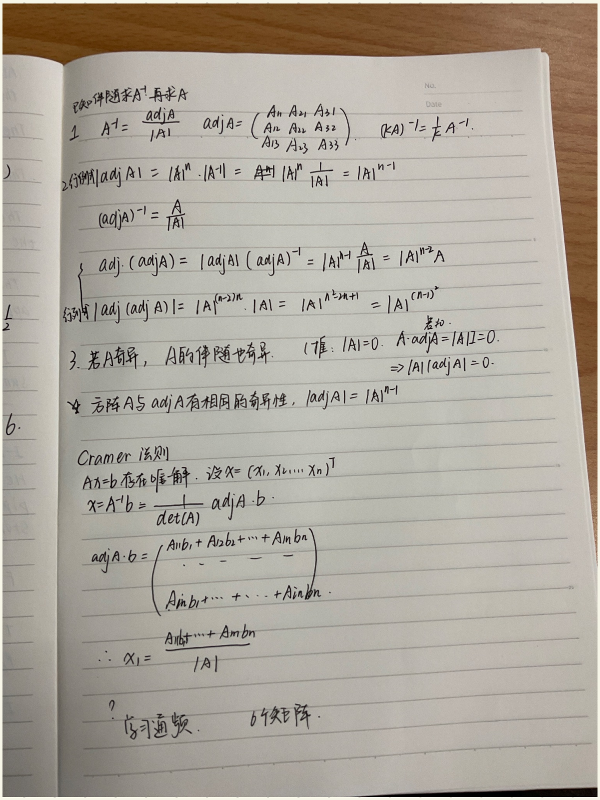
$\therefore A^{-1} = \dfrac{\mathrm{adj}A}{|A|}$

$$\mathrm{adj}A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$

$\mathrm{adj}A = A^{-1}|A|$

$|\mathrm{adj}A| = |A|^{n-1}$ $\quad \underline{\mathrm{adj}(\mathrm{adj}A) = |A|^{n-2} \cdot A.}$



已知伴随求A^{-1} 再求A

1 $A^{-1} = \dfrac{\mathrm{adj}A}{|A|}$ $\quad \mathrm{adj}A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$ $\quad (kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}.$

2 行列式 $|\mathrm{adj}A| = |A|^n \cdot |A^{-1}| = \cancel{A^{-1}}\, |A|^n \frac{1}{|A|} = |A|^{n-1}$

$(\mathrm{adj}A)^{-1} = \dfrac{A}{|A|}$

$\mathrm{adj}\cdot(\mathrm{adj}A) = |\mathrm{adj}A|\,(\mathrm{adj}A)^{-1} = |A|^{n-1}\dfrac{A}{|A|} = |A|^{n-2}A$

行列式 $|\mathrm{adj}(\mathrm{adj}A)| = |A|^{(n-2)n} \cdot |A| = |A|^{n^2-2n+1} = |A|^{(n-1)^2}$

3. 若A奇异，A的伴随也奇异. (推: $|A|=0$. $A \cdot \mathrm{adj}A = |A|I = 0.$ 若知.

$\Rightarrow |A|\,|\mathrm{adj}A| = 0.$

☆ 方阵A与adjA有相同的奇异性，$|\mathrm{adj}A| = |A|^{n-1}$

Cramer 法则

$Ax=b$ 存在唯一解. 设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

$x = A^{-1}b = \dfrac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}A \cdot b.$

$$\mathrm{adj}A \cdot b = \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{12}b_2 + \cdots + A_{1n}b_n \\ \cdots \\ A_{in}b_1 + \cdots + \cdots + A_{in}b_n \end{pmatrix}.$$

$\therefore x_1 = \dfrac{A_{11}b_1 + \cdots + A_{1n}b_n}{|A|}$

? 学习通频. $\quad$ 6个矩阵.

§3.1 R^n向量空间

1. 定义：

向量空间的公理

定义 令 V 为一定义了加法和标量乘法运算的集合. 这意味着，对 V 中的每一对元素 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$，可惟一对应于 V 中的一个元素 $\mathbf{x}+\mathbf{y}$，且对每一个 V 中的元素 $\mathbf{x}$ 和每一个标量 α，可惟一对应于 V 中的元素 $\alpha\mathbf{x}$. 如果集合 V 连同其上的加法和标量乘法运算满足下面的公理，则称为**向量空间**(vector space).

A1. 对 V 中的任何 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$，$\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$.

A2. 对 V 中的任何 $\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$ 和 $\mathbf{z}$，$(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$.

A3. V 中存在一个元素 $\mathbf{0}$，满足对任意的 $\mathbf{x}\in V$ 有 $\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$.

A4. 对每一 $\mathbf{x}\in V$，存在 V 中的一个元素 $-\mathbf{x}$，满足 $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$.

A5. 对任意标量 α 和 V 中的元素 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$，有 $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}$.

A6. 对任意标量 α 和 β 及 $\mathbf{x}\in V$，有 $(\alpha+\beta)\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x}$.

A7. 对任意标量 α 和 β 及 $\mathbf{x}\in V$，有 $(\alpha\beta)\mathbf{x}=\alpha(\beta\mathbf{x})$.

A8. 对所有 $\mathbf{x}\in V$，有 $1\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}$.

我们称集合 V 为向量空间的全集. 它的元素称为**向量**(vector)，并常用黑斜体小写字母 $\mathbf{u}$，$\mathbf{v}$，$\mathbf{w}$，$\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$ 和 $\mathbf{z}$ 表示. 术语标量(scalar)通常是指实数，尽管在某些情况下，它还用于指复数. 标量一般使用斜体小写字母 a，b，c 或希腊字母 α，β，γ 来表示. 在本书前五章中，术语标量一般指实数. 通常用实向量空间(real vector space)表示标量的集合，即实数集合. 在公理 A3 中，使用了黑体 $\mathbf{0}$，用以区分零向量和标量 0.

定义中一个重要的部分是两个运算的封闭性. 这个性质可以归纳如下：

104 第 3 章

C1. 若 $\mathbf{x}\in V$，且 α 为标量，则 $\alpha\mathbf{x}\in V$.

113 C2. 若 $\mathbf{x}$，$\mathbf{y}\in V$，则 $\mathbf{x}+\mathbf{y}\in V$.

判断 V 是否为向量空间的子集 { 乘运算 / 加运算

证明：(1) $x\in V,\ \forall\alpha\in R,\rightarrow \alpha x\in V$

(2) $x\in V,\ y\in V\rightarrow x+y\in V$

eg.

(2) $P_n=\{a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}\mid a_i\in R\}$ 次数小于n的实系数多项式

$C[a,b]=\{$所有$[a,b]$上的连续实函数$\}$

$S=\{(a,-a)^T\mid a\in R\}$

R^n $R^{m\times n}=\{$所有 $m\times n$ 实矩阵$\}$ 称S是R^2的一个子空间

(验证:用所有公理)

2. 子空间

定义 若 S 为向量空间 V 的非空子集，且 S 满足如下条件：

(i) 对任意标量 α，若 $\mathbf{x}\in S$，则 $\alpha\mathbf{x}\in S$.

(ii) 若 $\mathbf{x}\in S$ 且 $\mathbf{y}\in S$，则 $\mathbf{x}+\mathbf{y}\in S$.

则 S 称为 V 的**子空间**(subspace).

不含零向量的子集不可能是子空间

如何证 ⊕

eg. $S=R^2$ $S=\{(0,0)^T\}$

⊕ 特殊 R^n 子空间

(1) 矩阵A的零空间

设A是 $m\times n$ 矩阵,令 $N(A)=\{x\in R^n\mid Ax=0\}$

· 公理 设A是 $m\times n$ 矩阵,则 $N(A)$ 是 R^n 的子空间

$N(A)$ 称之为矩阵A的零空间,它是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间。

· 非齐次线性方程组 $Ax=b\ (b\neq 0)$ 不构成子空间.

(∵不存在零向量)

(2) 由向量张成(或生成)的子空间

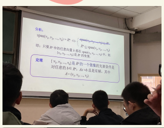
向量集合的张成

定义 令 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 为向量空间 V 中的向量. $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$（其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为标量）称为向量 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 的**线性组合**(linear combination). 向量 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 的所有线性组合构成的集合称为 $v_1, \cdots, v_n$ 的**张成**(span). 向量 $v_1, \cdots, v_n$ 的张成记为 $\mathrm{Span}(v_1, \cdots, v_n)$.

例 9 中我们看到 A 的零子空间是向量 $(1, -2, 1, 0)^T$ 和 $(-1, 1, 0, 1)^T$ 的张成.

· 定理 $Ax=b$ 有解 $\Leftrightarrow b \in \mathrm{span}(a_1, \ldots, a_n)$

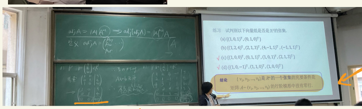
(3) 张集:



$\forall b \in R^n$, $Ax=b$ 有解

$R^n = \mathrm{Span}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$

无零行



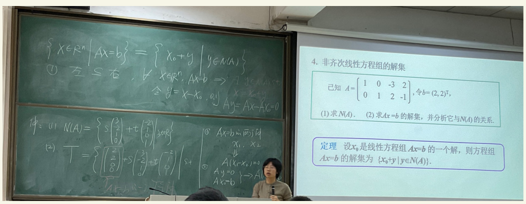
不存在全0行

推论 1) 少于 n 个的 R^n 中的向量组不可能张成 R^n.

2) R^n 中的 n 个向量 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ 能张成 R^n 的充要条件是方阵 $V=(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ 可逆，即 $\det(V) \neq 0$.

定理 设 x_0 是线性方程组 $Ax=b$ 的一个解，则方程组 $Ax=b$ 的解集为 $\{x_0+y \mid y \in N(A)\}$.

特解



解方程 $\begin{cases} \text{行列式} \\ \text{cramer(用行变换)} \end{cases}$

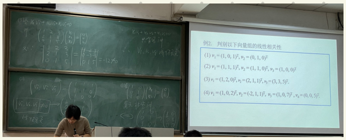
§3.3 线性相关性

1. 定义：R^n中的一个向量组：$v_1, v_2, \dots, v_k$，如果存在一组
不全为零的实数 $c_1, \dots, c_k \in R$，使得 $c_1v_1+c_2v_2+\dots+c_kv_k=0$ ← $Ax=0$ 存在非零解 ← $\det(A)=0$
则称 $v_1, v_2, \dots, v_k$ 线性相关

即 向量组 $v_1, v_2, \dots, v_k$ 是线性无关，如果 $c_1v_1+c_2v_2+\cdots+c_kv_k=\mathbf{0}$，则必有 $c_1=c_2=\cdots=c_k=0$.

$\det(A)\neq 0$ →
→ $Ax=0$ 只有零解
→ $N(A)=\{0\}$
→ $(A|0)$ 无自由变量

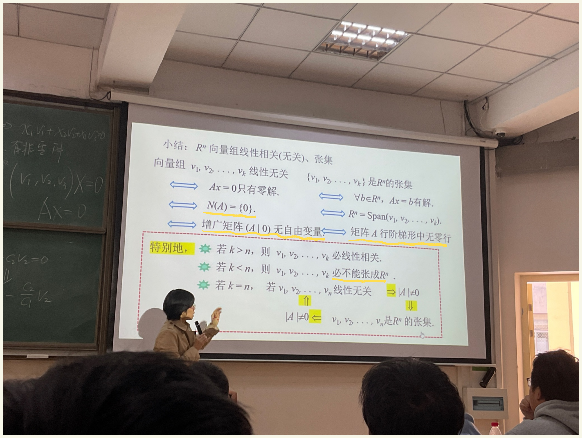
2. 推广：① 若 α, β 线性相关 ⇒ α, β, γ 线性相关
② 若 α, β, γ 线性无关 ⇒ α, β 线性无关



定理 设 $v_1, v_2, \dots, v_k$ 是 R^n 中的向量组，则它们线性无关的充要条件是齐次方程组 $Vx=0$ 只有零解，即 $N(V)=\{\mathbf{0}\}$.
同理，它们线性相关 ⇔ $Vx=0$ 有非零解，即 $N(V)\neq\{\mathbf{0}\}$.

推论 1) 设 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 是 R^n 中的 n 个向量. 则它们线性相关当且仅当 $|V|=0$ (即 V 是**奇异**的)，其中 $V=(v_1, \dots, v_n)$.
2) 设 $v_1, v_2, \dots, v_k$ 是 R^n 中的向量组，若 $k>n$，则它们一定线性相关。

几何解释：R^n 中两个非零向量线性相关即共线；
R^n 中三个非零向量线性相关即共面。



判断线性相关：$\det(A)=0$
无关：$\det(A)\neq 0$
→ 矩阵 → 行阶梯形有全0行 / 无全0行 → 非齐次

子空间的并不一定是子空间，交一定是。

定理 向量组$v_1, v_2, ..., v_k$ $(k>1)$线性相关的充要条件是向量组中有一个向量可由其余向量线性表出。

即 $S = \mathrm{Span}(v_1, v_2, ..., v_k) = \mathrm{Span}(v_1, v_2, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_k)$

定理 若向量组 $v_1, v_2, ..., v_k$ $(k>1)$线性无关，而$v_1, v_2, ..., v_k, u$线性相关，则 u 必可被$v_1, v_2, ..., v_k$唯一线性表出。

练习 设 v_1, v_2, v_3线性无关，而v_1, v_2, v_4线性相关，求证：v_4可以被v_1, v_2, v_3唯一线性表出。

证明：$\because$ V_1, V_2, V_4 线性相关

$\therefore$ 设 $C_1V_1 + C_2V_2 + C_3V_3 + C_4V_4 = 0$

若 $C_4 = 0$ 则 $C_1V_1 + C_2V_2 + C_3V_3 = 0$

$\because$ C_1, C_2, C_3 线性无关

$\therefore$ $C_1 = C_2 = C_3 = 0$

$\because$ $C_3 = 0$

$\therefore$ $C_1V_1 + C_2V_2 + C_4V_4 = 0$ 且 $C_1 = C_2 = C_4 = 0$

$\therefore$ C_1, C_2, C_4 线性相关

$\therefore$ 矛盾

$\therefore$ $C_4 \neq 0$

$\therefore$ $V_4 = \dfrac{-C_1V_1 - C_2V_2 - C_3V_3}{C_4}$

反证

设 $\forall S, t \in R$

$V_4 = S_1V_1 + S_2V_2 + S_3V_3$ ①

$V_4 = t_1V_1 + t_2V_2 + t_3V_3$ ②

$\therefore$ ①-② $(S_1 - t_1)V_1 + (S_2 - t_2)V_2 + (S_3 - t_3)V_3 = 0$

$\because$ V_1, V_2, V_3 线性无关

$\therefore \begin{cases} S_1 - t_1 = 0 \\ S_2 - t_2 = 0 \\ S_3 - t_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow S_n = t_n$

$\therefore$ V_4 可被 V_1, V_2, V_3 唯一线性表出

基和维数

向量空间的基

定义：若线性空间 V 中的向量组 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 满足

i) $v_1, v_2, \dots, v_n$ 线性无关；

ii) $v_1, v_2, \dots, v_n$ 张成 V（$\mathrm{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = V$）

时，则称 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 为 V 的**基**。——最小张集

例 $e_1=(1, 0, \dots, 0)^T, e_2=(0, 1, \dots, 0)^T, \dots, e_n=(0, \dots, 0, 1)^T$

就是 R^n 的一组基，称为 R^n 的**标准基**。

R^n 的任意一组基必仅有 n 个向量

向量空间的维数

推论 如果向量组 $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ 可以被 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 线性表出，且 $u_1, u_2, \dots, u_m$ 必线性无关，则 $m \le n$.

定理 向量空间 V 的每一组基所含向量个数相同。

定义 向量空间 V 的每一组基所含向量个数称为向量空间 V 的**维数**，记作 $\dim V$. 若 V 的基所含向量个数有限时，称 V 是**有限维**的，否则称之为**无限维**向量空间。

例

- 零子空间 $\{\mathbf{0}\}$ 的维数为 0.
- $\dim \boldsymbol{R}^n = n$, $\dim \boldsymbol{R}[x]_n = n$.

设 x 和 y 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的非零向量，则

- $\dim \mathrm{span}(x) = 1$.
- $\dim \mathrm{span}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{若} x \text{和} y \text{线性相关}; \\ 2, & \text{若} x \text{和} y \text{线性无关}. \end{cases}$
- U 是 V 的子空间，则 $\dim U \le \dim V$.

设 $\dim V = n$，则 V 中任意超过 n 个向量必线性相关；而少于 n 个向量的向量组必不能张成 V.

基的扩充 设 (a, b, c) $\det \neq 0$

$N(PA) \geq N(A) \rightarrow N(P^{-1}\underbrace{A}_{PA}) \geq N(\underbrace{A}_{PA})$.

$N(PA) \leq N(P^{-1}PA) = N(A)$

- $\dim N(A)$ 为矩阵 A 的零度 (nullity)

  矩阵 A 的零度 = 自由变量数

- U, V 均为 R^n 子空间，$U \subseteq V$，$\dim U \leq \dim V$

坐标与基变换

1\. R^2中的向量 $v=(7,4)^T$ 在标准基 $\boldsymbol{e}_1=(1,\ 0)^T$ $\boldsymbol{e}_2=(0,1)^T$,下的坐标是 $(7,4)^T$.

R^2中的向量 $v=(7,4)^T$ 在标准基 $\boldsymbol{e}_2=(0,1)^T$ $\boldsymbol{e}_1=(1,\ 0)^T$,下的坐标是 $(4,7)^T$.

"有序"

2\.

2. 基变换公式

定理 1．设 $\{\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\dots,\boldsymbol{w}_n\}$ 和 $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n\}$ 是V的两组基，则必唯一存在一个n阶可逆方阵 $\boldsymbol{S}$，使得

$$(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\dots,\boldsymbol{w}_n)=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n)\,\boldsymbol{S}$$

定 义 我们称上式中的可逆矩阵 S 为从基 $\{\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\dots,\boldsymbol{w}_n\}$ 到基 $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n\}$的**转移矩阵**.

显然，若$V=R^n$，则 $\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n)^{-1}(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\dots,\boldsymbol{w}_n)$

例 3　设$\boldsymbol{v}_1=(5,2)^T,\boldsymbol{v}_2=(3,1)^T$以及$\boldsymbol{u}_1=(3,2)^T,\boldsymbol{u}_2=(1,1)^T$. 求由基$\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\}$ 到基 $\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\}$的转移矩阵.

解：即求 S，使得 $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)S$

$\Longrightarrow S=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)^{-1}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)$

3\.

3. 坐标变换公式

定理 2　设 S 为从一组基 $\{\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\dots,\boldsymbol{w}_n\}$ 到另一组基 $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n\}$的转移矩阵．如果向量$\boldsymbol{u}$在基 $\{\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\dots,\boldsymbol{w}_n\}$ 和$\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n\}$下的坐标向量分别为$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$，则

$$\boldsymbol{y}=S\,x\,.$$

$\boldsymbol{W=VS}$

$+$

$\boldsymbol{u=Wx}$
$\boldsymbol{u=Vy}$

$\Downarrow$

$\boldsymbol{Vy=VSx}$

因为 $N(V)=\{0\}$ $\Downarrow$

$\boldsymbol{y=Sx} \Leftarrow \boldsymbol{V(y-Sx)=0}$

例 5　设 $\boldsymbol{v}_1=(1,1,1)^T,\boldsymbol{v}_2=(2,3,2)^T,\boldsymbol{v}_3=(1,5,4)^T$ }及 $\boldsymbol{u}_1=(1,1,0)^T,\boldsymbol{u}_2=(1,2,0)^T,\boldsymbol{u}_3=(1,2,1)^T$.

1) 求从基 $E=\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\}$ 到基 $F=\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3\}$的转移矩阵 S.
2) 给定 $\boldsymbol{w}=3\boldsymbol{v}_1+2\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_3$, 求向量 $\boldsymbol{w}$ 在基 F 下的坐标 x.

1) $S=\begin{bmatrix}1&1&-3\\-1&-1&0\\1&2&4\end{bmatrix}$

2) $x=S(3,2,-1)^T=(8,-5,3)^T$

$\{u_1,u_2\},\{v_1,v_2\}$是R^2的两组基

$$\left.\begin{aligned}u_1&=c_{11}v_1+c_{21}v_2\\u_2&=c_{12}v_1+c_{22}v_2\end{aligned}\right\}\to(u_1,u_2)=\underbrace{(v_1,v_2)}_{\text{基}}\underbrace{\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}}_{\text{坐标}}$$

1\.

2\. 基变换公式

过渡矩阵的计算
- 公式
- 定义
  - 直接求
  - 逆矩阵

行空间和列空间

回忆特殊子空间

设 $A=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{matrix} \end{array} \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \end{matrix}$

- Span (a_1, a_2, a_3, a_4) 是 $\underline{\boldsymbol{R}^3}$ 的子空间.
  -----矩阵A的列空间.
- $N(A)$ 是 $\underline{\boldsymbol{R}^4}$ 的子空间.
  -----矩阵A的零空间.
- $N(A^T)$ 是 $\underline{\boldsymbol{R}^3}$ 的子空间.
  -----矩阵A的左零空间.
- Span (r_1, r_2, r_3) 是 $\underline{\boldsymbol{R}^4}$ 的子空间.
  -----矩阵A的行空间.

1. 定义

定 义 设 A 一个 $m\times n$ 矩阵. 由 A 的行向量张成的空间称为矩阵 A 的行空间. 它是 R^n的子空间.

定 义 矩阵A的行空间的维数称为矩阵的秩，记作 rank (A).

定 义 设 A 一个 $m\times n$ 矩阵. 由 A 的列向量张成的空间称为矩阵 A 的列空间. 它是 R^m的子空间.

1.列空间的基：行阶梯中首变量对应的原列

维数：基的个数

结论：
1. 初等行变换不改变列向量线性关系.
2. 初等行变换不改变列空间的维数.
3. 矩阵列空间的维数等于其行阶梯形中首元个数.
4. 初等行变换会改变列空间.

2. 行空间的基：行阶梯形除非全零行外

秩：基的个数 / 首1的个数

结 论
1. 初等行变换不改变行空间.
2. 行阶梯形矩阵 U 中的非零行向量构成了A行空间的一组基.
3. A的行空间维数等于其行阶梯形中首元的个数.

3. 结论

→均为首变量的个数

定 理 矩阵A列空间的维数=行空间的维数= rank(A).

推 论 1 $\text{rank}(A^T) = \text{rank}(A)$ 注意到：A^T行空间= A的列空间

推 论 2 设 A是 $m\times n$ 矩阵，则$\text{rank}(A) \le \min(m, n)$.

推 论 3 设 A是 $m\times n$ 矩阵，则 $\text{rank}(A)=0 \Leftrightarrow A=O$ → 无首变量

m=3 n=2

x x
x x
x x

m=2 n=3

x x x
x x x

m=n=2

x x
x x

4. 秩-零度定理：若A为m×n矩阵，则 $\text{rank}(A) + \dim(N(A)) = n$

零度=自由变量的个数

推 论 4 设A是 $m\times n$ 矩阵，且 $\text{rank}(A) < n$

$\Leftrightarrow Ax=0$ 有非零解.

$\Leftrightarrow A$ 的列向量线性相关.

$\Leftrightarrow N(A) \ne \{0\}$.

$\Leftrightarrow \dim N(A) > 0$.

$\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$ 线性相关

推 论 4* 设A是 $m\times n$ 矩阵，且 $\text{rank}(A) = n$

$\Leftrightarrow Ax=0$ 只有零解.

$\Leftrightarrow A$ 的列向量线性无关.

e.g.1

设 A 为2×3 矩阵, 且 rank(A) = 2.

(1) dim $N(A)$ = 1 , Ax=0 有多少解？无穷

(2) 任意给定 $b \in \mathbb{R}^2$, $Ax=b$ 是否一定有解? 是

$\mathrm{rank}(A)=2<m$

$m\times n$ $n\times m$

e.g.2

6 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，且 $m<n$. 求证：$\det(A^TA)=0$.

进一步问： $\det(AA^T)=0$对吗？ $m\times m$ (不对，不一定成立)

思路: ① $\det(A^TA)=0$

$\downarrow$

A^TA为$n\times n$方阵

即 A^TA 奇异

$\downarrow$

$\mathrm{rank}(A^TA)<n$.

$\mathrm{rank}(A)\le m<n$

$\therefore$ $Ax=0$ 存在非零解

则 $A^TAx=0$

$\therefore$ A^TA 奇异 $\det(A^TA)=0$

② $N(A)\subseteq N(A^TA)$

$\dim N(A)\le \dim N(A^TA)$

$n-\mathrm{rank}(A)\le n-\mathrm{rank}(A^TA)$

$\mathrm{rank}(A^TA)\le \mathrm{rank}(A)\le m<n$

$\therefore$ $\mathrm{rank}(A^TA)<n$

$\therefore$ A^TA 奇异

5.

4. 线性方程组的解理论

定理 3 设 A为$m\times n$ 矩阵. 则 $Ax=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A)<n$.

定理 4 设A为$m\times n$矩阵.则 $Ax=b$ 有解 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A\mid b)=\mathrm{rank}(A)$

定理 5 设 A为$m\times n$ 矩阵. 则 $\forall\, b\in \boldsymbol{R}^m$， $Ax=b$ 都有解 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A)=m.$

6.

5. 秩的不等式和等式证明

1. 任何矩阵与可逆矩阵相乘，秩不变。

设 P，Q 可逆, 则$\forall$ A, 有
$\text{rank}(PA)=\text{rank}(AQ)=\text{rank}(A)$

思考角度1：齐次线性方程组(秩零度定理)。

同课后练习题 22.

2． $\text{rank}(AB) \le \min\{\ \text{rank}(A), \text{rank}(B)\ \}$

同课后练习题 28.　　思考角度2：行空间或列空间

也可以用角度1

3. 当$AB=O$时， $\text{rank}(A)+\text{rank}(B) \le A$的列数.

同课后练习题 25.　　角度1、2结合

一般地， $\text{rank}(AB) \ge \text{rank}(A)+\text{rank}(B)-A$的列数

4. $\text{rank}(A \pm B) \le \text{rank}(A)+\text{rank}(B)$

同课后练习题 21.　　思考角度2：行空间或列空间

5. 设 A 是 n 阶矩阵($n>1$). 则有

$$\text{rank}(\text{adj}\ A) = \begin{cases} n, & \text{当 rank}(A) = n \text{ 时} \\ 0, & \text{当 rank}(A) < n-1 \text{ 时} \\ 1, & \text{当 rank}(A) = n-1 \text{ 时} \end{cases}$$

7.

6. 矩阵的标准形

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得 $\text{rank}(A)=2$
……

$$\downarrow \text{列变换}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

I_2　O　O　O

初等变换不改变矩阵的秩

称 $\begin{bmatrix} I_2 & O \\ O & O \end{bmatrix}$为$A$的**等价标准形**。

结论：设 A是$m\times n$矩阵，若 $\text{rank}(A)=r$， 则 A 拥有标准形

$$\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

即：存在m阶可逆矩阵P及n阶可逆矩阵Q，使得

$$PAQ=\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

注：所有的同型矩阵可以按照秩(标准形)做分类：同秩的矩阵拥有相同的标准形。

e.g.

rank (A)=2

4. 设 A是 3×5 矩阵. 若 a_1, a_3 线性无关，且

$a_2=2a_1$， $a_4=2a_1+a_3$, $a_5=a_1-a_3$ → 线性相关

求A的行最简行$U=?$　　答：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

总结 ✡✡✡

设 A 是 $m\times n$ 矩阵，

(1) $m=n$ 此时系数矩阵可分为奇异与非奇异两种类型

A 奇异 $\Leftrightarrow$ $Ax=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow$ $N(A)\neq\{0\}$

$\Updownarrow$ $\Leftrightarrow$ $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 线性相关

det(A)=0 $\Leftrightarrow$ A 的行阶梯形中有自由变量

$\Leftrightarrow$ rank(A)<列数

$\Leftrightarrow$ 首元个数小于列数 （列数=行数）

$\Rightarrow$ $(A\mid b)$ 可能无解

$(A\mid b)$ 若有解x_0，则存在自由变量，必有无穷解。

且其解集为 $\{x_0+y\mid y\in N(A)\}$

设 A 是 $m\times n$ 矩阵，

(2) $m>n$ 则 A 的行阶梯形中必存在全零行

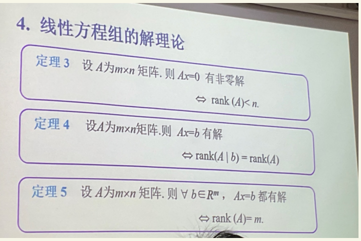
$\Rightarrow$ $(A\mid b)$ 可能无解

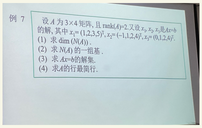
$\Rightarrow$ $Span(a_1,a_2,\cdots,a_n)\neq R^m$

(3) $m<n$ 则 A 的行阶梯形中必存在自由变量

$\Rightarrow$ $Ax=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow$ $N(A)\neq\{0\}$

$\Leftrightarrow$ $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ rank(A)<列数





(2) $A(x_1-x_2)=0$

$x_1-x_2=\xi_1$

$x_1-x_3=\xi_2$

$\because \dim(N(A))=2$

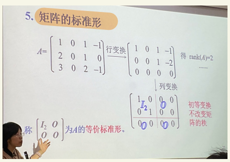
$\therefore$ 需两个线性无关的向量

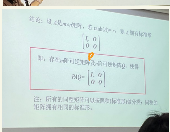
(4) _ _ _ _

_ _ _ _

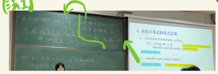
_ _ _ _

5. 矩阵的标准形





(法1)



#28(3)

$\text{rank}(AB)\le\text{rank}(A)$

$\text{rank}(B^TA^T)\le\text{rank}(B^T)=\text{rank}(B)$

$\therefore \text{rank}(AB)\le\min\{\text{rank}(A),\ \text{rank}(B)\}$

(法2. 思考角度 2)

证明: $\text{rank}(AB)\le\text{rank}(B)$

$\because Bx=0\Rightarrow ABx=0$

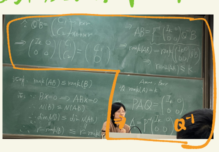
$\therefore N(B)\subseteq N(AB)$

$\therefore \dim(N(B))\le\dim(N(AB))$

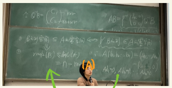
$\Leftrightarrow r-\text{rank}(B)\le r-\text{rank}(AB)$

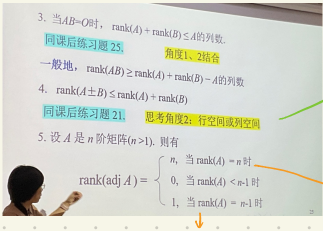
故得证

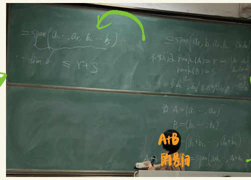
思考角度 3. 等价标准形



#21. ∵ B的列空间







$\because |A| = 0$

$\therefore A\,\mathrm{adj}A = |A| \cdot I = 0$

$\Rightarrow \underset{n-1}{\mathrm{rank}(A)} + \underset{1}{\mathrm{rank}(\mathrm{adj}A)} \le n$

$A^T = \mathrm{adj}A$ A可逆

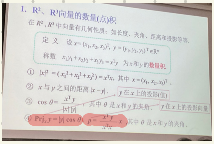
R^2, R^3向量的数量积

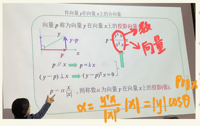
1. $x=(x_1,x_2,x_3)^T$ $y=(y_1,y_2,y_3)^T$

$$xy^T = x^Ty$$

① $|x|^2=x^Tx$

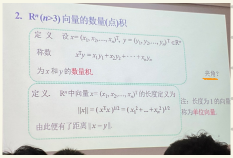
② x与y之间

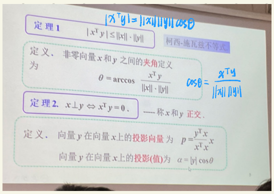




$\mathrm{Prj}_x y$

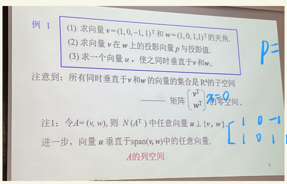
$\alpha=\frac{y^Tx}{|x|}=|y|\cos\theta$ ($y^Tx=|x||y|\cos\theta$)





证:$(x+ty)^T(x+ty)\geq 0$

利用以t为一元二次 Δ



$p=\frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}\cdot w$

设A是n阶矩阵,求证:

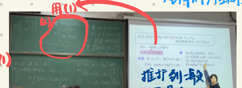
(1) 对$\forall x\in R^n$, $Ax\in col(A)$

设$A=(a_1,a_2,\dots,a_n)$

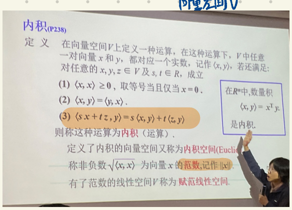
则col

矩阵的列空间⊥其零空间

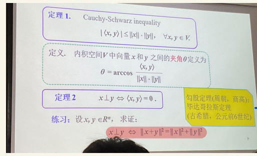
用(1)



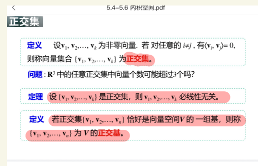
推广到一般向量空间V

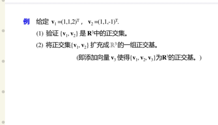


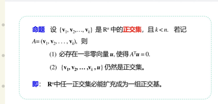
$$\langle sx+tz,y\rangle = sx$$
$$s\langle x,y\rangle+t\langle z,y\rangle$$



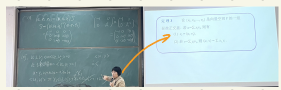
$\to R^3$

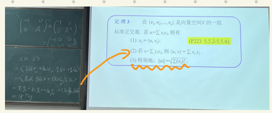






标准正交基





- 2个正交矩阵之和不一定为正矩
- 2个正交矩阵之积一定为正矩

正交矩阵：$n\times n$ 矩阵中的列向量构成 R^n 中的一组规范正交基

(orthogonal matrix).

244 **定理 5.5.5** 一个 $n\times n$ 矩阵 Q 是正交矩阵的充要条件为 $Q^TQ=I$.

证 由定义，一个 $n\times n$ 矩阵 Q 是正交矩阵的充要条件为它的列向量满足

$$\mathbf{q}_i^T\mathbf{q}_j=\delta_{ij}$$

然而，$\mathbf{q}_i^T\mathbf{q}_j$ 为矩阵 Q^TQ 的 (i, j) 元素．因此，Q 是正交矩阵的充要条件为 $Q^TQ=I$. ■

由定理可得，若 Q 为一正交矩阵，则 Q 可逆，且 $Q^{-1}=Q^T$.

▶**例 6** 对任意固定的 θ，矩阵

$$Q=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

是正交的，且

$$Q^{-1}=Q^T=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$ ◀

例 6 中的矩阵 Q 可看成是一个从 $\mathbf{R}^2$ 到 $\mathbf{R}^2$ 的线性变换，其作用是将每一向量旋转一个角度 θ，而向量的长度保持不变(见 4.2 节中的例 2)．类似地，Q^{-1} 可看成是一个旋转角度为 $-\theta$ 的旋转(见图 5.5.1).

一般地，乘以一个正交矩阵时，内积保持不变[即 $\langle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle=\langle Q\mathbf{x}, Q\mathbf{y}\rangle$]．这是成立的，因为

$$\langle Q\mathbf{x}, Q\mathbf{y}\rangle=(Q\mathbf{y})^TQ\mathbf{x}=\mathbf{y}^TQ^TQ\mathbf{x}=\mathbf{y}^T\mathbf{x}=\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$$

特别地，若 $\mathbf{x}=\mathbf{y}$，则 $\|Q\mathbf{x}\|^2=\|\mathbf{x}\|^2$，因此 $\|Q\mathbf{x}\|=\|\mathbf{x}\|$，即乘以一个正交矩阵仍保持向量的长度.

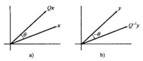


图 5.5.1

245 **正交矩阵的性质** 若 Q 为一 $n\times n$ 正交矩阵，则：

(a) Q 的列向量构成了 $\mathbf{R}^n$ 的一组规范正交基.

(b) $Q^TQ=I$.

(c) $Q^T=Q^{-1}$.

(d) $\langle Q\mathbf{x}, Q\mathbf{y}\rangle=\langle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$.

(e) $\|Q\mathbf{x}\|_2=\|\mathbf{x}\|_2$.

置换矩阵

置换矩阵(permutation matrix)是将单位矩阵的各列重新排列得到的矩阵．显然，置换矩阵为正交矩阵．若 P 为一个将单位矩阵的各列重新按照 $(k_1, \cdots, k_n)$ 进行排列得到的置换矩

正交矩阵转置和逆仍是正交矩阵

$|\det(Q)|=1$

5. 标准正交基的构造

由定义，只要将 V 的一组正交基单位化即可得到 V 的一组标准正交基.

正交基 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ $\xrightarrow{\text{单位化}}$ 标准正交基 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$

$$\mathbf{u}_1=\frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|},\quad \mathbf{u}_2=\frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|},\quad \ldots,\quad \mathbf{u}_n=\frac{\mathbf{v}_n}{\|\mathbf{v}_n\|}$$

如何得到 V 的正交基呢？

途径 1：从已知的正交集开始，通过一个一个的添加，最终扩充成为一组正交基.

途径 2：从已知得到 V 的一组基，将它改造成正交基.

------ **Gram-Schmidt 正交化**

Gram-Schmidt 正交化过程

设 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ 是 V 的一般基.

正交化（正交基）：

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{x}_1$$
$$\mathbf{v}_2=\mathbf{x}_2-\frac{\langle\mathbf{x}_2,\mathbf{v}_1\rangle}{\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1\rangle}\mathbf{v}_1$$
$$\mathbf{v}_3=\mathbf{x}_3-\frac{\langle\mathbf{x}_3,\mathbf{v}_1\rangle}{\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1\rangle}\mathbf{v}_1-\frac{\langle\mathbf{x}_3,\mathbf{v}_2\rangle}{\langle\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_2\rangle}\mathbf{v}_2$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{v}_n=\mathbf{x}_n-\frac{\langle\mathbf{x}_n,\mathbf{v}_1\rangle}{\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1\rangle}\mathbf{v}_1-\frac{\langle\mathbf{x}_n,\mathbf{v}_2\rangle}{\langle\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_2\rangle}\mathbf{v}_2-\cdots-\frac{\langle\mathbf{x}_n,\mathbf{v}_{n-1}\rangle}{\langle\mathbf{v}_{n-1},\mathbf{v}_{n-1}\rangle}\mathbf{v}_{n-1}$$

单位化（标准正交基）：

$$\mathbf{u}_1=\frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|},\quad \mathbf{u}_2=\frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|},\quad \ldots,\quad \mathbf{u}_n=\frac{\mathbf{v}_n}{\|\mathbf{v}_n\|}$$

满足 $\mathrm{Span}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_i)=\mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i), \forall i=1,\ldots,n$.

课后作业 2

$u=0 \Leftrightarrow \|u\|=0 \Leftrightarrow \langle u,u\rangle=0 \rightarrow u^Tu=0$

令 $u=c_1v_1+\cdots+c_nv_n$ 则

$\langle u,u\rangle=c_1v_1u^T+\cdots+c_nv_nu^T=0$ ∴ 得证

§6

特征值

· $Av=\lambda v$ (A为方阵, $\lambda\in C$, v为非零向量)

λ是A的一个特征值, v称为属于λ的一个特征向量 (kv同是, $k\in R$且$k\neq 0$)

v是非零向量

e.g. $(A-3I)v=0$ $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix} \rightarrow v=b\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ $(b\neq 0)$

· 结论1

相关结论

$Av=\lambda v$

结论1 若λ_0是矩阵A的特征值，则A的属于特征值λ_0的特征向量有无穷多个，且为 $(A-\lambda_0 I)v=0$ 的所有非零解。

特别地，若$\lambda=0$是A的特征值，你能得到A的什么性质?

奇异

定义 称 $V_{\lambda_0}=\{v\,|\,Av=\lambda_0 v\}=N(A-\lambda_0 I)$ 是矩阵A的属于特征值λ_0的特征空间.

注: 特征空间V_{λ_0}除掉零向量外其余都是A的属于λ_0的特征向量.

特征空间V_{λ_0} $\begin{cases}\text{零向量}\\ \text{特征向量}\end{cases}$

· 结论2

$Av=\lambda v$

结论2 若$\lambda=0$是A的特征值，则A必奇异。 $\det(A-\lambda I)=0$

反之，矩阵A是奇异矩阵，则$\lambda=0$一定是它的一个特征值.

$Av=\lambda v$

结论3 矩阵A的一个特征向量不可能属于两个不同特征值. 即 若$\lambda_1\neq\lambda_2$，则 $V_{\lambda_1}\cap V_{\lambda_2}=\{0\}$.

因此: 矩阵A的属于两个不同的特征值的特征向量x_1, x_2是线性无关的.

定理1. 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$是$A$的互不相同的特征值，则其相应的特征向量$x_1,x_2,\cdots,x_k$必线性无关.

计算方法 $(\quad)\_\_=0\_\_$

· $\det(A-\lambda I)=0$ 称为A的特征方程

定理2 设A是$n\times n$矩阵，则以下命题等价:

(1) λ是A的特征值.
(2) $(A-\lambda I)x=0$有非零解.
(3) $N(A-\lambda I)\neq\{0\}$.
(4) $A-\lambda I$ 是奇异的.
(5) $\det(A-\lambda I)=0$.

定义 方程 $\det(A-\lambda I)=0$ 称为矩阵A的特征方程.
多项式 $p(\lambda)=\det(A-\lambda I)$ 称为A的特征多项式.

注: 在复数范围内，n阶矩阵A的特征值（包括重根）恰好n个.

$\sqrt{-1}=i$

求矩阵A的特征值与特征向量的步骤:

求出特征多项式, $\det(A-\lambda I)$ ⟹ 求解特征方程$\det(A-\lambda I)=0$ 算出所有特征值
⟹ 对每个特征值λ: 求解方程组$(A-\lambda I)x=0$
⟹ 得到属于λ相应的特征空间$V_\lambda=N(A-\lambda I)$.

特征空间为$\mathrm{span}((a,b,\dots)^T)$

三角矩阵特征值为对角线元素

A每行相加均为c, 则c为A的一个特征值 则$(1,1,\dots,1)^T$是A的一个特征向量

列(?)

正交矩阵 $\begin{cases}|\det(A)|=1\\ \text{实特征值必为}\pm 1\\ \text{特征值模必为}1\\ \text{复数必然存在共轭复数}\end{cases}$

课后作业: $Q^TQ=QQ^T=I$

$Qx=x,\ x\neq 0$

题22. 已知 Q 是正交矩阵, x 是它的属于特征值1的一个特征向量,
求证: x 也是Q^T的一个特征向量。

思路: $Q^Tx = Q^TQx = x$ 思考: 若此题中特征值$\lambda\neq 1$呢?

题33. 已知 A,B 是同型方阵, λ 是 AB 的特征值,
求证: (1) $\lambda\neq 0$ 时, λ 也是 BA 的特征值.
(2) $\lambda=0$ 时, λ 也是 BA 的特征值.

(1) 用定义: 已知 $ABv=\lambda v$, $v\neq 0$

问 $BA\,\underline{Bv} = \lambda\,\underline{Bv}$, $\underline{Bv}\neq 0$

必须说明 Bv 非零 反证法

(2) 用等价条件: 已知

$|AB-0I|=0$

$\Downarrow$

$|BA-0I|=0$

特征值中的非零个数 = 秩 = rank(A)

特征值的性质

特征值的性质

定理 3 设 A 是 $n\times n$ 矩阵, 若 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ 是它的所有特征值(算上重根), 则

(1) $\lambda_1\cdot\lambda_2\cdots\lambda_n=\det(A)$

(2) $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ ----矩阵A的迹, 记作 $\mathrm{tr}(A)$ 对角线元素之和

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2=a_1+a_4 \\ \lambda_1\lambda_2=\det(A) \end{cases}$$

练 习: 设 $A=\begin{pmatrix}1&3&2\\x&y&4\\0&0&1\end{pmatrix}$ 有特征值 1, 2, 2, 求 x 和 y.

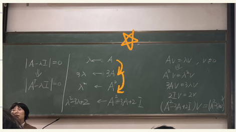
推 论 矩阵 A **可逆**当且仅当 0 不是 A 的特征值.

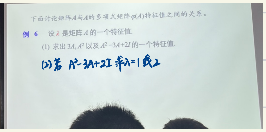
进一步, 讨论可逆矩阵A与A^{-1}的特征值的关系。见6.1节习题4

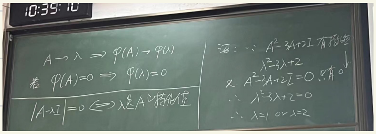
再讨论矩阵A与A^T的特征值的关系。见6.1节习题12

A的特征值	A^{-1}的特征值	A^T的特征值
λ	λ^{-1}	λ

e.g.







e.g. 3x3矩阵A有特征值 -1, 2(二重), 判断下列矩阵奇异性

A	$A-2I$	$\overset{\lambda^{-1}}{A^{-1}}-I$	$2I-\overset{\lambda}{A^T}$	adjA (A可逆) $=\lvert A\rvert A^{-1}=-4A^{-1}$
-1	-3	-2	3	4
2	0	$-\frac{1}{2}$	0	-2
2	0	$-\frac{1}{2}$	0	-2
det	0	$\neq$	0	$\neq$

矩阵的相似对角化

相似矩阵:

相似矩阵

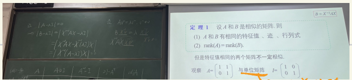
> **定 义**　设 A 和 B 是$n\times n$ 矩阵. 如果存在一个可逆矩阵 X, 使得 $B=X^{-1}AX$. 则称 B **相似于** A. 并称矩阵 X 将 A 相似变换成 B.

注: 设 A, B, C 是 $n\times n$ 矩阵. 则
(1) 自反性---- A 相似于A.
(2) 对称性----若 B 相似于 A, 则 A 相似于B.
　(因此称 A 与 B 是相似的(矩阵).)
(3) 传递性-----若 B 与A 相似, C 与B相似, 则 C 与A相似.

定理1.设A和B是相似

若A和B相似,则 $\begin{cases} A^T \text{和} B^T \text{相似} \\ A^k \text{和} B^k \text{相似} \end{cases}$

$(X^{-1})^T=(X^T)^{-1}$



只与单位阵相似

零矩阵只与零矩阵相似

对角化:

可对角化的条件

> **定 义**　如果矩阵 A 与对角矩阵D相似, 则称矩阵 A 可**对角化**.
> A 可**对角化** $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵X 以及对角矩阵D, 使得$X^{-1}AX=D$.
> 并称 X 将A对角化为D; D称为A的相似对角矩阵.

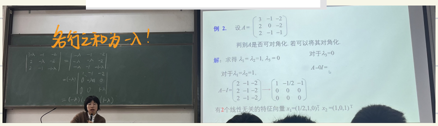
问题:
1. 矩阵 A可对角化的条件是什么?
2. 若矩阵 A可对角化, 那么如何求 X, D?

定理2:

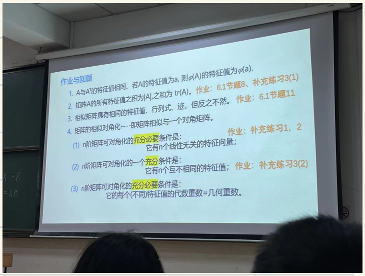
> **定 理 2**　$n\times n$ 矩阵 A可对角化的充要条件是: 矩阵 A 有 n个 线性无关的特征向量.

> **回顾**. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 是A的互不相同的特征值, 则其相应的特征向量 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 必线性无关.

> **推论**　如果 $n\times n$ 矩阵 A 有 n 个互不相同的特征值, 则 A 可对角化.



各行之和为-λ!



Step: (1) 求出A的所有不同特征值 $\lambda_1,\dots,\lambda_k$
(2) 对于每个λ,求出相应特征空间的一组基
(3) n个线性无关向量 $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ $X=(x_1,\dots,x_n)$
(4) $X^{-1}AX=D$

相似矩阵具有相同特征值.行列式.迹.反之不然.

例 2.　设 $A=\begin{pmatrix}3&-1&-2\\2&0&-2\\2&-1&-1\end{pmatrix}$

判别A是否可对角化. 若可以将其对角化.

解: 求得 $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=0$ 代数重数为1

代数重数为2

对于$\lambda=1$

$$A-I=\begin{pmatrix}2&-1&-2\\2&-1&-2\\2&-1&-2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1/2&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\dim N(A-I)=2$　几何重数为2

对于$\lambda=0$

$$A-0I=\begin{pmatrix}3&-1&-2\\2&0&-2\\2&-1&-1\end{pmatrix}\downarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\dim N(A-0I)=1$

几何重数为1

> **定 理 3**　矩阵A可对角化的充要条件是其每个不同特征值的几何重数等于代数重数.

注: 特征值的几何重数一定不超过其代数重数。

例 3　验证$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 不可对角化.

解: 易得 $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=0$, $\Rightarrow$ 特征值 1 的代数重数为2.
而对应的几何重数为 $\dim N(A-I)=1$.
故 A 不可对角化.

(1) 错题：$A \sim B+I$

① 假设A有 $\lambda_1 \dots \lambda_n$ 特征值

则 $B+I$ 有 $\lambda_1+I \dots \lambda_n+I$ $\neq$

② $tr(A)+n = tr(B)$

$\therefore tr(A) \neq tr(B)$

(2) $A^2-A=0$

特征值：$\lambda^2-\lambda=0$

$\therefore \lambda=0$ 或 $\lambda=1$

对角矩阵（只有对角线上有元素）

$$C^3=A=XDX^{-1}=X(\tilde{D})^3X^{-1}=X\tilde{D}\cancel{X^{-1}X}\tilde{D}\cancel{X^{-1}X}\tilde{D}X^{-1}$$

实对称矩阵的对角化：

$(a-\lambda)(b-\lambda)=c^2$

$\lambda^2-(a+b)\lambda+ab-c^2=0$

$\lambda=\dfrac{a+b\pm\sqrt{a^2+b^2+2ab-4ab+4c^2}}{2}$ $\quad (a-b)^2+4c^2$

$A=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

1. 特征值必为实数.
2. A必可对角化
3. $V_{\lambda_1} \perp V_{\lambda_2}$
4. P_{304} $Q^TAQ=D$（对角矩阵）

求法.

eg. 1图

比较1图

任意幂等矩阵可以对角化

不同特征值的特征向量一定正交.

§6.6 二次型

· 定义：$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$

给定二次型 $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$

引入 $\mathrm{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ $f(x,y)=\mathrm{x}^TA\mathrm{x}$

记作 $f(\mathrm{x})$

定义. 二次型可写为 $f(\mathrm{x})=\mathrm{x}^TA\mathrm{x}$，其中$A$是对称矩阵，称这里的对称矩阵$A$为该二次型的矩阵.

注：1. 二次型的矩阵一定是一个实对称矩阵且唯一.

2. 标准二次型的矩阵一定是对角矩阵.

e.g. $f(x)=x^T\begin{bmatrix}3 & 0\\ -2 & 3\end{bmatrix}x$ 其二次型矩阵 $A=$

$f(x)=3x^2-2xy+3y^2$

$A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$

e.g. 2. $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2-2x_2^2+x_3^2-x_1x_2+2x_2x_3$

$A=\begin{bmatrix}3 & -\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & -2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$

化二次型为标准形 设一般二次型为 $f(\mathrm{x})$，其矩阵为A

即寻找可逆矩阵 P，通过令 $\mathrm{x}=P\mathrm{y}$，

$f(\mathrm{x})=\mathrm{x}^TA\mathrm{x}\xrightarrow{\text{转化}}\mathrm{y}^TP^TAP\mathrm{y}=\mathrm{y}^TD\mathrm{y}=g(\mathrm{y})$

使得 $g(\mathrm{y})$ 是标准形，即D是对角矩阵.

化二次型为标准形的思路： **正交矩阵 $P^{-1}=P^{\mathrm{T}}$**

将二次型的矩阵A (**实对称矩阵**) 通过

正交矩阵P将它**对角化**成D.

注： 这样得到的标准形的系数就是矩阵A的相应特征值.

例 2 设二次型 $f(x_1,x_2)=3x_1^2-2x_1x_2+3x_2^2$，将之化为标准形。

解：先写出该二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$

再求A的特征值和相应的特征向量

$\lambda_1=2,\lambda_2=4$

$v_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$v_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ 再将特征向量单位正交化 $\begin{cases}u_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\\ u_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\end{cases}$

令 $Q=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，$D=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$

所以，令 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$，则可化成的标准形为 $2y_1^2+4y_2^2$

P 对角矩阵　↗ 可逆

化二次型为标准形　$x=Py$　$f(x)=x^TAx\to y^TP^TAPy=\underline{y^TDy=g(y)}$　($P^{-1}=P^T$ 正交)

一个二次型对应的标准型不同.

矩阵的合同

· 若存在可逆矩阵P,使得 $P^TAP=B$, 则称A与B合同,称P为合同变换矩阵

· A与B合同的性质:(1) $rank(A)=rank(B)$ (2) A对称,则B也对称;A反对称,B也反对称

「行列式和特征值不一定相同」

正定二次型与正定矩阵

1. 正定矩阵的定义

设A是n阶实对称矩阵, 若对**任意**的**非零**向量 $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$, 有

$$f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x}>0$$

则称二次型 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x}$ 是正定的,
同时称该二次型矩阵 A为正定矩阵.

· 标准形的二次型是正定的,当且仅当所有平方项的系数全为正数.

· 二次型是正定的当且仅当它的标准形是正定的
　　　　　　　　　　　　其矩阵特征值全为正数.

2. 正定矩阵的判别法:

(1) 实对称矩阵是正定矩阵当且仅当其矩阵特征值全为正数.

e.g. 1. A正定 → A对称且 $\lambda_1 \dots \lambda_n > 0$ → A^2对称 $\lambda_1^2 \dots \lambda_n^2 > 0$ → A^2正定
$(A^T=A)$

2. $A=P^TP$, P可逆. 证明: A正定矩阵

证明: 设λ是A的特征值, 即 $\exists u \neq 0$. s.t $Au=\lambda u$

即 $P^TPu=\lambda u$

$\to u^TP^TPu=\lambda u^Tu$

$\to \|Pu\|^2=\lambda\|u\|^2$　　$\because u\neq 0$　$Pu\neq 0$　$\therefore \lambda>0$　$\therefore$ A为正定矩阵

实对称矩阵A是正定矩阵,当且仅当存在可逆矩阵P,使得 $A=P^TP$.

3. 判别矩阵是否正定: (1) $Q^T=Q$ (2) 是否能表示为 $Q=S^TS$ / 利用 λ特征值>0
对称　　　　正定

e.g. A和B正定, (A+B)是否正定.

$(A+B)u=\lambda u$　$(u\neq 0)$

$u^T(A+B)u=\lambda u^Tu$

$\underbrace{u^TAu}_{>0}+\underbrace{u^TBu}_{>0}=\lambda u^Tu$　$\therefore \lambda>0$

正定矩阵的性质

设A是正定矩阵,则

· A的所有特征值必为正数

· det(A)>0,故必可逆

· tr(A)>0

· A的各阶顺序主子矩阵也是正定的.因此各阶顺序主子式为正

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{31} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{41} & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

定理:

正定矩阵的性质:设A是正定矩阵,则

$$\begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

- A的所有特征值必为正数.
- det(A) >0, 故必可逆.
- tr(A) >0.
- A的各阶顺序主子矩阵也是正定的,
  因此各阶顺序主子式为正.

定理 **实对称矩阵A是正定矩阵当且仅当所有顺序主子式为正。**

例 5 判别矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$和 $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$是否正定。

解: $|A_1| = 1 > 0$;

$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$;

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 > 0$.

所以A正定.

$|B_1| = 1 > 0$;

$|B_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 < 0$.

所以B非正定.

线性变换

e.g. A是$m\times n$矩阵，证明：映射 $L(x)=Ax$ 是从 $R^n\to R^m$ 的线性变换

证明：

① $\forall x,y\in R^n$，$L(x+y)=A(x+y)=L(x)+L(y)$

② $\forall x\in R^n$，$L(\alpha x)=A\alpha x=\alpha Ax=\alpha L(x)$

$\therefore$ 成立

线性变换的性质

设 $L: R^n\to R^m$ 是一个线性变换，则有

(i) $L(0)=0$

(ii) $L(-v)=-L(v)$，$\forall v\in R^n$

(iii) 设 $v_1,\dots,v_k\in R^n$，$\alpha_1,\dots,\alpha_k\in R$，有

$$L(\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_k v_k)=\alpha_1 L(v_1)+\cdots+\alpha_k L(v_k)$$

(若 $\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_k v_k=0$，则 $\alpha_1 L(v_1)+\cdots+\alpha_k L(v_k)=0$

(4) 设 $v_1\dots v_k\in R^n$，若 $v_1\dots v_k$ 线性相关，则 $L(v_1)\dots L(v_k)$ 也线性相关 / $L(v_1)\dots L(v_k)$ 线性无关，则 $v_1\dots v_k$ 线性无关

[原像线性无关，映像为无关，零变换 $L(e_i)=0$，0是线性相关的)

核与值域

「定义」设 $L: R^n\to R^m$ 是一个线性变换，令 $\ker(L)=\{v\in R^n \mid L(v)=0\}$.

$L(R^n)=\{w\in R^m \mid w=L(v),\exists v\in R^n\}$ 称 $\ker(L)$ 为 L 的核　$L(R^n)$ 称为 L 的值域

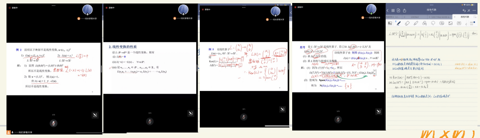
e.g. $L(x)=(x_1,x_2,x_1+x_2)^T$，其中 $x=(x_1,x_2)^T$ ：$R^2\to R^3$

求 L 的核与值域以及它们的维数

解：$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$，$L(x)=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_1+x_2\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\\x_1+x_2=0\end{cases}\Rightarrow x_1=x_2=0$

$\therefore \ker(L)=\{0\}$　$\dim\ker(L)=0$

$L(R^2)=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_1+x_2\end{pmatrix}\middle|\ \forall x_1,x_2\in R\right\}=\left\{x_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\middle|\ x_1,x_2\in R\right\}=\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ $\therefore \dim L(R^2)=2$.



设A是2×2矩阵,定义线性算子 $L_A = Ax: R^2 \to R^2$, 则

(1) L_A的核是A的零空间(即 $\ker(L_A) = N(A)$)

(2) L_A的值域是A的列空间.

$m \times (n)$

$\operatorname{rank}(A) + \dim N(A) = 2$

$\dim L_A(R^2) + \dim \ker(L_A) = 2$ (A的列数,自变量个数)

(1) $\ker(L_A) = \{x \in R^2 \mid Ax = 0\} = N(A)$

(2) $L_A(R^2) = \{Ax \mid \forall x \in R^2\} = \operatorname{span}(a_1, a_2) =$ A的列空间

$Ax = (a_1, a_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 a_1 + x_2 a_2$

(3) 特别地,若A非奇异,则L_A的核是$\{0\}$; L_A的值域是R^2.

线性变换的矩阵表示

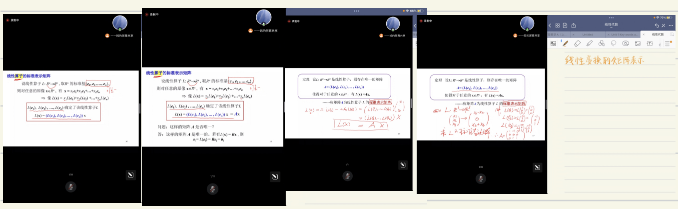


图1-3

e.g. 设线性算子 $L(x) = (x_1 - x_2,\ x_2 + x_1)^T : R^2 \to R^2$

(1) 求L在标准基$\{e_1, e_2\}$下的表示矩阵A

$A = (L(e_1), L(e_2)) = \left(L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, L\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

(2) 求L在基$\{u_1, u_2\}$下的表示矩阵B, 其中$u_1 = (1,1)^T$, $u_2 = (1,2)^T$

$L(u_1) = L\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = -2u_1 + 2u_2 = (u_1, u_2)\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$

$L(u_2) = L\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} = -5u_1 + 4u_2 = (u_1, u_2)\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}$

$\therefore B = \begin{pmatrix}-2 & -5\\ 2 & 4\end{pmatrix}$

(3) 设 $v = 2u_1 + u_2$, 求$L(v)$在基$\{u_1, u_2\}$下的坐标

$v = (u_1, u_2)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$L(v) = (u_1, u_2) B \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $\quad \therefore L(v)$在基$\{u_1, u_2\}$下的坐标为 $B\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9\\8\end{pmatrix}$

A是可逆/非奇异的判别方法有:

<1> 存在B矩阵使得 $AB=BA=I$

错题

<1> 若$A^2=I$，则$A=I$或$A=-I$ × $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$

<2> $AA^T=O$，则$A=O$ ✓ 主对角线元素全为0

<3> 3.(判断题， 5 分)

(3)如果$x_1,x_2,\cdots,x_n$张成空间$\mathbb{R}^n$，那么它们是线性无关的.

A. 对

B. 错

教师批阅

正确答案 对， 我的答案： 错 得 0 分

R^n必有n个向量张成，且n个向量 线性无关

<4> 矩阵4阶以上，行列式 通用方法不适用

章节测

#1. $(AB)^2=A^2B^2$

$ABAB=AABB$ → 用结合律

$A(BA-AB)B=0$

只有 A.B 可逆 AB=BA.

#2. $(A+5I)(A-I)=0$

$AB=0 \to |A||B|=0 \to |A|=0$ 或 $|B|=0$ → 存在至少一个奇异

$(A+tI)(A+(4-t)I)=0$.

#3 反例 取 I

#4. 若 $AB=kI\ (k\neq 0)$ 则 $BA=kI$

#5. 看书+视频

#6. 首元列表出

#7. 只有零解 → $Ax=0$ 可逆 → A 非奇异 → $|A|\neq 0$.

#8 $$\begin{bmatrix} 0 & A_n \\ B_m & 0 \end{bmatrix} = (-1)^{mn} \begin{bmatrix} 0 & B_m \\ A_n & 0 \end{bmatrix}$$

#9. $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$