Dipayan Chakraborty
Florent Foucaud
Malika More
Adrien Wohrer

Université Clermont Auvergne
Méthodes d'optimisation
BUT Info 2A
2024-2025

TP3 : Algorithmes heuristiques pour le voyageur de commerce

Dans ce TP nous allons étudier en pratique le célèbre problème du *voyageur de commerce* (en anglais : *Travelling Salesman Problem*, généralement abrévié "TSP"). On a un ensemble de villes avec les distances qui les séparent. On veut trouver une tournée pour parcourir toutes les villes et revenir au point de départ, en minimisant la distance totale parcourue. Par exemple, avec les villes suivantes :

	Clermont-Ferrand	Bordeaux	Toulouse	Lyon	Marseille
Clermont-Ferrand	0	376	377	167	475
Bordeaux	376	0	244	556	646
Toulouse	377	244	0	538	404
Lyon	167	556	538	0	314
Marseille	475	646	404	314	0

On peut faire par exemple la tournée Clermont → Toulouse → Bordeaux → Marseille → Lyon → Clermont pour $377 + 244 + 646 + 314 + 167 = 1748$km.

On va coder dans ce TP des algorithmes heuristiques pour calculer une tournée aussi courte que possible. La tournée sera représentée par une liste d'entiers (chacune des n villes étant représentée par un entier entre 0 et $n-1$). Les distances seront stockées dans une matrice (liste de listes) `M` où `M[i][j]` est la distance entre les villes n°i et n°j.

L'utilisation de Python et Sagemath est optionnelle mais recommandée : il est proposé ci-dessous, une fonction écrite pour Sagemath qui affiche graphiquement une tournée. Vous pouvez utiliser un autre langage que Python si vous préférez, mais dans ce cas vous ne pourrez pas utiliser la fonction d'affichage proposée, et il n'est pas garanti que vos chargés de TP puissent vous aider au niveau du code.

Exemple de données avec 5 villes (voir en bas du document pour des jeux de données plus importants) :

```
distances_5villes=[[0,376,377,167,475],[376,0,244,556,646],[377,244,0,538,404],
[167,556,538,0,314],[475,646,404,314,0]]
noms_5villes={0:'Clermont', 1:'Bordeaux', 2:'Toulouse', 3:'Lyon', 4:'Marseille'}
coordonnees_5villes={0:(50,47), 1:(24,40), 2:(37,28), 3:(62,46), 4:(65,23)}
```

La fonction suivante permettra d'afficher une tournée dans Sagemath, étant donnée la tournée, les coordonnées des villes en 2D, et les noms des villes.

```
def afficher_tournee(T,coordonnees_villes,noms_villes,taille_texte):
    L=[]
    for i in T:
        L.append(coordonnees_villes[i])
    p=plot(line(L))
    for i in T:
        p += plot(text(noms_villes[i],coordonnees_villes[i],
                                        bounding_box={'boxstyle':'round', 'fc':'w'},
                                        fontsize=taille_texte))
    p.show(axes=False)

T=[0,3,1,2,4,0]
afficher_tournee(T,coordonnees_5villes,noms_5villes,10) #test
```

Exercice 1 (Algorithme glouton par ville la plus proche)**.**

On peut générer une tournée de façon gloutonne, de la façon suivante :

1. Choisir une première ville i (par exemple $i = 0$, ou bien, au hasard avec `randrange(0,n)` qui renvoie un entier entre 0 et $n - 1$)
2. initialiser la tournée : $T[0] = i$
3. Tant qu'il reste des villes non visitées (pas encore placées dans T) :
   - choisir la ville j non encore visitée qui minimise la distance à la dernière ville visitée
   - ajouter j à T
4. ajouter la ville de départ i à la fin de T pour clôre la tournée
5. renvoyer T

Coder une fonction `tournee_gloutonne(M)` qui prend en paramètre la matrice des distances `M` et calcule, puis renvoie, une tournée avec l'algorithme. (Par exemple, on testera la fonction en lançant

```
T=tournee_gloutonne(distances_5villes)
afficher_tourne(T,coordonnees_5villes,noms_5villes,10)
```

Le nombre de villes pourra être obtenu avec `len(M)`. La distance entre la ville `i` et la ville `j` est obtenue par `M[i][j]` ou bien `M[j][i]`.

Exercice 2 (Descente de gradient (*))**.**

On va utiliser maintenant la *descente de gradient*, algorithme méta-heuristique vu en cours.

On définit d'abord une opération de transformation d'une solution (ici, une tournée) en une autre, proche. Pour une solution T, soit $N(T)$ l'ensemble des solutions "voisines", c'est-à-dire, qui peuvent être obtenues via une seule opération de transformation. Le principe est le suivant :

1. On génère une première solution T_0
   $T \leftarrow T_0$ $\#T$: solution courante
2. Tant que $N(T)$ contient une solution meilleure que T :
   - choisir une nouvelle solution T' dans $N(T)$
   - $T \leftarrow T'$
3. Retourner T

Pour le voyageur de commerce, l'opération de transformation peut être définie de la façon suivante : étant donnée une tournée T, on prend deux villes et on échange leurs positions dans T pour obtenir une nouvelle tournée T'.

Coder l'algorithme de descente de gradient `DescenteGradient(M)` qui prend une matrice M des distances en entrée et renvoie une tournée. Vous pourrez d'abord :

- Coder une fonction `eval(T,M)` qui prend une solution `T` et la matrice de distances `M` et renvoie la longueur de la tournée qui correspond à `T`.
- Coder une fonction `echange(T,i,j)` qui prend une solution `T` et deux indices de villes `i` et `j`, et renvoie la tournée semblable à `T` mais où les villes en position `i` et `j` sont inversées.
- Coder une fonction `voisinage(T)` qui prend une solution `T` et renvoie la liste des solutions "voisines", en utilisant `echange(T,i,j)`.

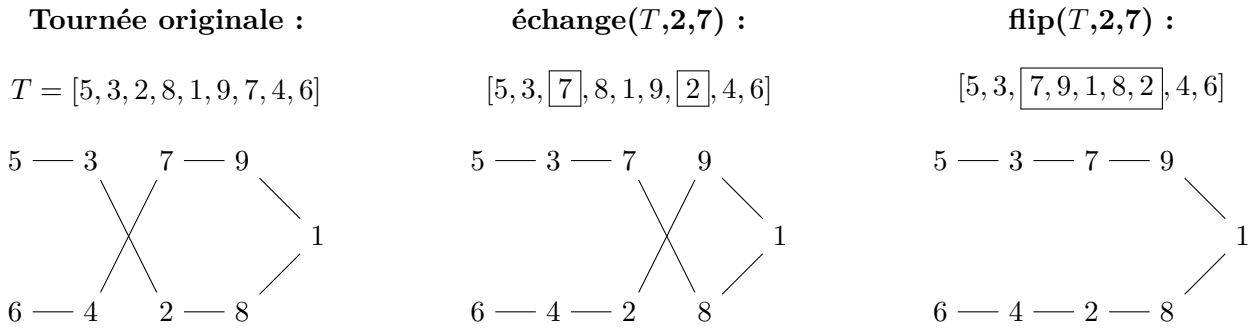
Pour la solution initiale T_0, on pourra prendre au choix :

- une tournée calculée avec l'algorithme glouton de la question précédente.
- une tournée aléatoire (pour cela coder une fonction `tournee_aleatoire(M)` qui renvoie une tournée aléatoire).
- pour les paresseux ou les pressés, la tournée `[0,...,n-1,0]` où `n` est le nombre de villes.

Testez l'algorithme sur les données présentées en fin du document, et essayez-le à partir de différentes tournées de départ.

Une amélioration possible : la stratégie 2-opt. Dans l'implémentation ci-dessus, le voisinage d'une tournée T est constitué des tournées obtenues comme `echange`(T, i, j), où i et j parcourent tous les choix possibles de 2 villes. La *stratégie 2-opt* considère un autre type de transformation, `flip`(T, i, j), qui consiste à *retourner toute la tournée entre les villes i et j*. Le voisinage de la tournée T est alors constitué de toutes les tournées `flip`(T, i, j), où i et j parcourent tous les choix possibles de 2 villes.

L'intérêt de ces transformations "flip" est qu'elles permettent beaucoup plus facilement de *défaire les boucles* dans la tournée, comme illustré dans la figure ci-dessous :



Il est donc raisonnable de penser que la descente de gradient basée sur ces nouvelles transformations trouvera des tournées plus efficaces – et c'est effectivement le cas. Si vous le souhaitez, implémentez cette petite modification dans votre code de la descente de gradient, et observez l'amélioration résultante.

Exercice 3 (Algorithme génétique (**))**.**

On rappelle le principe général des algorithmes génétiques :

- Population initiale : un ensemble de solutions (aléatoires), par exemple de taille 100
- On réitère x fois (x peut être prédéfini, ou bien, on s'arrête lorsqu'on n'améliore pas la meilleure solution) :
  - On sélectionne les p solutions les meilleures de la population courante (cela représente par exemple les meilleurs 20%, ou 50%, etc, au choix) à garder dans la population suivante (pour éviter de perdre les bonnes solutions)
  - On "croise" un certain nombre de paires aléatoires de solutions à mettre dans la population suivante. Chaque paire pourra avoir un ou plusieurs "enfants".
  - Des "mutations" apparaissent aléatoirement parmi les nouvelles solutions
  - On garde les p meilleures solutions obtenues pour former la prochaine population

Chaque population successive (appelée génération) pourra être représentée par une liste de tournées.

Dans le cas du problème du voyageur de commerce, le "croisement" de deux solutions peut être fait de la façon suivante. Pour deux "parents" $P = [p_1, \ldots, p_n]$ et $M = [m_1, \ldots, m_n]$, on choisit un nombre i entre 1 et $n-1$. Un enfant pourra être construit en prenant le début $p_1, \ldots, p_i$ de la tournée "père" puis, en considérant le reste des villes dans l'ordre de la tournée de la mère. Par exemple, avec les tournées $P = [1, 3, 4, 0, 2, 5]$ et $M = [0, 2, 5, 3, 1, 4]$, avec $i = 2$, on obtiendra l'enfant $[1, 3, 0, 2, 5, 4]$. On peut avec une méthode similaire obtenir les enfants $[3, 1, 4, 0, 2, 5]$ (où au contraire on a gardé la deuxième partie de la tournée paternelle et complété le début avec l'ordre de visite maternel), et $[0, 2, 1, 3, 4, 5]$ (où le rôle du père et de la mère sont inversés). Il y a donc $2(n-1)$ enfants possibles avec cette méthode.

Une "mutation" peut être faite en échangeant deux villes prises au hasard (mais pas la ville de départ) dans la tournée. On pourra fixer une probabilité de mutation (en principe, assez faible, par exemple 1 pour cent) des nouvelles solutions obtenues.

Les paramètres : nombre x de générations, nombre de paires croisées à chaque génération, taille p de la population, probabilité de mutation, devront être fixés en faisant des tests pour trouver de bonnes valeurs.

Coder l'algorithme génétique `AlgoGenetique(M)` qui prend une matrice M des distances en entrée et renvoie une tournée. On peut le découper selon les étapes suivantes :

1. Pour le début de l'algorithme, coder une fonction `tournee_aleatoire(M)` qui renvoie une tournée au hasard (c'est-à-dire une liste qui contient tous les nombres entre `0` et `len(M)-1`), dans un ordre aléatoire. La première population sera créée par p appels à cette fonction.
2. Coder une fonction `selection_naturelle(S,p,M)` qui, étant donnée une liste `S` de tournées, un entier `p` et la matrice `M` des distances, renvoie une liste contenant les `p` meilleures tournées. Elle devra faire appel à la fonction `eval(T,M)` codée dans un des exercices précédents. *(Pour cela on pourra faire par exemple une sorte de tri par sélection : trouver d'abord l'indice dans* `S` *de la meilleure tournée, puis celui de la 2e meilleure, etc.)*
3. Coder une fonction `croisement(T1,T2)` qui renvoie la liste des tournées "filles" de `T1` et `T2`.
4. Coder une fonction `mutation(T,x)` qui génère une mutation aléatoire dans une tournée (et renvoie la tournée mutée) avec une certaine probabilité x, avec $0 < x < 1$. Utiliser la fonction `echange(T,i,j)` codée dans un exercice précédent pour faire la mutation. Pour cela, `float(randrange(0,10000)/10000)` permet d'obtenir un flottant aléatoire entre 0 et 1 parmi 10000 valeurs possibles.
5. Assembler toutes les fonctions dans l'algorithme génétique `AlgoGenetique(M)` qui renvoie la meilleure tournée obtenue par l'algorithme génétique décrit ci-dessus. Vous pourrez avoir des variables à ajuster :

```
TAILLE_POP = 100
NB_GENERATIONS = 20
NB_CROISEMENTS = 100
PROBA_MUTATION = 0.05
```

Variantes possibles

- Plutôt que d'initialiser la population initiale avec des tournées aléatoires, vous pouvez l'initialiser avec l'ensemble des tournées gloutonnes constructibles pour le problème (en utilisant toutes les villes de départ possibles).

- Il peut être efficace de déconnecter les rôles de "parent" et de "tournée gardée" pour la génération suivante. Dans ce cas, on fixe deux tailles de population, `q` et `p`, avec `q<p`.
  - Les `p` meilleures tournées de la génération précédente constituent les "parents" de la nouvelle génération, c'est-à-dire que ce sont ces tournées, et uniquement celles-ci, qui sont croisées entre elles pour former la nouvelle génération.
  - Par contre, seules les `q` toutes meilleures tournées de la génération précédente (`q<p`) sont "sanctuarisées" et réinjectées sans mutation dans la génération suivante.

  Comparé à la version de l'énoncé, cette distinction `q<p` peut aider à maintenir plus longtemps la diversité de solutions au sein de la population.

- Il peut également être efficace d'imposer que *toutes les "tournées parent" de la prochaine génération soient deux-à-deux distinctes.* Dans ce cas, au moment de la recherche des meilleures tournées de la génération précédente, on inclut une tournée dans la liste des parents uniquement si elle n'est identique à aucune des tournées déjà incluses dans la liste des parents. (Et on s'arrête lorsqu'on a obtenu `p` tournées parent, toutes distinctes.)

- Enfin, si vous avez implémenté la stratégie 2-opt pour la descente de gradient, il est efficace de plutôt réaliser vos mutations sous forme de transformations "`flip`".

1 Bonus : exercices supplémentaires

Exercice 4 (Colonie de fourmis (**))**.**

On va implémenter un algorithme de colonie de fourmis qui résout le problème du voyageur de commerce, dont voici l'algorithme :

- Tant qu'on le souhaite (par exemple 50 fois), on répète :
  - On crée un certain nombre de fourmis (par exemple 50)
  - Pour chaque fourmi :
    - Une nouvelle fourmi part d'une ville au hasard
    - Tant qu'elle n'a pas visité toutes les villes :
      Elle choisit la ville suivante au hasard de la manière suivante.
      - Plus la ville est loin, moins elle a de chances d'être choisie
      - Plus le chemin menant à cette ville est couvert de phéromones de fourmis, plus cette ville a des chances d'être choisie
  - On retient la meilleure tournée obtenue
  - On met à jour les phéromones :
    - Plus la tournée obtenue est longue, moins on y place de phéromones
      (par ex. on dépose une quantité de $1/longueur$ phéromones)
    - Tous les phéromones s'évaporent : on les réduit de $x\%$, par ex. $x = 10\%$

1. Coder une fonction `fourmi(M,phero,v)` qui prend en paramètre la matrice `M` de distances, une matrice `phero` de phéromones (cette matrice est de même dimensions que `M`, et on suppose qu'elle contient déjà une valeur pour chaque entrée), et une ville `v` (un entier entre `0` et `len(M)-1`).

   Dans cette fonction, on simule une unique fourmi, qui part de la ville `v`, et crée une tournée en choisissant, à chaque étape, une nouvelle ville.

   Pour cela, on peut créer une liste de scores pour chaque ville, et la fourmi va tirer au hasard parmi les villes en fonction des scores. Le score d'une ville `x` peut être calculé de la façon suivante : `phero[ville_courante][x]**0.9/M[ville_courante][x]**1.5` (plus il y a de phéromones, plus le score est élevé, et plus la distance est grande, plus le score est faible).

   Pour faire cela, on peut créer la liste `villes` des villes non encore visitées, la liste `scores_villes` des scores de ces villes, et ensuite, utiliser le code suivant qui fait un tirage aléatoire où la probabilité de tirer une ville est proportionnelle au score de la ville : `random.choices(villes, weights = scores_villes)[0]`

2. Coder la fonction `ColonieFourmis(M)` qui fait un certain nombre fixé d'itérations (par exemple 50), à chaque fois, créee des fourmis (par exemple 30) avec la fonction `fourmi(M,phero,v)`, retient la meilleure solution, et met à jour les phéromones.

   Vous pourrez avoir des variables à ajuster :

```
NB_ITERATIONS = 50
NB_FOURMIS = 50
FACTEUR_EVAPORATION = 0.9
```

Exercice 5 (Algorithme glouton par insertion)**.**

Voici une variante de l'algorithme glouton de l'exercice 1.

1. Choisir une première mini-tournée, de longueur 3 (par exemple au hasard, ou bien avec la méthode gloutonne de l'exercice 1)
2. Tant qu'il reste des villes non visitées (pas encore placées dans T) :
   - choisir la ville j non encore visitée *et une position d'insertion* dans la tournée précédente en minimisant la longueur de la tournée obtenue
   - ajouter j à T *à la bonne position*
3. renvoyer T

Coder une fonction `tournee_insertion(M)`.

Exercice 6 (Recuit simulé pour la descente de gradient)**.**

On va revenir sur la descente de gradient. Cette méthode peut être affinée avec la méthode du recuit simulé vue en cours. Dans cette modification, on a une certaine probabilité de prendre une "mauvaise" solution. Cette probabilité baisse au fil du temps (ceci est modélisé par une valeur de "température" qui baisse à chaque itération).

1. On génère une première solution S_0
   $S \leftarrow S_0$ #solution courante
   $i \leftarrow 0$ #compteur du nombre d'itérations
   $T \leftarrow 100$ #température initiale
2. Tant que $i < 1000$:
   - $T \leftarrow 0.99T$ #la température baisse
   - $i \leftarrow i + 1$
   - choisir au hasard une nouvelle solution S' dans $N(S)$
   - si S' est meilleure que S OU $random(0,1) < exp(-(|S'| - |S|)/T)$ #$|S|$ désigne la longueur de S
     $S \leftarrow S'$
3. Retourner S

Dans cet algorithme on peut faire varier les paramètres pour obtenir des résultats différents (nombre d'itérations, fonction de probabilité, température initiale). Dans Sage, `float(randrange(0,10000)/10000)` renverra un flottant au hasard entre 0 et 1 (parmi 10000 valeurs possibles).

Coder l'algorithme de descente de gradient avec recuit simulé `RecuitSimule(M)` qui prend une matrice M des distances en entrée et renvoie une tournée.

Exercice 7 (Algorithme via arbre couvrant de poids minimum (**))**.**

On rappelle qu'un arbre couvrant d'un graphe G est un arbre qui contient tous les sommets de G, qui utilise les arêtes de G, et dont la somme des poids des arêtes est la plus petite possible. Vous avez vu en BUT1 l'algorithme de Prim (un algo glouton) qui permet de le calculer de façon efficace.

1. Construire un arbre couvrant A de poids minimum du graphe G arête-pondéré dont les sommets sont les villes, avec les distances entre les villes qui forment les poids des arêtes
2. Parcourir l'arbre A par un parcours en profondeur, et quand un nouveau sommé est visité, l'ajouter à la tournée T
3. renvoyer T

Coder une fonction `tournee_arbre(M)` qui implémente cet algorithme.

Données supplémentaires

Voir aussi le fichier *villes.txt* pour copier-coller plus facilement les données.
Exemple de données avec 20 villes françaises (distances par la route) :

```
distances_20villes=
[[0,182,830,593,918,822,841,974,393,719,705,884,520,863,738,895,627,781,1138,285],
[182,0,648,397,619,675,659,792,216,842,555,840,338,819,546,713,445,599,907,250],
[830,648,0,826,793,1051,536,719,610,866,1219,1379,310,1358,566,730,245,503,1495,855],
[593,397,826,0,327,266,587,637,259,163,475,650,531,630,419,555,584,507,627,403],
[918,619,793,327,0,279,510,466,402,197,523,597,586,876,300,276,562,425,304,679],
[822,675,1051,266,279,0,774,771,478,109,280,318,741,297,585,555,747,698,506,558],
[841,659,536,587,510,774,0,284,520,667,974,1092,398,1071,201,318,329,84,650,844],
[974,792,719,637,466,771,284,0,602,664,1005,1089,584,1068,215,192,506,216,498,926],
[393,216,610,259,402,478,520,602,0,366,609,797,300,776,369,514,372,444,690,324],
[719,842,866,163,197,109,667,664,366,0,326,425,598,404,462,473,640,591,434,506],
[705,555,1219,475,523,280,974,1005,609,326,0,206,909,185,772,799,958,898,769,407],
[884,840,1379,650,597,318,1092,1089,797,425,206,0,1069,21,915,873,1065,1015,824,586],
[520,338,310,531,586,741,398,584,300,598,909,1069,0,1048,379,549,106,357,795,540],
[863,819,1358,630,876,297,1071,1068,776,404,185,21,1048,0,894,852,1044,995,803,565],
[738,546,566,419,300,585,201,215,369,462,772,915,379,894,0,147,331,117,442,678],
[895,713,730,555,276,555,318,192,514,473,799,873,549,852,147,0,498,233,330,824],
[627,445,245,584,562,747,329,506,372,640,958,1065,106,1044,331,498,0,290,771,652],
[781,599,503,507,425,698,84,216,444,591,898,1015,357,995,117,233,290,0,566,768],
[1138,907,1495,627,304,506,650,498,690,434,769,824,795,803,442,330,771,566,0,940],
[285,250,855,403,679,558,844,926,324,506,407,586,540,565,678,824,652,768,940,0]]
noms_20villes={0:'Biarritz',1:'Bordeaux',2:'Brest',3:'Clermont-Fd',4:'Dijon',5:'Grenoble',
 6:'Le Havre',7:'Lille',8:'Limoges',9:'Lyon',10:'Marseille',11:'Monaco',12:'Nantes',
13:'Nice',14:'Paris',15:'Reims',16:'Rennes',17:'Rouen',18:'Strasbourg',19:'Toulouse'}
coordonnees_20villes={0:(16,28),1:(24,40),2:(2,78),3:(50,47),4:(64,62),5:(68,40),6:(33,85),
7:(53,94),8:(37,49),9:(62,46),10:(65,23),11:(80,27),12:(20,64),13:(78,25),14:(47,77),
15:(59,81),16:(21,73),17:(39,84),18:(82,75),19:(37,28)}
```

Exemple de données avec les 48 capitales des états des USA métropolitains (ce jeu de données est très classique, et l'optimum est connu, c'est 33523) :

```
distances_48villes=[[0,4727,1205,6363,3657,3130,2414,563,463,5654,1713,1604,2368,2201,
1290,1004,3833,2258,3419,2267,2957,720,1700,5279,2578,6076,3465,2654,3625,3115,1574,
3951,1748,2142,6755,2383,3306,1029,3530,825,2188,4820,3489,1947,6835,1542,2379,3744],
[4727,0,3588,2012,1842,6977,6501,5187,5028,2327,4148,4723,3635,3125,4907,3930,7463,
6338,7243,5105,4043,4022,3677,2863,3106,1850,7173,6630,1204,6814,6001,3447,5253,2656,
3123,6274,7183,5622,3085,4564,2756,1591,7027,6186,3472,5461,4390,2088],
[1205,3588,0,5163,2458,3678,3071,1742,1444,4462,1184,1520,1498,1103,1501,951,4298,
2903,3967,2169,2209,652,828,4136,1518,4873,3954,3254,2446,3581,2441,2960,1966,950,
5564,2916,3878,2035,2482,1027,1395,3617,3891,2686,5661,2023,1867,2560],
[6363,2012,5163,0,2799,8064,7727,6878,6581,1402,5366,5946,4679,4378,6225,5709,8417,
7578,8296,6135,4802,5707,4982,2322,4178,320,8186,7800,2778,7859,7408,3763,6461,4223,
1427,7451,8263,7131,3669,6011,4638,1681,7987,7502,1877,6758,5360,2844],
[3657,1842,2458,2799,0,5330,4946,4200,3824,2012,2573,3157,1924,1580,3427,3179,5749,
4793,5577,3409,2223,3066,2185,1860,1401,2491,5486,5035,894,5141,4611,1669,3677,1590,
3113,4682,5533,4352,1252,3227,2426,1169,5313,4706,3241,3962,2651,304],
[3130,6977,3678,8064,5330,0,743,3209,2670,6929,2831,2266,3407,3854,2178,4076,727,881,
293,1930,3310,3672,3315,6199,3932,7745,365,482,5774,261,1659,4513,1746,4431,7910,769,
207,2225,4435,2681,5053,6384,550,1224,7805,1670,2704,5230],
```

(suite en page suivante)

```
[2414,6501,3071,7727,4946,743,0,2468,1952,6673,2380,1795,3051,3405,1604,3382,1469,168,
1020,1681,3110,2993,2827,6009,3552,7412,1104,267,5300,821,916,4348,1270,3890,7698,332,
900,1484,4185,2049,4415,6051,1219,482,7635,1054,2432,4884],
[563,5187,1742,6878,4200,3209,2468,0,718,6203,2241,2051,2920,2762,1687,1304,3932,2331,
3487,2669,3487,1175,2260,5840,3141,6596,3563,2728,4120,3240,1559,4507,2082,2658,7304,
2512,3364,985,4091,1319,2544,5358,3632,1987,7391,1785,2879,4296],
[463,5028,1444,6581,3824,2670,1952,718,0,5789,1602,1343,2330,2291,970,1451,3376,1796,
2959,1951,2835,1112,1725,5346,2628,6285,3007,2193,3889,2661,1122,3920,1372,2391,6883,
1927,2845,611,3543,676,2590,4993,3039,1486,6934,1112,2196,3876],
[5654,2327,4462,1402,2012,6929,6673,6203,5789,0,4392,4947,3648,3501,5274,5183,7216,
6535,7140,5022,3621,5077,4090,922,3207,1131,7014,6714,2437,6707,6477,2476,5432,3599,
1102,6376,7121,6284,2497,5160,4318,937,6795,6507,1268,5773,4249,1914],
[1713,4148,1184,5366,2573,2831,2380,2241,1602,4392,0,586,766,1029,883,2040,3353,2224,
3100,1049,1246,1625,503,3841,1196,5054,3042,2488,2945,2676,2087,2331,1114,1650,5459,
2132,3037,1958,1997,931,2513,3701,2923,2137,5459,1394,711,2534],
[1604,4723,1520,5946,3157,2266,1795,2051,1343,4947,586,0,1299,1612,406,2208,2824,1639,
2542,694,1586,1767,1050,4357,1770,5633,2498,1907,3520,2128,1558,2778,531,2171,6003,
1552,2472,1538,2506,791,2912,4277,2403,1564,5983,827,892,3109],
[2368,3635,1498,4679,1924,3407,3051,2920,2330,3648,766,1299,0,646,1642,2446,3840,2905,
3655,1488,730,2096,697,3076,533,4363,3567,3122,2453,3219,2842,1592,1791,1480,4706,2772,
3610,2721,1232,1656,2550,3001,3403,2860,4697,2126,756,1836],
[2201,3125,1103,4378,1580,3854,3405,2762,2291,3501,1029,1612,646,0,1853,2026,4349,3247,
4119,1997,1341,1753,606,3078,419,4070,4052,3517,1923,3690,3032,1866,2142,838,4593,3161,
4060,2788,1380,1663,1932,2736,3915,3138,4647,2395,1351,1592],
[1290,4907,1501,6225,3427,2178,1604,1687,970,5274,883,406,1642,1853,0,2029,2803,1438,
2466,986,1987,1593,1253,4716,2072,5915,2454,1764,3710,2082,1204,3164,497,2287,6342,1419,
2379,1134,2867,554,2885,4569,2405,1289,6338,555,1297,3406],
[1004,3930,951,5709,3179,4076,3382,1304,1451,5183,2040,2208,2446,2026,2029,0,4759,3220,
4368,2900,3151,442,1765,4960,2444,5443,4396,3610,2932,4034,2572,3891,2525,1590,6278,3313,
4261,2033,3398,1476,1241,4287,4390,2928,6419,2428,2749,3337],
[3833,7463,4298,8417,5749,727,1469,3932,3376,7216,3353,2824,3840,4349,2803,4759,0,1601,
477,2359,3617,4345,3851,6433,4372,8098,370,1206,6267,726,2384,4754,2335,4991,8148,1452,
609,2949,4752,3331,5687,6746,437,1948,8005,2334,3098,5618],
[2258,6338,2903,7578,4793,881,168,2331,1796,6535,2224,1639,2905,3247,1438,3220,1601,0,
1165,1563,2988,2829,2666,5882,3401,7263,1233,399,5138,923,794,4227,1117,3724,7565,286,
1049,1348,4051,1881,4248,5903,1322,355,7508,887,2302,4736],
[3419,7243,3967,8296,5577,293,1020,3487,2959,7140,3100,2542,3655,4119,2466,4368,477,
1165,0,2170,3520,3965,3588,6393,4183,7977,202,767,6041,438,1932,4706,2027,4711,8107,
1061,132,2503,4652,2972,5344,6617,486,1501,7989,1962,2939,5469],
[2267,5105,2169,6135,3409,1930,1681,2669,1951,5022,1049,694,1488,1997,986,2900,2359,
1563,2170,0,1430,2460,1547,4333,2019,5817,2079,1694,3910,1733,1813,2668,654,2694,6029,
1366,2130,1991,2525,1474,3542,4455,1923,1641,5957,1071,777,3302],
[2957,4043,2209,4802,2223,3310,3110,3487,2835,3621,1246,1586,730,1341,1987,3151,3617,
2988,3520,1430,0,2779,1387,2905,1062,4482,3398,3119,2922,3087,3115,1240,1953,2175,4607,
2796,3501,3119,1136,2173,3268,3136,3189,3029,4527,2355,711,2042],
[720,4022,652,5707,3066,3672,2993,1175,1112,5077,1625,1767,2096,1753,1593,442,4345,
2829,3965,2460,2779,0,1401,4781,2166,5427,3984,3212,2946,3620,2224,3603,2089,1496,
6178,2906,3861,1719,3132,1040,1479,4211,3969,2553,6290,2012,2336,3189],
[1700,3677,828,4982,2185,3315,2827,2260,1725,4090,503,1050,697,606,1253,1765,3851,
2666,3588,1547,1387,1401,0,3621,903,4675,3537,2954,2475,3169,2427,2254,1578,1148,
5177,2598,3521,2194,1833,1074,2054,3340,3423,2541,5213,1801,1077,2190],
[5279,2863,4136,2322,1860,6199,6009,5840,5346,922,3841,4357,3076,3078,4716,4960,
6433,5882,6393,4333,2905,4781,3621,0,2718,2042,6254,6024,2569,5966,5913,1687,4807,
3384,1716,5699,6384,5787,1852,4687,4285,1272,6022,5892,1629,5178,3581,1639],
```

(suite en page suivante)

```
[2578,3106,1518,4178,1401,3932,3552,3141,2628,3207,1196,1770,533,419,2072,2444,4372,
3401,4183,2019,1062,2166,903,2718,0,3864,4097,3635,1932,3748,3274,1448,2284,1164,
4286,3283,4136,3086,967,1973,2285,2507,3935,3331,4312,2589,1284,1340],
[6076,1850,4873,320,2491,7745,7412,6596,6285,1131,5054,5633,4363,4070,5915,5443,8098,
7263,7977,5817,4482,5427,4675,2042,3864,0,7866,7483,2515,7539,7101,3449,6146,3938,
1375,7134,7944,6831,3349,5709,4397,1363,7667,7190,1798,6446,5041,2528],
[3465,7173,3954,8186,5486,365,1104,3563,3007,7014,3042,2498,3567,4052,2454,4396,370,
1233,202,2079,3398,3984,3537,6254,4097,7866,0,839,5973,374,2019,4569,1996,4669,7970,
1085,305,2581,4532,2976,5339,6509,287,1581,7844,1974,2838,5369],
[2654,6630,3254,7800,5035,482,267,2728,2193,6714,2488,1907,3122,3517,1764,3610,1206,
399,767,1694,3119,3212,2954,6024,3635,7483,839,0,5427,558,1181,4349,1377,4044,7723,
356,653,1744,4218,2241,4614,6121,955,743,7644,1231,2465,4957],
[3625,1204,2446,2778,894,5774,5300,4120,3889,2437,2945,3520,2453,1923,3710,2932,6267,
5138,6041,3910,2922,2946,2475,2569,1932,2515,5973,5427,0,5612,4824,2550,4050,1498,
3476,5071,5980,4470,2096,3388,1911,1501,5831,4994,3704,4264,3209,1196],
[3115,6814,3581,7859,5141,261,821,3240,2661,6707,2676,2128,3219,3690,2082,4034,726,
923,438,1733,3087,3620,3169,5966,3748,7539,374,558,5612,0,1716,4280,1624,4298,7679,
735,420,2263,4216,2606,4967,6179,400,1277,7567,1609,2501,5032],
[1574,6001,2441,7408,4611,1659,916,1559,1122,6477,2087,1558,2842,3032,1204,2572,2384,
794,1932,1813,3115,2224,2427,5913,3274,7101,2019,1181,4824,1716,0,4330,1180,3346,7545,
1023,1808,578,4062,1438,3693,5763,2115,440,7537,763,2404,4603],
[3951,3447,2960,3763,1669,4513,4348,4507,3920,2476,2331,2778,1592,1866,3164,3891,4754,
4227,4706,2668,1240,3603,2254,1687,1448,3449,4569,4349,2550,4280,4330,0,3184,2510,3402,
4031,4698,4281,533,3245,3612,2187,4339,4265,3296,3576,1941,1381],
[1748,5253,1966,6461,3677,1746,1270,2082,1372,5432,1114,531,1791,2142,497,2525,2335,
1117,2027,654,1953,2089,1578,4807,2284,6146,1996,1377,4050,1624,1180,3184,0,2685,6475,
1022,1952,1341,2963,1050,3358,4787,1926,1086,6436,422,1244,3619],
[2142,2656,950,4223,1590,4431,3890,2658,2391,3599,1650,2171,1480,838,2287,1590,4991,
3724,4711,2694,2175,1496,1148,3384,1164,3938,4669,4044,1498,4298,3346,2510,2685,0,
4697,3693,4636,2975,1981,1909,1124,2718,4565,3548,4830,2839,2140,1751],
[6755,3123,5564,1427,3113,7910,7698,7304,6883,1102,5459,6003,4706,4593,6342,6278,
8148,7565,8107,6029,4607,6178,5177,1716,4286,1375,7970,7723,3476,7679,7545,3402,
6475,4697,0,7393,8097,7370,3515,6249,5379,2001,7738,7556,461,6829,5267,3013],
[2383,6274,2916,7451,4682,769,332,2512,1927,6376,2132,1552,2772,3161,1419,3313,1452,
286,1061,1366,2796,2906,2598,5699,3283,7134,1085,356,5071,735,1023,4031,1022,3693,
7393,0,965,1542,3883,1913,4286,5772,1121,600,7322,902,2128,4608],
[3306,7183,3878,8263,5533,207,900,3364,2845,7121,3037,2472,3610,4060,2379,4261,609,
1049,132,2130,3501,3861,3521,6384,4136,7944,305,653,5980,420,1808,4698,1952,4636,
8097,965,0,2380,4629,2877,5250,6583,570,1380,7986,1866,2904,5432],
[1029,5622,2035,7131,4352,2225,1484,985,611,6284,1958,1538,2721,2788,1134,2033,2949,
1348,2503,1991,3119,1719,2194,5787,3086,6831,2581,1744,4470,2263,578,4281,1341,2975,
7370,1542,2380,0,3952,1127,3197,5518,2658,1002,7395,951,2429,4380],
[3530,3085,2482,3669,1252,4435,4185,4091,3543,2497,1997,2506,1232,1380,2867,3398,4752,
4051,4652,2525,1136,3132,1833,1852,967,3349,4532,4218,2096,4216,4062,533,2963,1981,
3515,3883,4629,3952,0,2873,3080,2012,4324,4046,3478,3328,1755,1000],
[825,4564,1027,6011,3227,2681,2049,1319,676,5160,931,791,1656,1663,554,1476,3331,1881,
2972,1474,2173,1040,1074,4687,1973,5709,2976,2241,3388,2606,1438,3245,1050,1909,6249,
1913,2877,1127,2873,0,2374,4392,2943,1659,6285,1012,1563,3254],
[2188,2756,1395,4638,2426,5053,4415,2544,2590,4318,2513,2912,2550,1932,2885,1241,5687,
4248,5344,3542,3268,1479,2054,4285,2285,4397,5339,4614,1911,4967,3693,3612,3358,1124,
5379,4286,5250,3197,3080,2374,0,3386,5284,3997,5585,3386,3125,2664],
[4820,1591,3617,1681,1169,6384,6051,5358,4993,937,3701,4277,3001,2736,4569,4287,6746,
5903,6617,4455,3136,4211,3340,1272,2507,1363,6509,6121,1501,6179,5763,2187,4787,2718,
2001,5772,6583,5518,2012,4392,3386,0,6314,5837,2205,5095,3680,1169],
[3489,7027,3891,7987,5313,550,1219,3632,3039,6795,2923,2403,3403,3915,2405,4390,437,
1322,486,1923,3189,3969,3423,6022,3935,7667,287,955,5831,400,2115,4339,1926,4565,7738,
1121,570,2658,4324,2943,5284,6314,0,1676,7603,1964,2662,5184],
```

(suite en page suivante)

```
[1947,6186,2686,7502,4706,1224,482,1987,1486,6507,2137,1564,2860,3138,1289,2928,1948,
355,1501,1641,3029,2553,2541,5892,3331,7190,1581,743,4994,1277,440,4265,1086,3548,
7556,600,1380,1002,4046,1659,3997,5837,1676,0,7521,744,2325,4670],
[6835,3472,5661,1877,3241,7805,7635,7391,6934,1268,5459,5983,4697,4647,6338,6419,8005,
7508,7989,5957,4527,6290,5213,1629,4312,1798,7844,7644,3704,7567,7537,3296,6436,4830,
461,7322,7986,7395,3478,6285,5585,2205,7603,7521,0,6805,5208,3102],
[1542,5461,2023,6758,3962,1670,1054,1785,1112,5773,1394,827,2126,2395,555,2428,2334,
887,1962,1071,2355,2012,1801,5178,2589,6446,1974,1231,4264,1609,763,3576,422,2839,
6829,902,1866,951,3328,1012,3386,5095,1964,744,6805,0,1644,3928],
[2379,4390,1867,5360,2651,2704,2432,2879,2196,4249,711,892,756,1351,1297,2749,3098,
2302,2939,777,711,2336,1077,3581,1284,5041,2838,2465,3209,2501,2404,1941,1244,2140,
5267,2128,2904,2429,1755,1563,3125,3680,2662,2325,5208,1644,0,2532],
[3744,2088,2560,2844,304,5230,4884,4296,3876,1914,2534,3109,1836,1592,3406,3337,5618,
4736,5469,3302,2042,3189,2190,1639,1340,2528,5369,4957,1196,5032,4603,1381,3619,1751,
3013,4608,5432,4380,1000,3254,2664,1169,5184,4670,3102,3928,2532,0]]
noms_48villes={0:'Montgomery (Alabama)',1:'Phoenix (Arizona)',2:'Little Rock (Arkansas)',
3:'Sacramento (California)',4:'Denver (Colorado)',5:'Hartford (Connecticut)',
6:'Dover (Delaware)',7:'Tallahassee (Florida)',8:'Atlanta (Georgia)',9:'Boise (Idaho)',
10:'Springfield (Illinois)',11:'Indianapolis (Indiana)',12:'Des Moines (Iowa)',
13:'Topeka (Kansas)',14:'Frankfort (Kentucky)',15:'Baton Rouge (Louisiana)',
16:'Augusta (Maine)',17:'Annapolis (Maryland)',18:'Boston (Massachusetts)',
19:'Lansing (Michigan)',20:'St Paul (Minnesota)',21:'Jackson (Mississippi)',
22:'Jefferson City (Missouri)',23:'Helena (Montana)',24:'Lincoln (Nebraska)',
25:'Carson City (Nevada)',26:'Concord (N Hampshire)',27:'Trenton (N Jersey)',
28:'Santa Fe (N Mexico)',29:'Albany (N York)',30:'Raleigh (N Carolina)',
31:'Bismarck (N Dakota)',32:'Columbus (Ohio)',33:'Oklahoma City (Oklahoma)',
34:'Salem (Oregon)',35:'Harrisburg (Pennsylvania)',36:'Providence (Rhode Is)',
37:'Columbia (S Carolina)',38:'Pierre (S Dakota)',39:'Nashville (Tennessee)',
40:'Austin (Texas)',41:'Salt Lake City (Utah)',42:'Montpelier (Vermont)',
43:'Richmond (Virginia)',44:'Olympia (Washington)',45:'Charleston (W Virginia)',
46:'Madison (Wisconsin)',47:'Cheyenne (Wyoming)'}
coordonnees_48villes={0:(6734,1453),1:(2233,10),2:(5530,1424),3:(401,841),
4:(3082,1644),5:(7608,4458),6:(7573,3716),7:(7265,1268),8:(6898,1885),9:(1112,2049),
10:(5468,2606),11:(5989,2873),12:(4706,2674),13:(4612,2035),14:(6347,2683),15:(6107,669),
16:(7611,5184),17:(7462,3590),18:(7732,4723),19:(5900,3561),20:(4483,3369),21:(6101,1110),
22:(5199,2182),23:(1633,2809),24:(4307,2322),25:(675,1006),26:(7555,4819),27:(7541,3981),
28:(3177,756),29:(7352,4506),30:(7545,2801),31:(3245,3305),32:(6426,3173),33:(4608,1198),
34:(23,2216),35:(7248,3779),36:(7762,4595),37:(7392,2244),38:(3484,2829),39:(6271,2135),
40:(4985,140),41:(1916,1569),42:(7280,4899),43:(7509,3239),44:(10,2676),45:(6807,2993),
46:(5185,3258),47:(3023,1942)}
```