Probabilités A. El Ouni
Université Clermont Auvergne A. Khaldi
IUT Clermont Auvergne C. Samir
2A BUT Info, 2024-2025 A. Wohrer

TD3 – Variables aléatoires (cas discret)

Exercice 1.
On lance un dé parfait deux fois de suite et on note X le plus grand nombre obtenu des deux.

1. Déterminer la loi de X et représenter la sous forme de tableau.
2. Donner le tableau de $P(X \leq k)$ pour $k = 1, 2, \ldots, 6$.
3. Tracer la fonction de répartition.

Exercice 2.
Dans un jeu de 52 cartes on tire une carte au hasard.

1. Déterminer la probabilité des évènements suivants :
   (a) La carte un pique.
   (b) La carte a une tête.
   (c) La carte a un symbole rouge.
2. On essaie d'établir de nouvelle règles pour s'amuser et non pas s'ennuyer avec le jeu. On commence par donner 1 point si on a un trèfle et 0 point sinon.
   (a) Donner la loi de X le point obtenu suite à un tirage.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Si au lieu de tirer une seule carte on tire 2 cartes.
   (a) Donner la loi de X le point obtenu suite à un tirage.
   (b) Expliquer la différence avec le tirage d'une seule carte.
   (c) Calculer l'espérance et la variance de X.
4. Le jeu est-il plus amusant avec le tirage d'une seule ou de deux cartes ?

Exercice 3.
On choisit aléatoirement deux nombres distincts avec la loi uniforme dans l'ensemble $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et on note X leur produit.

1. Déterminer la loi de X.
2. On pose $Y = X^2 - 2X$. Déterminer la loi de Y.
3. Calculer $E(X)$, $V(X)$, $E(Y)$, et $V(Y)$.

Exercice 4.
Soit Y une variable aléatoire qui représente deux états : un pc tombe en panne avec la probabilité p ou ne tombe pas en panne.

1. Sachant que $V(Y) = \frac{9}{25}$ donner les valeurs possibles pour p.
2. Faut-il envisager de remplacer le pc ? Pourquoi ?

Exercice 5.
Dans un jeu, le temps T nécessaire pour finir une étape est une variable aléatoire dont la la loi de probabilité est donnée par :

T	2	3	4	5	6	7
$P(T=t)$	$0,1$	$0,1$	$0,3$	p_5	$0,2$	$0,1$

1. Compléter le tableau en calculant $p_5 = P(T=5)$.
2. Calculer le temps moyen, la variance et l'écart-type.
3. Le joueur est récompensé par un trophée pour chaque seconde gagnée sur une étape de 6 minutes. Sinon il ne reçoit rien.
   (a) Expliquer pourquoi la récompense R est une variable aléatoire discrète.
   (b) Donner la loi de probabilité de R.
   (c) Calculer le récompense moyenne, la variance et l'écart-type.
4. On décide de rétablir une pénalité qui augmente avec le temps passé dans une étape. On choisit de compter une pénalité $S = (T-2)^2$.
   (a) Expliquer pourquoi S est une variable aléatoire discrète.
   (b) Donner la loi de probabilité de S.
   (c) Calculer le pénalité moyenne, la variance et l'écart-type.

Exercice 6.
On place un hamster dans une cage. Il se trouve face à 5 portillons dont un seul lui permet de sortir de la cage. A chaque essai infructueux, on le replace à l'endroit initial.

1. En supposant que le hamster ne soit pas doué d'apprentissage et qu'il choisisse donc de façon équiprobable entre les 5 solutions à chaque nouvel essai, déterminer la probabilité des évènements :
   a) le hamster sort au premier essai,
   b) le hamster sort au troisième essai,
   c) le hamster sort au septième essai.
2. Le hamster mémorise maintenant les essais infructueux et choisit de façon équiprobable entre les portillons qu'il n'a pas encore essayés. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'essais effectués.
   a) Quelles valeurs peut prendre X ? Déterminer sa loi de probabilité.
   b) Déterminer l'espérance mathématique $E(X)$ et interpréter le résultat.
   c) Déterminer la variance $V(X)$.

Exercice 7.
Un certain jeu dépend du nombre de points X obtenus en jetant un dé équilibré.

1. Calculer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$.
3. Le gain de ce jeu est donné par une fonction linéaire suivante $G(X) = 3X + 5$. faire un tableau de G.
4. Calculer le gain espéré $E(G)$ et la variance $V(G)$.