
TD5 – Variables aléatoires (cas continu)

Exercice 1.

Soit X une variable aléatoire continue, avec la densité de probabilité suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{pour } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{6} & \text{pour } 2 \leq x \leq 4, \\ 0 & \text{partout ailleurs.} \end{cases}$$

1. Dessinez le graphe de f .
2. Expliquez pourquoi $f(x)$ est bien une densité de probabilité.
3. Trouvez la fonction de répartition $F(x)$ de la variable X , et dessinez son graphe.
4. Calculez l'espérance et la variance de X .

Exercice 2.

Soit X une v.a. à valeurs dans $[0, 1]$, dont la fonction de répartition est

$$F(x) = x^2 \quad \text{pour } 0 \leq x \leq 1.$$

1. Calculez la densité de probabilité $f(x)$ pour la variable X , et dessinez son graphe.
2. Calculez $P(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{4})$.
3. Calculez $q_{0.1}$ (premier décile) et $q_{0.9}$ (dernier décile) pour la variable X .
4. Calculez l'espérance et la variance de X .

Exercice 3.

Un plateau circulaire est découpé en 8 zones angulaires identiques, numérotées de 1 à 8. On fait tourner une aiguille autour de l'axe du plateau.

1. Soit X la variable aléatoire qui désigne la zone sur laquelle l'aiguille s'arrête.
 - (a) Expliquez pourquoi X est une v.a. discrète.
 - (b) Donnez la loi de probabilité de X .
 - (c) Trouvez la fonction de répartition $F(x)$ de la variable X , et dessinez son graphe.
 - (d) Calculez l'espérance, la variance et l'écart-type de X .
2. Soit θ la variable aléatoire qui désigne l'angle auquel s'arrête l'aiguille (la position horizontale vers la droite correspondant à $\theta = 0$).
 - (a) Expliquez pourquoi θ est une v.a. continue.
 - (b) Quelles sont les valeurs possibles pour θ ?
 - (c) Sans faire le calcul, donnez des valeurs pour

$$P(0 \leq \theta \leq \pi), \quad P(\pi \leq \theta \leq 2\pi), \quad P(0 \leq \theta \leq 2\pi), \quad P(\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2})$$

- (d) Proposer une fonction de densité pour θ .
 - (e) Trouvez la fonction de répartition $F(\theta)$ de la variable θ , et dessinez son graphe.
 - (f) Calculez l'espérance, la variance et l'écart type de θ .
3. Un joueur veut miser une grande somme. À votre avis, a-t-il plus de chance de gagner en misant sur une zone (valeur de X), ou sur une valeur de l'angle θ ? Justifiez.

Exercice 4.

Un homme arrive à l'arrêt de bus et rate de justesse le bus précédent. Il décide d'attendre 5 minutes le prochain bus, et sinon de partir à pied. En réalité, le temps entre deux bus est distribué suivant la loi $U(4, 6)$. On appelle X le temps que l'homme va passer à l'arrêt.

1. Quelle est la probabilité que X soit inférieur à $4\frac{1}{2}$ minutes ?
2. Quelle est la probabilité que X soit exactement égal à 5 minutes ?
3. Tracez la fonction de répartition de X .
4. X est-elle une variable discrète, ou une variable continue ?

Exercice 5.

On considère une cible circulaire, de rayon R . Deux joueurs A et B s'affrontent au tir à l'arc, le vainqueur étant celui dont la flèche finit le plus près du centre. On introduit les variables aléatoires : X_A = distance entre la flèche du joueur A et le centre, et de même X_B = distance entre la flèche du joueur B et le centre.

1. Le joueur A tire sa flèche de façon *uniforme* dans toute la cible.
 - a) Trouvez la fonction de répartition $F_A(x)$ pour X_A . Tracez-la.
 - b) Déduisez-en la densité de probabilité $f_A(x)$ pour X_A .
 - c) Quelle est la probabilité que le joueur A tombe à une distance $x \leq R/2$ du centre ?
2. Le joueur B , quant à lui, a la fonction de répartition suivante :

$$F_B(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leq 0, \\ \sqrt{\frac{x}{R}} & \text{pour } 0 < x < R, \\ 1 & \text{pour } x \geq R. \end{cases}$$

- a) Tracez $F_B(x)$, dans la même figure que $F_A(x)$. Visuellement, lequel des deux joueurs semble le plus à même de gagner le concours ?
 - b) Calculez et tracez la densité de probabilité $f_B(x)$.
 - c) Quelle est la probabilité que le joueur B tombe à une distance $x \leq R/2$ du centre ?
3. Les deux joueurs tirent une flèche simultanément ; leurs deux tirs sont supposés indépendants.
 - a) Supposons que le joueur A a tiré à distance « y » du centre. Quelle est la probabilité que le joueur B tombe plus proche que y ?
 - b) Déduisez-en la probabilité que le joueur B gagne le concours.