**Probabilités** A. El Ouni
Université Clermont Auvergne A. Khaldi
IUT Clermont Auvergne C. Samir
2A BUT Info, 2024-2025 A. Wohrer

# TD6 – Variables aléatoires continues (2è partie)

**Exercice 1.** Dans une colonie de marmottes de Sibérie orientale, on s'intéresse à la durée de vie $X$ d'une marmotte au hasard. On suppose que $X$ suit une loi exponentielle, de paramètre $\lambda = 0.5$ an$^{-1}$.

1. Calculez et représentez graphiquement la densité de probabilité $f(x)$ correspondante, puis la fonction de répartition $F(x)$.
2. Quelle est l'espérance de vie d'une marmotte dans la colonie ?
3. Quel âge est atteint par exactement 50% des marmottes de la colonie ?
4. a) Une marmotte vient de naître. Quelle probabilité qu'elle atteigne l'âge de 4 ans ?
   b) Une marmotte a 10 ans (pile). Quelle probabilité qu'elle atteigne l'âge de 14 ans ?
   c) Plus généralement, expliquez ce que représente la quantité $P(X > x_0 + t \mid X > x_0)$, et ce qu'elle vaut dans notre modèle. Dans quelles circonstances est-ce réaliste ?

**Exercice 2.** On considère une cible circulaire, de rayon $R = 1$. Deux joueurs $A$ et $B$ s'affrontent au tir à l'arc, le vainqueur étant celui dont la flèche finit le plus près du centre. On introduit les variables aléatoires : $X_A$ = distance entre la flèche du joueur $A$ et le centre, et de même $X_B$ = distance entre la flèche du joueur $B$ et le centre.

1. Le joueur $A$ tire sa flèche de façon *uniforme* dans toute la cible, c'est-à-dire que toutes les régions de la cible ont la même chance de recevoir la flèche.
   a) Soit un nombre $0 \leq x \leq 1$. Quelle est l'aire d'un disque de rayon $x$ ?
   b) Déduisez-en la fonction de répartition $F_A(x) = P(X_A \leq x)$. Tracez-la.
   c) Déduisez-en la densité de probabilité $f_A(x)$ pour la variable $X_A$.
   d) Quelle est la probabilité que le joueur $A$ tombe à une distance $x \leq 1/2$ du centre ?
2. Le joueur $B$, quant à lui, a la fonction de répartition suivante :
$$F_B(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leq 0, \\ \sqrt{x} & \text{pour } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{pour } x \geq 1. \end{cases}$$
   a) Tracez $F_B(x)$, dans la même figure que $F_A(x)$. Visuellement, lequel des deux joueurs semble le plus à même de gagner le concours ?
   b) Calculez et tracez la densité de probabilité $f_B(x)$.
   c) Quelle est la probabilité que le joueur $B$ tombe à une distance $x \leq 1/2$ du centre ?
3. Les deux joueurs tirent une flèche simultanément, et indépendamment l'un de l'autre.

a) Supposons que le joueur $A$ a tiré à distance « $y$ » du centre. Quelle est la probabilité que le joueur $B$ tombe plus proche que $y$ ?

b) Déduisez-en la probabilité que le joueur $B$ gagne le concours.

**Exercice 3.**
Un plateau circulaire est découpé en 8 zones angulaires identiques, numérotées de 1 à 8. On fait tourner une aiguille autour de l'axe du plateau.

1. Soit $X$ la variable aléatoire qui désigne la zone sur laquelle l'aiguille s'arrête.
   (a) Expliquez pourquoi $X$ est une v.a. discrète.
   (b) Donnez la loi de probabilité de $X$.
   (c) Trouvez la fonction de répartition $F(x)$ de la variable $X$, et dessinez son graphe.
   (d) Calculez l'espérance, la variance et l'écart-type de $X$.
2. Soit $\theta$ la variable aléatoire qui désigne l'angle auquel s'arrête l'aiguille (la position horizontale vers la droite correspondant à $\theta = 0$).
   (a) Expliquez pourquoi $\theta$ est une v.a. continue.
   (b) Quelles sont les valeurs possibles pour $\theta$ ?
   (c) Sans faire le calcul, donnez des valeurs pour
   $$P(0 \leq \theta \leq \pi), \quad P(\pi \leq \theta \leq 2\pi), \quad P(0 \leq \theta \leq 2\pi), \quad P(\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2})$$
   (d) Proposer une fonction de densité pour $\theta$.
   (e) Trouvez la fonction de répartition $F(\theta)$ de la variable $\theta$, et dessinez son graphe.
   (f) Calculez l'espérance, la variance et l'écart type de $\theta$.
3. Un joueur veut miser une grande somme. À votre avis, a-t-il plus de chance de gagner en misant sur une zone (valeur de $X$), ou sur une valeur de l'angle $\theta$ ? Justifiez.

**Exercice 4.**
Un système électronique fait intervenir deux composants de durées de vies respectives $X$ et $Y$. Ces deux variables aléatoires suivent des lois exponentielles indépendantes de paramètres respectifs $\lambda_1$ et $\lambda_2$.

1. On suppose que les composants sont montés en série.
   (a) Expliquer pourquoi la durée de vie $D$ du système s'exprime par : $D = \min(X, Y)$.
   (b) Soit un nombre $a > 0$. Exprimer $P(D > a)$ à l'aide des variables $X$ et $Y$.
   (c) En déduire $F_D(a)$, la fonction de répartition de $D$. Quelle loi suit la variable $D$ ?
   (d) Donner l'espérance $E(D)$. Comment ce nombre se compare-t-il à $E(X)$ et $E(Y)$ ?

2. On suppose maintenant que les composants sont montés en parallèle, et que le système fonctionne tant qu'au moins un des composants fonctionne. On note $S$ la durée de vie du système.
   (a) Expliquer pourquoi la durée de vie $S$ du système s'exprime par : $S = \max(X, Y)$.
   (b) Calculer $F_S(a)$, la fonction de répartition de $S$, puis sa densité de probabilité $f_S(a)$.
   (c) Calculer l'espérance $E(S)$. Prouver que $E(S) > E(D)$.