Bases des probabilités
(Évènements, probabilités)

A. El Ouni, A. Khaldi, C. Samir, A. Wohrer

Université d'Auvergne
Clermont-Ferrand Aurillac Le Puy-en-Velay

2A - BUT Info

Année 2024-2025

Avant de commencer

- Pour toute question sur le cours :

  `achref.elouni@uca.fr`
  `anis.fradi@uca.fr`
  `chafik.samir@uca.fr`
  `adrien.wohrer@uca.fr`

- Les transparents du cours et d'autres documents sont disponibles sur l'ENT.

1. **Expérience aléatoire**
   - Univers et évènements
   - Probabilités
2. **Probabilités conditionnelles**
3. **Evènements indépendants**

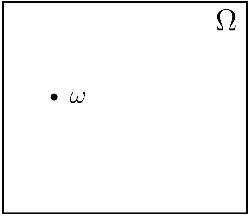
Expérience aléatoire, évènements

Une expérience est dite **aléatoire** si son résultat n'est pas totalement prévisible a priori.

Expérience aléatoire, évènements

Une expérience est dite **aléatoire** si son résultat n'est pas totalement prévisible a priori.

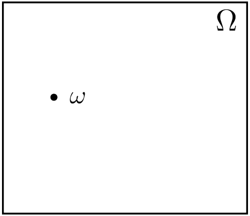
- À chaque réalisation, on observe une **issue** ω différente.



Expérience aléatoire, évènements

Une expérience est dite **aléatoire** si son résultat n'est pas totalement prévisible a priori.

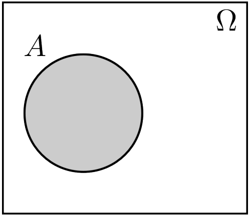
- À chaque réalisation, on observe une **issue** ω différente.
- L'ensemble des issues possibles s'appelle l'**univers** de l'expérience. On le note généralement Ω.



Expérience aléatoire, évènements

Une expérience est dite **aléatoire** si son résultat n'est pas totalement prévisible a priori.

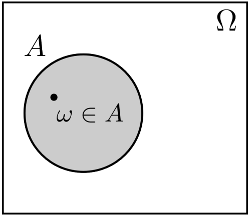
- À chaque réalisation, on observe une **issue** ω différente.
- L'ensemble des issues possibles s'appelle l'**univers** de l'expérience. On le note généralement Ω.
- Un ensemble d'issues s'appelle un **évènement**. On note : $A \subset \Omega$.



Expérience aléatoire, évènements

Une expérience est dite **aléatoire** si son résultat n'est pas totalement prévisible a priori.

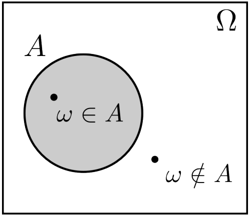
- À chaque réalisation, on observe une **issue** ω différente.
- L'ensemble des issues possibles s'appelle l'**univers** de l'expérience. On le note généralement Ω.
- Un ensemble d'issues s'appelle un **évènement**. On note : $A \subset \Omega$.



Expérience aléatoire, évènements

Une expérience est dite **aléatoire** si son résultat n'est pas totalement prévisible a priori.

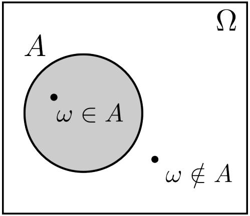
- À chaque réalisation, on observe une **issue** ω différente.
- L'ensemble des issues possibles s'appelle l'**univers** de l'expérience. On le note généralement Ω.
- Un ensemble d'issues s'appelle un **évènement**. On note : $A \subset \Omega$.



Exemple : jeu de 52 cartes

Tire une carte au hasard

- Exemple d'issue :
  ω=(10 de pique).
- Taille de l'univers :
  Card(Ω)=52.
- Exemple d'évènement :
  A=« j'ai tiré un roi ».

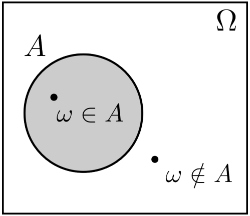


Question : Détaillez les issues composant l'évènement A.

Exemple : jeu de 52 cartes

Tire DEUX cartes ordonnées

- Exemple d'issue :
  ω=(10 de pique, 7 de coeur).
- Taille de l'univers :
  $\text{Card}(\Omega) = 52 \times 51$.
- Exemple d'évènement :
  A=« la deuxième carte est plus forte que la première ».

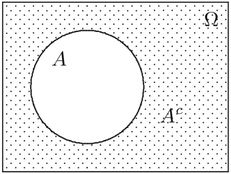


Question : Détaillez les issues composant l'évènement A.

Opérations sur les évènements

A partir de deux évènements A et B, on peut définir d'autres évènements :

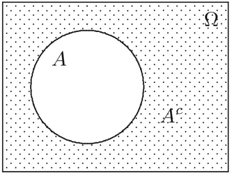
- Le **complément** : $\bar{A}$ = « A ne s'est pas produit ».
  Remarque : $\bar{\bar{A}} = A$.

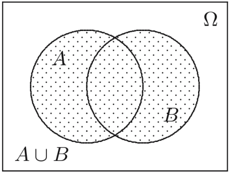


Opérations sur les évènements

A partir de deux évènements A et B, on peut définir d'autres évènements :

- Le **complément** : $\bar{A}$ = « A ne s'est pas produit ».
  Remarque : $\bar{\bar{A}} = A$.
- L'**union** : $A \cup B$ = « A OU B s'est produit ».

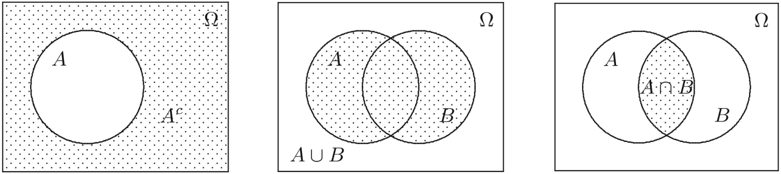




Opérations sur les évènements

A partir de deux évènements A et B, on peut définir d'autres évènements :

- Le **complément** : $\bar{A}$ = « A ne s'est pas produit ».
  Remarque : $\bar{\bar{A}} = A$.
- L'**union** : $A \cup B$ = « A OU B s'est produit ».
- L'**intersection** : $A \cap B$ = « A ET B se sont produits ».



Probabilités

Une fois que l'univers d'une expérience aléatoire est défini, il faut aussi définir sa **loi de probabilités**.

Loi de probabilité (définition empirique)

- Soit un évènement A. On réalise l'expérience aléatoire un très grand nombre de fois (en théorie, une infinité de fois), et on compte le nombre de fois où A se réalise. Alors,

$$P(A) := \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas total}}.$$

Probabilités

Une fois que l'univers d'une expérience aléatoire est défini, il faut aussi définir sa **loi de probabilités**.

Loi de probabilité (définition empirique)

- Soit un évènement A. On réalise l'expérience aléatoire un très grand nombre de fois (en théorie, une infinité de fois), et on compte le nombre de fois où A se réalise. Alors,

$$P(A) := \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas total}}.$$

- Pour tout événement A, on a $0 \leq P(A) \leq 1$.

Probabilités

Une fois que l'univers d'une expérience aléatoire est défini, il faut aussi définir sa **loi de probabilités**.

Loi de probabilité (définition empirique)

- Soit un évènement A. On réalise l'expérience aléatoire un très grand nombre de fois (en théorie, une infinité de fois), et on compte le nombre de fois où A se réalise. Alors,

$$P(A) := \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas total}}.$$

- Pour tout événement A, on a $0 \leq P(A) \leq 1$.
- Si $P(A) = 1$, on dit que A est un évènement **certain**.

Probabilités

Une fois que l'univers d'une expérience aléatoire est défini, il faut aussi définir sa **loi de probabilités**.

Loi de probabilité (définition empirique)

- Soit un évènement A. On réalise l'expérience aléatoire un très grand nombre de fois (en théorie, une infinité de fois), et on compte le nombre de fois où A se réalise. Alors,

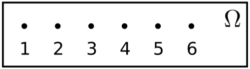
$$P(A) := \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas total}}.$$

- Pour tout événement A, on a $0 \leq P(A) \leq 1$.
- Si $P(A) = 1$, on dit que A est un évènement **certain**.
- Si $P(A) = 0$, on dit que A est un événement **impossible**.

Exemple : un dé à 6 faces

Dé parfait

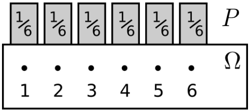
- Univers = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.



Exemple : un dé à 6 faces

Dé parfait

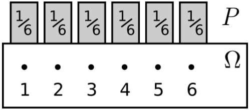
- Univers = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Loi de probabilité uniforme.



Exemple : un dé à 6 faces

Dé parfait

- Univers = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Loi de probabilité uniforme.



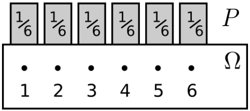
Dé pipé

- Univers = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Loi de probabilité non uniforme.

Exemple : un dé à 6 faces

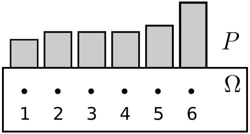
Dé parfait

- Univers = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Loi de probabilité uniforme.



Dé pipé

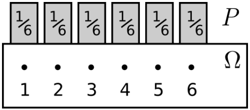
- Univers = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Loi de probabilité non uniforme.



Exemple : un dé à 6 faces

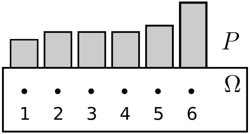
Dé parfait

- Univers = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Loi de probabilité uniforme.



Dé pipé

- Univers = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Loi de probabilité non uniforme.



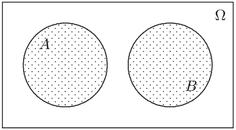
Remarque

Un même univers (« tirer un dé ») peut être associé à différentes lois de probabilités possibles (« dé parfait » vs. « dé pipé »).

Propriétés

Propriétés fondamentales

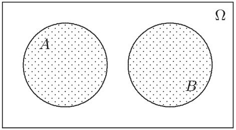
- Si A et B sont des évènements **disjoints** :
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\Omega) = 1$



Propriétés

Propriétés fondamentales

- Si A et B sont des évènements **disjoints** :
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\Omega) = 1$



Exemple (jeu de 52 cartes)

Expérience aléatoire : tire une carte au hasard (avec proba uniforme).

- A=« la carte est une tête ».

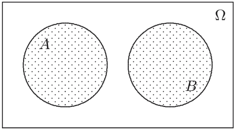
$$P(A) =$$

Propriétés

Propriétés fondamentales

- Si A et B sont des évènements **disjoints** :

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\Omega) = 1$



Exemple (jeu de 52 cartes)

Expérience aléatoire : tire une carte au hasard (avec proba uniforme).

- A=« la carte est une tête ».

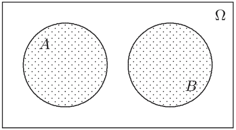
$$P(A) = \frac{12}{52}$$

Propriétés

Propriétés fondamentales

- Si A et B sont des évènements **disjoints** :

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\Omega) = 1$



Exemple (jeu de 52 cartes)

Expérience aléatoire : tire une carte au hasard (avec proba uniforme).

- A=« la carte est une tête ».

  $$P(A) = \frac{12}{52}$$
- B=« la carte est un pique ≤ 8 ».

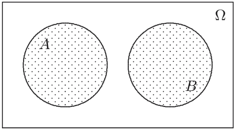
  $$P(B) =$$

Propriétés

Propriétés fondamentales

- Si A et B sont des évènements **disjoints** :

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\varnothing) = 0$
- $P(\Omega) = 1$



Exemple (jeu de 52 cartes)

Expérience aléatoire : tire une carte au hasard (avec proba uniforme).

- A=« la carte est une tête ».

$$P(A) = \frac{12}{52}$$

- B=« la carte est un pique ≤ 8 ».

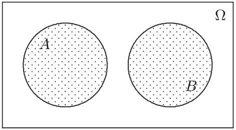
$$P(B) = \frac{7}{52}$$

Propriétés

Propriétés fondamentales

- Si A et B sont des évènements **disjoints** :

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\Omega) = 1$



Exemple (jeu de 52 cartes)

Expérience aléatoire : tire une carte au hasard (avec proba uniforme).

- A=« la carte est une tête ».

$$P(A) = \frac{12}{52}$$

- B=« la carte est un pique ≤ 8 ».

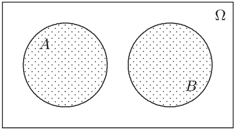
$$P(B) = \frac{7}{52}$$

- $A \cap B =$

Propriétés

Propriétés fondamentales

- Si A et B sont des évènements **disjoints** :
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\Omega) = 1$



Exemple (jeu de 52 cartes)

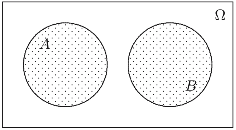
Expérience aléatoire : tire une carte au hasard (avec proba uniforme).

- A=« la carte est une tête ».
  $$P(A) = \frac{12}{52}$$
- B=« la carte est un pique ≤ 8 ».
  $$P(B) = \frac{7}{52}$$
- $A \cap B = \emptyset$ (ensembles disjoints).

Propriétés

Propriétés fondamentales

- Si A et B sont des évènements **disjoints** :
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\varnothing) = 0$
- $P(\Omega) = 1$



Exemple (jeu de 52 cartes)

Expérience aléatoire : tire une carte au hasard (avec proba uniforme).

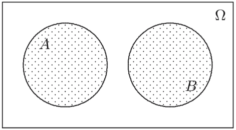
- A=« la carte est une tête ».
  $$P(A) = \frac{12}{52}$$
- B=« la carte est un pique ≤ 8 ».
  $$P(B) = \frac{7}{52}$$
- $A \cap B = \varnothing$ (ensembles disjoints).
- Donc, $P(A \cup B) =$

Propriétés

Propriétés fondamentales

- Si A et B sont des évènements **disjoints** :

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\varnothing) = 0$
- $P(\Omega) = 1$



Exemple (jeu de 52 cartes)

Expérience aléatoire : tire une carte au hasard (avec proba uniforme).

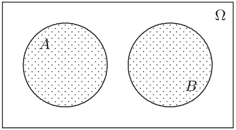
- A=« la carte est une tête ».
  $$P(A) = \frac{12}{52}$$
- B=« la carte est un pique ≤ 8 ».
  $$P(B) = \frac{7}{52}$$
- $A \cap B = \varnothing$ (ensembles disjoints).
- Donc, $P(A \cup B) = \frac{12}{52} + \frac{7}{52} = \frac{19}{52}$

Propriétés

Propriétés fondamentales

- Si A et B sont des évènements **disjoints** :

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\varnothing) = 0$
- $P(\Omega) = 1$



Propriétés

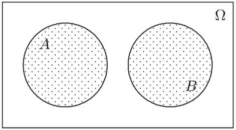
Propriétés fondamentales

- Si A et B sont des évènements **disjoints** :

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\Omega) = 1$

Conséquences

- $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.



Propriétés

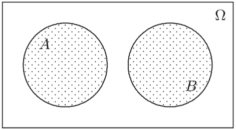
Propriétés fondamentales

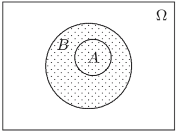
- Si A et B sont des évènements **disjoints** :

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\varnothing) = 0$
- $P(\Omega) = 1$

Conséquences

- $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.
- Si $A \subseteq B$, alors $P(A) \leq P(B)$.





Propriétés

Propriétés fondamentales

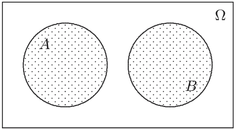
- Si A et B sont des évènements **disjoints** :

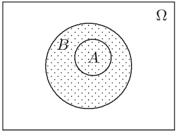
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\varnothing) = 0$
- $P(\Omega) = 1$

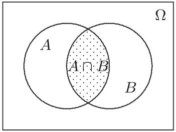
Conséquences

- $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.
- Si $A \subseteq B$, alors $P(A) \leq P(B)$.
- Si A et B sont des évènements **quelconques** :

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$







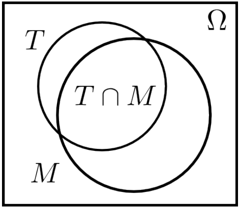
Définition (« Formule de Bayes »)

Soient deux évènements aléatoires M et T. La **probabilité conditionnelle** de T sachant M est définie ainsi :

$$P(T|M) = \frac{P(T \cap M)}{P(M)}.$$

Cette probabilité répond à la question suivante : « Si M est réalisé, quelle est la probabilité que T se réalise aussi ? »

Remarque : on note aussi parfois $P_M(T)$ au-lieu de $P(T|M)$.



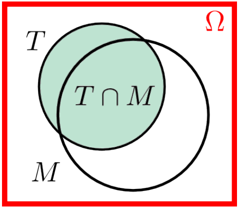
Définition (« Formule de Bayes »)

Soient deux évènements aléatoires M et T. La **probabilité conditionnelle** de T sachant M est définie ainsi :

$$P(T|M) = \frac{P(T \cap M)}{P(M)}.$$

Cette probabilité répond à la question suivante : « Si M est réalisé, quelle est la probabilité que T se réalise aussi ? »

Remarque : on note aussi parfois $P_M(T)$ au-lieu de $P(T|M)$.



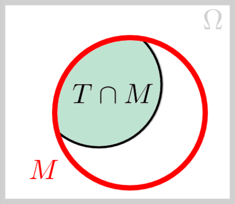
Définition (« Formule de Bayes »)

Soient deux évènements aléatoires M et T. La **probabilité conditionnelle** de T sachant M est définie ainsi :

$$P(T|M) = \frac{P(T \cap M)}{P(M)}.$$

Cette probabilité répond à la question suivante : « Si M est réalisé, quelle est la probabilité que T se réalise aussi ? »

Remarque : on note aussi parfois $P_M(T)$ au-lieu de $P(T|M)$.



Formule de Bayes : exemple

Les chiffres des *accidents de la route* en France sont environ les suivants :

- 1 accident (y compris bénin) tous les 20000 km
- 1 accident sur 1000 est mortel

Question

Un Français au hasard prend la route pour un trajet de 500 km. Quelle est sa probabilité d'avoir un accident mortel pendant le trajet ?

$$P(\mathrm{Acc} \cap \mathrm{Mort})$$

Formule de Bayes : exemple

Les chiffres des *accidents de la route* en France sont environ les suivants :

- 1 accident (y compris bénin) tous les 20000 km
- 1 accident sur 1000 est mortel

Question

Un Français au hasard prend la route pour un trajet de 500 km. Quelle est sa probabilité d'avoir un accident mortel pendant le trajet ?

$$P(\mathrm{Acc} \cap \mathrm{Mort}) = P(\mathrm{Acc}) \times P(\mathrm{Mort}|\mathrm{Acc})$$

Formule de Bayes : exemple

Les chiffres des *accidents de la route* en France sont environ les suivants :

- 1 accident (y compris bénin) tous les 20000 km
- 1 accident sur 1000 est mortel

Question

Un Français au hasard prend la route pour un trajet de 500 km. Quelle est sa probabilité d'avoir un accident mortel pendant le trajet ?

$$P(\mathrm{Acc} \cap \mathrm{Mort}) = P(\mathrm{Acc}) \times P(\mathrm{Mort}|\mathrm{Acc})$$
$$\simeq \frac{500}{20000}$$

Formule de Bayes : exemple

Les chiffres des *accidents de la route* en France sont environ les suivants :

- 1 accident (y compris bénin) tous les 20000 km
- 1 accident sur 1000 est mortel

Question

Un Français au hasard prend la route pour un trajet de 500 km. Quelle est sa probabilité d'avoir un accident mortel pendant le trajet ?

$$P(\mathrm{Acc} \cap \mathrm{Mort}) = P(\mathrm{Acc}) \times P(\mathrm{Mort}|\mathrm{Acc})$$

$$\simeq \frac{500}{20000} \times \frac{1}{1000}$$

Formule de Bayes : exemple

Les chiffres des *accidents de la route* en France sont environ les suivants :

- 1 accident (y compris bénin) tous les 20000 km
- 1 accident sur 1000 est mortel

Question

Un Français au hasard prend la route pour un trajet de 500 km. Quelle est sa probabilité d'avoir un accident mortel pendant le trajet ?

$$
\begin{aligned}
P(\mathrm{Acc} \cap \mathrm{Mort}) &= P(\mathrm{Acc}) \times P(\mathrm{Mort}|\mathrm{Acc}) \\
&\simeq \frac{500}{20000} \times \frac{1}{1000} \\
&\simeq \frac{1}{40000}
\end{aligned}
$$

Exemple : météo

Expérience aléatoire : Un jour au hasard dans l'année.

- Evènement A : « Le jour en question est un jeudi ».
- Evènement B : « Ce jour-là, il fait beau à Clermont ».

Questions

- Que vaut $P(A|B)$?
- Que vaut $P(B|A)$?
- Que vaut $P(A \cap B)$?

Exemple : météo

Expérience aléatoire : Un jour au hasard dans l'année.

- Evènement A : « Le jour en question est un jeudi ». $P(A) = 1/7$
- Evènement B : « Ce jour-là, il fait beau à Clermont ».

Questions

- Que vaut $P(A|B)$?
- Que vaut $P(B|A)$?
- Que vaut $P(A \cap B)$?

Exemple : météo

Expérience aléatoire : Un jour au hasard dans l'année.

- Evènement A : « Le jour en question est un jeudi ». $P(A) = 1/7$
- Evènement B : « Ce jour-là, il fait beau à Clermont ». $P(B) = 0.6$

Questions

- Que vaut $P(A|B)$?
- Que vaut $P(B|A)$?
- Que vaut $P(A \cap B)$?

Exemple : météo

Expérience aléatoire : Un jour au hasard dans l'année.

- Evènement A : « Le jour en question est un jeudi ». $P(A) = 1/7$
- Evènement B : « Ce jour-là, il fait beau à Clermont ». $P(B) = 0.6$

Questions

- Que vaut $P(A|B)$? 1/7 $P(A|B) = P(A)$
- Que vaut $P(B|A)$?
- Que vaut $P(A \cap B)$?

Exemple : météo

Expérience aléatoire : Un jour au hasard dans l'année.

- Evènement A : « Le jour en question est un jeudi ». $P(A) = 1/7$
- Evènement B : « Ce jour-là, il fait beau à Clermont ». $P(B) = 0.6$

Questions

- Que vaut $P(A|B)$? $1/7$ $P(A|B) = P(A)$
- Que vaut $P(B|A)$? 0.6 $P(B|A) = P(B)$
- Que vaut $P(A \cap B)$?

Exemple : météo

Expérience aléatoire : Un jour au hasard dans l'année.

- Evènement A : « Le jour en question est un jeudi ». $P(A) = 1/7$
- Evènement B : « Ce jour-là, il fait beau à Clermont ». $P(B) = 0.6$

Questions

- Que vaut $P(A|B)$? $1/7$ $P(A|B) = P(A)$
- Que vaut $P(B|A)$? 0.6 $P(B|A) = P(B)$
- Que vaut $P(A \cap B)$? $0.6 \times 1/7$ $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$

Exemple : météo

Expérience aléatoire : Un jour au hasard dans l'année.

- Evènement A : « Le jour en question est un jeudi ». $P(A) = 1/7$
- Evènement B : « Ce jour-là, il fait beau à Clermont ». $P(B) = 0.6$

Questions

- Que vaut $P(A|B)$? $1/7$ $P(A|B) = P(A)$
- Que vaut $P(B|A)$? 0.6 $P(B|A) = P(B)$
- Que vaut $P(A \cap B)$? $0.6 \times 1/7$ $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

On dit que les évènements A et B sont **indépendants**.

Evènements indépendants

Définition

Deux évènements aléatoires A et B sont dits **indépendants** s'il vérifient l'une des trois propriétés suivantes, qui sont toutes équivalentes :

$$\begin{array}{lrcl} & P(A|B) & = & P(A) \\ \text{OU} & P(B|A) & = & P(B) \\ \text{OU} & P(A \cap B) & = & P(A)P(B). \end{array}$$

Intuitivement, deux évènements indépendants surviennent « sans rapport l'un avec l'autre ».