Probabilités
Université Clermont Auvergne
IUT Clermont Auvergne
2A BUT Info, 2024-2025

A. El Ouni
A. Khaldi
C. Samir
A. Wohrer

TD7 – La loi normale

Exercice 1. On suppose que la durée de vie, en nombre de jours, d'une carte mère est une variable aléatoire d qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.0002$.

1. Quelle est la durée de vie moyenne de la carte mère ?

Solution: d suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.0002$ jour^{-1}. Alors,

$$E(d) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0.0002} = 5000 \text{ jours}$$

2. Quel est l'écart type de d ?

Solution: L'écart type de d est la racine carrée de sa variance

$$\sigma_d = \sqrt{V(d)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda} = 5000$$

3. Calculer la probabilité que la carte mère ait une durée de vie supérieure à 5 ans.

Solution: On suppose que F représente la fonction de répartition de d. La probabilité que la carte mère ait une durée de vie supérieure à 5 ans est

$$\begin{aligned} P(d \geq 5 \times 365) &= p(d \geq 1825) \\ &= 1 - F(1825) \\ &= e^{-\lambda 1825} \\ &= e^{-0.365} \\ &\approx 0.69 \end{aligned}$$

4. Déterminer la durée de vie D pour laquelle $P(d \leq D) = 0.5$

Solution: On a

$$\begin{aligned} P(d \leq D) &= 0.5 \\ F(D) &= 0.5 \\ 1 - e^{-\lambda D} &= 0.5 \end{aligned}$$

Ce qui implique que,

$$e^{-\lambda D} = 1 - 0.5 = \frac{1}{2}$$

En appliquant le logarithme, on obtient

$$\lambda D = \ln 2$$

Enfin, on a

$$D = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx 3465.73 \text{ jours}$$

Exercice 2. Soit X une variable normale centrée réduite $X \sim N(0,1)$.

1. Calculer $P(X \leq 1)$; $P(X \leq 2)$; $P(|X| \leq 1)$; $P(|X| \leq 2)$.

Solution:
Soit Φ la fonction de répartition de $N(0,1)$. Alors,
a)

$$P(X \leq 1) = \Phi(1) = 0.8413$$

b)

$$P(X \leq 2) = \Phi(2) = 0.9772$$

c)

$$\begin{aligned} P(|X| \leq 1) &= P(-1 \leq X \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) \\ &= \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) \\ &= 2\Phi(1) - 1 \\ &= 2 \times 0.8413 - 1 \\ &= 0.6826 \end{aligned}$$

d) À partir de c) on peut déduire directement que

$$\begin{aligned} P(|X| \leq 2) &= 2\Phi(2) - 1 \\ &= 2 \times 0.9772 - 1 \\ &= 0.9544 \end{aligned}$$

2. Déterminer a tel que $P(|X| \leq a) = 0.95$.

Solution: On a

$$P(|X| \leq a) = 0.95$$

En utilisant la question 1), on obtient

$$2\Phi(a) - 1 = 0.95$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} \Phi(a) &= \frac{1.95}{2} \\ \Phi(a) &= 0.975 \end{aligned}$$

Enfin, on peut trouver a à partir du tableau de la loi normale tel que

$$\begin{aligned} a &= \Phi^{-1}(0.975) \\ a &= 1.96 \end{aligned}$$

3. Calculer $P(X \leq -2.41)$; $P(X \geq 1.52)$.

Solution:
a)

$$\begin{aligned} P(X \leq -2.41) &= \Phi(-2.41) \\ &= 1 - \Phi(2.41) \\ &= 1 - 0.9920 \\ &= 0.008 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(X \geq 1.52) &= 1 - P(X \leq 1.52) \\ &= 1 - \Phi(1.52) \\ &= 1 - 0.9357 \\ &= 0.0643 \end{aligned}$$

4. Déterminer a tel que $P(X \leq a) = 0.612$.

Solution:

$$\begin{aligned} P(X \leq a) &= 0.612 \\ \Phi(a) &= 0.612 \end{aligned}$$

On peut trouver a à partir du tableau de la loi normale tel que

$$\begin{aligned} a &= \Phi^{-1}(0.612) \\ a &= 0.285 \end{aligned}$$

vu que $0.285 \in [0.28, 0.29]$.

Exercice 3. La durée T du trajet de tram entre la place de jaude et campus suit une loi normale de moyenne 20 (minutes) et d'écart type 5.

1. Calculer la probabilité que T soit supérieure à 15 mins, comprise entre 15 et 25, supérieure à 28.

Solution: $T \sim N(20, 5)$. Alors, $X = \frac{T-20}{5} \sim N(0, 1)$.
a)

$$\begin{aligned} P(T \geq 15) &= P(\frac{T-20}{5} \geq \frac{15-20}{5}) \\ &= P(X \geq -1) \\ &= 1 - P(X \leq -1) \\ &= 1 - \Phi(-1) \\ &= 1 - (1 - \Phi(1)) \\ &= \Phi(1) \\ &= 0.8413 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(15 \leq T \leq 25) &= P(\frac{15-20}{5} \leq \frac{T-20}{5} \leq \frac{25-20}{5}) \\ &= P(-1 \leq X \leq 1) \\ &= 2\Phi(1) - 1 \\ &= 0.6826 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(T \geq 28) &= P(\frac{T-20}{5} \geq \frac{28-20}{5}) \\ &= P(X \geq 1.6) \\ &= 1 - P(X \leq 1.6) \\ &= 1 - \Phi(1.6) \\ &= 1 - 0.9452 \\ &= 0.0548 \end{aligned}$$

2. calculer $P(T \geq 28 \quad | \quad T \geq 25)$;

Solution: D'après la formule de Bayes on a

$$\begin{aligned} P(T \geq 28 \quad | \quad T \geq 25) &= \frac{P(T \geq 28 \quad \cap \quad T \geq 25)}{P(T \geq 25)} \\ &= \frac{P(T \geq 28)}{P(T \geq 25)} \\ &= \frac{P(X \geq 1.6)}{P(X \geq 1)} \\ &= \frac{1 - \Phi(1.6)}{1 - \Phi(1)} \\ &= \frac{1 - 0.9452}{1 - 0.8413} \\ &= \frac{0.0548}{0.1587} \\ &= 0.345 \end{aligned}$$

3. Déterminer un intervalle de la forme $[20 - \epsilon, 20 + \epsilon]$ tel que la probabilité que T appartienne à cet intervalle soit 80%.

Solution: On a

$$\begin{aligned} P(20 - \epsilon \leq T \leq 20 + \epsilon) &= 0.8 \\ P(\frac{20-\epsilon-20}{5} \leq \frac{T-20}{5} \leq \frac{20+\epsilon-20}{5}) &= 0.8 \\ P(-\frac{\epsilon}{5} \leq X \leq \frac{\epsilon}{5}) &= 0.8 \\ 2\Phi(\frac{\epsilon}{5}) - 1 &= 0.8 \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} \Phi(\frac{\epsilon}{5}) &= \frac{1.8}{2} \\ \Phi(\frac{\epsilon}{5}) &= 0.9 \end{aligned}$$

D'après le tableau de la loi normale, on trouve que

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{5} &= \Phi^{-1}(0.9) \\ \frac{\epsilon}{5} &= 1.285 \end{aligned}$$

vu que $1.285 \in [1.28, 1.29]$. Enfin, on obtient que

$$\epsilon = 5 \times 1.285 = 6.425$$

Exercice 4. La durée de vie, en heures, d'une ampoule électrique est une variable aléatoire normale qu'on notera X. Sachant que :

$$P(X \leq 1600) = 0.8413 \quad \& \quad P(X \geq 1100) = 0.9332$$

Déterminer la durée de vie moyenne de l'ampoule ainsi que $\sigma(X)$.

Solution: Soit $X \sim N(m, \sigma)$ de moyenne m et d'écart type σ unconnus. Alors, $Y = \frac{X-m}{\sigma} \sim N(0, 1)$. Par suite, on a

$$\begin{aligned} P(X \leq 1600) &= 0.8413 \\ P(\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{1600-m}{\sigma}) &= 0.8413 \\ P(Y \leq \frac{1600-m}{\sigma}) &= 0.8413 \\ \Phi(\frac{1600-m}{\sigma}) &= 0.8413 \end{aligned}$$

En utilisant le tableau de la loi normale, on trouve que

$$\begin{aligned} \frac{1600-m}{\sigma} &= \Phi^{-1}(0.8413) \\ \frac{1600-m}{\sigma} &= 1 \end{aligned}$$

Par suite,

$$\sigma = 1600 - m \tag{1}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} P(X \geq 1100) &= 0.9332 \\ P(Y \geq \frac{1100-m}{\sigma}) &= 0.9332 \\ 1 - P(Y \leq \frac{1100-m}{\sigma}) &= 0.9332 \\ 1 - \Phi(\frac{1100-m}{\sigma}) &= 0.9332 \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}\Phi(\frac{1100-m}{\sigma}) &= 1-0.9332\\ &= 0.0668\end{aligned}$$

or $0.0668 < 0.5 \Rightarrow$ pas de valeurs dans le tableau. Donc, on utilise le fait que $\Phi(-x) = 1-\Phi(x)$, ce qui entraine que

$$\Phi(\frac{m-1100}{\sigma}) = 1-0.0668 = 0.9332$$

Par conséquent, en utilisant le tableau de la loi normale, on déduit que

$$\begin{aligned}\frac{m-1100}{\sigma} &= \Phi^{-1}(0.9332)\\ \frac{m-1100}{\sigma} &= 1.5 \qquad (2)\end{aligned}$$

Remplaçons (1) dans (2), on obtient

$$\frac{m-1100}{1600-m} = 1.5$$

$\Longleftrightarrow$

$$m-1100 = 2400-1.5m$$

$\Longleftrightarrow$

$$2.5m = 3500$$

$\Longleftrightarrow$

$$\boxed{m = 1400}$$

Enfin, on récupère σ à partir de (1) tel que

$$\boxed{\sigma = 1600-1400 = 200}$$

Exercice 5. On suppose que la taille des 258 étudiants du DUT informatique est distribuée normalement avec une moyenne de 1.70m et un écart-type de 10cm. Calculer le nombre d'étudiants ayant des tailles :

1. inférieures ou égales à 1.50m.

Solution: En fixant l'unité à mètre on a : $X \sim N(1.7, 0.1)$. Alors, $Y = \frac{X-1.7}{0.1} \sim N(0,1)$. De plus,

$$\begin{aligned}P(X \leq 1.5) &= P(\frac{X-1.7}{0.1} \leq \frac{1.5-1.7}{0.1})\\ &= P(Y \leq -2)\\ &= \Phi(-2)\\ &= 1-\Phi(2)\\ &= 1-0.9772\\ &= 0.0228\end{aligned}$$

On sait que pour tout évènement A, on a : $P(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}$. En particulier, $\mathrm{card}(A) = P(A) \times \mathrm{card}(\Omega)$ avec $\mathrm{card}(\Omega) = 258$ dans notre cas. Par suite, le nombre d'étudiants ayant des tailles inférieures ou égales à 1.50m est : $0.0228 \times 258 = 5.886$. On prend la partie entière disant 5 filles.

2. comprises entre $1,50$m et 1.65m.

Solution:

$$\begin{aligned} P(1.5 \leq X \leq 1.65) &= P(\frac{1.5-1.7}{0.1} \leq \frac{X-1.7}{0.1} \leq \frac{1.65-1.7}{0.1}) \\ &= P(-2 \leq Y \leq -0.5) \\ &= \Phi(-0.5) - \Phi(-2) \\ &= 1 - \Phi(0.5) - (1 - \Phi(2)) \\ &= \Phi(2) - \Phi(0.5) \\ &= 0.9772 - 0.6915 \\ &= 0.2857 \end{aligned}$$

Le nombre d'étudiants ayant des tailles comprises entre $1,50$m et 1.65m est : $0.2857 \times 258 = 73.71$. On prend la partie entière disant 73 filles.

3. supérieures ou égales à 2m.

Solution:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= P(Y \geq \frac{2-1.7}{0.1}) \\ &= P(Y \geq 3) \\ &= 1 - \Phi(3) \\ &= 1 - 0.9987 \\ &= 0.0013 \end{aligned}$$

Le nombre d'étudiants ayant des tailles supérieures ou égales à 2m est : $0.0013 \times 258 = 0.3354$. On prend la partie entière disant 0 (aucune) fille.