# Variables aléatoires continues
## (Probabilités)

A. El Ouni, A. Khaldi, C. Samir, A. Wohrer

Université d'Auvergne

Clermont-Ferrand Aurillac Le Puy-en-Velay

2A - BUT Info

Année 2024-2025

## Avant de commencer

- Pour toutes questions sur le cours :


achref.eloudi@uca.fr
abderrahmane.khaldi@ext.uca.fr
chafik.samir@uca.fr
adrien.wohrer@uca.fr


- Les transparents du cours et d'autres documents sont disponibles sur l'ENT.

# Plan du cours aujourd’hui

# Poids d'un bébé à la naissance (en France en 2016)

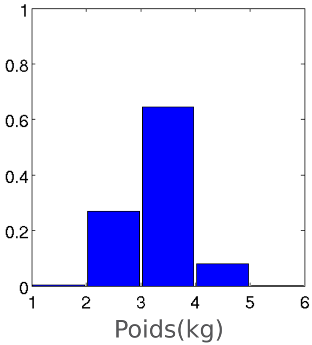
- Soit un large échantillon de bébés, nés en France au cours des 5 dernières années (disons, 10 000 bébés). On veut construire l'histogramme de leur poids à la naissance.

- Problème : l'aspect de l'histogramme va changer suivant la précision (nombre de chiffres après la virgule) utilisée.

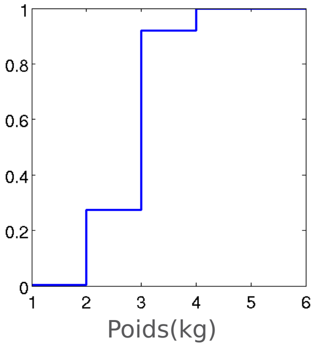
# Poids d'un bébé à la naissance (en France en 2016)

Version 1 : On s'intéresse juste au chiffre des kilos

Fonction de masse $p_i$




Fonction de répartition $F(x)$



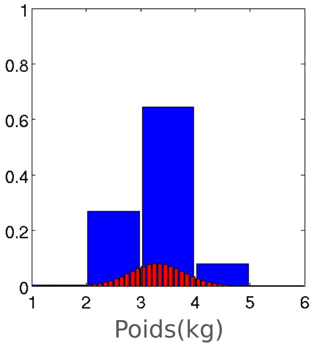

$\sum_i p_i = 1$

$F(x) = P(X \leq x)$

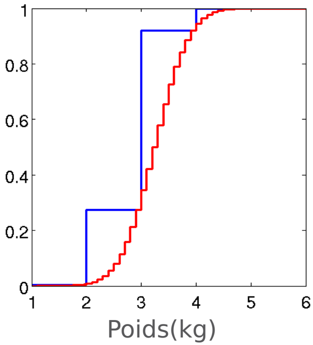
# Poids d'un bébé à la naissance (en France en 2016)

Version 2 : Le chiffre des kilos et une décimale

Fonction de masse $p_i$




Fonction de répartition $F(x)$



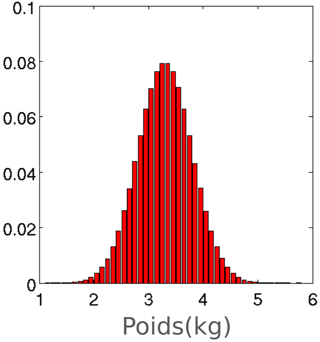

$\sum_i p_i = 1$

$F(x) = P(X \leq x)$

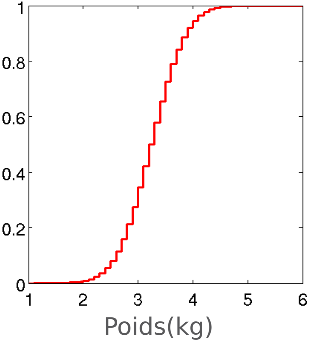
# Poids d’un bébé à la naissance (en France en 2016)

Version 2 : Le chiffre des kilos et une décimale

Fonction de masse $p_i$




Fonction de répartition $F(x)$



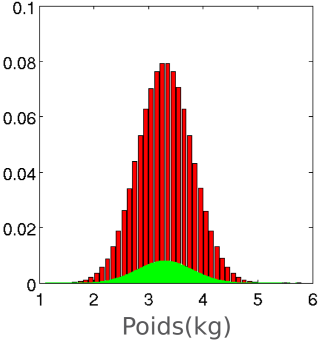

$\sum_i p_i = 1$

$F(x) = P(X \leq x)$

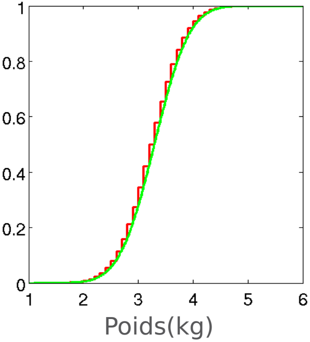
# Poids d'un bébé à la naissance (en France en 2016)

Version 3 : Le chiffre des kilos et deux décimales

Fonction de masse $p_i$




Fonction de répartition $F(x)$



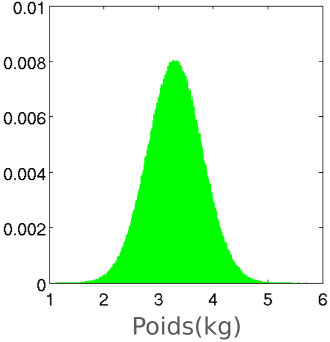

$\sum_i p_i = 1$

$F(x) = P(X \leq x)$

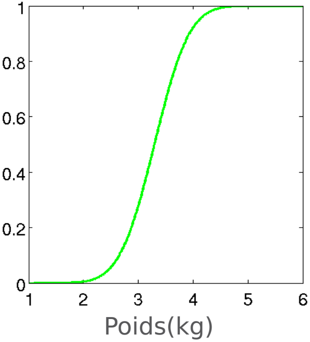
# Poids d'un bébé à la naissance (en France en 2016)

Version 3 : Le chiffre des kilos et deux décimales

Fonction de masse $p_i$




Fonction de répartition $F(x)$



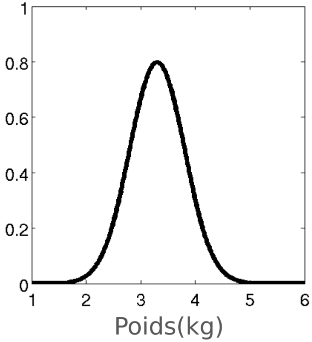

$\sum_i p_i = 1$

$F(x) = P(X \leq x)$

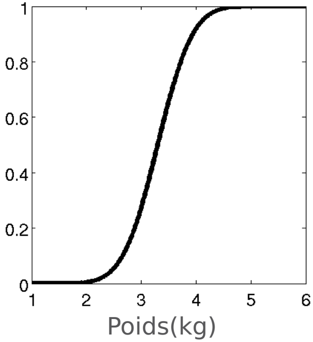
# Densité de probabilité

La **densité de probabilité** est proportionnelle à la fonction de masse. Mais au lieu de la somme des barres, c'est maintenant l'aire sous les barres qui doit être égale à 1.

Densité de probabilité




Fonction de répartition $F(x)$




Aire totale = 1

$F(x) =$ aire jusqu'à $x$

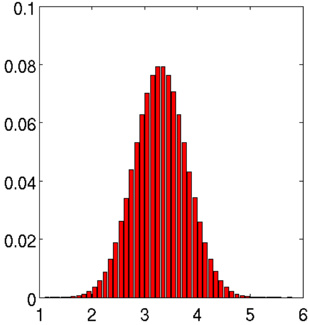
# Utiliser la densité de probabilité

Probabilité qu'un bébé fasse entre 3.4 kg et 3.9 kg ?

# Utiliser la densité de probabilité

Probabilité qu'un bébé fasse entre 3.4 kg et 3.9 kg ?

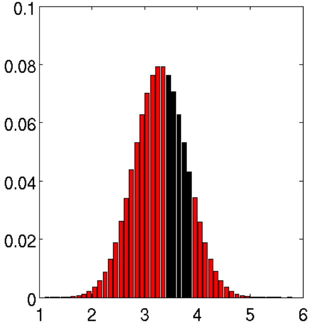
Calcul avec une variable discrète :



# Utiliser la densité de probabilité

Probabilité qu'un bébé fasse entre 3.4 kg et 3.9 kg ?

Calcul avec une variable discrète :



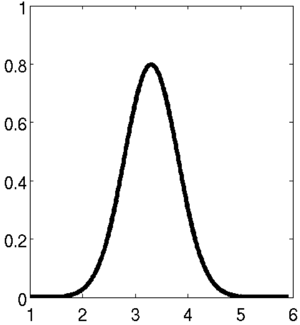

On fait la **somme** des probabilités pour la propriété requise :

$$P(X \in [3.4; 3.9]) = \sum_{x=3.4}^{3.9} p_x$$

## Utiliser la densité de probabilité

Probabilité qu'un bébé fasse entre 3.4 kg et 3.9 kg ?

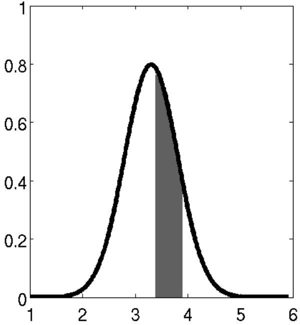
Calcul avec une variable continue :



# Utiliser la densité de probabilité

Probabilité qu'un bébé fasse entre 3.4 kg et 3.9 kg ?

Calcul avec une variable continue :




On calcule l'**aire** pour la propriété requise :

$$P(X \in [3.4; 3.9]) = \int_{x=3.4}^{3.9} f(x)\mathrm{d}x$$

## La seule différence

Vous allez voir que toutes les formules marchent exactement de la même façon que pour les variables aléatoires discrètes (semaine précédente) :

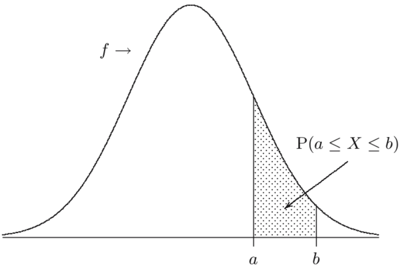
- Probabilité que la variable prenne certaines valeurs...
- Utiliser la fonction de répartition...
- Calculer une espérance et une variance...

En fait, la différence entre les deux est purement formelle :

**[⋆] Slogan [⋆]**

Pour les variables continues, on remplace les **sommes** par des **intégrales**.

# Variable aléatoire continue



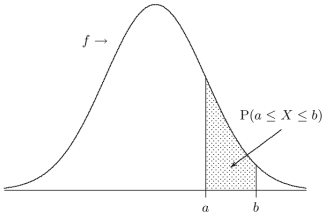

**Définition [⋆⋆]**

Une variable aléatoire $X$ est dite **continue** s'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que pour tout intervalle réel $[a, b]$ :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

La fonction $f$ s'appelle la **densité de probabilité** de $X$.

# Premières propriétés



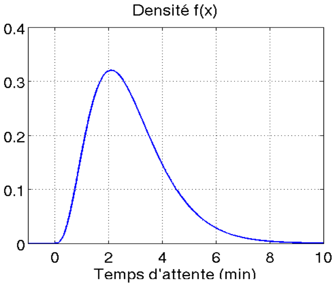

**Propriétés (densité de probabilité)**

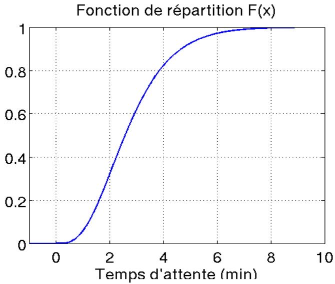
- Positivité : Pour tout $x$, $f(x) \geq 0$.
- Normalisation : $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

**Rappel : pour une variable discrète**

- Positivité : Pour tout $i$, $P(i) \geq 0$.
- Normalisation : $\sum_i P(i) = 1$.

# Fonction de répartition



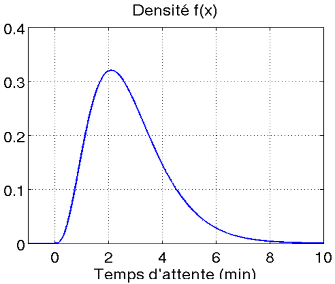



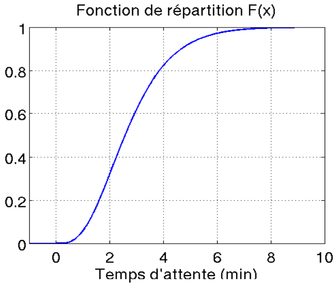

**Définition [⋆]**

Soit $X$ une v.a. continue. Sa **fonction de répartition** $F(x)$ est définie exactement comme dans le cas discret, c'est-à-dire :

$$F(x) = P(X \leq x)$$

# Fonction de répartition

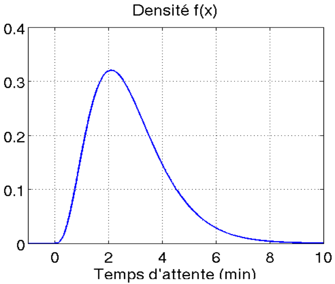


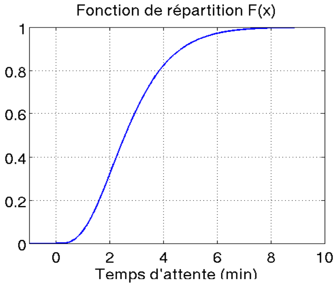




$X$ = Temps d'attente entre deux tramways.
Probabilité qu'il y ait moins de 4 minutes entre les deux ?

$$
\begin{aligned}
F(4) &= P(X \leq 4) \\
&= P(-\infty \leq X \leq 4) \\
&= \int_{-\infty}^{4} f(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

# Fonction de répartition




**Propriété [⋆⋆]**

Soit $X$ une v.a. continue de densité $f$. Soit $F$ sa fonction de répartition. Alors on a :

$$F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x \qquad \text{ou autrement dit :} \qquad f(x) = F'(x)$$

(Comme avant, en remplaçant les **sommes** par des **intégrales** !)

## Espérance, variance

### Définition

Soit $X$ une v.a. continue de densité $f$. On définit les deux quantités suivantes :

1. L'**espérance** de $X$ : $$E[X] = \int_x xf(x)\mathrm{d}x.$$
2. La **variance** de $X$ : $$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2.$$

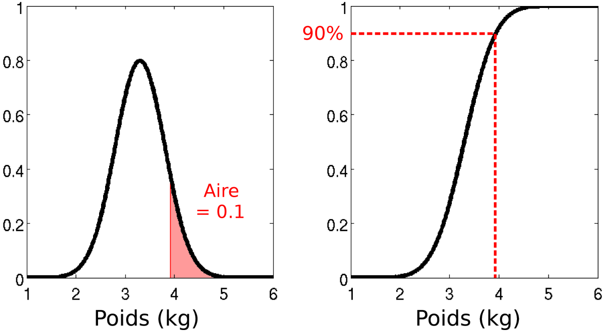
(Comme avant, en remplaçant les **sommes** par des **intégrales** !)

### Remarques

- Pour certaines variables aléatoires continues, il est possible que l'espérance n'existe pas (elle est « infinie »).
- Pour vous entraîner : Donnez la formule de $E[X^2]$.

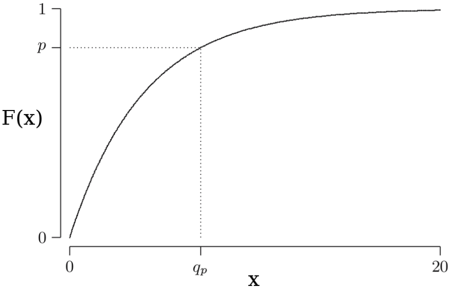
# Quantiles : exemple

Trouvez le 90-ème pourcentile, pour la distribution des poids de bébé à la naissance.




On lit $q_{0.9} \simeq 3.9$ kg.

## Quantiles : définition




### Définition

Soit $p$ un nombre entre 0 et 1. On appelle $p$**-ème quantile** de $X$ le nombre $q_p$ tel que $P(X \leq q_p) = p$. C'est-à-dire, tel que :

$$F(q_p) = p.$$

Quand $p = 0.5$, le point $q_{0.5}$ est appellé la **médiane**.

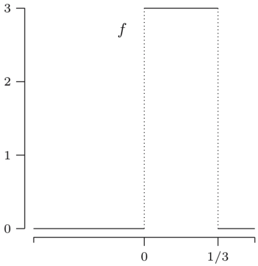
# Loi uniforme

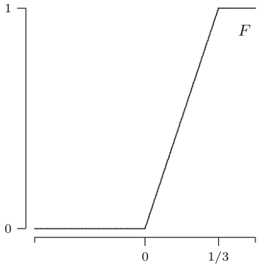
On tire un point au hasard sur le segment $[a, b]$.

## Exemples

- Quelle heure est-il (avec précision infinie) ? $X \sim U(0, 24)$.
- Je rentre de 20 minutes de marche. A quel moment de ma promenade ai-je perdu le téléphone ? $X \sim U(0, 1/3)$.

$U(0, \frac{1}{3})$



## Loi uniforme

On tire un point au hasard sur le segment $[a, b]$.

### Définition

Soit un segment réel $[a, b]$. On dit que $X$ suit une **loi uniforme** sur $[a, b]$, et on note $X \sim U(a, b)$, lorsque :

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{pour } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

### Propriétés

- $E[X] = (a+b)/2$
- $V[X] = (b-a)^2/12$