Probabilités A. El Ouni
Université Clermont Auvergne A. Khaldi
IUT Clermont Auvergne C. Samir
2A BUT Info, 2024-2025 A. Wohrer

TD5 – Variables aléatoires (cas continu)

Exercice 1.
Soit X une variable aléatoire continue, avec la densité de probabilité suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{pour } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{6} & \text{pour } 2 \leq x \leq 4, \\ 0 & \text{partout ailleurs.} \end{cases}$$

1. Dessinez le graphe de f.
2. Expliquez pourquoi $f(x)$ est bien une densité de probabilité.
3. Trouvez la fonction de répartition $F(x)$ de la variable X, et dessinez son graphe.
4. Calculez l'espérance et la variance de X.

Solution: Fait en classe.

Exercice 2.
Soit X une v.a. à valeurs dans $[0, 1]$, dont la fonction de répartition est

$$F(x) = x^2 \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

1. Calculez la densité de probabilité $f(x)$ pour la variable X, et dessinez son graphe.
2. Calculez $P(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{4})$.
3. Calculez $q_{0.1}$ (premier décile) et $q_{0.9}$ (dernier décile) pour la variable X.
4. Calculez l'espérance et la variance de X.

Solution: Fait en classe.

Exercice 3.
Un plateau circulaire est découpé en 8 zones angulaires identiques, numérotées de 1 à 8. On fait tourner une aiguille autour de l'axe du plateau.

1. Soit X la variable aléatoire qui désigne la zone sur laquelle l'aiguille s'arrête.
   (a) Expliquez pourquoi X est une v.a. discrète.
   (b) Donnez la loi de probabilité de X.
   (c) Trouvez la fonction de répartition $F(x)$ de la variable X, et dessinez son graphe.
   (d) Calculez l'espérance, la variance et l'écart-type de X.
2. Soit θ la variable aléatoire qui désigne l'angle auquel s'arrête l'aiguille (la position horizontale vers la droite correspondant à $\theta = 0$).

(a) Expliquez pourquoi θ est une v.a. continue.

(b) Quelles sont les valeurs possibles pour θ ?

(c) Sans faire le calcul, donnez des valeurs pour

$$P(0 \leq \theta \leq \pi), \quad P(\pi \leq \theta \leq 2\pi), \quad P(0 \leq \theta \leq 2\pi), \quad P(\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2})$$

(d) Proposer une fonction de densité pour θ.

(e) Trouvez la fonction de répartition $F(\theta)$ de la variable θ, et dessinez son graphe.

(f) Calculez l'espérance, la variance et l'écart type de θ.

3. Un joueur veut miser une grande somme. À votre avis, a-t-il plus de chance de gagner en misant sur une zone (valeur de X), ou sur une valeur de l'angle θ ? Justifiez.

Solution: Fait en classe.

Exercice 4.
Un homme arrive à l'arrêt de bus et rate de justesse le bus précédent. Il décide d'attendre 5 minutes le prochain bus, et sinon de partir à pied. En réalité, le temps entre deux bus est distribué suivant la loi $U(4,6)$. On appelle X le temps que l'homme va passer à l'arrêt.

Solution: Quelques notations avant de commencer : appelons $Y \sim U(4,6)$ la variable donnant le temps d'arrivée du bus suivant. Sa densité de probabilité est donc $f(y) = 1/(6-4) = 0.5$ sur l'intervalle $[4,6]$ (et 0 en dehors).

Quant au temps X que l'homme va passer à l'arrêt de bus, il se calculera donc comme : $X = \min(Y, 5)$.

1. Quelle est la probabilité que X soit inférieur à $4\frac{1}{2}$ minutes ?

Solution: Il y a une chance sur 4 que Y soit inférieur à $4\frac{1}{2}$. C'est assez évident pour être dit sans autre justification, mais voici comment on le justifierait rigoureusement :

$$P(Y \leq 4.5) = P(Y \in [4, 4.5]) = \int_{y=4}^{4.5} f(y)dy = \int_{y=4}^{4.5} \tfrac{1}{2}dy = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}$$

Enfin, tant que Y est inférieur à 5, on a $X = Y$. Il s'ensuite que

$$P(X \leq 4.5) = \tfrac{1}{4}.$$

2. Quelle est la probabilité que X soit exactement égal à 5 minutes ?

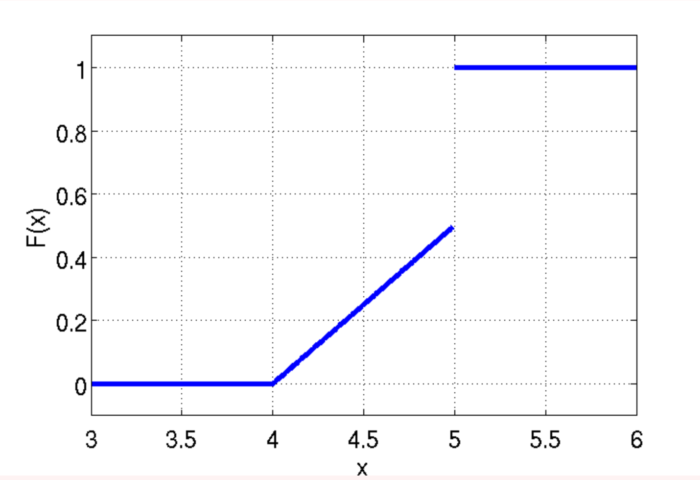
Solution: D'après la définition de X, on aura $X = 5$ dès que Y est supérieur à 5. C'est-à-dire :

$$P(X = 5) = P(Y \geq 5) = \int_{y=5}^{6} f(y)dy = \tfrac{1}{2}.$$

X sera exactement égal à 5 avec probabilité $\frac{1}{2}$. Concrètement, il s'agit des cas où l'homme préfère partir à pied car le bus n'est pas arrivé au bout de 5 minutes.

3. Tracez la fonction de répartition de X.

Solution:



4. X est-elle une variable discrète, ou une variable continue ?

Solution: Ni l'un ni l'autre, c'est une variable « hybride » ! La variable X possède :

- 50% de sa masse répartie de manière *continue* (et uniforme) sur l'intervalle $[4, 5]$.
- 50% de sa masse concentrée de manière *discrète* sur la valeur $x = 5$ (d'où le saut observable au niveau de la fonction de répartition).

Ce genre de comportement « hybride » est bien pris en compte, sans problème particulier, par la **fonction de répartition**. En effet, sa définition s'applique aussi bien dans le cas discret que dans le cas continu.

On aurait plus de problèmes à définir rigoureusement la fonction de masse de X, qui possède à la fois une partie « densité » et une partie « ponctuelle » concentrée au point $x = 5$ (techniquement, il faudrait faire intervenir ce qu'on appelle une *distribution ponctuelle de Dirac*). Moralité : comme souvent, il est plus aisé de travailler avec la fonction de répartition !

Exercice 5.

On considère une cible circulaire, de rayon R. Deux joueurs A et B s'affrontent au tir à l'arc, le vainqueur étant celui dont la flèche finit le plus près du centre. On introduit les variables aléatoires : X_A = distance entre la flèche du joueur A et le centre, et de même X_B = distance entre la flèche du joueur B et le centre.

1. Le joueur A tire sa flèche de façon *uniforme* dans toute la cible.
   a) Trouvez la fonction de répartition $F_A(x)$ pour X_A. Tracez-la.
   b) Déduisez-en la densité de probabilité $f_A(x)$ pour X_A.
   c) Quelle est la probabilité que le joueur A tombe à une distance $x \leq R/2$ du centre ?

Solution:

a) Il s'agit ici d'une distribution uniforme *dans la cible 2D*. Autrement dit, pour toute 'sous-région' C dans la cible,

$$P(\text{flèche} \in C) = \frac{\text{Aire de } C}{\text{Aire totale de la cible}}$$

L'aire totale de la cible est πR^2. De même, notons $C(x)$ le disque de rayon x, dont l'aire est égale à πx^2. On peut donc écrire

$$P(X_A \leq x) = P(\text{flèche} \in C(x)) = \frac{\pi x^2}{\pi R^2}.$$

Autrement dit, on vient de calculer la **fonction de répartion** de la variable X_A :

$$F_A(x) = \frac{x^2}{R^2}.$$

Comme toute fonction de répartition, il s'agit d'une fonction croissante, de 0 (lorsque $x = 0$) à 1 (lorsque $x = R$).

b) On en déduit, en dérivant, la **densité de probabilité** correspondante :

$$f_A(x) = F'_A(x) = \frac{2x}{R^2}.$$

c) Par définition de la fonction de répartition,

$$P(X_A \leq \tfrac{R}{2}) = F_A(\tfrac{R}{2}) = \frac{(R/2)^2}{R^2} = \frac{1}{4} \quad = 25\%.$$

2. Le joueur B, quant à lui, a la fonction de répartition suivante :

$$F_B(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leq 0, \\ \sqrt{\frac{x}{R}} & \text{pour } 0 < x < R, \\ 1 & \text{pour } x \geq 1. \end{cases}$$

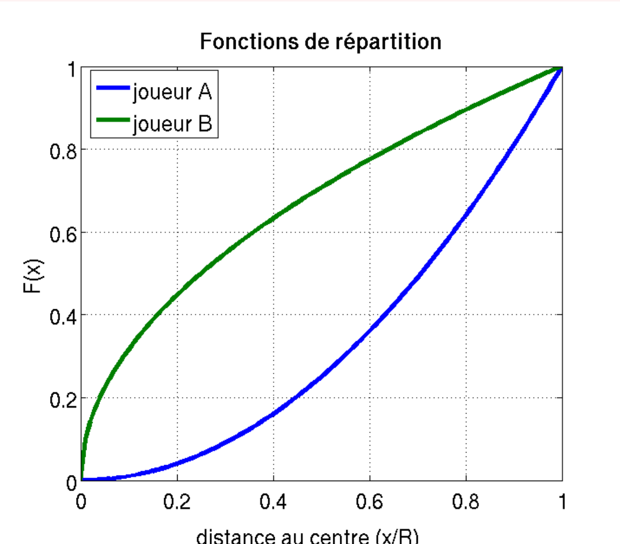
a) Tracez $F_B(x)$, dans la même figure que $F_A(x)$. Visuellement, lequel des deux joueurs semble le plus à même de gagner le concours ?

b) Calculez et tracez la densité de probabilité $f_B(x)$.

c) Quelle est la probabilité que le joueur B tombe à une distance $x \leq R/2$ du centre ?

Solution:

a) Voici le graphe des deux fonctions de répartition :

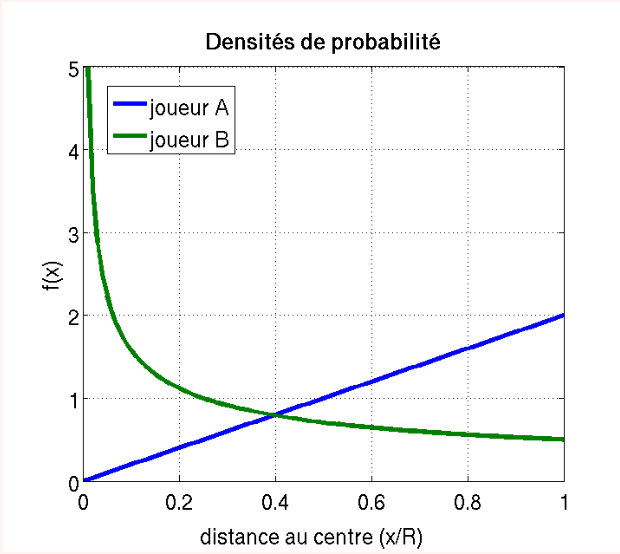


Il est clair que le joueur B a plus de chances de gagner le concours. En effet, pour tout $x \in [0, R]$, on constate que $F_B(x) \geq F_A(x)$. Autrement dit, quel que soit le seuil x que l'on fixe, le joueur B a davantage de chances que le joueur A d'atterir à l'intérieur du disque de rayon x. Il est donc clairement plus adroit (en moyenne).

b) On peut calculer, en dérivant, la densité de probabilité pour le joueur B :

$$f_B(x) = F_B'(x) = \frac{1}{2\sqrt{Rx}}.$$

Voici les densités de probabilités pour les deux joueurs (qui correspondent donc aux fonctions dérivées du graphe précédent) :



Sous cette représentation aussi, il est clair que le joueur B tombe généralement plus près du centre que le joueur A.

c) Par définition de la fonction de répartition,

$$P(X_B \leq \tfrac{R}{2}) = F_B(\tfrac{R}{2}) = \sqrt{\frac{(R/2)}{R}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \simeq 71\%.$$

Comme prévu, le joueur B a beaucoup plus de chances que le joueur A de tomber à distance $\leq (R/2)$ du centre.

3. Les deux joueurs tirent une flèche simultanément ; leurs deux tirs sont supposés indépendants.
   a) Supposons que le joueur A a tiré à distance « y » du centre. Quelle est la probabilité que le joueur B tombe plus proche que y ?
   b) Déduisez-en la probabilité que le joueur B gagne le concours.

Solution: La question précédente nous a montré que le joueur B est clairement meilleur (en moyenne) que le joueur A. Cependant, le joueur A peut toujours gagner le concours s'il a de la chance sur son lancer ! Dans cette question, on calcule la probabilité que cela se produise.

a) Si le joueur A a tiré à distance « y » du centre, le joueur B gagne le concours avec probabilité :

$$P(X_B \leq y) = F_B(y) = \sqrt{\frac{y}{R}}$$

On peut réécrire cela sous la forme d'une probabilité conditionnelle :

$$P(B \text{ gagne}|X_A = y) = F_B(y) = \sqrt{\frac{y}{R}}$$

b) Il s'agit à présent de moyenner la probabilité précédente, sur toutes les valeurs possibles prenables par X_A. Cela revient à appliquer une formule de la probabilité totale (comme la variable X_A est continue, on utilise une intégrale au-lieu d'une somme).

$$\begin{aligned} P(B \text{ gagne}) &= \int_{y=0}^{R} P(B \text{ gagne et } X_A = y) dy \\ &= \int_{y=0}^{R} P(B \text{ gagne}|X_A = y) f_A(y) dy \\ &= \int_{y=0}^{R} F_B(y) f_A(y) dy. \end{aligned}$$

Il reste simplement à calculer cette intégrale. Dans notre cas, on obtient

$$\begin{aligned} P(B \text{ gagne}) = \int_{y=0}^{R} \sqrt{\frac{y}{R}} \cdot \frac{2y}{R^2} dy \quad &= 2R^{-(5/2)} \int_{y=0}^{R} y^{(3/2)} dy \\ &= 2R^{-(5/2)} \left[\tfrac{2}{5} y^{(5/2)}\right]_0^R \quad = \tfrac{4}{5}. \end{aligned}$$

Ainsi, le joueur B a 4 chances sur 5 de gagner le concours (et le joueur A, 1 chance sur 5).

Contexte : Ce genre de calcul est très typique dans le domaine de la *détection du signal* (qui fut développée pendant la Seconde Guerre Mondiale, dans le cadre de la détection des signaux radar). Dans ce contexte, X_A représente un « bruit de fond » et X_B représente un « signal ». Le nombre $d = P(X_B > X_A)$ (calculé à la dernière question) permet de quantifier à quel point le signal « se détache » du bruit, et pourra donc être détecté par une méthode appropriée.