Probabilités A. El Ouni
Université Clermont Auvergne A. Khaldi
IUT Clermont Auvergne C. Samir
2A BUT Info, 2024-2025 A. Wohrer

TD9 – Révisions

Exercice 1.
Deux évènements A et B sont indépendants. De plus, ils vérifient $P(B|A \cup B) = 2/3$, et $P(A|B) = 1/2$. Que vaut $P(B)$?

Exercice 2.
Un fabricant produit des vis “premier prix”. Chaque vis produite possède une probabilité $p = 5\%$ d'être défectueuse. Les vis sont conditionnées par paquets de 500. On note X le nombre de vis défectueuses dans un paquet.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Justifiez qu'on peut approcher X par une loi normale, dont vous préciserez l'espérance μ et l'écart-type σ.
3. En utilisant cette approximation, donnez la probabilité que le nombre de vis défectueuses soit compris entre 20 et 30.
4. Lorsqu'on achète un paquet de vis, quel est le nombre minimal de vis valides qu'on est garanti d'avoir avec une probabilité de 99% ?

Exercice 3.
Un sismographe (appareil de mesure de secousses sismiques) surveille l'activité d'un volcan dangereux. Le volcan a deux phases :

- phase active (notée A) où on observe en moyenne 0.5 micro-secousses par heure.
- phase inactive (notée $\overline{A}$) où on observe en moyenne 0.1 micro-secousses par heure.

Le volcan passe la majorité de son temps en phase inactive : on sait que $P(A) = \frac{1}{1000}$.
Il y a un danger d'éruption uniquement pendant la phase active.

1. Quel est le nombre moyen de micro-secousses attendues sur une journée de 24 heures, lorsque le volcan est en phase active ? Et lorsque le volcan est en phase inactive ?
2. Chaque jour, l'appareil fournit une variable aléatoire X qui représente le *nombre de micro-secousses enregistrées sur les dernières 24 heures.*
   (a) Un statisticien nous suggère de modéliser X par une loi de Poisson. Pourquoi ?
   (b) En phase active, on modélise X par une loi de Poisson de paramètre λ :
   $$P(X = k\,|A) = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}$$
   Quelle valeur doit-on donner à λ ?
   (c) En phase inactive, on modélise X par une loi de Poisson de paramètre μ :
   $$P(X = k\,|\overline{A}) = e^{-\mu}\,\frac{\mu^k}{k!}$$
   Quelle valeur doit-on donner à μ ?

3. (a) Calculez la probabilité d'être en phase active *et* d'observer 9 secousses, soit
$$P(A \cap \{X = 9\}).$$
   (b) De même, calculez $P(\overline{A} \cap \{X = 9\})$.
   (c) Déduisez-en $P(X = 9)$, et enfin $P(A \,|\, X = 9)$.
   (d) Un jour donné, l'appareil a enregistré 9 secousses. Faut-il s'alarmer ?
4. Le jour suivant, l'appareil enregistre 8 secousses. Faut-il s'alarmer ?

   Indice : considérez la variable $Y = X_1 + X_2$ donnant le compte de micro-secousses sur les dernières 48 heures.

Exercice 4.
Un système électronique fait intervenir deux composants de durées de vies respectives X et Y, montés en série. Ces deux variables aléatoires suivent des lois exponentielles indépendantes de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.

1. Expliquer pourquoi la durée de vie D du système s'exprime par : $D = \min(X, Y)$.
2. Soit un nombre $a > 0$. Exprimer $P(D > a)$ à l'aide des variables X et Y.
3. En déduire $F_D(a)$, la fonction de répartition de D. Quelle loi suit la variable D ?
4. Donner l'espérance $E(D)$. Comment ce nombre se compare-t-il à $E(X)$ et $E(Y)$?

Exercice 5.

Dans une colonie de marmottes de Sibérie orientale, on note la durée de vie X d'une marmotte au hasard. On suppose que X suit une loi exponentielle, de paramètre $\lambda = 0.5$ an^{-1}.

1. On définit Y la variable aléatoire donnant la moyenne des durées de vie de 3 marmottes prises au hasard. C'est-à-dire $Y = (X_1 + X_2 + X_3)/3$, avec X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètre λ. Donnez les valeurs de $E(Y)$ et $V(Y)$.
2. On définit Z la variable aléatoire donnant la moyenne des durées de vie de 100 marmottes prises au hasard. C'est-à-dire $Z = (X_1 + \cdots + X_{100})/100$, avec $X_1, \ldots, X_{100}$ cent variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètre λ. Donnez les valeurs de $E(Z)$ et $V(Z)$.
3. Donnez, en le justifiant, une bonne approximation pour la loi de la variable Z. Utilisez cette approximation pour calculer $P(1.8 \leq Z \leq 2.2)$.
4. Soit un nombre entier N. On note W_N la variable aléatoire donnant la moyenne des durées de vie de N marmottes prises au hasard. Quelle valeur minimum doit avoir N pour qu'on ait $P(1.99 \leq W_N \leq 2.01) \geq 0.95$?