Lois de probabilités discrètes usuelles
(Probabilités)

A. El Ouni, A. Khaldi, C. Samir, A. Wohrer

Université d'Auvergne
Clermont-Ferrand Aurillac Le Puy-en-Velay

2A - BUT Info

Année 2024-2025

Avant de commencer

- Pour toutes questions sur le cours :

achref.eloudi@uca.fr
abderrahmane.khaldi@ext.uca.fr
chafik.samir@uca.fr
adrien.wohrer@uca.fr

- Les transparents du cours et d'autres documents sont disponibles sur l'ENT.

Plan du cours aujourd’hui

1. **Rappels**
2. **Lois de probabilité usuelles**

Variable aléatoire discrète

Définition

Une **variable aléatoire** réelle est un nombre X, associé à une expérience aléatoire, pouvant prendre des valeurs différentes en fonction de l'issue de l'expérience.

Variable aléatoire discrète

Étant donnée une variable aléatoire réelle discrète X, on peut définir les quantités suivantes :

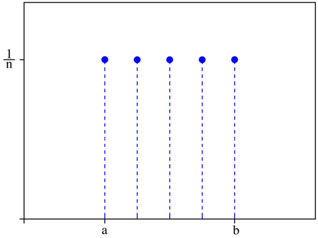
Loi uniforme

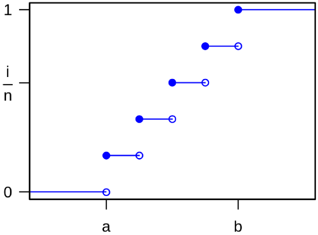
On tire un objet au hasard parmi n.

Exemples

- Dé parfait : $X \sim U(6)$.
- Carte au hasard : $X \sim U(52)$.

Fonction de masse et fonction de répartition :





Loi uniforme

On tire un objet au hasard parmi n.

Définition

Soit un entier n. On dit que X suit une **loi uniforme** sur $\{1, n\}$, et on note $X \sim U(n)$, lorsque :

$$\forall k = 1 \dots n, \quad P(X = k) = \frac{1}{n}.$$

Loi de Bernoulli

Un essai binaire, avec succès (1) ou échec (0).

Exemples

- Un tirage à pile ou face : $X \sim B(\frac{1}{2})$.
- Une vache au hasard est-elle atteinte de l'ESB ? $X \sim B(10^{-4})$.

Loi de Bernoulli

Un essai binaire, avec succès (1) ou échec (0).

Définition

Soit un nombre $0 \leq p \leq 1$. On dit que X suit une **loi de Bernoulli** avec probabilité de succès p, et on note $X \sim B(p)$, lorsque :

$$\begin{aligned} P(X=1) &= p && \text{(succès)} \\ P(X=0) &= 1-p && \text{(échec)} \end{aligned}$$

Propriétés

- $E[X] = p$
- $V[X] = p(1-p)$

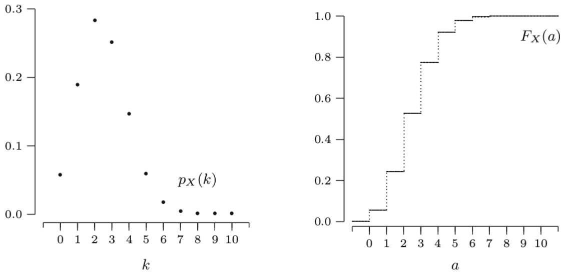
Loi binomiale

On réalise n essais (binaires) identiques, et on **compte les succès**.

Exemples

- Combien de Pile parmi 100 tirages à PF ? $X \sim Bin(100, \frac{1}{2})$
- Combien de vaches folles parmi 1000 ? $X \sim Bin(10^3, 10^{-4})$

Fonction de masse et fonction de répartition, pour la loi $Bin(10, \frac{1}{4})$



Loi binomiale

On réalise n essais (binaires) identiques, et on **compte les succès**.

Définition

Soit un nombre $0 \leq p \leq 1$, et un entier n. On dit que X suit une **loi binomiale** de paramètres (n,p), et on note $X \sim Bin(n,p)$, lorsque :

$$\forall k \in \{0, n\}, \qquad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

où le **coefficient binômial** est défini par la formule suivante :

$$\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \cdots \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times (k-2) \cdots \times 1}.$$

Propriétés

- $X \in \{0, n\}$
- $E[X] = np$
- $V[X] = np(1-p)$

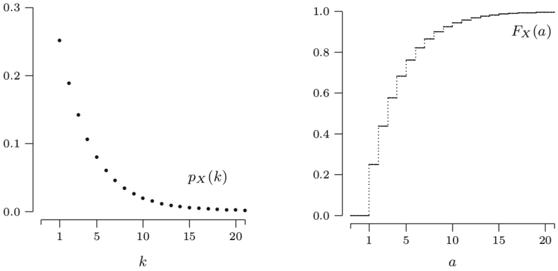
Loi géométrique

On répète le même essai (binaire) autant de fois que nécessaire, jusqu'à obtenir le **premier succès**.

Exemples

- Combien de lancers PF avant le premier Pile ? $X \sim Geo(\frac{1}{2})$
- Combien d'heures mal garé avant la contravention ? $X \sim Geo(\frac{1}{4})$

Fonction de masse et fonction de répartition, pour la loi $Geo(\frac{1}{4})$:



Loi géométrique

On répète le même essai (binaire) autant de fois que nécessaire, jusqu'à obtenir le **premier succès**.

Définition

Soit un nombre $0 \leq p \leq 1$. On dit que X suit une **loi géométrique** de paramètre p, et on note $X \sim Geo(p)$, lorsque :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X = k) = (1-p)^{k-1} p$$

Propriétés

- $X \in \mathbb{N}^*$ (ensemble dénombrable infini)
- $E[X] = \frac{1}{p}$
- $V[X] = \frac{1-p}{p^2}$

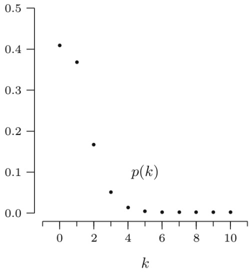
Loi de Poisson

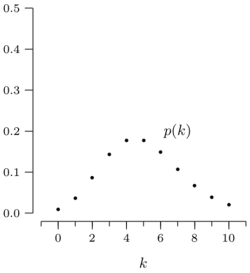
Des objets, tous identiques et indépendents, apparaissent au hasard. On connaît juste le **nombre moyen** attendu.

Exemples

- Combien d'orages en août à Clermont-Ferrand ? $X \sim Pois(0.9)$
- Un mardi matin à la station Jaude, combien de personnes arrivent à l'arrêt de tram entre 7h et 7h05 ? $X \sim Pois(5)$

Fonctions de masse pour $Pois(0.9)$ (à gauche) et $Pois(5)$ (à droite) :





Loi de Poisson

Des objets, tous identiques et indépendents, apparaissent au hasard. On connaît juste le **nombre moyen** attendu.

Définition

Soit un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit que X suit une **loi de Poisson** de paramètre λ, et on note $X \sim Pois(\lambda)$, lorsque :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad P(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Propriétés

- $X \in \mathbb{N}$ (ensemble dénombrable infini)
- $E[X] = \lambda \quad , \quad V[X] = \lambda.$
- La loi de Poisson $Pois(\lambda)$ peut être vue comme la **limite d'une loi binomiale** $B(n, p)$ lorsque p est petit et n grand, alors que la moyenne $\lambda = np$ reste proche de l'unité.