

Variables aléatoires discrètes

(Probabilités)

A. El Ouni, A. Khaldi, C. Samir, A. Wohrer



2A - BUT Info

Année 2024-2025

Avant de commencer

- Pour toutes questions sur le cours :

`anis.fradi@uca.fr`
`abderrahmane.khaldi@ext.uca.fr`
`chafik.samir@uca.fr`
`adrien.wohrer@uca.fr`

- Les transparents du cours et d'autres documents sont disponibles sur l'ENT.

Plan du cours aujourd'hui

- ➊ Applications
- ➋ Variable aléatoire
- ➌ Fonction de répartition
- ➍ Espérance et variance
- ➎ Lois de probabilité d'une V. A. discrète

1 Applications

2 Variable aléatoire

3 Fonction de répartition

4 Espérance et variance

5 Lois de probabilité d'une V. A. discrète

Loterie

Quel gain peut-on raisonnablement espérer ?



Intuitif ?

1 Applications

2 Variable aléatoire

3 Fonction de répartition

4 Espérance et variance

5 Lois de probabilité d'une V. A. discrète

Espace probabilisé

Soit l'univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ où chaque ω_i est une issue.

Soit P une mesure de probabilité sur l'ensemble Ω .

Ensemble ils définissent un **espace probabilisé**, noté (Ω, P) .

Définition

- Ω est **fini** si le nombre des issues est fini.
 - Ex : un seul lancer à Pile ou Face. $\Rightarrow \Omega = \{P, F\}$.
- Ω est **dénombrable** s'il est assimilable aux nombres entiers.
 - Ex : le nombre de lancers à PF requis pour obtenir Pile.
- Ω est **continu** s'il est assimilable aux nombres réels.
 - Ex : l'angle d'une aiguille tombée sur les rainures du parquet.

Les cas **fini** et **dénombrable** ont un point commun : leurs différentes issues peuvent être *comptées* (1^e possibilité, 2^e possibilité, etc).

Dans ce cas, on parle de **probabilités discrètes**.

Dans le cas **continu**, ce ne sera plus le cas (semaine prochaine).

Exemple

Soit l'expérience aléatoire : lancer deux dés parfaits.

- $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), \dots, (6, 6)\}$.
- On s'intéresse à la **variable aléatoire** S suivante :

$$S(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \omega_2 = k$$

- Les valeurs prises par S sont : $2 \leq S \leq 12$
- *Exemples :*
 $P(S = 0) = 0$; $P(S = 2) = \frac{1}{36}$; $P(S = 10) = \frac{3}{36}$.
- Dessiner le graphe (S, P_S) pour $S = 0 \dots 14$.

Variable aléatoire discrète

Soit (Ω, P) un espace probabilisé discret (fini ou dénombrable).

Définition

- Une **variable aléatoire** (notée **v.a.**) X est une fonction définie sur Ω , et à valeurs réelles.

$$\begin{array}{rcl} X : & \Omega & \rightarrow \mathbb{R} \\ & \omega & \mapsto x \end{array}$$

- Les valeurs prises par X sont dénombrables : $\{x_1, x_2, \dots\}$.
- On dit alors que X est une **v.a. discrète**.

Loi de probabilité discrète

Soit X une v.a. discrète.

Définition

- On introduit les évènements : $(X = x_i) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x_i\}$.
- La **loi de probabilité** de X est la donnée des nombres

$$p_i = P(X = x_i).$$

- On a : $0 \leq p_i \leq 1$ et $\sum_i p_i = 1$.

Exemple

Pour la somme S de deux dés parfaits :

s_i	1	2	3	4	5	6	...
$P(S = s_i)$	$\frac{0}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$...

① Applications

② Variable aléatoire

③ **Fonction de répartition**

④ Espérance et variance

⑤ Lois de probabilité d'une V. A. discrète

Fonction de répartition

Soit X une v.a. discrète.

Définition

- La **fonction de répartition** de X est définie sur \mathbb{R} par :

$$F(x) = P(X \leq x).$$

- C'est une fonction croissante en escalier.
- Pour $a \leq b$ on a $F(a) \leq F(b)$.
- $\lim_{a \rightarrow -\infty} F(a) = 0$ et $\lim_{a \rightarrow +\infty} F(a) = 1$.

Exemple d'une fonction de répartition

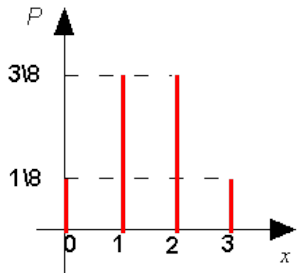
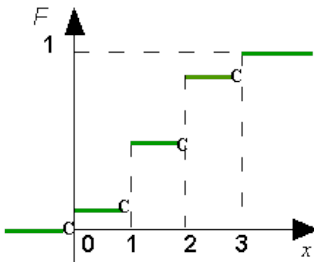


Diagramme en bâtons



Fonction de répartition

- 1 Applications
- 2 Variable aléatoire
- 3 Fonction de répartition
- 4 Espérance et variance**
- 5 Lois de probabilité d'une V. A. discrète

Espérance

Soit X une v.a. discrète.

Définition

- L'**espérance** de X , notée $E[X]$, est le nombre défini par

$$E[X] = \sum_i x_i p_i$$

- Quand $E[X] = 0$ on dit que la variable X est centrée.

Propriétés

- $E[aX + b] = aE[X] + b$, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$. **[linéarité]**
- Si $X \geq Y$ alors $E[X] \geq E[Y]$.
- $E[f(X)] = \sum_i f(x_i) p_i$, pour toute fonction f sur \mathbb{R} .

Variance

Soit X une v.a. discrète.

Définition

- La **variance** de X , notée $V[X]$ est le nombre défini par

$$V[X] = E[(X - E[X])^2]$$

- Sa racine carrée est appelée **écart type** : $\sigma_X = \sqrt{V[X]}$.

Propriétés

- $V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \sum_i x_i^2 p_i - (E[X])^2$
- $V[X] \geq 0$
- $V[aX + b] = a^2 V[X]$

1 Applications

2 Variable aléatoire

3 Fonction de répartition

4 Espérance et variance

5 Lois de probabilité d'une V. A. discrète

Loi uniforme

Loi de Bernoulli

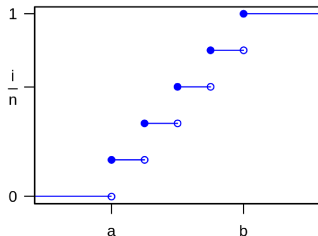
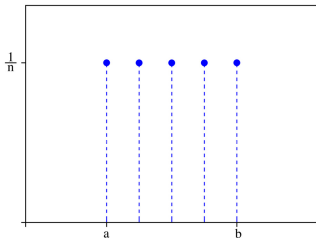
Loi uniforme

On tire un objet au hasard parmi n .

Exemples

- Dé parfait : $X \sim U(6)$.
- Carte au hasard : $X \sim U(52)$.

Fonction de masse et fonction de répartition :



Loi uniforme

On tire un objet au hasard parmi n .

Définition

Soit un entier n . On dit que X suit une **loi uniforme** sur $\{1, n\}$, et on note $X \sim U(n)$, lorsque :

$$\forall k = 1 \dots n, \quad P(X = k) = \frac{1}{n}.$$

Loi de Bernoulli

Un essai binaire, avec succès (1) ou échec (0).



Exemples

- Un tirage à pile ou face : $X \sim B(\frac{1}{2})$.
- Une vache au hasard est-elle atteinte de l'ESB ? $X \sim B(10^{-4})$.

Loi de Bernoulli



Un essai binaire, avec succès (1) ou échec (0).

Définition

Soit un nombre $0 \leq p \leq 1$. On dit que X suit une **loi de Bernoulli** avec probabilité de succès p , et on note $X \sim B(p)$, lorsque :

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= p && \text{(succès)} \\ P(X = 0) &= 1 - p && \text{(échec)} \end{aligned}$$

Propriétés

- $E[X] = p$
- $V[X] = p(1 - p)$