

TD8 – Plusieurs variables

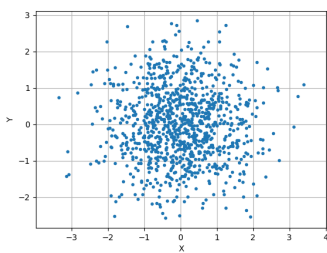
Exercice 1.

1. On lance simultanément deux dés parfaits et indépendants. On introduit les deux variables aléatoires X =maximum des 2 dés, et Y =minimum des 2 dés.
 - (a) Décrivez l'univers de cet expérience sous la forme d'un tableau carré. Indiquez la valeur de X et Y pour chacune des issues (=cases du tableau).
 - (b) Calculez l'espérance de X et de Y .
 - (c) Calculez la covariance de X et Y .
 - (d) Calculez $P(X = 5|Y = 3)$.
 - (e) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Mêmes questions pour les variables X =somme des deux dés et Y =écart (positif) entre les 2 dés.

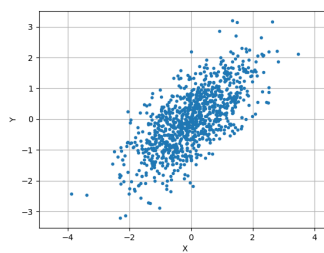
Exercice 2.

Chacune des figures ci-dessous représente un échantillon de tirages de 2 variables aléatoires (X, Y) . Pour chacune des figures, répondez aux questions suivantes :

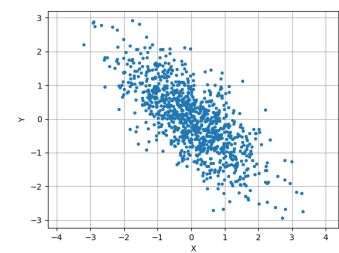
- La covariance de X et Y semble-t-elle positive, négative, ou nulle ?
- Les variables X et Y semblent-elles indépendantes ?



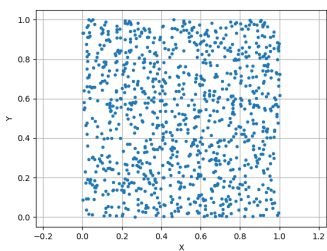
(a)



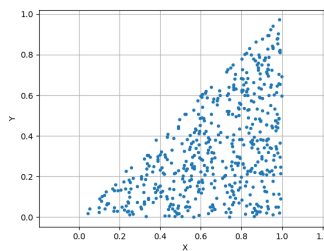
(b)



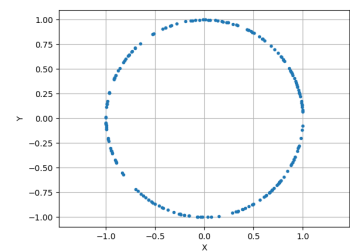
(c)



(d)



(e)



(f)

Exercice 3.

Dans une colonie de marmottes de Sibérie orientale, on note la durée de vie X d'une marmotte au hasard. On suppose que X suit une loi exponentielle, de paramètre $\lambda = 0.5 \text{ an}^{-1}$.

1. On définit Y la variable aléatoire donnant la moyenne des durées de vie de 3 marmottes prises au hasard. C'est-à-dire $Y = (X_1 + X_2 + X_3)/3$, avec X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètre λ . Donnez les valeurs de $E(Y)$ et $V(Y)$.
2. On définit Z la variable aléatoire donnant la moyenne des durées de vie de 100 marmottes prises au hasard. C'est-à-dire $Z = (X_1 + \dots + X_{100})/100$, avec X_1, \dots, X_{100} cent variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètre λ . Donnez les valeurs de $E(Z)$ et $V(Z)$.
3. Donnez, en le justifiant, une bonne approximation pour la loi de la variable Z . Utilisez cette approximation pour calculer $P(1.8 \leq Z \leq 2.2)$.
4. Soit un nombre entier N . On note W_N la variable aléatoire donnant la moyenne des durées de vie de N marmottes prises au hasard. Quelle valeur minimum doit avoir N pour qu'on ait $P(1.99 \leq W_N \leq 2.01) \geq 0.95$?