Probabilités
Université Clermont Auvergne
IUT Clermont Auvergne
2A BUT Info, 2024-2025

A. El Ouni
A. Khaldi
C. Samir
A. Wohrer

TD3 – Variables aléatoires (cas discret)

Exercice 1.
On lance un dé parfait deux fois de suite et on note X le plus grand nombre obtenu des deux.

1. Déterminer la loi de X et représenter la sous forme de tableau.
2. Donner le tableau de $P(X \leq k)$ pour $k = 1, 2, \ldots, 6$.
3. Tracer la fonction de répartition.

Solution: Fait en classe.

Exercice 2.
Dans un jeu de 52 cartes on tire une carte au hasard.

1. Déterminer la probabilité des évènements suivants :
   (a) La carte un pique.
   (b) La carte a une tête.
   (c) La carte a un symbole rouge.
2. On essaie d'établir de nouvelle règles pour s'amuser et non pas s'ennuyer avec le jeu. On commence par donner 1 point si on a un trèfle et 0 point sinon.
   (a) Donner la loi de X le point obtenu suite à un tirage.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Si au lieu de tirer une seule carte on tire 2 cartes.
   (a) Donner la loi de X le point obtenu suite à un tirage.
   (b) Expliquer la différence avec le tirage d'une seule carte.
   (c) Calculer l'espérance et la variance de X.
4. Le jeu est-il plus amusant avec le tirage d'une seule ou de deux cartes ?

Solution:

1. On compte le nombre de tirages favorables, et on divise par le nombre de tirages total (52).
   (a) $P(\text{La carte un pique}) = 13/52 = 1/4$.
   (b) $P(\text{La carte a une tête}) = 12/52 = 3/13$.
   (c) $P(\text{La carte a un symbole rouge}) = 26/52 = 1/2$.
2. 1 point si on a un trèfle et 0 point sinon.

(a) X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 1/4$. C'est-à-dire : $X = 1$ avec probabilité $1/4$ et $X = 0$ avec probabilité $3/4$.

(b) $E(X) = 1.\frac{1}{4} + 0.\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.
$E(X^2) = 1^2.\frac{1}{4} + 0^2.\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$, et donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}$.
On pouvait aussi répondre plus rapidement, en utilisant directement les formules connues de $E(X)$ et $V(X)$ pour la loi de Bernoulli en fonction de son paramètre p.

3. Si on tire 2 cartes successives, sans remise, la taille de l'univers (ordonné) est 52×51.

(a) Comptons les tirages possibles, en fonction du nombre de trèfles dedans :
- Il y a 13×12 tirages avec 2 trèfles.
- Il y a $13 \times 39 + 39 \times 13$ tirages avec 1 trèfle (suivant que c'est la 1ère ou la 2ème carte tirée qui est un trèfle).
- Il y a 39×38 tirages avec 0 trèfles.

Donc, la loi de la variable X est la suivante :

$$P(X=0) = \frac{39.38}{52.51}, \qquad P(X=1) = \frac{2.13.39}{52.51}, \qquad P(X=2) = \frac{13.12}{52.51}$$

(b) Différence avec le tirage d'une seule carte : la variable X possède maintenant 3 valeurs possibles, ce n'est donc plus une variable de Bernoulli.

(c) On calcule avec les formules directes :

$$E(X) = 0.P(X=0) + 1.P(X=1) + 2.P(X=2) = 0.5$$

puis

$$E(X^2) = 0^2.P(X=0) + 1^2.P(X=1) + 2^2.P(X=2) \simeq 0.618$$

d'où

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \simeq 0.618 - 0.25 \simeq 0.368$$

4. Ni l'un ni l'autre !

Exercice 3.
On choisit aléatoirement deux nombres avec la loi uniforme dans l'ensemble $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et on note X leur produit.

1. Déterminer la loi de X.
2. On pose $Y = X^2 - 2X$. Déterminer la loi de Y.
3. Calculer $E(X)$, $V(X)$, $E(Y)$, et $V(Y)$.

Solution:

1. Il suffit de considérer les $5^2 = 25$ tirages possibles pour les 2 nombres (on peut par exemple les ranger dans un tableau de taille 5×5), et de calculer la valeur de X dans chacun de ces 25 cas. On compte enfin le nombre de tirages pour chaque valeur possible de X.
Au final, les valeurs possibles pour X et leurs probabilités respectives sont données par le tableau suivant :

k	-4	-2	-1	0	1	2	4
$P(X=k)$	$\frac{2}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{2}{25}$

2. Pour $Y = X^2 - 2X$, on peut simplement calculer la valeur de Y associée à chaque valeur de X :

X	-4	-2	-1	0	1	2	4
Y	24	8	3	0	-1	0	8

On en déduit les valeurs possibles de Y et leurs probabilités respectives :

k	-1	0	3	8	24
$P(Y=k)$	$\frac{2}{25}$	$\frac{13}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{2}{25}$

3. On applique les formules du cours :

$$E(X) = \sum_{\text{valeurs } k \text{ possibles}} k.P(X=k)$$
$$E(X^2) = \sum_{\text{valeurs } k \text{ possibles}} k^2.P(X=k)$$
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

On obtient ainsi

$$E(X) = 0, \qquad V(X) = 4, \qquad E(Y) = 4, \qquad V(Y) = 62.24 - 16 = 46.24$$

Exercice 4.

Soit Y une variable aléatoire qui représente deux états : un pc tombe en panne avec la probabilité p ou ne tombe pas en panne.

1. Sachant que $V(Y) = \frac{9}{25}$ donner les valeurs possibles pour p.
2. Faut-il envisager de remplacer le pc ? Pourquoi ?

Solution:

1. Y peut prendre seulement 2 valeurs (0 ou 1), elle suit donc une loi de Bernoulli de paramètre p. Or, on sait que pour une loi de Bernoulli,
$$V(Y) = p(1-p)$$
Ici, on sait que $V(Y) = 9/25$, et on cherche p. On doit donc résoudre
$$p(1-p) = \frac{9}{25}$$
$$p^2 - p + \frac{9}{25} = 0$$
qui est une équation du 2nd degré. On calcule son discriminant :
$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - \frac{4.9}{25} = -\frac{11}{25}$$
Puisque $\Delta < 0$, il n'y a aucune solution réelle, c'est-à-dire aucun p qui puisse marcher. Il y avait donc une erreur quelque part dans l'énoncé !
2. Il faut surtout envisager de remplacer l'exercice ;)

Exercice 5.
Dans un jeu, le temps T nécessaire pour finir une étape est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par :

T	2	3	4	5	6	7
$P(T=t)$	$0,1$	$0,1$	$0,3$	p_5	$0,2$	$0,1$

1. Compléter le tableau en calculant $p_5 = P(T=5)$.
2. Calculer le temps moyen, la variance et l'écart-type.
3. Le joueur est récompensé par un trophée pour chaque seconde gagnée sur une étape de 6 minutes. Sinon il ne reçoit rien.
   (a) Expliquer pourquoi la récompense R est une variable aléatoire discrète.
   (b) Donner la loi de probabilité de R.
   (c) Calculer le récompense moyenne, la variance et l'écart-type.
4. On décide de rétablir une pénalité qui augmente avec le temps passé dans une étape. On choisit de compter une pénalité $S = (T-2)^2$.
   (a) Expliquer pourquoi S est une variable aléatoire discrète.
   (b) Donner la loi de probabilité de S.
   (c) Calculer le pénalité moyenne, la variance et l'écart-type.

Solution:

1. Il faut que la somme de p_i fasse 1, ce qui impose $p_5 = 0,2$.
2. On applique les formules du cours :
$$\begin{aligned}
E(T) &= \sum_t t.P(T=t) = 2\times 0,1 + 3\times 0,1 + \ldots = 4.6 \\
E(T^2) &= \sum_t t^2.P(T=t) = 2^2\times 0,1 + 3^2\times 0,1 + \ldots = 23.2 \\
V(T) &= E(T^2) - E(T)^2 = 23.2 - 4.6^2 = 2.04 \\
\sigma(T) &= \sqrt{V(T)} = \sqrt{2.04} \simeq 1.42
\end{aligned}$$
3. (a) Il semble peu probable que le joueur puisse gagner davantage qu'un seul trophée. On supposera donc que R est une variable aléatoire binaire, prenant les valeurs 1 (si $T < 6$ min$\rightarrow$ le joueur gagne un trophée) et 0 (si $T \geq 6$ min$\rightarrow$le joueur ne gagne rien).
   (b) Il s'agit donc d'une loi de Bernouilli. $P(R=1) = p_2 + \cdots + p_5 = 0,7$, et $P(R=0) = 0,3$.
   (c) D'après la propriété de la loi de Bernoulli, $E(R) = p = 0,7$ et $V(R) = p(1-p) = 0,21$.
4. (a) S est aléatoire car son résultat ne peut pas être connu à l'avance. Elle est discrète car elle dépend de la variable T qui est elle-même discrète (et même finie).
   (b) Faire un tableau de correspondance entre T et S (idem exercice 3).
   (c) Idem exercice 3.

Exercice 6.
On place un hamster dans une cage. Il se trouve face à 5 portillons dont un seul lui permet de sortir de la cage. A chaque essai infructueux, on le replace à l'endroit initial.

1. En supposant que le hamster ne soit pas doué d'apprentissage et qu'il choisisse donc de façon équiprobable entre les 5 solutions à chaque nouvel essai, déterminer la probabilité des évènements :
   a) le hamster sort au premier essai,
   b) le hamster sort au troisième essai,
   c) le hamster sort au septième essai.

Solution: Dans ce cas, il s'agit d'une **loi géométrique**, $X \sim Geo(1/5)$. (On répète la même expérience binaire jusqu'à obtenir le premier succès.) Ainsi :

$$P(X=1) = \frac{1}{5}$$
$$P(X=2) = \frac{4}{5}.\frac{1}{5}$$
$$P(X=3) = \left(\frac{4}{5}\right)^2.\frac{1}{5}$$
$$P(X=7) = \left(\frac{4}{5}\right)^6.\frac{1}{5}$$

avec toujours la même structure : on doit commencer par $k-1$ échecs (d'où le $\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$) et observer le premier succès au k-ème essai (d'où le $\frac{1}{5}$ final).

2. Le hamster mémorise maintenant les essais infructueux et choisit de façon équiprobable entre les portillons qu'il n'a pas encore essayés. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'essais effectués.
   a) Quelles valeurs peut prendre X ? Déterminer sa loi de probabilité.
   b) Déterminer l'espérance mathématique $E(X)$ et interpréter le résultat.
   c) Déterminer la variance $V(X)$.

Solution: Dans ce cas, il s'agit d'une **loi uniforme** $X \sim U(5)$. La façon la plus simple de le comprendre est la suivante : le hamster va essayer les 5 portes, dans un ordre aléatoire (et sans répétition, car il ne visite jamais deux fois la même porte). La "bonne" porte peut se trouver en n'importe quelle position (de 1 à 5) dans cet ordre de visite. Donc le hamster a autant de chances de sortir en 1,2,3,4 ou 5 coups : c'est bien une loi uniforme.

$$\text{Pour } k = 1 \ldots 5, \quad P(X=k) = \frac{1}{5}.$$

L'espérance de cette loi est

$$E[X] = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3.$$

Sa variance est

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}{5} - 3^2 \quad = 11 - 9 = 2.$$

Exercice 7.
Un certain jeu dépend du nombre de points X obtenus en jetant un dé équilibré.

1. Calculer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$.
3. Le gain de ce jeu est donné par une fonction linéaire suivante $G(X) = 3X + 5$. faire un tableau de G.
4. Calculer le gain espéré $E(G)$ et la variance $V(G)$.

Solution:

1. X suit une loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
2. Après un calcul simple (loi uniforme, idem exercice précédent), on trouve $E[X] = 7/2$ et $V[X] = (91/6) - (49/4) = 35/12$.
3. On applique la formule (fonction linéaire) donnant Y à partir de X :

Proba	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
X	1	2	3	4	5	6
Y	8	11	14	17	20	23

4. On peut refaire les calculs à partir du tableau de Y. Mais ce n'est pas nécessaire, car on sait comment l'espérance et la variance sont modifiées par une fonction linéaire. On a tout simplement :
   - Par linéarité de l'espérance : $E[G] = 3E[X] + 5 = (21/2) + 5 = (31/2)$.
   - Par 'quadraticité' de la variance : $V[G] = 3^2 V[X] = 9 \times (35/12) = (105/4)$.