OPPGAVER

FORKURS I FYSIKK

August Geelmuyden, Niels Bonten

onsdag 12. august 2015

1 Newtons andre lov

Denne oppgaven handler om Newtons andre lov. Loven sier at akselerasjonen a til et legeme avhenger av to ting: legemets masse m, og summen av kreftene som virker på legemet. Den totale kraften som virker på legemet er legemets akelerasjon skalert med dets masse. Loven er dermed,

$$\sum_{\text{krefter}} F = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2},$$

hvor v er farten til massen, og x er posisjonen til massen. Vi minner om at

$$v'(t) = \frac{d}{dt}v = \frac{dv}{dt} = \dot{v},$$

er den deriverte av funksjonen $v(t)$ med hensyn på t.

a) En bil med masse m står i ro. Hva kan du si om kraften F på bilen?
(*Hint:* $v = 0$)

b) Bilen har konstant fart. Hva du si om kraften F på bilen?
(*Hint:* $v =$*konst.*)

c) Forklar hvorfor tilfellet i oppgave b) dekker tilfellet i oppgave a).

d) Bilen akselererer. Hva kan du si om kraften på bilen?

Bevegelsesmengde er en interessant størrelse i fysikk. Bevegelsesmengden p til en masse m med fart v er definert som

$$p = mv$$

e) Hva forteller Newtons andre lov oss om en konstant masse med konstant bevegelsesmengde? (*Hint: konstant bevegelsesmengde betyr at den tidsderiverte bevegelsesmengden $dp/dt = 0$.*)

f) Anta at massen ikke endres. Finn Newtons andre lov uttrykt ved bevegelsesmengde[1].

2 Fjærkraft

En masse henger i en fjær i likevekt (i ro). Vi minner om at fjærkraften

$$F = -kx$$

a) Finn summen av kreftene som virker på massen. Hva er summen av kreftene lik ifølge Newtons andre lov?

Definer høyden til massen når den henger i likevekt som x_0. Gi nå massen et utslag. Matematisk kan det skrives som $x_0 \mapsto x_0 + x$, hvor x er en koordinat som markerer utslaget bort fra likevekt. Fordi likevekten forstyrret, vil summen av kreftene nå være forskjellig fra null.

b) Finn summen av kreftene i dette tilfellet.
(*Hint: Erstatt x_0 med $x_0 + x$ fra forrige oppgave. Hva sier Newtons andre lov?*)

c) Vis at Newtons andre lov i dette tilfellet gir følgende differensiallikning

$$m\ddot{x} = -kx$$

Vi skal nå forsøke å reprodusere resulatet over, men nå ved å anta energibevaring. Hvis en kraft F har en tilhørende potensiell energi V er sammenhengen mellom dem gitt av

$$F = -\frac{d}{dx}V$$

d) Bruk relasjonen over til å vise at den potensielle energien til fjærkraften er gitt som

$$V = \frac{1}{2}kx^2$$

[1]Newton formulerte faktisk sin andre lov ved hjelp av bevegelsesmengde. En engelsk oversettelse av den originale loven er som følger: "*The alteration of motion is ever proportional to the motive force impressed; and is made in the direction of the right line in which that force is impressed*".

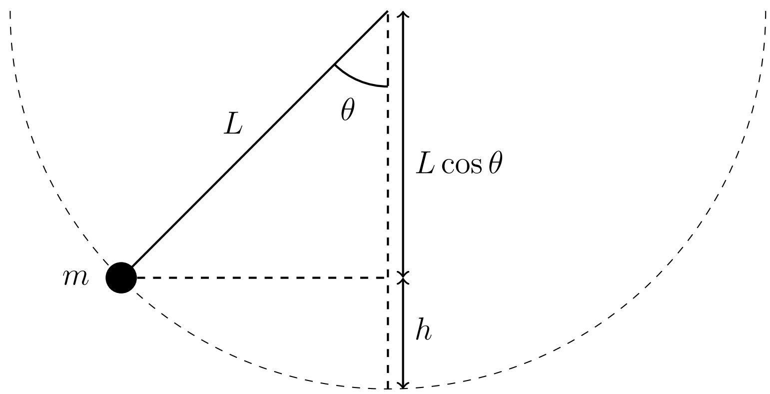
e) Finn den totale energien $E = K + V$ uttrykt ved konstantene k,m og variablene x og $\dot{x}$.
(*Hint: Kinetisk energi er alltid gitt som* $K = \frac{1}{2}mv^2$)

f) Finn et uttrykk for hvordan den totale energien endrer seg over tid.
(*Hint: Energiens endring over tid kan skrives som* $\frac{dE}{dt}$)

g) Bruk energibevaring til å finne den samme differensiallikningen som i oppgave c).
(*Hint: Energibevaring kan uttrykkes ved* $\frac{dE}{dt} = 0$)

3 Pendel

Vi fester et lite lodd med konstant masse m i en masseløs snor slik som vist på figuren under.



Ved ethvert tidspunkt er energien E til en masse m definert som summen av kinetisk og potensiell energi, dvs

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz,$$

hvor v er farten til massen m, z er høyden og g er gravitasjonskonstanten. Legg merke til at når loddet slippes, så vil v og z være i stadig endring og kunne beskrives som funksjoner av tid, men E skal holdes konstant.

a) Gitt at loddet begynner i ro med posisjon som vist på figuren. Finn et utrykk for et vilkårlig tidspunkt etterpå som inneholder v og z.
(*Hint: fra energibevaring vet vi at* $dE/dt = 0$. *Finn to lure tidspunkter, og bruk at energien alltid har samme verdi.*)

b) Hva er farten når loddet passerer den stiplede linjen?

4 Energi

Vi skal i denne oppgaven vise at vi får energibevaring hvis summen av kreftene kan relateres til et potensial. La det være gitt at

$$\sum_{\text{krefter}} F = -\frac{d}{dx}V, \tag{1}$$

hvor V er potensialfunksjonen (den potensielle energien) til summen av kreftene.

a) Vis at

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = mav.$$

(*Hint: kjerneregelen for derivasjon.*)

b) Vis at Newtons andre lov gir oppgav til uttrykket

$$v\sum_{\text{krefter}} F = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right).$$

(*Hint: multipliser Newtons andre lov med v.*)

c) Bruk uttrykket for potensiell energi i likning (1) at $dE/dt = 0$. Nedenfor står to ligninger som er nyttige i denne oppgaven.

- Derivasjon tilfredsstiller[2]

$$\frac{d}{dt}(A+B) = \frac{d}{dt}A + \frac{d}{dt}B.$$

- Vi minner også om kjerneregelen for derivasjon

$$\frac{dx}{dt}\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dt}.$$

d) I denne deloppgaven skal vi se at at det ikke endrer fysikken når vi legger til et konstantledd i energien. La først

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V.$$

Hva sier energibevaring dersom vi legger til et konstantledd i energien? Det vil si, $E \mapsto E + A$, hvor A er en konstant.

[2]Formelt sier vi at derivasjonsoperatoren er distributiv med hensyn på addisjon