KOMPLEKS ANALYSE

Komplekse uendelige rekker

En uendelig kompleks potensrekke $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ har konvergensradius gitt av $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ eller $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$

Eksponensialfunksjonen of trigonometriske funksjoner

$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$. Fra identitetsprinsippet følger det at sinus og cosinus har de vanlige definisjonene

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

Hyperbolske funksjoner

Sinus og cosinus har hyperbolske verdier langs imaginær akse

$$\cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$$

Logaritmer

Helt som i $\mathbb{R}$, men må ha $\arg z = \theta \in [0, 2\pi)$.

Analytiske funksjoner

En funksjon $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ er analytisk/holomorf dersom $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}$ eksisterer. Hvis $f = u + iv$ er analytisk i et område, da må også $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ og $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ (Cauchy Riemann). Hvis en funksjon f tilfredsstiller Cauchy-Riemann og u og v har kontinuerlige partiellderiverte i det området, er f analytisk.

Konturintegraler

Cauchys teorem: Hvis f er analytisk på og inni en kontur Γ, så er $\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$.
Cauchys integralformel: Hvis f er analytisk på og på innsiden av en leke-kontur Γ har vi

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}.$$

Fra dette følger det et nyttig integral

$$\oint_{\partial\mathbb{D}} (z-z_0)^n dz = 2\pi i \delta_{n,\text{-}1}$$

Fra reelle til komplekse integraler

La $\int_a^b f(x)dx$ være et reelt integral. Vi ønsker å skrive det om til det komplekst integral $\int_\gamma g(z)dz$. Dersom det *sinx* og/eller $\cos x$ inngår er det lurt å bruke at

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \text{ og } \cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

med substitusjonen $z = e^{ix}$ blir får vi $\sin x = \frac{1}{2i}(z - 1/z)$ og $\cos x = \frac{1}{2}(z + 1/z)$ med $dz = izdx$. For eksempel

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1+\cos x} \mapsto \oint_{\partial\mathbb{D}} \frac{dz}{iz(1+z/2+1/2z)}$$

Laurentrekker

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + ... + \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + ...$$

Leddene med b_i kalles *prinsipaldelen* og verdien b_1 kalles *residyen*.

Residyteoremet

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_i \mathrm{res}_i(f)$$

Prinsipalverdi (PV)

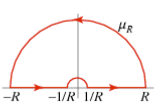
Prinsipalverdien til et endelig integral om et punkt c med $a \le c \le b$ er gitt av

$$\mathrm{PV}\int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x)dx\right], \text{ eller}$$

$$\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \equiv \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx.$$

Dersom bidraget fra øvre halvsirkel forsvinner når $R \to \infty$ kan vi skrive

$$\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_k \mathrm{res}(z_k) + \pi i \sum_i \mathrm{res}(z_i)$$



der z_k er polene i øvre halvplanet, og z_i er polene på den reelle aksen. Det blir helt tilsvarende dersom man skulle ønske heller å integrere langs nedre halvsirkel.

Jordans lemma

Dersom $f(z) = g(z)e^{iaz}$ er:

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \le \frac{\pi}{a} \max_{\theta\in[0,\pi]} \left|g(Re^{i\theta})\right|$$

Hvis $a > 0$ og $f(z) = P(x)/Q(x)$ med $\deg(Q) \ge \deg(P) + 1$ så er $\lim_{\rho\to\infty}\int_{C_\rho^+} e^{iaz}P(z)/Q(z)dz = 0$ hvor $C_\rho = \{z : |z| = \rho, \Im z \ge 0\}$ er øvre halvsirkel. Hvis $a < 0$ stemmer dette for nedre halvsirkel.

Metoder for å finne residyer

$$\mathrm{res}_{z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1}(z-z_0)^n f(z)$$

Evaluering av noen integraler

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = N - P$$

der N er fs antall nullpunkter i C og P er fs antall poler i C. Husk $\left|\oint_\gamma f\mathrm{d}z\right| \le \mathrm{length}(\gamma)\cdot\sup_{z_0\in\gamma}|f(z_0)|$ og **Cauchys ulikhet** $\left|f^{(n)(z_0)}\right| \le \frac{n!}{R^n}\sup_{z\in C}|f(z)|\forall z \in \mathrm{int}(C)$.

Punktet ved ∞ og residyene der

Funksjonen $f(z)$ har en pol i ∞ hvis $f(1/z)$ har en pol i $z = 0$. Residyene er like.

ORDINÆRE DIFFERENSIALLIKNINGER

Separable likninger

En differensiallikning kalles separabel dersom den kan skrives om til $f(y)dy = g(x)dx$, da løses den ved å integrere på begge sider.

Lineære første ordens likninger

En lineær første ordens differensiallikning kan skrives generelt som $y' + Py = Q$ der P og Q er funksjoner av x. Ved å multiplisere begge sider med $\exp\int P\mathrm{d}x$ kan man skrive $\frac{d}{dx}\left[y\exp\int P\mathrm{d}x\right] = Q\exp\int P\mathrm{d}x$.

Andre metoder for første ordens likninger

Bernoullilikningen $y' + Py = Qy^n$. Ved å skrive $z = y^{1-n}$ blir $z' = (1-n)y^{-n}y'$. Det gir $z' + (1-n)Pz = (1-n)Q$
Eksakte likninger Hvis $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

2. ordens lineære DE med konstante koeffisienter

$y'' + Ay' + By = 0$ løses av $C_1e^{\lambda x}$. Dersom karakteristisk polynom bare har én løsning, forsøk $C_2xe^{\lambda x}$.

2. ordens lineære DE med konstante koeffisienter med partikluær løsning

Løsninger av $y'' + Ay' + By = f(x)$ løses av $y = y_h + y_p$ der y_h løser $y'' + Ay' + By = 0$ og y_p er partikulær løsning.
Suksessiv integrasjon: Hvis $\lambda^2 + A\lambda + B = 0$ løses av λ_1 og λ_2 kan vi skrive likningen som $\left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right)\left(\frac{d}{dx} - \lambda_2\right)y = f(x)$. Sett $u = \left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right)$ løs $\left(\frac{d}{dx} - \lambda_2\right)u = e^x$, da kan man forhåpentligvis løse $\left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right)y = u$.
Eksponensiell høyreside: Anta z_p lik Ce^{cx} hvis $c \ne \lambda_1, \lambda_2$, Cxe^{cx} hvis $c = \lambda_1$ og $\lambda_1 \ne \lambda_2$, og Cx^2e^{cx} hvis $c = \lambda_1 = \lambda_2$. Hvis høyresiden er et polynom av grad n, anta polynom av grad $n + i$ der $i = 0$ for ulik λ, $i = 1$ for lik én λ og $i = 2$ for lik begge λ.

"*Variation of parameters*" (for å finne y_p)

Hvis likningen er skrevet på standardform

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

Der vi har funnet at $y_1(x)$ og $y_2(x)$ er to uavhengige løsninger av den homogene likningen. Vi antar partikulærløsning på formen $y_p = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$ med krav om at $v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0$. Det gir

$$y_p' = v_1y_1' + v_2y_2'$$
$$y_p'' = v_1'y_1' + v_2'y_2' + v_1y_1'' + v_2y_2''$$

som gir $v_1'y_1' + v_2'y_2' = g(x)$ og derfor

$$v_1 = -\int \frac{y_2g(x)}{y_1y_2' - y_2y_1'}dx, \quad v_2 = \int \frac{y_1g(x)}{y_1y_2' - y_2y_1'}dx$$

som gir den partikulære løsningen

$$y_p(x) = y_2\int \frac{y_1g(x)dx}{y_1y_2' - y_2y_1'} - y_1\int \frac{y_2g(x)dx}{y_1y_2' - y_2y_1'}$$

Andre 2. ordens likninger

Hvis y mangler: Bruk $y' = p$ og $y'' = p'$.
Hvis x mangler: Bruker $y' = p$ og $y'' = p\frac{dp}{dy}$.

Euler-Cauchy: Hvis $a_2x^2\frac{d^2y}{dx^2} + a_1x\frac{dy}{dx} + a_0y = f(x)$ kan man bruke $x = e^z$ med $x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}$ og $x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}$.

Green funksjoner

Hvis $Dy = \frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x)$ kan man anta $y = D^{-1}R = \int_a^b G(x,z)R(z)dz, a \le x, z \le b$. Det gir $DD^{-1}R = R = \int_a^b DG(x,z)R(z)dz \Rightarrow DG = \delta(x-z)$. Ved å integrere opp en ϵ-pølse rundt z finner man

$$\int_{z-\epsilon}^{z+\epsilon}\frac{d^2G}{dx}dx + \int_{z-\epsilon}^{z+\epsilon}P\frac{dG}{dx}dx + \int_{z-\epsilon}^{z+\epsilon}QGdx = \int_{z-\epsilon}^{z+\epsilon}\delta(x-z)dx = 1$$

Hvis vi antar $G(x,z)$ er kontinuerlig ved $x = z$ får vi $\lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{dG}{dx}\right]_{z-\epsilon}^{z+\epsilon} = 1$.

• Løs $DG = \delta(x-z)$ for $x \ne z$ og krev diskontinuiteten $\lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{dG}{dx}\right]_{z-\epsilon}^{z+\epsilon} = 1$.

Husk: Pass på forskjellen $x < z$ og $x > z$. Når $x \in [a,b]$ er også $z \in [a,b]$. Hvis vi vet $G(a,z)$ gjelder altså dette for $a = x < z$. Hvis fysisk, dvs tidsavhengighet $(x \mapsto t, z \mapsto t')$, er intervallet gjerne i tidsrommet $t, t' \in [0,T]$. Løsningene blir:

$$y(x) = \int_x^b G_1(x,z)R(z)dz + \int_a^x G_2(x,z)R(z)dz$$

der G_1 representerer $x < z$ og G_2 representerer $x > z$. Vi får fire kriterier:

- $G_1(a,z) = A(z)y_1(a) + B(z)y_2(a)$
- $G_2(b,z) = C(z)y_1(b) + D(z)y_2(b)$
- $G_1(z,z) = G_2(z,z)$
- $\frac{d}{dx}G_2(x,z)\big|_{x=z} - \frac{d}{dx}G_1(x,z)\big|_{x=z} = 1$

Greenfunksjoner i 3D

Helt tilsvarende som for éndimensjonalt tilfelle.
Eksempel: *Poisson*

$$\begin{aligned}\nabla^2u(\mathbf{r}) &= -\rho(\mathbf{r})/\epsilon_0\\ \Rightarrow u(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{\epsilon_0}\int G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\rho\mathbf{r}'\mathrm{d}^3\mathbf{r}'\\ \Rightarrow \nabla^2G(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\end{aligned}$$

Så hvis $\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ er $u(\mathbf{r}) = q/(4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$

Legendres likning

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0$$

Ved å anta $y = \sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$ finner vi $a_{n+1} = -\frac{(l-n)(l+n+1)}{(n+2)(n+1)}a_n$. Løsningen der $y = 1$ når $x = 1$ ($P_l(1) = 1$) kalles *Legendrepolynomene* $P_l(x)$. De første er $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$.

Fröbenius metode med generaliserte rekker

Anta løsninger på formen $y = x^s\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. Koeffisientene til laveste eksponent gir s. Hvis to: velg den laveste.
Hvis to distinkte løsninger for s men ikke heltallsdifferanse: Hvis $s_1 - s_2 > 0$ og $s_1 - s_2 \notin \mathbb{Z}$ gir metoden to lineært uavhengige løsninger.
Hvis to distinkte løsninger for s med heltallsdifferanse: Hvis $s_1 - s_2 > 0$ og $s_1 - s_2 \in \mathbb{Z}$ gir metoden ofte en komplett løsning for s_2. Prøv s_2 først, hvis det ikke gir alle, prøv s_1 etterpå. Dersom én løsning $y_1(x)$ er funnet kan den andre finnes ved å sette inn $y_2(x) = C(x)y_1(x)$.
Hvis én løsning for s: Vi får én løsning $y_1(x)$. Finner den andre ved $y_2(x) = C(x)y_1(x)$.

Bessels likning

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$$

Frobenius gir $s = \pm p$ og løsningen

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+p)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

Fuchs teorem (forbindelse: Frobenius)

$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$. Hvis $xf(x)$ og $x^2g(x)$ kan skrives som potensrekker da kan likningen løses av enten (1) To frobeniusrekker eller (2) én frobeniusrekke $S_1(x)$ og en løsning på formen $S_1(x)\ln x + S_2(x)$ der $S_2(x)$ er en annen frobeniusrekke.

FOURIERREKKER

Gjennomsnittsverdien av funksjoner

Gjennomsnittsverdien til en funksjon f på intervallet (a,b) er

$$\text{average}_{(a,b)}(f) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

Fra dette fremkommer det at $\sin^2 x$ og $\cos^2 x$ har gjennomsnittsverdi 1/2 over én periode.

Fourierkoeffisienter

Vi har $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx dx = 0$ med $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx dx = \frac{1}{2}\delta_{nm}$ med 0 hvis $n = m = 0$ og $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx dx = \frac{1}{2}\delta_{nm}$ med 1 hvis $n = m = 0$. Dette gir koeffisientene

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

$$\text{med } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx + \sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx.$$

Dirichlets kriterier

Dersom $f(x)$ har et endelig antall toppunkter, og et endelig antall punktdiskontinuiteter (*bounded*) vil fourierrekken til $f(x)$ konvergere. For andre intervaller og generelle funksjoner får man da

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}, \quad c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)e^{-\frac{in\pi x}{L}}dx$$

eller

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin nx\,dx$$

Jevne og odde funksjoner

• Hvis $f(-x) = f(x)$ (**jevn**) må $\forall n: b_n = 0$. Det gir

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L} \text{ der}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \ b_n = 0\ \forall n.$$

• Hvis $f(-x) = -f(x)$ (**odd**) må $\forall n: a_n = 0$. Det gir

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{L} \text{ der}$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \ a_n = 0\ \forall n.$$

Parsevals teorem

Helt generelt (generalisert pythagoras):

$$\langle x,x\rangle = \sum_{v\in\mathcal{B}}|\langle x,v\rangle|^2$$

der $\mathcal{B}$ orthonormal og fullstendig basis for indreproduktrom. Gjennomsnittet over en periode, avg$\{f(x)^2\}$, er gitt av $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2\,dx$. Siden

$$\begin{aligned}\text{avg}\left\{\left(\frac{1}{2}a_0\right)^2\right\} &= \left(\frac{1}{2}a_0\right)^2\\ \text{avg}\left\{(a_n\cos nx)^2\right\} &= \frac{1}{2}a_n^2\\ \text{avg}\left\{(b_n\sin nx)^2\right\} &= \frac{1}{2}b_n^2\end{aligned}$$

så vi kan bruke

$$\text{avg}\left\{f(x)^2\right\} = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$$

$$\text{avg}\left\{|f(x)|^2\right\} = \sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|^2.$$

Parseval for fouriertransformasjoner:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(\alpha)|^2d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx$$

INTEGRALTRANSFORMASJONER

Fouriertransformasjoner

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$$
$$g(\alpha) = \mathcal{F}\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx$$

for odde funksjoner: $e^{\pm i\alpha x} \mapsto \sin \alpha x$
for jevne funksjoner: $e^{\pm i\alpha x} \mapsto \cos \alpha x$
Transformasjon av PDE: Ved å bruke delvis integrasjon og

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right\} = -\alpha^2 \mathcal{F}\{u(x,t)\} = -\alpha^2 U(\alpha,t)$$

Mer generellt:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^n u(x,t)}{\partial x^n}\right\} = (i\alpha)^n \mathcal{F}\{u(x,t)\} = (i\alpha)^n U(\alpha,t)$$

så lenge $\int_{\mathbb{R}} |f|^2 dx < \infty$.
$\mathcal{F}$(Gaussian)=Gaussian:

$$\mathcal{F}\left\{N e^{-\gamma x^2}\right\} = \frac{N}{\sqrt{2\gamma}} e^{-\frac{\alpha^2}{4\gamma}}$$

Laplace transformasjoner

$$\mathcal{L}\{f\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = F(p)$$

Mest viktig er $\mathcal{L}\{y'\} = p\mathcal{L}\{y\} - y(0) = pY - y_0$ og dermed også $\mathcal{L}(y'') = p^2\mathcal{L}\{y\} - py(0) - y'(0)$. Gitt en DE, transformer hele likningen, løs likningen for $\mathcal{L}\{y\} = Y$ algebraisk, finn den inverstransformerte. Det vil si
- Gitt $f(y^{(n)}, ..., y', x) = 0$ finn $\mathcal{L}\{f\} = g(Y,p) = 0$
- Løs $g(Y,p) = 0$ for Y og få $Y = H(p)$
- inverstransformér $Y = H(p)$ og få $y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = \mathcal{L}^{-1}\{H\}$. Dette gjøres gjerne ved å skrive H på formen $H = \mathcal{L}\{h\}$. Da er $y = h$.

$f(x)$	$\mathcal{L}\{f(x)\}(p)$	krav
1	$\frac{1}{p}$	$\Re\{p\} > 0$
x	$\frac{1}{p^2}$	$\Re\{p\} > 0$
e^{-ax}	$\frac{1}{p+a}$	$\Re\{p+a\} > 0$
$u(t-a)$	$\frac{1}{p}e^{-pa}$	u er heaviside step function
$g(t-a)u(t-a)$	$e^{-pa}\mathcal{L}\{g\}(p)$	u er heaviside step function
$\delta(x-a)$	e^{-pa}	
$e^{-ax}g(x)$	$\mathcal{L}\{g\}(p+a)$	
$t^n g(x)$	$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n}\mathcal{L}\{g\}(p)$	
$\int_0^x g(\tau)d\tau$	$\frac{1}{p}\mathcal{L}\{g\}(p)$	

Konvolusjon

Anta vi ønsker å studere situasjoner av typen $H(p) = \mathcal{L}\{h(x)\}, G(p) = \mathcal{L}\{g(x)\}$ og

$$\mathcal{L}\{g * h\} = \mathcal{L}\{g\}\,\mathcal{L}\{h\}$$

der

$$g * h = \int_0^t g(t-\tau)h(\tau)d\tau, \quad \text{med } g*h = h*g.$$

Dirac delta funksjonen

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-x_0)k} dk$$

TENSORER

Kartesiske tensorer

Kartesiske tensorer: En kartesisk vektor $\mathbf{v}$ består av tre tall V_1, V_2, V_3 i ethvert rektangulært koordinatsystem. Hvis V_1', V_2', V_3' er komponentene i et rotert koordinatsystem er samlingen av komponenter relatert ved $\mathbf{V}' = A\mathbf{V}$, der A er en rotasjonsmatrise. Vi kan skrive $V_i' = \sum_{j=1}^3 a_{ij} V_j$. Med

$$A_{ij} = \mathbf{e}_i' \cdot \mathbf{e}_j$$

for $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \overset{A}{\mapsto} \{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$. Dette generaliseres. Tensor av annen rang må transformere ved $T_{kl}' = A_{ki}A_{lj}T_{ij}$. Direkte produkt er gitt av

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1V_1 & U_1V_2 & U_1V_3 \\ U_2V_1 & U_2V_2 & U_2V_3 \\ U_3V_1 & U_3V_2 & U_3V_3 \end{pmatrix}$$

Tensornotasjon og Operasjoner

En tensor som er symmetrisk tilfredsstiller $T_{ij} = T_{ji}$ og en antisymmetrisk tilfredsstiller $H_{ij} = -H_{ji}$, da også $H_{ii} = 0$.

$$(AB)_{ij}) = A_{ij}B_{ij}, \; A_{ij}^{-1}A_{jk} = \delta_{ik}, \; X_i' = A_{ij}X_j$$

Treghetsmomenttensoren

Fra $\mathbf{L} = I\omega$ får vi $L_j = I_{jk}\omega_k$ og fra $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r})$ får vi

$$I_{xx} = m(y^2 + z^2), \; I_{xy} = -mxy, \; I_{xz} = -mxz.$$

Der

$$[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2+z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2+y^2 \end{bmatrix}$$

Kronecker delta og Levi-Civita symbolet

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{hvis } i = j \\ 0 & \text{hvis } i \neq j \end{cases}$$

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{hvis } ijk = 123, 231, \text{ eller } 312 \\ -1 & \text{hvis } ijk = 321, 213, \text{ eller } 132 \\ 0 & \text{hvis noen indekser er like} \end{cases}$$

med

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$$

Kan brukes til $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = a_j b_k \epsilon_{ijk}$ og

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = a_{1i}a_{2j}a_{3k}\epsilon_{ijk}$$

Pseudovektorer og pseudotensorer

”Polar vector” (ekte vektor): Oppfører seg fint
”Axial vector” (pseudovektor): Hvis det $A = -1$. Hvis $\mathbf{U}$ og $\mathbf{V}$ er polare vektorer er $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$ en ”aksiell” vektor (pseudovektor).
Dersom tensorer ikke transformerer som tensorer skal, kalles de for *Pseudotensorer*. Eksempler er
Levi-Civita: siden $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}' = (\det A)a_{\alpha i}a_{\beta j}a_{\gamma k}\epsilon_{ijk} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}$.
Kryssproduktet: Siden $(\mathbf{U}' \times \mathbf{V}')_\alpha = (\det A)a_{\alpha i}(\mathbf{U} \times \mathbf{V})_i$

PARTIELLE DIFFERENSIALLIKNINGER

MERK: Når man antar stasjonær løsninger er den generelle løsningen en kombinasjon av de stasjonære (kompletthet).

Laplaces likning

$$\nabla^2 u = 0$$

I sylindriske koordinater:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

I kulekoordinater:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$$

Varmelikningen

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial u}{\partial t}$$

Lurt å anta separasjonen $u(\mathbf{r}, t) = F(\mathbf{r})T(t)$. Det gir

$$\nabla^2 F + k^2 F = 0 \text{ og } T = e^{-k^2\alpha^2 t}$$

romlikningen kalles **Hermholtz likningen**. Gitt løsningen $u_k = F_k T_k$ er den generelle løsningen gitt som

$$u(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n F_{k_n}(\mathbf{r}) T_{k_n}(t)$$

Schrödingerlikningen

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi$$

Ved å studere stasjonære løsninger $\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})T(t)$ får vi $T = e^{-iEt/\hbar}$.

Bølgelikningen

$$\nabla^2 u = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Anta separasjonen $u(\mathbf{r}, t) = \Gamma(\mathbf{r})T(t)$ som gir

$$\frac{1}{\Gamma}\nabla^2\Gamma = \frac{1}{v^2}\frac{1}{T}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -k^2$$

Steady-state temperatur i en sylinder

Laplacelikningen i sylindriske koordinater med antakelsen $u = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$ gir

$$\frac{1}{R}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{\Theta}\frac{1}{r^2}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0$$

som gir

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = K^2$$
$$\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -n^2$$
$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) - n^2 + K^2r^2 = 0$$

der $R(r)$ løses av Besselfunksjonene $J_n(Kr)$.

Poissons likning

Dersom kraften $\mathbf{F}$ tilfredsstiller $\nabla\cdot\mathbf{F} = 0$ får vi $\nabla^2 V = 0$ for potensialet V. Ved å benytte divergenseteoremet kan man vise det mer generelle $-\nabla^2 V = \nabla\cdot\mathbf{F}_s$ der $\mathbf{F}_s$ er kraften fra massen inne i et legeme S.

$$\nabla^2 u = f(x,y,z)$$

Løses av

$$u(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{f(x',y',z')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}dx'dy'dz'$$

EKSEMPLER:
punktladning utenfor jordet kule: En punktladning q befinner seg på z-aksen utenfor en jordet kule med radius R og senter i Origo. Det elektrostatiske potensialet V avhenger da av ladningstettheten ρ ved $\nabla^2 V = -4\pi\rho$

VARIASJONSREGNING

Eulerlikningen

Anta du ønsker å gjøre et integral av typen

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx$$

stasjonært. Da kan man bruke

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Hvis $F(x,y',y) = F(y,y')$: velg

$$x' = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1},\ y' = \frac{1}{x'},\ dx = xdy$$

Brachistokroneproblemet

Gitt punktene (x_1,y_1) og (x_2,y_2). Hva er den veien et objekt i et tyngdefelt må følge for å komme fra punkt 1 til punkt 2 på kortest mulig tid?
Siden $T - V = \frac{1}{2}mv^2 - mgy = 0$ får vi $v = \sqrt{2gy}$ og derfor:
$\int dt = \int \frac{ds}{v} = \int \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}dx$. Det gir $x' = \sqrt{cy/(1-cy)}$ og med kravet om at kurven går gjennom origo får vi $x = \frac{1}{2c}(\theta - \sin\theta)$ og $y = \frac{1}{2c}(1-\cos\theta)$ som er parametriseringen av en *cycloid.*

ORTHOGONALE FUNKSJONER

Det finnes en spesiell underklasse av homogene differensiallikninger

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

klassen kan skrives på formen

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)y'\right] + \left[q(x) + \lambda r(x)\right]y = 0 \text{ med } r(x) > 0.$$

EKSEMPLER:
Legendre:
$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$
her er $\lambda = n(n+1), p(x) = 1-x^2, q(x) = 0, r(x) = 1.$
Fourier:
$y'' + (n\pi/L)^2 y = 0$
her er $\lambda = (n\pi/L)^2, p(x) = 1, q(x) = 0, r(x) = 1.$
Hermite:
$y'' - 2xy' + 2ny = 0$ (multiplikasjon med e^{-x^2} gir riktig form)
$e^{-x^2}y'' - 2xe^{-x^2}y' + 2ne^{-x^2}y = 0$
her er $\lambda = 2n, p(x) = e^{-x^2}, q(x) = 0, r(x) = e^{-x^2}.$
Laguerre:
$xy'' + (1-x)e^{-x}y' + \lambda e^{-x}y = 0$ (multiplikasjon med e^{-x} gir riktig form)
$xe^{-x}y'' + (1-x)e^{-x}y' + \lambda e^{-x}y = 0$
her er $p(x) = xe^{-x}, q(x) = 0, r(x) = e^{-x}.$

FELLESTREKK:
Vi studerer egentlig egenverdilikningene med generell form

$$Dy + \lambda r(x)y = 0$$

der

$$D = p(x)\frac{d^2}{dx^2} + p'(x)\frac{d}{dx} + q(x)$$

med randbetingelser for $x = a$ og $x = b$, dvs $x \in [a,b]$.
Legendre: $x \in [-1,1]$
Fourier: $x \in [-L,L]$
Hermite: $x \in (-\infty,\infty)$
Laguerre: $x \in [0,\infty)$
Hvis differensialoperatoren D tilfredsstiller

$$\int_a^b y_n(x)^* D y_m(x)dx = \int_a^b y_m(x) D y_n(x)^* dx$$

for randbetingelsene $x = a$ og $x = b$ kalles D for en *Hermitisk operator*. Da tilfredsstiller den følgende:
- Egenverdiene er reelle.
- Egenfunksjonene er orthogonale på $x \in [a,b]$.
- Egenfunksjonene utgjør et komplett sett på $x \in [a,b]$.

Legendre

Egenfunksjoner:
Legendrepolynomer $y_n(x) = P_n(x)$ for $x \in [-1,1]$.

Orthogonalitet: $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}.$

Kompletthet: $\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), x \in [-1,1]$

$$\text{med } a_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx$$

Hermite

Egenfunksjoner:
Hermitepolynomer $y_n(x) = H_n(x)$ for $x \in (-\infty,\infty)$.

Orthogonalitet: $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)dx = 2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{nm}$

Kompletthet:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(x), x \in (-\infty,\infty)$$

$$\text{med } a_n = \frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-x^2}H_n(x)dx$$

FOURIER TRANSFORMS

$f(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx$
$\mathrm{rect}(ax)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}}\cdot\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi a}\right)$
$\mathrm{sinc}(ax)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}}\cdot\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi a}\right)$
$\mathrm{sinc}^2(ax)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}}\cdot\mathrm{tri}\left(\frac{\omega}{2\pi a}\right)$
$\mathrm{tri}(ax)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}}\cdot\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi a}\right)$
$e^{-ax}u(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(a+i\omega)}$
$e^{-\alpha x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\cdot e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$
$\mathrm{e}^{-a\lvert x\rvert}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{a}{a^2+\omega^2}$
$\mathrm{sech}(ax)$	$\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{sech}\left(\frac{\pi}{2a}\omega\right)$
$e^{-\frac{a^2x^2}{2}}H_n(ax)$	$\frac{(-i)^n}{a}\cdot e^{-\frac{\omega^2}{2a^2}}H_n\left(\frac{\omega}{a}\right)$

1	$\sqrt{2\pi}\cdot\delta(\omega)$
$\delta(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
e^{iax}	$\sqrt{2\pi}\cdot\delta(\omega-a)$
$\cos(ax)$	$\sqrt{2\pi}\cdot\frac{\delta(\omega-a)+\delta(\omega+a)}{2}$
$\sin(ax)$	$\sqrt{2\pi}\cdot\frac{\delta(\omega-a)-\delta(\omega+a)}{2i}$
$\cos(ax^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}\cos\left(\frac{\omega^2}{4a}-\frac{\pi}{4}\right)$
$\sin(ax^2)$	$\frac{-1}{\sqrt{2a}}\sin\left(\frac{\omega^2}{4a}-\frac{\pi}{4}\right)$
x^n	$i^n\sqrt{2\pi}\delta^{(n)}(\omega)$