Mémoire TER : Polynômes aléatoires

Augustin CARRE

28 mai 2025

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Dans le cadre de mon mémoire de Master 1 à l'Université de Lille, sous la direction de M. Raphaël Butez, je me suis intéressé à l'étude du nombre de racines réelles de polynômes aléatoires. Ce sujet des mathématiques est un domaine riche qui combine étonnamment analyse, probabilités et géométrie.

Le point de départ de ce travail est l'article de Kac, 1943, qui propose une approche probabiliste directe pour étudier le comportement des zéros réels d'un polynôme dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes. Il établit une formule : la formule de Kac (3), qui donne la valeur exacte du nombre moyen de racines réelles d'un polynôme aléatoire.

Une fois cette première approche assimilée, une seconde partie du mémoire s'est appuyée sur un article plus récent, rédigé par Edelman et Kostlan, 1995. Ce travail adopte une perspective très différente, en proposant une démonstration géométrique du même résultat. Cette deuxième étape est plus conceptuelle et invite à réfléchir sur la profondeur géométrique des polynômes aléatoires.

L'objectif principal de ce mémoire est donc de présenter ces deux démonstrations et d'en expliquer les méthodes respectives.

Chapitre 2

Formule de Kac : Première méthode

2.1 Introduction

Tout d'abord, commençons par considérer l'équation algébrique suivante :

$$X_0 + X_1 x + X_2 x^2 + \cdots + X_{n-1} x^{n-1} = 0, \tag{1}$$

où $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ sont des v.a.r indépendantes.

On note $N_n = N(X_0, \cdots, X_{n-1})$ le nombre de racines réelles de l'équation (1). L'objectif de cette étude est de déterminer la valeur moyenne de N_n lorsque les X_i sont des variables aléatoires réelles, indépendantes et de même loi normale, de densité :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp -u^2, \tag{2}$$

autrement dit, on se place dans cette étude dans le cas où :

$$\forall i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}, X_i \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2}).$$

Ce problème a été traité par Littlewood et Offord, 1938 qui ont également considéré les cas où les X_i sont uniformément distribués dans $(-1, 1)$ ou ne prennent que les valeurs $+1$ et -1 avec des probabilités égales. Littlewood et Oxford obtiennent dans chaque cas l'estimation :

$$\mathbb{E}[N_n] \leq 25 \log(n)^2 + 12 \log(n), \quad n \geq 2000.$$

Nous allons montrer dans notre cas (distribution normale) la formule exacte suivante :

$$\mathbb{E}[N_n] = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{1-x^2} \left[1 - n^2 \left[\frac{x^{n-1}(1-x^2)}{1-x^{2n}} \right]^2 \right]^{1/2} \mathrm{d}x, \tag{3}$$

et les relations suivantes :

$$\mathbb{E}[N_n] \sim \frac{2}{\pi} \log(n), \tag{4}$$

$$\mathbb{E}[N_n] \leq \frac{2}{\pi} \log(n) + \frac{14}{\pi}, \quad n \geq 2. \tag{5}$$

2.2 Formule pour le nombre de racines réelles

Le sujet de cette première section est de déterminer une formule pour le nombre de racines réelles d'un polynôme.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que f' est continue et f possède un nombre fini de point critique sur tout segment. Cette dernière hypothèse est cruciale car il existe des fonctions C^1 qui ont un nombre infini de point critique sur un segment. Par exemple :$x \mapsto x \sin(1/x)$ quand x tend vers 0.

Lemme 1.
Soient $\varepsilon > 0$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ et a, b des réels.
Si ni a ni b n'est un zéro de f, alors pour ε suffisamment petit, la quantité

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b \chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(f(x)) \, |f'(x)| \, dx$$

est égale au nombre de racines de f dans l'intervalle $[a, b]$.
Les racines multiples ne sont comptées qu'une seule fois et si $f(x) = 0$, on considère que f comme n'ayant aucune racine.

Démonstration (lemme 1).
Considérons l'ensemble E_ε comme l'ensemble des points x pour lesquels $f(x) \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, i.e :

$$E_\varepsilon = \{x \in [a, b] \mid |f(x)| < \varepsilon\} = f^{-1}(]-\varepsilon, \varepsilon[).$$

E_ε est un ouvert de $\mathbb{R}$, comme image réciproque d'un ouvert par un application continue. De plus, par structure des ouverts, E_ε peut être écrit comme un réunion d'intervalles ouverts et 2 à 2 disjoints, notés $I_1, I_2, I_3, \cdots, I_r$. Il y a un nombre fini d'intervalles car f est supposé avoir un nombre fini de points critiques sur $[a, b]$.

On veut choisir ε suffisamment petit pour que :

(i) Aucun point critique de f sur $]a, b[$ ne se trouve dans l'intervalle $]-\varepsilon, \varepsilon[$, sauf si c'est à la fois un zéro de f, i.e. c'est une racine double.

(ii) Aucun I_i ne comprend a ou b.

L'ensemble $P_c = \{f(x) \neq 0 \mid x \in]a, b[, f'(x) = 0\}$ est un ensemble fini car f a un nombre fini de points critiques sur $]a, b[$, donc il admet donc un minimum, noté m.
En prenant $\varepsilon = \frac{\min\left(|f(a)|, |f(b)|, |m|\right)}{2}$, on vérifie que bien (i) et (ii), et on obtient sur chaque $I_i =]\alpha, \beta[$:

- Soit f est strictement croissante. Alors :

$$\int_{I_i} |f'(x)| \, \mathrm{d}x = \int_{I_i} f'(x) \mathrm{d}x = f(\beta) - f(\alpha) = 2\varepsilon.$$

- Soit f est strictement décroissante. Alors :

$$\int_{I_i} |f'(x)| \, \mathrm{d}x = -\int_{I_i} f'(x) \mathrm{d}x = -f(\beta) + f(\alpha) = 2\varepsilon.$$

- Soit f admet une racine double, notée x_0. Alors :

$$\int_{I_i} |f'(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{x_0} |f'(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{x_0}^{\beta} |f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

En supposant f croissante sur $]\alpha, x_0[$, puis décroissante sur $]x_0, \beta[$, on obtient :

$$\int_{I_i} |f'(x)|\,\mathrm{d}x = f(x_0) - f(\alpha) - (f(\beta) - f(x_0)) = -f(\alpha) - f(\beta) = 2\varepsilon.$$

Ainsi, dans tous les cas, on a la relation :

$$\forall i \in [1, r], \int_{I_i} |f'(x)|\,\mathrm{d}x = 2\varepsilon.$$

Finalement :

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_a^b \mathcal{X}_{]-\varepsilon,\varepsilon[}(f(x))\,|f'(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{i=1}^{r}\int_{I_i} |f'(x)|\,\mathrm{d}x = r.$$

Ce résultat correspond bien au nombre de racines de f dans l'intervalle $]a, b[$.
Cela prouve le **lemme 1**. □

Remarque 1.
Pour ε suffisamment petit, on peut aussi étudier le cas où a et b sont des racines de f :

- Si ni a, ni b n'est une racine de f, alors le résultat est inchangé :

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_a^b \mathcal{X}_{]-\varepsilon,\varepsilon[}(f(x))\,|f'(x)|\,\mathrm{d}x = \text{nombre de racines de f sur }]a, b[= r.$$

- Si a ou b est une racine de f, alors :

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_a^b \mathcal{X}_{]-\varepsilon,\varepsilon[}(f(x))\,|f'(x)|\,\mathrm{d}x = \text{nombre de racines de f sur]a,b[} + \frac{1}{2} = r + \frac{1}{2}.$$

- Si a et b sont des racines de f, alors :

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_a^b \mathcal{X}_{]-\varepsilon,\varepsilon[}(f(x))\,|f'(x)|\,\mathrm{d}x = \text{nombre de racines de f sur]a,b[} + 1 = r + 1.$$

Remarque 2.
Le **lemme 1** est vrai en particulier pour les fonctions polynomiales. En effet, si f est polynomiales, f s'écrit :

$$f(x) = X_0 + X_1 x + X_2 x^2 + \cdots + X_{N-1}x^{N-1}, \qquad X_0, \cdots, X_{N-1} \in \mathbb{R},$$

f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et a un nombre fini de point critique car f' a au plus $N-2$ racines réelles.
Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} U_n = \int_{-n}^{n} \mathcal{X}_{]-\varepsilon,\varepsilon[}(f(x))\,|f'(x)|\,\mathrm{d}x, & \text{avec } \varepsilon \text{ suffisamment petit.} \\ U_0 = 0 \end{cases}$$

D'après le **lemme 1**, cette suite correspond au nombre de racines de f sur $]-n, n[$. C'est une suite stationnaire croissante car f a au plus $N-1$ racines réelles. Notons M le rang à partir duquel U_n est constante. Alors :

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{X}_{]-\varepsilon,\varepsilon[}(f(x))\,|f'(x)|\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} U_n = U_M = \text{ nombre de racines réelles de f.}$$

Remarque 3.
On a montré dans la preuve du **lemme 1** comment construire un ε suffisamment petit. Son calcul dépend des coefficient de f et n'est donc pas du tout évident. Pour éviter ce problème, on fait tendre ε vers 0 :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{X}_{]-\varepsilon,\varepsilon[}(f(x))\,|f'(x)|\,\mathrm{d}x = \text{nombre de racine de f.}$$

Ainsi, en reprenant les notations précédentes :

$$N_n = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{X}_{]-\varepsilon,\varepsilon[}(f(x))\,|f'(x)|\,\mathrm{d}x, \tag{6}$$

avec $f(x) = X_0 + X_1 x + X_2 x^2 + \cdots + X_{n-1}x^{n-1}$.

Lemme 2.
Si f est polynomiale de degrés $n-1$, alors :

(i)
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{X}_{]-\varepsilon,\varepsilon[}(f(x))\,|f'(x)|\,\mathrm{d}x \leq 3n-5.$$

(ii) E_ε est la somme d'au plus $2n-3$ ouverts.

(iii) Chaque I_i contient soit une racine réelle, soit un point critique.

(iv) Il y a au plus $n-1$ racines réelles et au plus $n-2$ points critiques.

Démonstration (lemme 2).
(iv) est évident car f est une fonction polynomiale.
(iii) est évident par construction des intervalles ouverts I_i.
(ii) Le polynôme f est de degré $n-1$, il possède donc au plus $n-1$ racines réelles. De plus, ses points critiques sont données par les racines de f', qui est de degré $n-2$, donc il y en a au plus $n-2$. Autour de chaque racine ou point critique, f peut devenir suffisamment petite, ce qui peut créer un composante ouverte de E_ε. Ainsi, E_ε est formé d'au plus $(n-1)+(n-2) = 2n-3$ intervalles ouverts.
(i) La preuve est assez similaire à celle du **lemme 1**, sauf que cette fois si, on prend un $\varepsilon > 0$ quelconque. Soit $\varepsilon > 0$. On note $I_1, \cdots, I_{2n-3}$ les intervalles ouverts tels que :

$$E_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{2n-3} I_i.$$

Sur chaque $I_i =]a_i, b_i[$, notons m_i le nombre de points critiques et procédons par disjonction des cas :

- Soit f est strictement croissante. Alors d'après la preuve du **lemme 1** :

$$\int_{I_i} |f'(x)| \, \mathrm{d}x = 2\varepsilon \leq 2\varepsilon(m_i + 1).$$

- Soit f est strictement décroissante. Alors de même :

$$\int_{I_i} |f'(x)| \, \mathrm{d}x = 2\varepsilon \leq 2\varepsilon(m_i + 1).$$

- Soit f admet une racine double. Alors de même :

$$\int_{I_i} |f'(x)| \, \mathrm{d}x = 2\varepsilon \leq 2\varepsilon(m_i + 1).$$

- Soit f admet un ou plusieurs points critiques sur I_i. Considérons qu'il y en a deux x_0 et x_1, et dans ce cas :

$$\begin{aligned}\int_{I_i} |f'(x)| \mathrm{d}x &= \int_{a_i}^{x_0} |f'(x)| \mathrm{d}x + \int_{x_0}^{x_1} |f'(x)| \mathrm{d}x + \int_{x_1}^{b_i} |f'(x)| \mathrm{d}x, \\ &\leq 2\varepsilon + 2\varepsilon + 2\varepsilon, \\ &\leq 2\varepsilon + 2\varepsilon \times m_i, \\ &\leq 2\varepsilon(m_i + 1).\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall 1 \leq i \leq 2n-3, \int_{I_i} |f'(x)| \mathrm{d}x \leq 2\varepsilon(m_i + 1),$$

et en sommant, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{X}_{]-\varepsilon,\varepsilon[}(f(x)) |f'(x)| \mathrm{d}x &= \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{i=1}^{2n-3} \int_{I_i} |f'(x)| \, \mathrm{d}x, \\ &\leq \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{i=1}^{2n-3} 2\varepsilon(m_i + 1), \\ &\leq \sum_{i=1}^{2n-3} m_i + 2n - 3, \\ &\leq 3n - 5, \quad \text{car il y a au plus n-2 points critiques.}\end{aligned}$$

Cela prouve le **lemme 2**. □

2.3 Formule intégrale pour l'espérance du nombre de zéros

Grâce aux résultats énoncés, la calcul de $\mathbb{E}[N_n]$ se réduit à celui de $\mathbb{E}[\mathcal{X}_{]-\varepsilon,\varepsilon[}(f(x))|f'(x)|]$.

Lemme 3.

$$\mathbb{E}[N_n] = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}\left[\mathcal{X}_{]-\varepsilon,\varepsilon[}(f(x))|f'(x)|\right] \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}\left[g_\varepsilon(x)\right] \mathrm{d}x,$$

où on a introduit la fonction $g_\varepsilon : x \mapsto \mathcal{X}_{]-\varepsilon,\varepsilon[}(f(x))|f'(x)|$.

Démonstration (lemme 3).
Soit f une fonction polynomiale dont les coefficients sont des variables aléatoires. Cela signifie que chaque coefficient du polynôme est une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, où Ω est l'espace des résultats possibles, $\mathcal{F}$ est la tribu sur Ω, et $\mathbb{P}$ la mesure sur Ω.
On admet que les fonctions N_n et $g_\varepsilon(x)$ sont mesurables sur Ω. L'espérance $\mathbb{E}$, qui est une intégrale par rapport à la mesure $\mathbb{P}$, peut donc être calculée :

$$\mathbb{E}\left[N_n\right] = \int_\Omega N_n \mathrm{d}\mathbb{P},$$

$$\mathbb{E}\left[g_\varepsilon(x)\right] = \int_\Omega g_\varepsilon(x) \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Comme énoncé juste avant, $g_\varepsilon(x)$ est mesurable sur Ω. On montre aussi que $g_\varepsilon(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car on remarque que l'intégrale par rapport à $\mathrm{d}x$ est en fait une intégrale entre deux limites finies qui dépendent de ε et μ). En effet, $g_\varepsilon(x) = \mathcal{X}_{]-\varepsilon,\varepsilon[}(f(x)) = 0$ lorsque $|x| \to +\infty$. Ainsi, d'après le **théorème de Fubini-Tonelli** :

$$\int_\Omega \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_\varepsilon(x) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_\Omega g_\varepsilon(x) \mathrm{d}\mathbb{P} \right) \mathrm{d}x,$$

d'où :

$$\mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} g_\varepsilon(x) \mathrm{d}x \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}\left[g_\varepsilon(x)\right] \mathrm{d}x. \tag{7}$$

Par ailleurs, d'après le **lemme 2**, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} g_\varepsilon(x) \mathrm{d}x \leq 3n - 5, \qquad \text{avec } x \mapsto 3n-5 \text{ intégrable sur } \Omega.$$

Ainsi, d'après le **théorème de convergence dominée** :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \left[\frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} g_\varepsilon(x) \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_\Omega \left[\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} g_\varepsilon(x) \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Finalement, avec ce résultat et (7), on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N_n] &= \int_\Omega N n \mathrm{d}\mathbb{P}, \\
&= \int_\Omega \left[\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} g_\varepsilon(x) \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}\mathbb{P}, \quad \text{par définition de } N_n, \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \left[\frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} g_\varepsilon(x) \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}\mathbb{P}, \quad \text{d'après le résultat précédent}, \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_\Omega g_\varepsilon(x) \mathrm{d}\mathbb{P} \mathrm{d}x, \qquad \text{d'après (7)}, \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}[g_\varepsilon(x)] \mathrm{d}x, \qquad \text{par définition de l'espérance.}
\end{aligned}$$

Cela prouve le **lemme 3**. □

2.4 Vecteurs aléatoires gaussiens

Avant d'énoncer le **Lemme 4**, je vais faire une rapide introduction aux vecteurs gaussiens avec (Chabanon, 2013) pour établir un résultat important :

Définition 1. *Un vecteur aléatoire X de $\mathbb{R}^d$ est un vecteur aléatoire gaussien* ***si et seulement si*** *toute combinaison linéaire de ses composantes est une variable aléatoire réelle gaussienne, i.e. :*

$$\forall a \in \mathbb{R}^d, \quad a^t X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(m, \sigma^2).$$

En particulier tout vecteur gaussien de dimension 1 est une variable aléatoire gaussienne réelle.
D'autre part, toutes les composantes de X sont aussi des variables aléatoires gaussiennes réelles.

Exemple : Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$ dont les composantes X_i sont indépendantes et de loi $\mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$. Le vecteur X est alors un vecteur gaussien. En effet toute combinaison linéaire de ses composantes s'écrit $a_1X_1 + \cdots + a_dX_d$, dont la loi est par indépendance des variables

$$\mathcal{N}\left(a_1m_1 + \cdots + a_dm_d, a_1^2\sigma_1^2 + \cdots + a_d^2\sigma_d^2\right).$$

Définition 2. *Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$ dont les composantes sont de carré intégrable. Le vecteur moyenne de X est défini par :*

$$\mathbb{E}[X] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[X_1] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[X_d] \end{pmatrix},$$

et sa matrice de covariance par :

$$\mathrm{Cov}(X) = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])(X - \mathbb{E}[X])^t\big] = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X_1) & \mathrm{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_1, X_d) \\ \mathrm{Cov}(X_2, X_1) & \mathrm{Var}(X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_2, X_d) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cov}(X_d, X_1) & \mathrm{Cov}(X_d, X_2) & \cdots & \mathrm{Var}(X_d) \end{pmatrix}.$$

On dit que X est centré si $\mathbb{E}[X] = 0$. De plus, si les composantes de X sont indépendantes la matrice de covariance de X est diagonale.

Théorème 1.
La matrice de covariance est une matrice symétrique semi-définie positive.

Démonstration (théorème 1).
Tout d'abord :

$$\Gamma^t = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])(X - \mathbb{E}[X])^t\big]^t = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])(X - \mathbb{E}[X])^t\big] = \Gamma,$$

donc Γ est symétrique. Puis, $\forall v \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$\begin{aligned} v^t \Gamma v &= v^t \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(X - \mathbb{E}[X])^t] v, \\ &= \mathbb{E}[v^t (X - \mathbb{E}[X])(X - \mathbb{E}[X])^t v], \\ &= \mathbb{E}[(v^t (X - \mathbb{E}[X]))^2] \geq 0, \end{aligned}$$

donc Γ est symétrique semi-définie positive. □

Théorème 2
Si X est un vecteur aléatoire (gaussien) de $\mathbb{R}^p$ de vecteur moyenne m et de matrice de covariance Γ. Alors si A est une matrice réelle $q \times p$, AX est un vecteur aléatoire (gaussien) de $\mathbb{R}^q$ a pour vecteur moyenne Am et pour matrice de covariance $A\Gamma A^t$.

Démonstration (théorème 2).
Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}[AX] = A\mathbb{E}[X] = Am.$$

Ensuite, par définition de la matrice de covariance :

$$\mathrm{Cov}(AX) = \mathbb{E}[(AX - \mathbb{E}[AX])(AX - \mathbb{E}[AX])^t].$$

Mais $AX - \mathbb{E}[AX] = A(X - \mathbb{E}[X])$, donc :

$$\mathrm{Cov}(AX) = \mathbb{E}[A(X - \mathbb{E}[X])(X - \mathbb{E}[X])^t A^t] = A\mathbb{E}[(X - m)(X - m)^t]A^t = A\Gamma A^t.$$

Enfin, toute combinaison linéaire d'un vecteur gaussien est encore gaussienne, donc AX est un vecteur gaussien. □

Théorème 3
Toute matrice symétrique semi-définie positive Γ de dimension $d \times d$ est la matrice de covariance d'un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$.

Démonstration (théorème 3).
Comme Γ est symétrique semi-définie positive, il existe une matrice réelle $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ telle que $\Gamma = AA^t$. En effet d'après le **théorème spectral**, Γ peut s'écrire :

$$\Gamma = U \Lambda U^t,$$

où U est une matrice orthogonale et Λ une matrice diagonale contenant les valeurs propres. Toutes les valeurs propres sont réelles et non négatives, donc on peut poser : $A = U\Lambda^{1/2}$. Cela donne bien : $\Gamma = AA^t$.
Soit Z un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$ suivant une loi normale centrée réduite, i.e. $Z \sim \mathcal{N}(0, I_d)$ et soit $X = AZ$. Alors :

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[AZ] = A\mathbb{E}[Z] = 0,$$

et

$$\mathrm{Cov}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(X - \mathbb{E}[X])^t = \mathbb{E}[AZZ^tA^t] = A\mathbb{E}[ZZ^t]A^t = AI_dA^t = AA^t = \Gamma.$$

Ainsi, X est un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$ dont la matrice de covariance est Γ. □

Définition 3.
Soit X vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$. On définit sa fonction caractéristique $\Phi_X(t) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ par :

$$\forall u \in \mathbb{R}^d, \quad \Phi_X(u) = \mathbb{E}\left[e^{iu^tX}\right] = \mathbb{E}\left[e^{i(u_1X_1+\cdots+u_dX_d)}\right].$$

En particulier si X est vecteur gaussien de $\mathbb{R}^d$, alors sa fonction caractéristique vaut :

$$\Phi_X(u) = \mathbb{E}\left[e^{iu^tX}\right] = \prod_{i=1}^{d} \exp\left(iu_im_i - \frac{1}{2}u_i^2\sigma_i^2\right) = \exp\left(iu^tm - \frac{1}{2}u^t\Gamma u\right).$$

Cela mène au résultat suivant.

Théorème 4
Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :
1. Le vecteur X est gaussien de moyenne m et de matrice de covariance Γ.
2. La fonction caractéristique de X est donné par : pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$\Phi_X(u) = \mathbb{E}\left[e^{iu^tX}\right] = \exp\left(iu^tm - \frac{1}{2}u^t\Gamma u\right).$$

Démonstration (théorème 4).
Supposons que X est un vecteur aléatoire gaussien de moyenne m et de matrice de covariance Γ. On calcul :

$$\begin{aligned}
\Phi_X(u) &= \mathbb{E}\left[e^{iu^tX}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{iu^t(X-m+m)}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{iu^tm} \cdot e^{iu^t(X-m)}\right] \\
&= e^{iu^tm} \cdot \mathbb{E}\left[e^{iu^t(X-m)}\right]
\end{aligned}$$

Or $X - m \sim \mathcal{N}(0, \Gamma)$, donc la fonction caractéristique du vecteur centré est connue :

$$\mathbb{E}\left[e^{iu^t(X-m)}\right] = \exp\left(-\frac{1}{2}u^t\Gamma u\right)$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
\Phi_X(u) &= \exp\left(iu^tm\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}u^t\Gamma u\right) \\
&= \exp\left(iu^tm - \frac{1}{2}u^t\Gamma u\right)
\end{aligned}$$

Réciproquement, si la fonction caractéristique de X est donnée par :

$$\Phi_X(u) = \exp\left(iu^tm - \frac{1}{2}u^t\Gamma u\right),$$

alors par unicité de la fonction caractéristique, X suit une loi normale de moyenne m et de covariance Γ. □

Ainsi, cela montre que la loi d'un vecteur gaussien est entièrement caractérisée par son vecteur moyenne m et sa matrice de covariance Γ. On la note $\mathcal{N}(m, \Gamma)$.

Théorème 5
La loi gaussienne $\mathcal{N}(m, \Gamma)$ sur $\mathbb{R}^d$ admet une densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^d$ ***si et seulement si*** *Γ est inversible. Dans ce cas la densité de f est donnée par : pour tout $x \in \mathbb{R}^d$*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(\Gamma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-m)^t \Gamma^{-1}(x-m)\right).$$

Démonstration (théorème 5).
On peut voir la loi gaussienne $\mathcal{N}(m, \Gamma)$ comme la loi d'un vecteur aléatoire gaussien de la forme $X = m + AZ$, où Z est un vecteur gaussien dans $\mathbb{R}^d$ dont les composantes sont indépendantes et suivent la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Autrement dit, $Z \sim \mathcal{N}(0, I_d)$.
La densité de Z est donc donnée par :

$$f_Z(z) = \prod_{i=1}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z_i^2\right) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\|z\|^2\right).$$

Si que $X \sim \mathcal{N}(m, \Gamma)$. Alors, pour toute fonction continue bornée $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{E}[h(X)] = \mathbb{E}[h(AZ+m)] = \int_{\mathbb{R}^d} h(Az+m) f_Z(z)\, dz.$$

Comme justifié précédemment, Γ est de la forme $\Gamma = AA^t$, ce qui implique que $\det(A)^2 = \det(\Gamma)$, donc $\det(A) = \sqrt{\det(\Gamma)}$.
De plus, A est inversible si et seulement si Γ l'est aussi, et dans ce cas, l'inverse de Γ est donné par :

$$\Gamma^{-1} = (A^{-1})^t A^{-1}.$$

Par changement de variable affine (difféomorphisme de $\mathbb{R}^d$), de jacobien $|\det(A^{-1})| = 1/\det(A)$:

$$x = Az + m \quad \Leftrightarrow \quad z = A^{-1}(x-m),$$

on obtient :

$$\mathbb{E}[h(X)] = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\det(A)} \int_{\mathbb{R}^d} h(x) \exp\left(-\frac{1}{2}\|A^{-1}(x-m)\|^2\right) dx.$$

Or :

$$\|A^{-1}(x-m)\|^2 = (x-m)^t (A^{-1})^t A^{-1}(x-m) = (x-m)^t \Gamma^{-1}(x-m),$$

donc, la densité de X est :

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det(\Gamma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-m)^t \Gamma^{-1}(x-m)\right).$$

□

Lemme 4.
Si $\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}, \beta_0, \cdots, \beta_{n-1}$ sont des réels tels que $\sum \alpha_i^2 = \alpha, \sum \beta_i^2 = \beta$ et $\sum \alpha_i\beta_i = \gamma$ et si le nombre $\Delta = \alpha\beta - \gamma^2 > 0$, alors la densité de la distribution conjointe de $U = \alpha_0 X_0 + \cdots + \alpha_{n-1}X_{n-1}$ et $V = \beta_0 X_0 + \cdots + \beta_{n-1}X_{n-1}$ est égal à :

$$f_{(U,V)}(u,v) = \frac{1}{\pi\Delta^{1/2}} \exp\left(-\frac{\beta u^2 - 2\gamma uv + \alpha v^2}{\Delta}\right).$$

Démonstration (lemme 4).
Tout d'abord, on rappelle que chaque X_i son i.i.d de loi $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$. On considère les variables aléatoires gaussiennes :

$$U = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i X_i, \quad V = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i X_i,$$

Puisque que chaque X_i est centrée :

$$\mathbb{E}[U] = 0, \quad \mathbb{E}[V] = 0.$$

Les variances sont par indépendance des X_i :

$$\mathrm{Var}(U) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i^2 \mathrm{Var}(X_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i^2 \times \frac{1}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

De même :

$$\mathrm{Var}(V) = \frac{\beta}{2}.$$

Par ailleurs, le vecteur (U, V) est bien gaussien car il s'agit de l'image par une application linéaire d'un vecteur gaussien. En effet :

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \cdots & \alpha_{n-1} \\ \beta_0 & \cdots & \beta_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_{n-1} \end{pmatrix},$$

donc d'après le **théorème 2**, (U, V) est un vecteur aléatoire gaussien, et :

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(U,V) = \mathbb{E}[UV] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i X_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} \beta_j X_j\right)\right], \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_i\beta_j \mathbb{E}[X_i X_j], \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i\beta_j \mathrm{Var}(X_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i\beta_j \times \frac{1}{2} = \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, le vecteur (U, V) suit la loi normale $\mathcal{N}(0, \Gamma)$, où $\Gamma = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}$.
D'après le **théorème 5**, la densité de la loi bivariée de U et V vaut :

$$\begin{aligned} f_{(U,V)}(u,v) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \det(\Gamma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(u,v)\Gamma^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right), \\ &= \frac{1}{\pi\Delta^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(u,v) \times \frac{2}{\Delta}\begin{pmatrix} \beta & -\gamma \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right), \\ &= \frac{1}{\pi\Delta^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(u,v) \times \frac{2}{\Delta}\begin{pmatrix} \beta & -\gamma \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right), \\ &= \frac{1}{\pi\Delta^{1/2}} \exp\left(-\frac{\beta u^2 - 2\gamma uv + \alpha v^2}{\Delta}\right), \\ &= \frac{1}{\pi\Delta^{1/2}} \exp\left(-\frac{\beta u^2 - 2\gamma uv + \alpha v^2}{\Delta}\right). \end{aligned}$$

Cela prouve le **lemme 4**. □

Afin d'obtenir une formule pour $\mathbb{E}[N_n]$, on veut pouvoir calculer $\mathbb{E}\left[g_\varepsilon(x)\right]$. Cela va être possible grâce au **lemme 4**. Par définition de l'espérance, on peut calculer :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\mathcal{X}_{]-\varepsilon,\varepsilon[}(U)|V|\right] &= \mathbb{E}\left[\mathcal{X}_{]-\varepsilon,\varepsilon[}(\alpha_0 X_0 + \cdots + \alpha_{n-1}X_{n-1})|\beta_0 X_0 + \cdots + \beta_{n-1}X_{n-1}|\right], \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{X}_{]-\varepsilon,\varepsilon[}(u)|v| f_{(U,V)}(u,v)\mathrm{dudv}, \\ &= \frac{1}{\pi\Delta^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{X}_{]-\varepsilon,\varepsilon[}(u)|v| \exp\left(-\frac{\beta u^2 - 2\gamma uv + \alpha v^2}{\Delta}\right)\mathrm{dudv}. \end{aligned}$$

Notons

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} |v| \exp\left(-\frac{\beta u^2 - 2\gamma uv + \alpha v^2}{\Delta}\right)\mathrm{dv},$$

D'après le **théorème de continuité des intégrales**, F est une fonction continue en u. On peut continuer à calculer :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon}\mathbb{E}\left[\mathcal{X}_{]-\varepsilon,\varepsilon[}(U)|V|\right] = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon\pi\Delta^{1/2}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} F(u)\mathrm{du} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon\pi\Delta^{1/2}}(G(\varepsilon) - G(-\varepsilon)),$$

où G est une primitive de F.

Or :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{G(\varepsilon) - G(-\varepsilon)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{G(\varepsilon) - G(0)}{\varepsilon - 0} + \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{G(-\varepsilon) - G(0)}{-\varepsilon - 0} = 2F(0).$$

D'où :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon}\mathbb{E}\left[\mathcal{X}_{]-\varepsilon,\varepsilon[}(U)|V|\right] = \frac{F(0)}{\pi\Delta^{1/2}}.$$

Calculons $F(0)$:

$$\begin{aligned} F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |v| \exp\left(-\frac{\alpha v^2}{\Delta}\right) \mathrm{dv} &\overset{\text{par parité}}{=} 2 \times \int_0^{+\infty} v \exp\left(-\frac{\alpha v^2}{\Delta}\right) \mathrm{dv}, \\ &\overset{t=\sqrt{\frac{\alpha}{\Delta}}v}{=} 2 \times \frac{\Delta}{\alpha} \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} \mathrm{dt}, \\ &\overset{\text{intégration}}{=} \frac{\Delta}{\alpha} \left[-e^{-t^2}\right]_0^{+\infty}, \\ &= \frac{\Delta}{\alpha}. \end{aligned}$$

Finalement :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \mathbb{E}\left[\mathcal{X}_{]-\varepsilon,\varepsilon[}(U)|V|\right] = \frac{\Delta^{1/2}}{\pi\alpha}.$$

Revenons au problème initial. Pour rappel, on s'intéresse aux fonctions polynomiales (1) donc les coefficients sont des variables aléatoires gaussiennes. On prend donc $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = x, \cdots, \alpha_{n-1} = x^{n-1}$ et $\beta_0 = 0, \beta_1 = 1, \beta_2 = 2x, \cdots, \beta_{n-1} = (n-1)x^{n-2}$, pour obtenir $U = f(x)$ et $V = f'(x)$. Ainsi :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \mathbb{E}\left[g_\varepsilon(x)\right] = \frac{\Delta^{1/2}}{\pi\alpha},$$

avec Δ qui devient (le calcul n'a pas été terminé, donc j'ai admis le résultat) :

$$\begin{aligned} \Delta = \alpha\beta - \gamma^2 &= \sum \alpha_i^2 \sum \beta_i^2 - \left(\sum \alpha_i \beta_i\right)^2, \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} x^{2i} \sum_{j=0}^{n-1} j^2 \times x^{2(j-1)} - \left(\sum_{i=0}^{n-1} i \times x^{2i-1}\right)^2, \\ &= \frac{x^{4n} - n^2 x^{2(n+1)} + 2(n^2-1)x^{2n} - n^2 x^{2(n-1)} + 1}{(x^2-1)^4}. \end{aligned}$$

D'après le **lemme 3**, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[N_n\right] &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}\left[g_\varepsilon(x)\right] \mathrm{d}x, \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{x^{4n} - n^2 x^{2(n+1)} + 2(n^2-1)x^{2n} - n^2 x^{2(n-1)} + 1}}{(x^2-1)^2(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n-2})} \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{8}$$

Ainsi, l'intégrande correspond à la densité du nombre de racines réelles.

La figure suivante trace cette courbe (en rouge) avec une simulation empirique (histogramme en bleu).

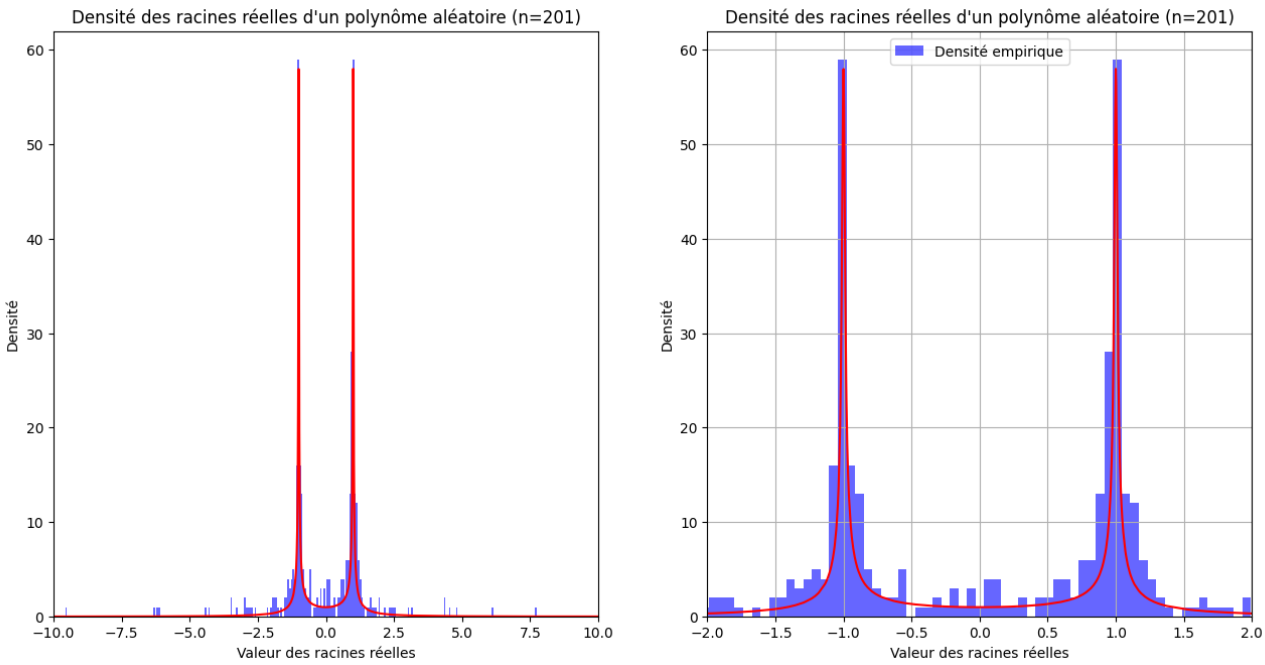

FIGURE 1 – Densité du nombre de racines réelles.

Degré du polynôme aléatoire = 201, Nombre de simulations = 100, Loi normale $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$

On remarque plusieurs choses :

- On constate que la majorité des racines sont concentrées autour de -1 et 1.
- La densité chute rapidement dès qu'on s'éloigne de -1 et 1. Donc les racines réelles lointaines sont très rares.
- On remarque une symétrie de densité par rapport à l'origine.
- Le problème de ce type de simulation itératif est que le temps d'exécution de l'algorithme augmente exponentiellement car la compexité de *numpy.roots* est en $O(n^2)$. Donc ici pour $N = 100$ polynômes de degré $n = 201$, on a :

$$O(N.n^2) = O(100 \times 200^2) = 4.10^6 \text{opérations.}$$

2.5 Estimation et formule asymptotique

Maintenant que nous avons une formule intégrale de $\mathbb{E}[N_n]$, développons l'intégrande pour simplifier le résultat :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[N_n\right] &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{x^{4n} - n^2x^{2(n+1)} + 2(n^2-1)x^{2n} - n^2x^{2(n-1)} + 1}}{(x^2-1)^2(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n-2})}\mathrm{d}x, \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{(1-x^{2n})^2 - n^2x^{2n-2}(1-x^2)^2}}{|(1-x^2)(1-x^{2n})|}\mathrm{d}x, \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{(1-x^{2n})^2 - n^2x^{2n-2}(1-x^2)^2/(1-x^{2n})^2}}{|1-x^2|}\mathrm{d}x, \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{1 - n^2x^{2n-2}(1-x^2)^2/(1-x^{2n})^2}}{|1-x^2|}\mathrm{d}x, \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{1-h_n(x)^2}}{|1-x^2|}\mathrm{d}x, \qquad \text{où } h_n(x) = \frac{nx^{n-1}(1-x^2)}{1-x^{2n}}, \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{1-h_n(x)^2}}{|1-x^2|}\mathrm{d}x, \qquad \text{par parité.}
\end{aligned}$$

Or l'intégrale est invariante par changement de variable $x \to 1/t$. Donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[N_n\right] &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{1-h_n(x)^2}}{1-x^2}\mathrm{d}x, \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{1-h_n(x)^2}}{1-x^2}\mathrm{d}x + \frac{2}{\pi}\int_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt{1-h_n(x)^2}}{1-x^2}\mathrm{d}x, \\
&\overset{t=1/x}{=} \frac{4}{\pi}\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{1-h_n(x)^2}}{1-x^2}\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

et :

$$1 - x^{2n} = (1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1}) < 2n(1-x), \qquad \text{car } x \in [0,1[.$$

D'où :

$$\begin{aligned}
h_n(x) &> \frac{x^{n-1}(1+x)}{2}, \\
1 - h_n(x)^2 &< 2 - x^{n-1}(1+x).
\end{aligned}$$

D'après le **théorème des accroissements finis** :

$$\exists \theta \in]x,1[, \quad [\theta^{n-1} + (n-1)\theta^{n-2}(1+\theta)] = [\theta^{n-1}(1+\theta)]' = \frac{2 - x^{n-1}(1+x)}{1-x}.$$

Si bien qu'on obtient :

$$2 - x^{n-1}(1+x) = (1-x)[\theta^{n-1} + (n-1)\theta^{n-2}(1+\theta)] < (1-x)(2n-1).$$

Finalement :

$$\frac{\sqrt{1-h_n(x)^2}}{1-x^2} < \frac{\sqrt{2n-1}}{(1+x)\sqrt{1-x}} < \frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{1-x}}, \qquad \text{car } x \in [0,1[.$$

Or comme $x \in [0,1[$:

$$\frac{\sqrt{1-h_n(x)^2}}{1-x^2} \leq \frac{1}{1-x^2}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\sqrt{1-h_n(x)^2}}{1-x^2}\mathrm{d}x &= \int_0^{1-1/n} \frac{dx}{1-x^2}\mathrm{d}x + \int_{1-1/n}^1 \sqrt{\frac{2n-1}{1-x}}\mathrm{d}x, \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{1-1/n} \frac{dx}{1-x}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{1-1/n} \frac{dx}{1+x}\mathrm{d}x + \sqrt{2n-1}\int_{1-1/n}^1 \sqrt{1-x}\mathrm{d}x, \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(2-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\ln n + 2\sqrt{2-\frac{1}{n}}, \\
&< \frac{1}{2}\ln n + 3.5.
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\mathbb{E}\left[N_n\right] < \frac{4}{\pi} \times \left(\frac{1}{2}\ln n + 3.5\right) = \frac{2}{\pi}\ln n + \frac{14}{\pi}, \qquad n \geq 2. \tag{9}$$

Ce qui prouve (5).

Déterminons un équivalent de $\mathbb{E}\left[N_n\right]$. Pour commencer, considérons $0 < \varepsilon, \delta < 1$. On peut alors procéder à l'astuce suivante :

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-h_n(x)^2}}{1-x^2}\mathrm{d}x > \int_0^{1-n^{\delta-1}} \frac{\sqrt{1-h_n(x)^2}}{1-x^2}\mathrm{d}x.$$

Et :

$$h_n(x) < nx^{n-1} < n(1-n^{\delta-1})^{n-1} < \varepsilon^{1/2}, \qquad \text{pour } n \text{ suffisamment grand.}$$

Donc pour n suffisamment grand :

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-h_n(x)^2}}{1-x^2}\mathrm{d}x > \int_0^{1-n^{\delta-1}} \frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{1-x^2}\mathrm{d}x > \frac{1}{2}\sqrt{1-\varepsilon}(1-\delta)\ln(n).$$

D'après (9) :

$$\frac{2}{\pi}\sqrt{1-\varepsilon}(1-\delta)\ln(n) < \mathbb{E}\left[N_n\right] < \frac{2}{\pi}\ln n + \frac{14}{\pi}.$$

Comme n dépend de ε et de δ, on commence par faire tendre n vers $+\infty$ en divisant par $\ln n$:

$$\frac{2}{\pi}\sqrt{1-\varepsilon}(1-\delta) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\left[N_n\right]}{\ln n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\left[N_n\right]}{\ln n} \leq \frac{2}{\pi}.$$

Puis quand ε et δ tendent vers 0 :

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\left[N_n\right]}{\ln n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\left[N_n\right]}{\ln n} = \frac{2}{\pi}$$

Donc :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\left[N_n\right]}{\ln n} = \frac{2}{\pi}$$

D'où le résultat (4) :

$$\mathbb{E}\left[N_n\right] \sim \frac{2}{\pi}\ln n.$$

Cela prouve bien l'équivalence asymptotique énoncée en (4).

2.6 Remarques finales

Remarque 4.
Il est clair que le nombre de moyen de racines réelles de (1) dans l'intervalle $]a, b[$ est donné par la formule (8) en remplaçant les bornes $-\infty$ et $+\infty$ par a et b. En effet l'intégrande correspond à une densité de racines. Notons, que la probabilité que a ou b soit une racine est nulle.

Voici un autre simulation illustrant la densité des racines réelles d'un polynôme aléatoire. Les remarques sont les mêmes que celles discutées pour la Figure 1 avec cette fois ci un degré $n = 301$:

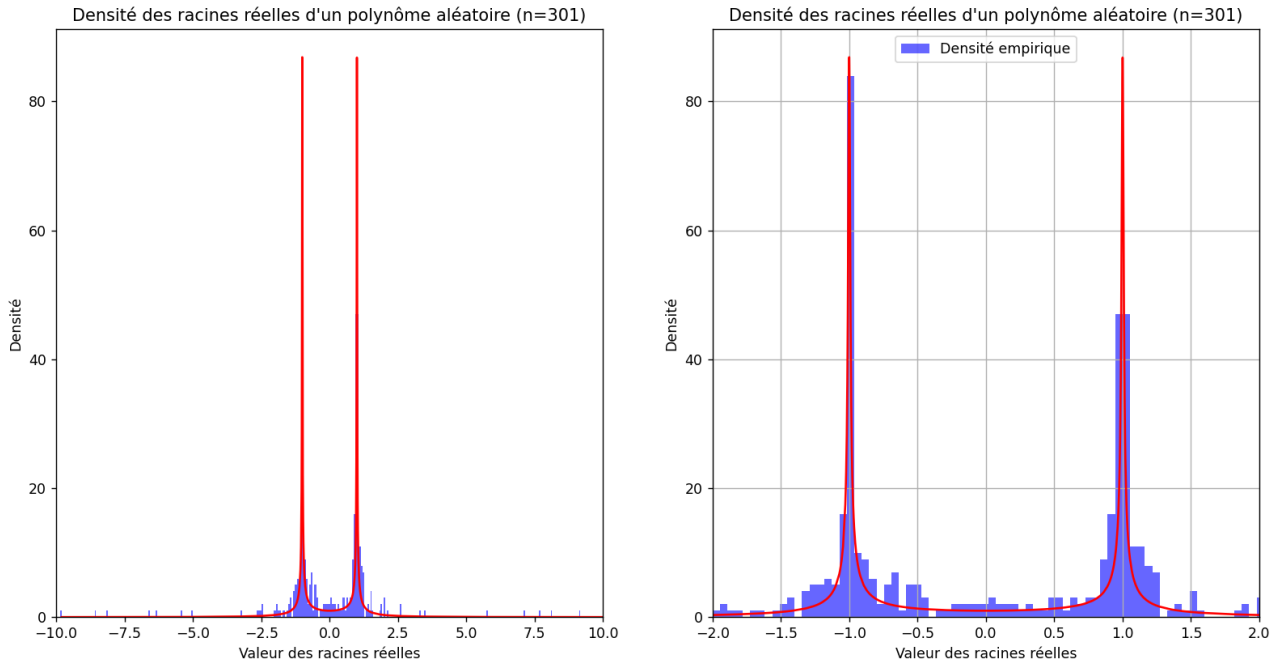

FIGURE 2 – Densité du nombre de racines réelles.

Degré du polynôme aléatoire = 301, Nombre de simulations = 100, Loi normale $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$

La remarque suivante explique l'observation qu'est la concentration des racines réelles autour de -1 et 1 :

Remarque 5.
On peut aussi voir presque immédiatement que si $]a, b[$ ne contient ni 1 ni -1, le nombre moyen de racines réelles de (1) compris dans $]a, b[$ est $O(1)$. Cela signifie que la plupart des racines réelles de l'équation se situent autour de 1 et -1. En effet cela se prouve analytiquement :
Si on prend un intervalle $]a, b[$ ne contenant ni 1 et -1. Par exemple $]a, b[\in [0, 1[$. Alors le nombre de racines réelles de (1) sur $]a, b[$, notons le $N_n(]a, b[)$ vérifie :

$$\mathbb{E}\left[N_n(]a, b[)\right] = \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{\sqrt{1 - h_n(x)^2}}{1 - x^2}\mathrm{d}x \leq K\int_a^b \frac{1}{1 - x^2}\mathrm{d}x = O(1).$$

La remarque suivante suivante explique pourquoi on aurait pu prévoir les symétries

observées empiriquement sur les simulations :

Remarque 6.
On peut anticiper analytiquement certaines symétries observées dans la densité des racines réelles sur la Figure 1 : en particulier, la symétrie par rapport à l'origine ($x \mapsto -x$) et par rapport à l'inversion ($x \mapsto {}^1\!/\!_x$). Ces propriétés découlent du fait que l'intégrande de la formule donnant le nombre de racines (qui correspond à une densité de racines) est paire et invariante par inversion.
C'est aussi une des raisons pour lesquelles il n'est pas surprenant d'observer des accumulations de racines autour de $x = 0, x = -1$ et $x = 1$.

Remarque 7.
Les racines complexes des polynômes aléatoires qui suivent une loi centrée ont tendance à se répartir de manière presque uniforme sur le cercle unité dans le plan complexe.
On observe également cette même distribution pour d'autre type de loi (exponentielle, uniforme, $\cdots$). C'est un phénomène connu dans la théorie des polynômes aléatoires, qui aurait pu faire l'objet d'une étude.

Le graphique suivant correspond au tracé de toutes les racines (réelles et complexes) d'un polynôme aléatoire :

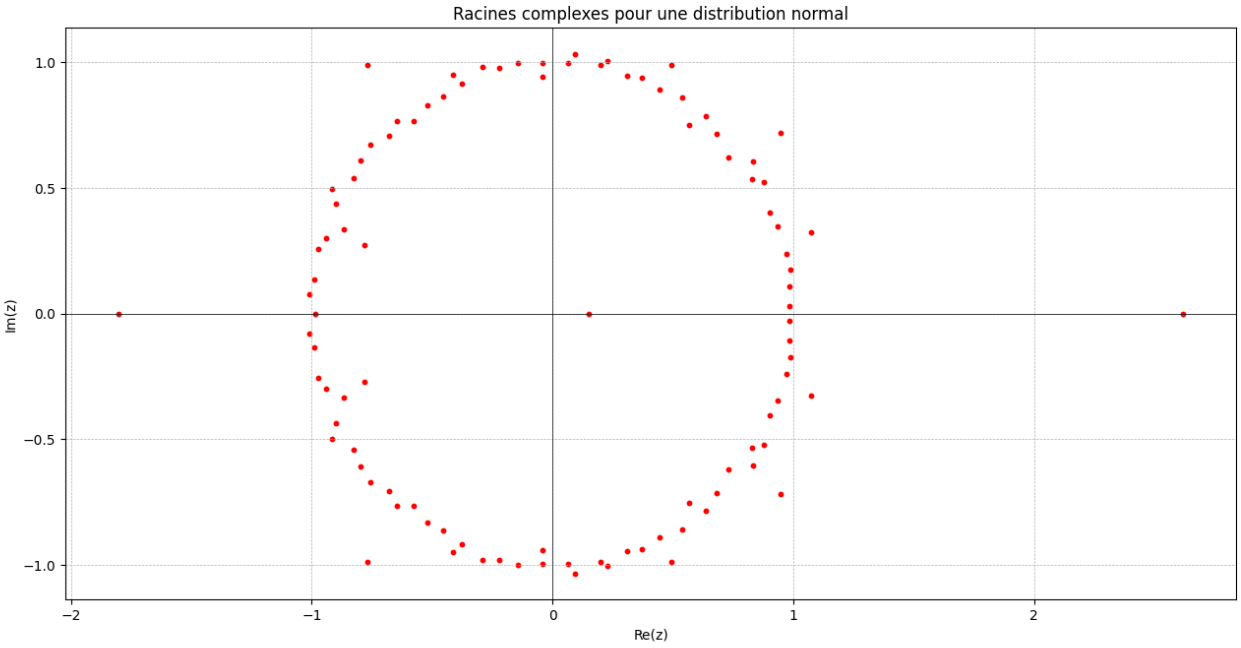

FIGURE 3 – Racines complexes d'un polynôme aléatoire.

Degré du polynôme aléatoire = 100, Loi normale $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$

On remarque cette Figure 3 que les racines sont symétriques par rapport à l'axe des réels et qu'il y a des racines racines réelles positives et négatives. Cela signifie que la loi du polynôme est symétrique et que les coefficients sont positifs et négatifs.

De plus, on compte seulement 3 racines réelles pour un polynôme de degré $n = 100$. C'est conforme avec notre équivalent asymptotique final (4) :

$$\mathbb{E}\left[N_{100}\right] \approx \frac{2}{\pi} \ln\left(100\right) = 2,9.$$

Pour s'en assurer, on peut tracer l'évolution de $\mathbb{E}\left[N_n\right] \sim \frac{2}{\pi} \ln n$ en fonction de n et le comparer avec une simulation. C'est l'objet de la remarque suivante :

Remarque 8.
Le graphique ci-dessous illustre la relation entre le nombre attendu de racines réelles d'un polynôme aléatoire (courbe bleu) et les points donnés par la simulation (croix rouges).

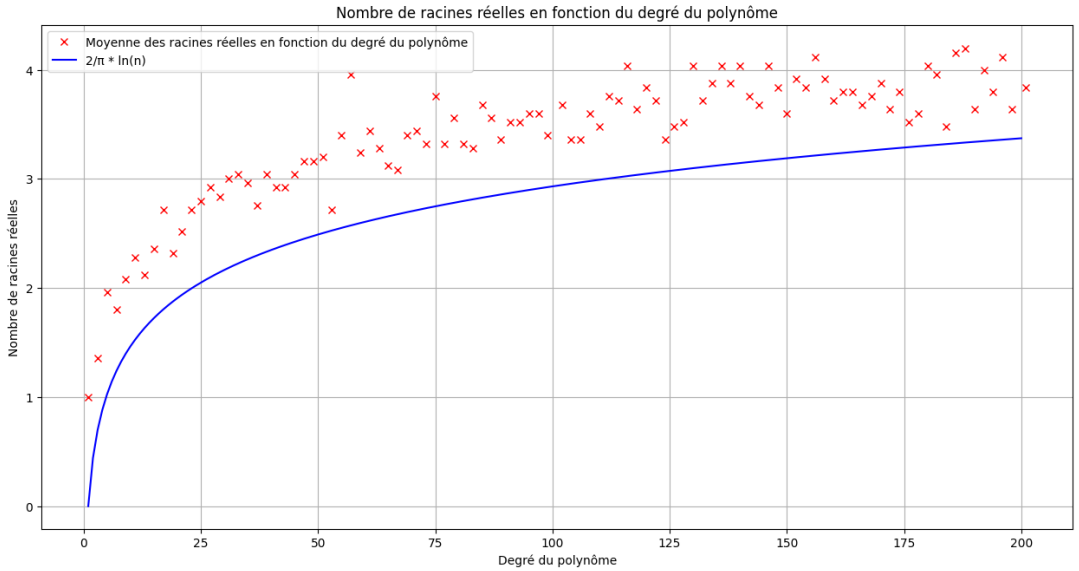

FIGURE 4 – $\mathbb{E}\left[N_n\right]$ en fonction de n.

Degré du polynôme aléatoire = 100, Loi normale $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$

Ce résultat est très intéressant car il montre plusieurs points :

- A mesure que n augmente, la simulation s'aligne avec la courbe théorique $\frac{2}{\pi} \ln n$. Cet alignement valide le résultat théorique asymptotique selon lequel $\mathbb{E}[N_n]$ croît de manière logarithmique avec n.
- Pour les petites valeurs de n, il y a un décalage notable entre les données de simulation et la courbe théorique. Ce décalage est dû à des termes supplémentaires qui deviennent significatifs lorsque n est petit. En effet, on a montré plus largement en (4) que :

  $$\mathbb{E}\left[N_n\right] < \frac{2}{\pi} \ln n + \frac{14}{\pi}, \qquad n \geq 2.$$

  Ce terme supplémentaire $\frac{14}{\pi}$ explique le décalage observé dans les données de simulation pour les petites valeurs de n.

Chapitre 3

Formule de Kac : Deuxième méthode

3.1 Abstract

Dans cette partie, il va s'agir de présenter une détermination géométrique de la formule intégrale de Kac pour le nombre attendu de zéros réels d'un polynôme aléatoire avec des coefficients indépendants normalement distribués.

La formule intégrale précédemment calculée a été produite par Kac en 1943 qui a introduit le terme $\frac{2}{\pi}\ln n$. Une formule plus précise aujourd'hui serait :

$$E_n = \frac{2}{\pi}\ln n + 0.6257358072\cdots + \frac{2}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ce problème sert de point de départ à des généralisations portant sur les systèmes d'équations aléatoires, et plus généralement sur l'étude des zéros réels ou complexes d'autres collections de fonctions aléatoires.

Par exemple, on s'intéresse désormais aux séries de puissances, aux séries de Fourier, aux sommes de polynômes orthogonaux, aux séries de Dirichlet, aux polynômes matriciels, ainsi qu'aux systèmes d'équations aléatoires non linéaires. Ces généralisations permettent d'explorer des phénomènes statistiques complexes dans des espaces fonctionnels variés, souvent à l'intersection de la géométrie différentielle, de l'analyse complexe et des probabilités.

3.2 Géométrie élémentaire

Notons S^n la surface de la sphère unité centrée sur l'origine dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

Définition 1.
Si $P \in S^n$ est un point quelconque, l'équateur associé $P_\perp$ est l'ensemble des points de S^n sur le plan perpendiculaire à la droite allant de l'origine à P, i.e. :

$$P_\perp = \{x \in S^n | \langle x, P\rangle = 0\}.$$

Cela généralise notre notion familière de l'équateur terrestre, qui est égale au $(\text{pôle nord})_\perp$ et au $(\text{pôle sud})_\perp$. Notons que $P_\perp$ est toujours une sphère unité ("hypercercle") de dimension $n-1$.

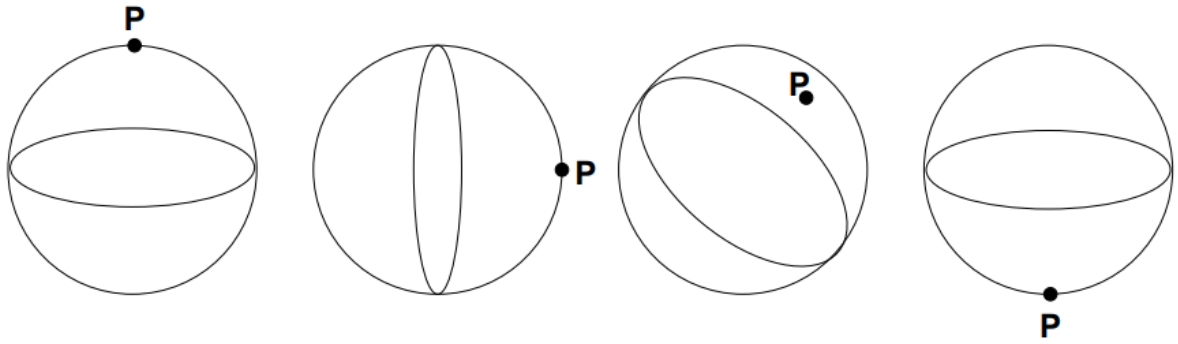

FIGURE 1. Points P and associated equators $P_\perp$.

Définition 2.
Soit $\gamma(t)$ une courbe rectifiable sur le sphère S^n.
On définit $\gamma_\perp$, les équateurs de la courbe $\gamma(t)$, l'ensemble $\{\gamma(t)_\perp | t \in \mathbb{R}\}$.
On définit aussi $\cup_{\gamma_\perp} = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \gamma(t)_\perp$.

Définition 3.
La multiplicité $m(x)$ d'un point $x \in S^n$ est le nombre d'équateurs dans $\gamma_\perp$ qui contiennent x, i.e. :

$$m(x) = \text{card}\{t \in \mathbb{R} | x \in \gamma(t)_\perp\}.$$

Définition 4.
On définit $|\gamma_\perp|$ comme l'aire de $\cup_{\gamma_\perp}$ en comptant la multiplicité. Plus précisément, on définit $|\gamma_\perp|$ comme l'intégrale de la multiplicité sur $\cup_{\gamma_\perp}$, i.e. :

$$|\gamma_\perp| = \int_{S^n} m(x) \mathrm{d}\sigma(x),$$

où $\mathrm{d}\sigma(x)$ est la mesure de surface de la sphère S^n

Lemme 5.
Si γ est une courbe rectifiable, alors :

$$\frac{|\gamma_\perp|}{\text{Aire}(S^n)} = \frac{|\gamma|}{\pi} \tag{10}$$

Démonstration (lemme 5).
- Si $\gamma \subset S^n$ est un petit arc de grand cercle de longueur $|\gamma| = \theta$:
A chaque instant t, $\gamma(t)_\perp$ est une "tranche" de la sphère.
L'union de ces "tranches" $\gamma(t)_\perp$, notée $\cup_{\gamma_\perp}$ forme une bande sphérique de largeur angulaire θ autour du grand cercle orthogonal à γ.
Notons $g(\theta) = |\gamma_\perp|$ l'aire de cette bande. On se demande alors :

Existe-t-il une constante α telle que $g(\theta) = \alpha\theta$? Et si oui, que vaut α ?

On remarque que g est additive car $g(\theta_1 + \theta_2) = g(\theta_1) + g(\theta_2)$ et que g est continue en 0 car $g(\theta) \leq 2\pi\theta \xrightarrow[\theta\to 0]{} 0$. Ces propriétés permettent de conclure que g est une fonction linéaire. En effet :

- $g(0+0) = 2g(0) \Longrightarrow g(0) = 0$,
- Pour tout entier naturel n, $g(n) = ng(1)$,
- Pour tout entier relatif n, $g(-n) = -g(n) \Longrightarrow g(n) = ng(1)$,
- Pour tout rationnel $x = \frac{p}{q}$, on a $g(x) = xg(1)$,
- Enfin, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et continuité de g, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n g(1) = xg(1)$, où $(x_n) \in \mathbb{Q}$ est une suite convergente vers x.

Par conséquent, $g(\theta) = \alpha\theta$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, avec $\alpha = g(1)$.

De plus, pour $n = 3$: $g(0) = 0, g(\pi) = \alpha\pi, g(\pi) = \text{Aire}(S^n) = 4\pi$, donc $\alpha = 4$.
Réciproquement, si $\alpha = 4$: $g(\theta) = \alpha\theta$.

Ainsi :

$$\frac{|\gamma_\perp|}{\text{Aire}(S^n)} = \frac{g(\theta)}{g(\pi)} = \frac{\theta}{\pi} = \frac{|\gamma|}{\pi}.$$

- Soit une courbe rectifiable $\gamma \subset S^n$, et soit $\gamma^{(m)} = \bigcup_{i=1}^{k_m} \gamma_i^{(m)}$ une suite de courbes polygonales qui l'approxime, avec chaque $\gamma_i^{(m)}$ un petit arc de grand cercle de longueur $\theta_i^{(m)}$. On a :

$$\sum_{i=1}^{k_m} \theta_i^{(m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} |\gamma|, \quad \text{et} \quad \gamma^{(m)} \to \gamma \text{ uniformément.}$$

Pour chaque segment $\gamma_i^{(m)}$, on connaît la formule géométrique :

$$\frac{|\gamma_i^{(m)\perp}|}{\text{Aire}(S^n)} = \frac{\theta_i^{(m)}}{\pi}.$$

Donc pour la courbe polygonale entière :

$$\frac{|\gamma^{(m)\perp}|}{\text{Aire}(S^n)} = \sum_{i=1}^{k_m} \frac{\theta_i^{(m)}}{\pi} = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{k_m} \theta_i^{(m)}.$$

Par passage à la limite lorsque $m \to \infty$, on obtient :

$$\lim_{m\to\infty} \frac{|\gamma^{(m)\perp}|}{\text{Aire}(S^n)} = \frac{|\gamma|}{\pi}.$$

Et comme $\gamma^{(m)} \to \gamma$ uniformément, on a également convergence des images :

$$|\gamma^{(m)\perp}| \to |\gamma^\perp|.$$

Cela prouve le **lemme 5**. □

3.3 Lien avec les polynômes aléatoires

Qu'est ce que le résultat géométrique obtenue de la section précédente a à voir avec le nombre de zéros d'un polynôme aléatoire. Soit :

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

un polynôme non nul. On définit les deux vecteurs :

$$a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ et } v(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} t_0 \in \mathbb{R} \text{ est un zéro de } p &\iff p(t_0) = 0, \\ &\iff \langle a, v(t_0) \rangle = 0, \\ &\iff a \in v(t_0)_\perp. \end{aligned}$$

Donc $v(t)_\perp$ est l'ensemble des polynômes dont t est un zéro.

Définissons maintenant les vecteurs unitaires :

$$\mathbf{a} = \frac{a}{\|a\|} \text{ et } \gamma(t) = \frac{v(t)}{\|v(t)\|}.$$

D'après la partie précédente, $\gamma(t)$ est une courbe dans S^n et $\gamma(t)_\perp$ correspond aux polynômes qui ont t comme zéro.

De plus, le nombre de fois qu'un point de la sphère $\mathbf{a}$ est couvert par un équateur $\gamma(t)_\perp$ correspond à la multiplicité de $\mathbf{a}$. C'est exactement le nombre de zéros réels du polynôme correspondant $p(x)$.

Jusqu'à présent, nous n'avons pas discuté des a_i qui sont des normales indépendantes :

$$\forall i \in [0, n], a_i \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

$$\implies a \sim \mathcal{N}(0, I_{n+1}) \text{ est un vecteur gaussien.}$$

On se pose alors la question de la loi de $\mathbf{a}$ sur S^n ?

Soit $Q \in \mathcal{O}(n+1)$ une matrice orthogonale, i.e. $Q^t Q = I$, et soit $\mathbf{a} = \frac{a}{\|a\|}$. Alors :

$$Q\mathbf{a} = Q\left(\frac{a}{\|a\|}\right) = \frac{Qa}{\|a\|} = \frac{Qa}{\|Qa\|}, \text{ car } Q \text{ conserve la norme.}$$

Or d'après le **théorème 2** : $Q\mathbf{a} \sim \mathcal{N}(0, Q \cdot I_{n+1} \cdot Q^t) = \mathcal{N}(0, I_{n+1})$ qui est la même loi que $\mathbf{a}$, donc :

$$Q\mathbf{a} \overset{\text{loi}}{=} \mathbf{a}.$$

Donc la loi de $\mathbf{a}$ est invariante par rotation.

Théorème 6
Il existe une unique mesure de probabilité sur la sphère unité $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ qui est invariante par rotation. Cette mesure est la mesure uniforme sur S^n.

Démonstration (Théorème 6).
Considérons le groupe des rotations $\mathcal{O}(n+1)$ sur la sphère S^n. Une mesure μ sur S^n est dite invariante par rotation si, pour tout $O \in \mathcal{O}(n+1)$ et tout ensemble mesurable $A \subset S^n$, on a :

$$\mu(OA) = \mu(A).$$

Le groupe $\mathcal{O}(n+1)$ est un groupe compact. Or d'après le **théorème de Haar**, il existe une unique mesure invariante à gauche (et à droite) sur un groupe compact : c'est la mesure de Haar.
Sur S^n, on appelle cette mesure de Haar : la mesure uniforme. Par conséquent, **a** est uniformément distribué sur la sphère S^n. □

Un polynôme aléatoire est donc identifié à un point aléatoire uniformément distribué sur la sphère. Donc E_n est l'aire de la sphère avec notre compte de multiplicité.

$$\begin{aligned} E_n = \mathbb{E}\left[m(\mathbf{a})\right] &= \int_{S^n} \frac{1}{\text{Aire}(S^n)} m(x)\mathrm{d}\sigma(x), \quad \text{car loi uniforme sur } S^n, \\ &= \frac{1}{\text{Aire}(S^n)} \int_{S^n} m(x)\mathrm{d}\sigma(x), \\ &= \frac{1}{\text{Aire}(S^n)} \cdot |\gamma_\perp|, \quad \text{par définition}, \\ &= \frac{|\gamma|}{\pi}, \quad \text{d'après le } \textbf{lemme 5}. \end{aligned}$$

3.4 Calcul de la longueur de la courbe γ

Notre question sur le nombre attendu de zéros réels d'un polynôme aléatoire est réduite à la recherche de la longueur de la courbe γ.

Lemme 6.

$$|\gamma| = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{(1-t^2)^2} - \frac{(n+1)^2 t^{2n}}{(1-t^{2n+2})^2}}\mathrm{dt}. \tag{11}$$

Démonstration (lemme 6).
Soit $v(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$ une courbe différentiable. On cherche à calculer :

$$\|\gamma'(t)\| = \left\| \left(\frac{v(t)}{\|v(t)\|} \right)' \right\|,$$

car :

$$|\gamma| = \int_{-\infty}^{\infty} \|\gamma'(t)\|\mathrm{dt}.$$

Commençons par dériver la fonction $\gamma(t)$:

$$\gamma'(t) = \left(\frac{v(t)}{\|v(t)\|}\right)' = \frac{\langle v(t), v(t)\rangle v'(t) - \langle v(t), v'(t)\rangle v(t)}{\langle v(t), v(t)\rangle^{3/2}},$$

on obtient alors :

$$\|\gamma'(t)\|^2 = \left\| \frac{\langle v(t), v(t)\rangle v'(t) - \langle v(t), v'(t)\rangle v(t)}{\langle v(t), v(t)\rangle^{3/2}} \right\|^2,$$

et en notant que si a est un vecteur et b un scalaire, alors la norme au carré d'un vecteur $\frac{a}{b}$ est $\frac{\|a\|^2}{b^2}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|\gamma'(t)\|^2 &= \frac{\|\langle v(t), v(t)\rangle v'(t) - \langle v(t), v'(t)\rangle v(t)\|^2}{\langle v(t), v(t)\rangle^3}, \\
&= \frac{\langle v(t), v(t)\rangle^2 \cdot \|v'(t)\|^2 - 2\langle v(t), v(t)\rangle\langle v(t), v'(t)\rangle^2 + \langle v(t), v'(t)\rangle^2 \cdot \|v(t)\|^2}{\langle v(t), v(t)\rangle^3}, \\
&= \frac{\langle v(t), v(t)\rangle\langle v'(t), v'(t)\rangle - \langle v(t), v'(t)\rangle^2}{\langle v(t), v(t)\rangle^2}.
\end{aligned}$$

Or dans notre cas : $v(t) = (1, t, t^2, \ldots, t^n)$, donc on peut calculer :

$$\langle v(t), v(t)\rangle = \sum_{k=0}^{n} t^{2k} = 1 + t^2 + t^4 + \cdots + t^{2n} = \frac{1 - t^{2n+2}}{1 - t^2}, \quad \text{pour } |t| < 1.$$

De même, la dérivée de $v(t)$, est : $v'(t) = (0, 1, 2t, \ldots, nt^{n-1})$, et donc :

$$\langle v(t), v'(t)\rangle = \sum_{k=1}^{n} kt^{2k-1} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\langle v(t), v(t)\rangle\right),$$

puis :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1 - t^{2n+2}}{1 - t^2}\right) = \frac{-t^{2n+1}(1 - t^2)(2n + 2) + 2t(1 - t^{2n+2})}{(1 - t^2)^2},$$

finalement :

$$\langle v(t), v'(t)\rangle = \frac{t(1 - (n + 1)t^{2n} + nt^{2n+2})}{(1 - t^2)^2}.$$

Pour le dernier terme, il nous faut :

$$\langle v'(t), v'(t)\rangle = \sum_{k=1}^{n} k^2 t^{2k-2} = \frac{1}{4t}\frac{d}{dt}t\frac{d}{dt}\left(\langle v(t), v(t)\rangle\right),$$

ce qui donne :

$$\langle v'(t), v'(t)\rangle = \frac{t^{2n+2} - t^2 - 1 + t^2(nt^2 - n - 1)^2}{(1 - t^2)^3}.$$

On peut maintenant conclure que l'espérance du nombre de zéros réels du polynôme est donnée par :

$$E_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{(t^{2n+2} - 1)^2 - (n + 1)^2 t^{2n}(t^2 - 1)^2}{(t^2 - 1)^2(t^{2n+2} - 1)^2}}\mathrm{dt},$$

$$E_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{(1 - t^2)^2} - \frac{(n + 1)^2 t^{2n}}{(1 - t^{2n+2})^2}}\mathrm{dt}.$$

ou de façon équivalente :

$$E_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{1-\frac{(n+1)^2 t^{2n}(t^2-1)^2}{(t^{2n+2}-1)^2}}{(t^2-1)^2}}\mathrm{dt},$$

$$E_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{1-x_n^2(t)}}{|t^2-1|}\mathrm{dt}, \quad \text{où : } x_n(t) = \frac{(n+1)t^n(t^2-1)}{(t^{2n+2}-1)}.$$

Cela prouve le **lemme 6**. □

On retrouve bien la **formule de Kac**, de l'article (Kac, 1943), démontrée dans la première partie et énoncé en (3).

Chapitre 4

Bibliographie

Chabanon, M. (2013). Probabilités et processus aléatoires – Vecteurs gaussiens. https://www.math.u-bordeaux.fr/~mchabano/Agreg/ProbaAgreg1314-COURS1-VectGauss.pdf

Edelman, A., & Kostlan, E. (1995). How many zeros of a random polynomial are real ? [arXiv preprint arXiv :math/9501224]. https://arxiv.org/pdf/math/9501224

Kac, M. (1943). On the average number of real roots of a random algebraic equation. https://scispace.com/pdf/on-the-average-number-of-real-roots-of-a-random-algebraic-3vs00pk7p8.pdf

Littlewood, J. E., & Offord, A. C. (1938). *Journal of the London Mathematical Society*, *13*, 288-295.