

Nombre de racines réelles d'un polynôme aléatoire

Augustin Carré

Encadrant : Raphaël Butez

Université de Lille

27 Mai 2025

Plan

- 1 Définition du problème
- 2 Méthode 1 : Approche analytique direct de Kac
- 3 Méthode 2 : Approche géométrique de Edelman et Kostlan

Définition du problème

- On considère un polynôme aléatoire :

$$f(x) = X_0 + X_1x + \cdots + X_{n-1}x^{n-1},$$

où $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ sont des v.a.r identiques et indépendantes.

- **Question** : Combien de racines réelles ce polynôme admet-il en moyenne ?
- On notera : N_n le nombre de racines réelles et on veut calculer $\mathbb{E}[N_n]$.

Méthode 1

Approche analytique directe de Kac
1943

1.1 Formule du nombre de racine réelles N_n

Objectif : Calculer le nombre de racines réelles N_n .

Lemme 1

Soient $f \in C^1(\mathbb{R})$ à nombre fini de points critiques sur tout segment, $a, b \in \mathbb{R}$ et ε suffisamment petit, alors :

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b \chi_{]-\varepsilon, \varepsilon[}(f(x)) |f'(x)| dx$$

est égale au nombre de racines de f dans $[a, b]$.

Nombre de zéros réels d'un polynôme aléatoire

$$N_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{]-\varepsilon, \varepsilon[}(f(x)) |f'(x)| dx,$$

avec $f(x) = X_0 + X_1x + \cdots + X_{n-1}x^{n-1}$ et $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

1.2 Formule intégrale pour l'espérance de N_n

Objectif : Calculer l'espérance du nombre de racines réelles $\mathbb{E}[N_n]$.

On a formulé que :

$$N_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{]-\varepsilon, \varepsilon[}(f(x)) |f'(x)| dx,$$

Lemme 2

$$\mathbb{E}[N_n] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}[g_\varepsilon(x)] dx,$$

où on a introduit la fonction $g_\varepsilon : x \mapsto \chi_{]-\varepsilon, \varepsilon[}(f(x)) |f'(x)|$.

1.3 Formule de Kac

En utilisant la loi conjointe de $f(x)$ et $f'(x)$, on obtient la formule de Kac :

Formule de Kac

Soit N_n le nombre de racines réelles d'un polynôme aléatoire gaussien :

$$\mathbb{E}[N_n] = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - h_n(x)^2}}{1 - x^2} dx, \quad \text{où } h_n(x) = \frac{nx^{n-1}(1 - x^2)}{1 - x^{2n}}.$$

On obtient aussi les relations :

Estimation et formule asymptotique

$$\mathbb{E}[N_n] < \frac{2}{\pi} \ln n + \frac{14}{\pi}, \quad n \geq 2,$$

$$\mathbb{E}[N_n] \sim \frac{2}{\pi} \ln n.$$

Méthode 2

Approche géométrique de Edelman et Kostlan
1995

2.1 Géométrie élémentaire

On se place dans R^{n+1} et on considère la sphère unité S^n .

Définition 1

Si $P \in S^n$ est un point quelconque, on note P_\perp l'équateur associé :

$$P_\perp = \{x \in S^n \mid \langle x, P \rangle = 0\}.$$

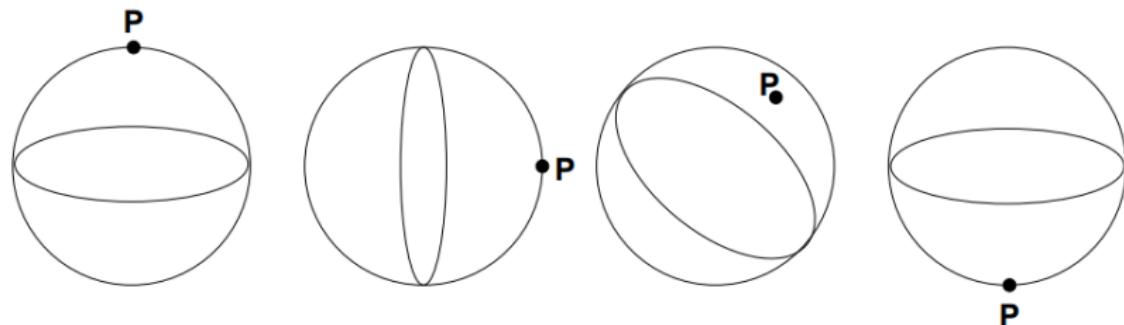


FIGURE 1. Points P and associated equators P_\perp .

2.1 Géométrie élémentaire

Définition 2

Soit $\gamma(t)$ une courbe rectifiable sur le sphère S^n :

$$\gamma_\perp = \{\gamma(t)_\perp \mid t \in \mathbb{R}\},$$

$$\cup_{\gamma_\perp} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \gamma(t)_\perp$$

Définition 3

La multiplicité $m(x)$ d'un point $x \in S^n$ est le nombre d'équateurs dans γ_\perp qui contiennent x , i.e. :

$$m(x) = \text{card}\{t \in \mathbb{R} \mid x \in \gamma(t)_\perp\}.$$

2.1 Géométrie élémentaire

Définition 4

On définit $|\gamma_\perp|$ comme l'aire de \cup_{γ_\perp} en comptant la multiplicité, i.e. :

$$|\gamma_\perp| = \int_{S^n} m(x)d\sigma(x),$$

où $d\sigma(x)$ est la mesure de surface de la sphère S^n

Lemme 1

Si γ est une courbe rectifiable, alors :

$$\frac{|\gamma_\perp|}{\text{Aire}(S^n)} = \frac{|\gamma|}{\pi}$$

2.2 Lien avec les polynômes aléatoires

Lien entre le résultat géométrique et le nombre de zéros d'un polynôme aléatoire ?

2.3 Formule de Kac

On retrouve bien la formule de Kac en calculant $|\gamma|$:

Formule de Kac

$$E_n = \frac{|\gamma|}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{(1-t^2)^2} - \frac{(n+1)^2 t^{2n}}{(1-t^{2n+2})^2}} dt.$$

Annexes

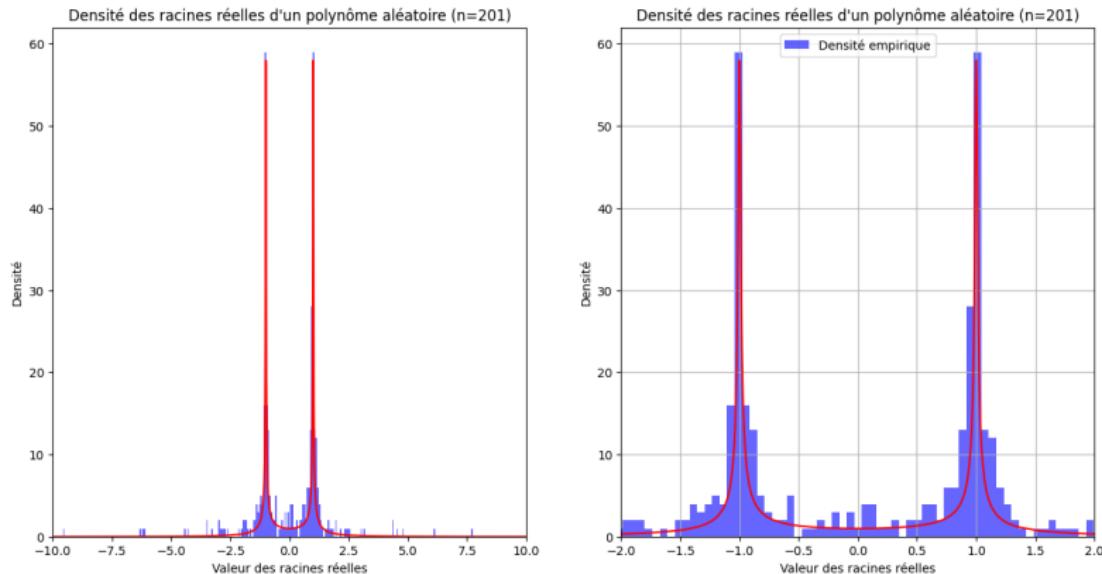


Figure – Densité du nombre de racines réelles.

Degré du polynôme aléatoire = 201, Nombre de simulations = 100, Loi normale $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$.

Annexes

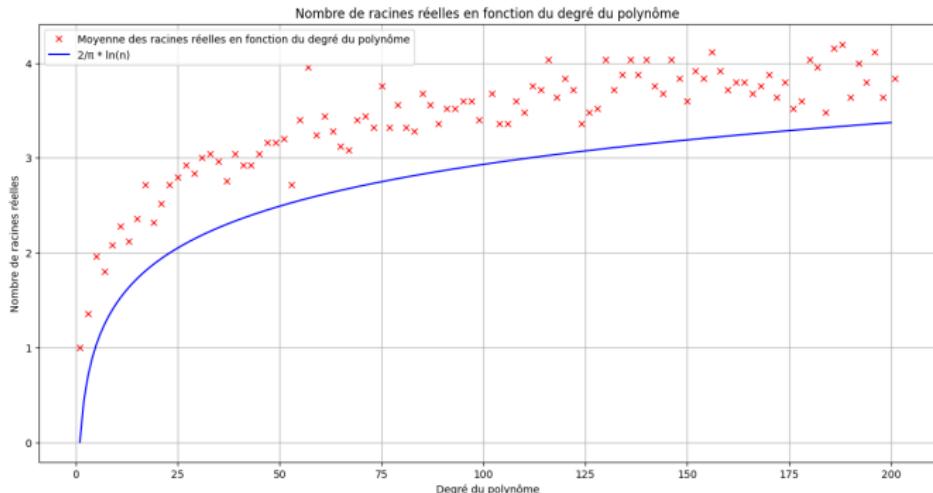


Figure – Densité du nombre de racines réelles.

Degré du polynôme aléatoire = 100, Loi normale $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$.

Annexes

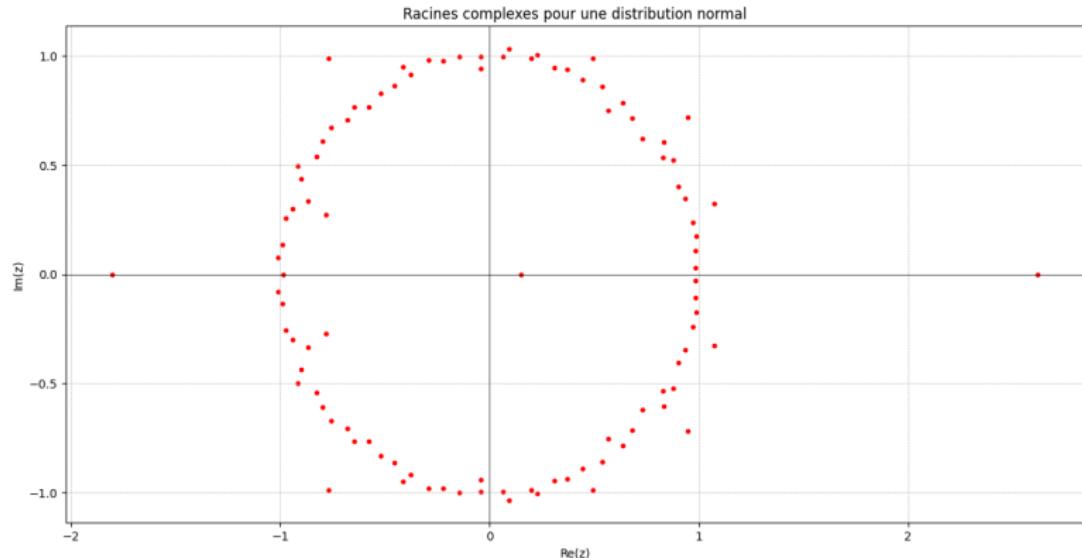


Figure – Densité du nombre de racines réelles.

Degré du polynôme aléatoire = 100, Loi normale $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$.