

# Nombre de racines réelles d'un polynôme aléatoire

Augustin Carré  
Encadrant : Raphaël Butez

Université de Lille

27 Mai 2025

- 1 Définition du problème
- 2 Méthode 1 : Approche analytique direct de Kac
- 3 Méthode 2 : Approche géométrique de Edelman et Kostlan

# Définition du problème

- On considère un polynôme aléatoire :

$$f(x) = X_0 + X_1x + \cdots + X_{n-1}x^{n-1},$$

où  $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$  sont des v.a.r identiques et indépendantes.

- **Question** : Combien de racines réelles ce polynôme admet-il en moyenne ?
- On notera :  $N_n$  le nombre de racines réelles et on veut calculer  $\mathbb{E}[N_n]$ .

# Méthode 1

Approche analytique directe de Kac  
1943

# 1.1 Formule du nombre de racine réelles $N_n$

**Objectif** : Calculer le nombre de racines réelles  $N_n$ .

## Lemme 1

Soient  $f \in C^1(\mathbb{R})$  à nombre fini de points critiques sur tout segment,  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon$  suffisamment petit, alors :

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b \chi_{]-\varepsilon, \varepsilon[}(f(x)) |f'(x)| dx$$

est égale au nombre de racines de  $f$  dans  $[a, b]$ .

## Nombre de zéros réels d'un polynôme aléatoire

$$N_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{]-\varepsilon, \varepsilon[}(f(x)) |f'(x)| dx,$$

avec  $f(x) = X_0 + X_1x + \cdots + X_{n-1}x^{n-1}$  et  $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

## 1.2 Formule intégrale pour l'espérance de $N_n$

**Objectif** : Calculer l'espérance du nombre de racines réelles  $\mathbb{E}[N_n]$ .

On a formulé que :

$$N_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{]-\varepsilon, \varepsilon[}(f(x)) |f'(x)| dx,$$

Lemme 2

$$\mathbb{E}[N_n] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}[g_\varepsilon(x)] dx,$$

où on a introduit la fonction  $g_\varepsilon : x \mapsto \chi_{]-\varepsilon, \varepsilon[}(f(x)) |f'(x)|$ .

## 1.3 Formule de Kac

En utilisant la loi conjointe de  $f(x)$  et  $f'(x)$ , on obtient la formule de Kac :

### Formule de Kac

Soit  $N_n$  le nombre de racines réelles d'un polynôme aléatoire gaussien :

$$\mathbb{E}[N_n] = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - h_n(x)^2}}{1 - x^2} dx, \quad \text{où } h_n(x) = \frac{nx^{n-1}(1 - x^2)}{1 - x^{2n}}.$$

On obtient aussi les relations :

### Estimation et formule asymptotique

$$\mathbb{E}[N_n] < \frac{2}{\pi} \ln n + \frac{14}{\pi}, \quad n \geq 2,$$

$$\mathbb{E}[N_n] \sim \frac{2}{\pi} \ln n.$$

# Méthode 2

Approche géométrique de Edelman et Kostlan  
1995

## 2.1 Géométrie élémentaire

On se place dans  $R^{n+1}$  et on considère la sphère unité  $S^n$ .

### Définition 1

Si  $P \in S^n$  est un point quelconque, on note  $P_\perp$  l'équateur associé :

$$P_\perp = \{x \in S^n \mid \langle x, P \rangle = 0\}.$$

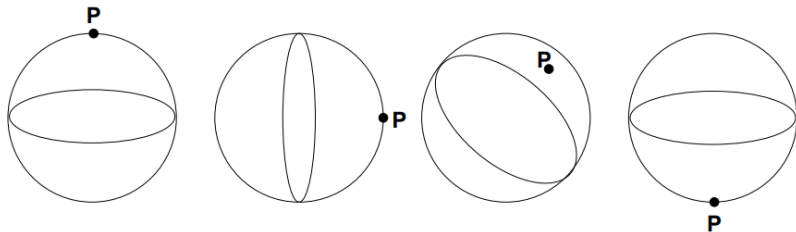


FIGURE 1. Points  $P$  and associated equators  $P_\perp$ .

## 2.1 Géométrie élémentaire

### Définition 2

Soit  $\gamma(t)$  une courbe rectifiable sur le sphère  $S^n$  :

$$\gamma_{\perp} = \{\gamma(t)_{\perp} | t \in \mathbb{R}\},$$

$$\cup_{\gamma_{\perp}} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \gamma(t)_{\perp}$$

### Définition 3

La multiplicité  $m(x)$  d'un point  $x \in S^n$  est le nombre d'équateurs dans  $\gamma_{\perp}$  qui contiennent  $x$ , i.e. :

$$m(x) = \text{card}\{t \in \mathbb{R} | x \in \gamma(t)_{\perp}\}.$$

## 2.1 Géométrie élémentaire

### Définition 4

On définit  $|\gamma_\perp|$  comme l'aire de  $\cup_{\gamma_\perp}$  en comptant la multiplicité, i.e. :

$$|\gamma_\perp| = \int_{S^n} m(x) d\sigma(x),$$

où  $d\sigma(x)$  est la mesure de surface de la sphère  $S^n$

### Lemme 1

Si  $\gamma$  est une courbe rectifiable, alors :

$$\frac{|\gamma_\perp|}{\text{Aire}(S^n)} = \frac{|\gamma|}{\pi}$$

## 2.2 Lien avec les polynômes aléatoires

Lien entre le résultat géométrique et le nombre de zéros d'un polynôme aléatoire ?

## 2.3 Formule de Kac

On retrouve bien la formule de Kac en calculant  $|\gamma|$  :

### Formule de Kac

$$E_n = \frac{|\gamma|}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{(1-t^2)^2} - \frac{(n+1)^2 t^{2n}}{(1-t^{2n+2})^2}} dt.$$

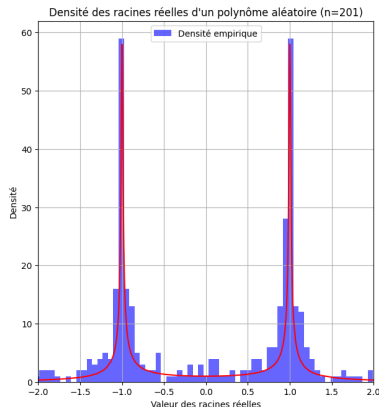
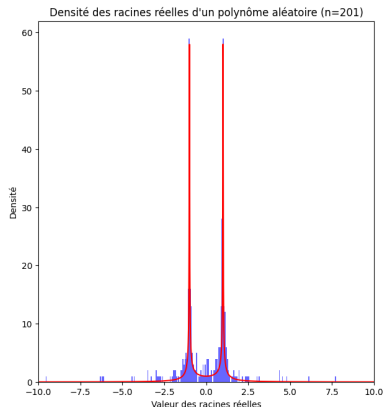


Figure – Densité du nombre de racines réelles.

Degré du polynôme aléatoire = 201, Nombre de simulations = 100, Loi normale  $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$ .

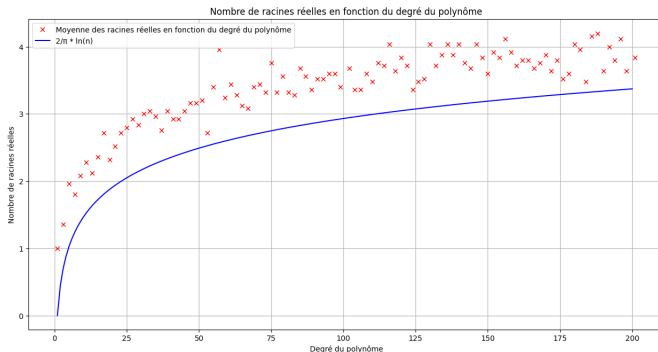


Figure – Densité du nombre de racines réelles.

Degré du polynôme aléatoire = 100, Loi normale  $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$ .

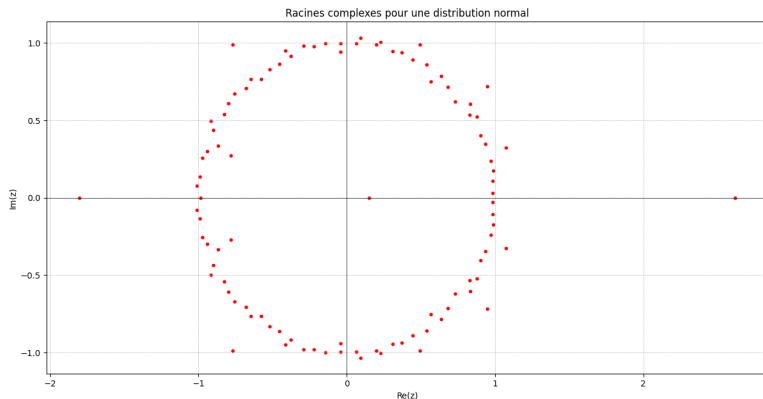


Figure – Densité du nombre de racines réelles.

Degré du polynôme aléatoire = 100, Loi normale  $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$ .