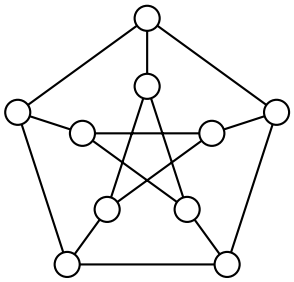
I Coloration de graphe par algorithme glouton

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Une k-**coloration** de G est une fonction $c : V \longmapsto \{0, ..., k-1\}$ vérifiant :

$$\forall \{u, v\} \in E,\ c(u) \neq c(v)$$

1. Trouver une 3-coloration du graphe de Petersen :



2. Montrer que ce graphe n'est pas 2-coloriable.

On appelle le **nombre chromatique** $\chi(G)$ le plus petit k tel que G soit k-coloriable. Par exemple, le nombre chromatique du graphe de Petersen est 3.

On considère un algorithme glouton de coloriage :

> $C \longleftarrow \emptyset$
> Pour chaque sommet v (dans un ordre quelconque) :
> Si une couleur de C n'est utilisée par aucun voisin de v :
> Donner à v cette couleur
> Sinon :
> Ajouter une nouvelle couleur à C et l'utiliser pour v

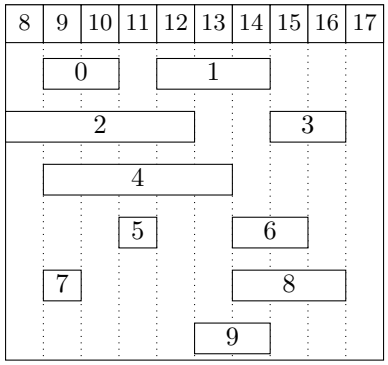
3. Montrer sur un exemple simple que le coloriage obtenu n'est pas forcément optimal.

On souhaite créer un emploi du temps pour une journée : chaque cours possède une heure de début et de fin et doit être assigné à une salle. Il ne peut pas y avoir 2 cours en même temps dans la même salle. L'objectif est de minimiser le nombre de salles à utiliser.

4. Modéliser ce problème sous forme de coloriage de graphe.

Dans l'algorithme glouton précédent, en considère maintenant les sommets par **ordre de début de cours croissant** (on regarde d'abord le cours qui se termine le plus tôt).

5. Appliquer ce nouvel algorithme glouton sur le diagramme de Gantt suivant :



6. Soit k le nombre maximum de cours se déroulant pendant la même heure. Montrer que le nombre chromatique du graphe de la question 4 est au moins k.

7. Montrer que l'algorithme glouton donne un coloriage à k couleurs et est donc optimal.

8. Est-ce que l'algorithme glouton serait optimal si on triait par ordre de **fin croissant**?

On dit qu'un graphe est **biparti** s'il ne possède pas de cycle de longueur impaire.

9. Montrer qu'un graphe biparti est 2-coloriable en donnant un algorithme pour trouver un 2-coloriage.

II Dichotomie 2D

On définit le type de structure suivante :

```
typedef struct coord {
    int i;
    int j;
} coord;
```

On considère une matrice d'entiers `m` dont les éléments sont triés en colonne de haut en bas et de gauche à droite. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 & 21 \\ 2 & 6 & 10 & 14 & 18 & 22 \\ 3 & 7 & 11 & 15 & 19 & 23 \end{pmatrix}$$

1. Écrire en C une fonction `dicho_matrice(x, m, n, p)` qui prend en argument un entier `x` et une matrice `m` à `n` lignes et `p` colonnes d'entiers triés en colonne de haut en bas et de gauche à droite, et qui renvoie :

   - les coordonnées (i, j) (dans une structure `coord`) minimales pour l'ordre défini plus haut tel que `x` se trouve en ligne `i` et colonne `j`, si l'entier `x` est bien présent dans la matrice `m`
   - $(-1, -1)$ si `x` n'est pas présent dans la matrice `m`.

   Cette fonction devra être de complexité logarithmique en $\max(n, p)$.

2. On suppose maintenant que chaque ligne de `m` et chaque colonne est rangée par ordre croissant (et non plus de haut

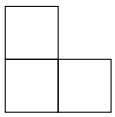
en bas et de gauche à droite). Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 14 \\ 4 & 5 & 7 & 17 \\ 6 & 9 & 12 & 22 \\ 7 & 11 & 13 & 42 \end{pmatrix}$$

Pour simplifier, on supposera que `m` est de taille $n \times n$, où n est une puissance de 2. Donner (en français) un algorithme pour savoir si un élément appartient à une telle matrice, en complexité $O(\log(n))$.

III Pavage

On souhaite paver (c'est-à-dire recouvrir sans chevauchements) une grille carré de côté 2^k avec le motif suivant ainsi que ses 3 rotations :



1. Montrer que ce problème de pavage n'est pas résoluble.
2. On choisit une case quelconque de la grille. Montrer qu'il est possible de paver toute la grille à part cette case. Pour ce faire, on pourra décrire un algorithme (en français) permettant de trouver un tel pavage.

IV Inversions

Étant donné un tableau d'entiers `a`, on appelle inversion de `a` tout couple (i, j) tel que $i < j$ et `a.(i) > a.(j)`. Par exemple, `[|4; 1; 3; 2|]` possède 4 inversions : $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(0, 3)$ et $(2, 3)$. On s'intéresse au calcul du nombre d'inversions de `a`.

1. Donner un algorithme en complexité quadratique pour trouver le nombre d'inversions dans un tableau de taille n.
2. Écrire une fonction `inversions_sorted` telle que, si `a1` et `a2` sont deux tableaux triés, `inversions_sorted a1 a2` renvoie le nombre de couples (i, j) tels que le `a.(i) > a.(j)`.
3. Écrire une fonction `fusion` fusionnant deux tableaux triés en un unique tableau trié.
4. En déduire une fonction `inversions` calculant le nombre d'inversion dans un tableau en $O(\log(n))$, en s'inspirant du tri fusion.