

Calculatrice et documents de cours interdits. Tout le code doit être écrit en C.

Il y a entre  $-0.5$  et  $0.5$  points pour le soin/clarté.

## I Petites questions

- (/0.5) 1. Écrire une fonction `abs` de prototype `double abs(double)` permettant de calculer la valeur absolue d'un `double`.
- (/1) 2. Écrire une fonction `swap` de prototype `void swap(int*, int*)` échangeant les valeurs de deux variables (données par leurs adresses).
- (/0.5) 3. Écrire des instructions pour définir deux variables de type `int` puis échanger leurs valeurs avec `swap`.
- (/1) 4. Écrire une fonction `premier` de prototype `bool premier(int)` déterminant si un entier est premier.

## II Fractions

- (/0.5) 1. Définir une structure `fraction` contenant un numérateur et un dénominateur (deux `int`).
- (/0.5) 2. Définir une variable de type `fraction` correspondant à la fraction  $\frac{3}{2}$ .
- (/1) 3. Écrire une fonction `add` pour ajouter deux fractions, de prototype `fraction add(fraction, fraction)`.  
**Remarque** : Il n'est pas nécessaire d'utiliser de pointeur/malloc.

## III Mélange de Knuth

Dans cet exercice, tous les tableaux contiennent des entiers (`int`).

Le mélange de Knuth est un algorithme qui applique une permutation aléatoire sur un tableau (il mélange aléatoirement les éléments). Pour l'implémenter on va utiliser la fonction `rand` en C qui permet d'obtenir un entier aléatoire entre 0 et `UINT_MAX`, c'est-à-dire le plus grand entier non signé représentable.

- (/0.5) 1. En supposant les entiers non signé codés sur 4 octets, quelle est la valeur de `UINT_MAX`?
- (/1) 2. Écrire une fonction `randn`, telle que, si `n` est un entier positif, `randn(n)` renvoie un entier aléatoire entre 0 et `n`. (Remarque : il n'a pas besoin d'être exactement uniformément aléatoire).
- (/0.5) 3. Écrire une fonction `swap` telle que, si `t` est un tableau d'entiers et `i, j` deux de ses indices, `swap(t, i, j)` échange les éléments d'indice `i` et `j` dans `t`.

Voici le pseudo-code du mélange de Knuth sur un tableau `t` de taille `n` :

```
Pour i variant de 0 à n - 1:  
    Soit j un entier aléatoire entre 0 et i  
    Echanger les éléments d'indice i et j dans t
```

- (/0.5) 4. Traduire le mélange de Knuth en C, telle que `shuffle(t, n)` applique le mélange de Knuth sur un tableau `t` d'entiers de taille `n`.

## IV Tri par insertion (dichotomique)

Dans cet exercice, tous les tableaux contiennent des entiers (`int`).

- (/0.5) 1. Écrire une fonction `position` telle que, si `t` est un tableau trié d'entiers et `n, e` des entiers, `position(t, n, e)` renvoie le plus petit indice `i < n` tel que `t[i] > e`. Si un tel indice n'existe pas, on renverra `n`.  
Par exemple, si `t` contient les éléments 1, 3, 6, 9, 17 (dans cet ordre), `position(t, 4, 7)` doit renvoyer 3.  
On demande une complexité en  $O(n)$ .
- (/2.5) 2. Réécrire la fonction précédente en s'inspirant de la recherche par dichotomie. Quelle est la nouvelle complexité?
- (/1) 3. Écrire une fonction `decaler` telle que `decaler(t, i, j)` décale les éléments du tableau `t` d'une position vers la droite. Ainsi, la valeur de `t[i]` doit être mise dans `t[i + 1]`, `t[i + 1]` dans `t[i + 2]`, ..., `t[j - 1]` doit être mise dans `t[j]`.  
Par exemple, après les instructions `int t[] = {1, 3, 6, 9, 17}` et `decaler(t, 1, 3)`, `t` doit contenir 1, 3, 3, 6, 17 (`t[i]` n'est pas modifié).

Le tri par insertion sur un tableau `t` consiste à parcourir chaque élément `t[i]` de `t` et à l'insérer à sa bonne position de façon à ce que les `i` premiers éléments soient triés. On a donc une boucle `for` avec l'invariant suivant : « au `i`ème passage de la boucle `for`, les `i` premiers éléments de `t` sont triés ».

- (/1) 4. En réutilisant `position` et `decaler`, implémenter une fonction `tri` permettant d'effectuer le tri par insertion sur un tableau. `tri` aura donc le prototype `void tri(int* t, int n)`, où `n` est la taille de `t`.
- (/0.5) 5. Quelle est la complexité de `tri` en utilisant la fonction de la question 1?
- (/1) 6. Quelle est la complexité de `tri` en utilisant la fonction de la question 2? Et si on compte seulement le nombre de comparaisons (c'est-à-dire le nombre de tests de `<`, `>`, `==...`)?

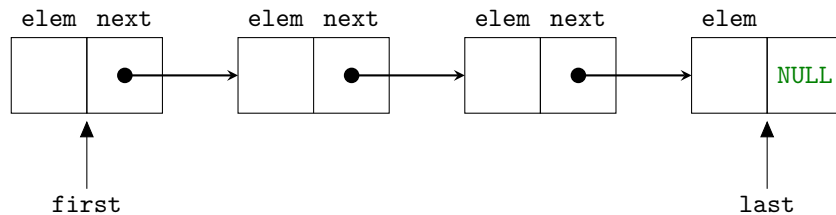
## V Implémentation d'une file par liste chaînée

Dans cet exercice, on utilise une liste chaînée d'entiers (type `list`) pour implémenter une file (type `file`). Une file contient un pointeur vers le 1er élément et vers le dernier.

```
typedef struct list {
    list* next;
    int elem;
} list;
```

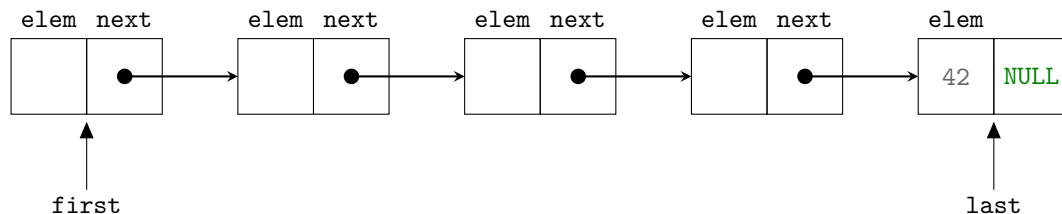
```
typedef struct file {
    list* first;
    list* last;
} file;
```

Voici un exemple de `file` :



Par convention, la `file` vide possède deux pointeurs `first` et `last` qui sont `NULL`.

- (/0.5) 1. Écrire une fonction pour tester si une `file` est vide.
- (/1.5) 2. Écrire une fonction de prototype `void add(file*, int)` pour ajouter un élément à la fin de la file (après `last`). Ainsi, `add(f, 42)` appliqué sur la file `f` de l'exemple ci-dessus doit modifier la file de la façon suivante :



- (/1.5) 3. Écrire une fonction de prototype `int pop(file*)` pour supprimer et renvoyer l'élément au début de la file. On fera attention à libérer la mémoire.

## VI Fusion de listes triées

- (/2) 1. Écrire une fonction `list* merge(list*, list*)` (le type `list` étant défini ci-dessus) telle que, si `l1` et `l2` sont deux listes triées (par ordre croissant), `merge(l1, l2)` renvoie une liste triée contenant les éléments des deux listes.