Problème SAT

Quentin Fortier

April 14, 2022

Forme normale disjonctive et conjonctive

Théorème

Toute formule logique φ est équivalente à une formule sous **forme normale disjonctive**, c'est à dire de la forme $\varphi = c_1 \vee ... \vee c_n$ où c_i est de la forme $x_1 \wedge ... \wedge x_p$ avec x_1, ..., x_p des littéraux (variable ou négation d'une variable).

Forme normale disjonctive et conjonctive

Théorème

Toute formule logique φ est équivalente à une formule sous **forme normale disjonctive**, c'est à dire de la forme $\varphi = c_1 \vee ... \vee c_n$ où c_i est de la forme $x_1 \wedge ... \wedge x_p$ avec x_1, ..., x_p des littéraux (variable ou négation d'une variable).

Preuve :

$$\varphi = \bigvee_{\substack{v \text{ valuation} \\ \text{tq } [\![\varphi]\!]_v = 1}} \bigwedge_{\substack{x \in V \\ \text{tq } v(x)=1}} x$$

Forme normale disjonctive et conjonctive

Définition

Une **forme normale conjonctive** est une conjonction de disjonctions de littéraux, c'est à dire une formule de la forme $c_1 \wedge \ldots \wedge c_k$ où chaque c_i est de la forme $\ell_1 \vee \ldots \vee \ell_p$.

Forme normale disjonctive et conjonctive

Définition

Une **forme normale conjonctive** est une conjonction de disjonctions de littéraux, c'est à dire une formule de la forme $c_1 \wedge ... \wedge c_k$ où chaque c_i est de la forme $\ell_1 \vee ... \vee \ell_p$.

Théorème

Toute formule logique φ est équivalente à une formule sous forme normale conjonctive.

Preuve :

Forme normale disjonctive et conjonctive

Définition

Une **forme normale conjonctive** est une conjonction de disjonctions de littéraux, c'est à dire une formule de la forme $c_1 \land ... \land c_k$ où chaque c_i est de la forme $\ell_1 \lor ... \lor \ell_p$.

Théorème

Toute formule logique φ est équivalente à une formule sous forme normale conjonctive.

Preuve : $\neg\varphi$ est équivalente à une forme normale disjonctive, c'est à dire $\neg\varphi \equiv c_1 \lor ... \lor c_k$ où chaque c_i est de la forme $\ell_1 \land ... \land \ell_p$.

Forme normale disjonctive et conjonctive

Définition

Une **forme normale conjonctive** est une conjonction de disjonctions de littéraux, c'est à dire une formule de la forme $c_1 \wedge ... \wedge c_k$ où chaque c_i est de la forme $\ell_1 \vee ... \vee \ell_p$.

Théorème

Toute formule logique φ est équivalente à une formule sous forme normale conjonctive.

<u>Preuve</u> : $\neg\varphi$ est équivalente à une forme normale disjonctive, c'est à dire $\neg\varphi \equiv c_1 \vee ... \vee c_k$ où chaque c_i est de la forme $\ell_1 \wedge ... \wedge \ell_p$.
Alors $\neg\neg\varphi = \neg(c_1 \vee ... \vee c_k) \equiv \neg c_1 \wedge ... \wedge \neg c_k$ (de Morgan).

Forme normale disjonctive et conjonctive

Définition

Une **forme normale conjonctive** est une conjonction de disjonctions de littéraux, c'est à dire une formule de la forme $c_1 \wedge ... \wedge c_k$ où chaque c_i est de la forme $\ell_1 \vee ... \vee \ell_p$.

Théorème

Toute formule logique φ est équivalente à une formule sous forme normale conjonctive.

Preuve : $\neg\varphi$ est équivalente à une forme normale disjonctive, c'est à dire $\neg\varphi \equiv c_1 \vee ... \vee c_k$ où chaque c_i est de la forme $\ell_1 \wedge ... \wedge \ell_p$.
Alors $\neg\neg\varphi = \neg(c_1 \vee ... \vee c_k) \equiv \neg c_1 \wedge ... \wedge \neg c_k$ (de Morgan).
Et $\neg c_i = \neg(\ell_1 \wedge \ell_2 \wedge ... \wedge \ell_p) \equiv \neg\ell_1 \vee ... \vee \neg\ell_p$ (de Morgan).

Forme normale disjonctive et conjonctive

Définition

Une **forme normale conjonctive** est une conjonction de disjonctions de littéraux, c'est à dire une formule de la forme $c_1 \wedge \ldots \wedge c_k$ où chaque c_i est de la forme $\ell_1 \vee \ldots \vee \ell_p$.

Théorème

Toute formule logique φ est équivalente à une formule sous forme normale conjonctive.

Preuve : $\neg\varphi$ est équivalente à une forme normale disjonctive, c'est à dire $\neg\varphi \equiv c_1 \vee \ldots \vee c_k$ où chaque c_i est de la forme $\ell_1 \wedge \ldots \wedge \ell_p$.
Alors $\neg\neg\varphi = \neg(c_1 \vee \ldots \vee c_k) \equiv \neg c_1 \wedge \ldots \wedge \neg c_k$ (de Morgan).
Et $\neg c_i = \neg(\ell_1 \wedge \ell_2 \wedge \ldots \wedge \ell_p) \equiv \neg \ell_1 \vee \ldots \vee \neg \ell_p$ (de Morgan).
Donc $\varphi \equiv \neg\neg\varphi$ est bien équivalente à une forme normale conjonctive.

Forme normale disjonctive et conjonctive

Définition

Une **forme normale conjonctive** est une conjonction de disjonctions de littéraux, c'est à dire une formule de la forme $c_1 \wedge ... \wedge c_k$ où chaque c_i est de la forme $\ell_1 \vee ... \vee \ell_p$.

Théorème

Toute formule logique φ est équivalente à une formule sous forme normale conjonctive.

<u>Preuve</u> : $\neg\varphi$ est équivalente à une forme normale disjonctive, c'est à dire $\neg\varphi \equiv c_1 \vee ... \vee c_k$ où chaque c_i est de la forme $\ell_1 \wedge ... \wedge \ell_p$.
Alors $\neg\neg\varphi = \neg(c_1 \vee ... \vee c_k) \equiv \neg c_1 \wedge ... \wedge \neg c_k$ (de Morgan).
Et $\neg c_i = \neg(\ell_1 \wedge \ell_2 \wedge ... \wedge \ell_p) \equiv \neg\ell_1 \vee ... \vee \neg\ell_p$ (de Morgan).
Donc $\varphi \equiv \neg\neg\varphi$ est bien équivalente à une forme normale conjonctive.

Autre preuve possible : par induction structurelle sur φ.

Exercice X2016

Question 20 Pour chacune des formules suivantes, utiliser l'involutivité de la négation, l'associativité et la distributivité des connecteurs $\wedge$ et $\vee$, ainsi que les lois de De Morgan pour transformer la formule en FNC. Seul le résultat du calcul est demandé :

a) $(x_1 \vee \neg x_0) \wedge \neg(x_4 \wedge \neg(x_3 \wedge x_2))$

b) $(x_0 \wedge x_1) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (x_4 \wedge x_5)$

Forme normale disjonctive et conjonctive

Problème k-SAT

Le problème k-SAT consiste à déterminer si une formule φ, sous forme normale conjonctive dont chaque clause comporte k littéraux, est satisfiable.

Forme normale disjonctive et conjonctive

Problème k-SAT

Le problème k-SAT consiste à déterminer si une formule φ, sous forme normale conjonctive dont chaque clause comporte k littéraux, est satisfiable.

1. 1-SAT :

Forme normale disjonctive et conjonctive

Problème k-SAT

Le problème k-SAT consiste à déterminer si une formule φ, sous forme normale conjonctive dont chaque clause comporte k littéraux, est satisfiable.

1. 1-SAT : satisfiable ssi φ ne contient pas à la fois une variable et sa négation.
   Complexité : O(n), n étant le nombre de variables dans φ.
2. 2-SAT :

Forme normale disjonctive et conjonctive

Problème k-SAT

Le problème k-SAT consiste à déterminer si une formule φ, sous forme normale conjonctive dont chaque clause comporte k littéraux, est satisfiable.

1. 1-SAT : satisfiable ssi φ ne contient pas à la fois une variable et sa négation.
   Complexité : O(n), n étant le nombre de variables dans φ.
2. 2-SAT : se ramène à un problème de graphe dont les sommets sont les littéraux de φ.
   Pour toute clause $\ell_1 \vee \ell_2$, équivalente à $\neg\ell_1 \implies \ell_2$, on ajoute un arc $(\neg\ell_1, \ell_2)$.
   φ est alors satisfiable ssi aucune composante fortement connexe ne contient une variable et sa négation.

Forme normale disjonctive et conjonctive

Théorème

Si on peut résoudre 3-SAT en complexité polynomiale (en le nombre de variables), alors on peut aussi résoudre k-SAT en complexité polynomiale.

Forme normale disjonctive et conjonctive

Théorème

Si on peut résoudre 3-SAT en complexité polynomiale (en le nombre de variables), alors on peut aussi résoudre k-SAT en complexité polynomiale.

Preuve : soit φ une formule k-SAT et $c = \ell_1 \vee .. \vee \ell_k$ une de ses clauses.

Forme normale disjonctive et conjonctive

Théorème

Si on peut résoudre 3-SAT en complexité polynomiale (en le nombre de variables), alors on peut aussi résoudre k-SAT en complexité polynomiale.

Preuve : soit φ une formule k-SAT et $c = \ell_1 \vee .. \vee \ell_k$ une de ses clauses. Alors :

$$c \equiv (\ell_1 \vee \ell_2 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \ell_3 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee \ell_4 \vee x_3) \ldots \wedge (\neg x_{k-3} \vee \ell_{k-1} \vee \ell_k)$$

où x_1, ..., x_{k-3} sont des nouvelles variables.

Forme normale disjonctive et conjonctive

Théorème

Si on peut résoudre 3-SAT en complexité polynomiale (en le nombre de variables), alors on peut aussi résoudre k-SAT en complexité polynomiale.

Preuve : soit φ une formule k-SAT et $c = \ell_1 \vee .. \vee \ell_k$ une de ses clauses. Alors :

$$c \equiv (\ell_1 \vee \ell_2 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \ell_3 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee \ell_4 \vee x_3) ... \wedge (\neg x_{k-3} \vee \ell_{k-1} \vee \ell_k)$$

où x_1, ..., x_{k-3} sont des nouvelles variables.

On peut donc transformer φ en une formule 3-SAT, en multipliant au plus par k le nombre de variables.