

# 高等微积分期末辅导

梁莫言, 清华大学未央书院.

2025 年 1 月 5 日

## 目录

<b>1</b>	<b>不定积分的计算</b>	<b>2</b>
1.1	分部积分法 . . . . .	2
1.2	换元法. 三角换元, 双曲三角换元 . . . . .	2
1.3	有理分式的化简与原函数 . . . . .	3
1.4	超越函数的原函数 . . . . .	4
1.5	* 配凑法 . . . . .	4
<b>2</b>	<b>定积分的计算</b>	<b>4</b>
2.1	定积分的定义与性质. Newton-Leibniz 公式 . . . . .	4
2.2	换元法与分部积分法在定积分中的应用 . . . . .	5
2.3	对称性与定积分的计算 . . . . .	6
2.4	反常积分的判敛 . . . . .	7
2.5	反常积分的计算 . . . . .	8
2.6	* Mobius 变换与有理函数的积分: 倒代换与等域变换. . . . .	9
<b>3</b>	<b>积分不等式与积分中值定理</b>	<b>9</b>
3.1	积分的估计 . . . . .	9
3.2	Cauchy 不等式. Young 不等式. Holder 不等式 . . . . .	10
3.3	Jensen 不等式 . . . . .	11
3.4	中值定理与 Taylor 公式. *Darboux 公式 . . . . .	11
3.5	* Taylor 展开与积分的估计 . . . . .	12
<b>4</b>	<b>常微分方程与一元微积分学在物理学中的应用</b>	<b>13</b>
4.1	可分离变量的微分方程 . . . . .	13
4.2	一阶线性微分方程 . . . . .	13
4.3	二阶线性微分方程. 常数变易法 . . . . .	13
4.4	可以降阶的微分方程 . . . . .	14
4.5	微分方程在物理学中的应用 . . . . .	14
4.6	积分学在物理学中的应用 . . . . .	15

## 1 不定积分的计算

### 1.1 分部积分法

问题 1. 计算以下不定积分:

$$\int x^2 e^x dx, \quad \int \ln x dx, \quad \int e^x \sin x dx.$$

问题 2. 计算以下不定积分:

$$\int \cos^5 x dx, \quad \int \arcsin x dx, \quad \int \sec^3 x dx.$$

问题 3. 推到下列积分的递推公式:

$$I_n = \int \sin^n x dx, \quad J_n = \int x^n e^x dx, \quad K_n = \int \tan^n x dx.$$

### 1.2 换元法. 三角换元, 双曲三角换元

问题 4. 计算以下不定积分:

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}.$$

问题 5. 计算以下不定积分:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}, \quad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}.$$

问题 6. 计算以下不定积分:

$$\int \sinh^3 x \, dx, \quad \int \frac{dx}{\cosh x}, \quad \int \frac{dx}{\sinh x}.$$

问题 7. 计算以下不定积分:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

### 1.3 有理分式的化简与原函数

问题 8. 计算以下不定积分:

$$\int \frac{2x^2+3x+1}{(x-1)(x^2+1)} \, dx, \quad \int \frac{x^3+1}{x^2-x} \, dx.$$

问题 9. 计算以下不定积分:

$$\int \frac{dx}{x^3-x^2}, \quad \int \frac{dx}{x^4+4}, \quad \int \frac{dx}{x^4+x^2+1}.$$

### 1.4 超越函数的原函数

问题 10. 计算以下不定积分:

$$\int \sqrt{e^x - 1} dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1 - e^x}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}.$$

问题 11. 计算以下不定积分:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \ln x}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2} \ln x}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1} \ln x}.$$

### 1.5 \* 配凑法

问题 12. 计算以下不定积分:

$$\int \frac{dx}{1 + x^3}, \quad \int \frac{dx}{1 + x^4}, \quad \int \frac{dx}{1 + x^5}.$$

## 2 定积分的计算

### 2.1 定积分的定义与性质. Newton-Leibniz 公式

问题 13. 利用定积分定义计算:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}.$$

问题 14. 计算极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \cdots \left( 1 + \frac{n}{n} \right) \right)^{\frac{1}{n}}.$$

## 2.2 换元法与分部积分法在定积分中的应用

问题 15. 计算 Fejer 积分:

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)} dx.$$

问题 16. 计算以下定积分:

$$\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx, \quad \int_0^1 \ln(1+x^2) \, dx, \quad \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) \, dx.$$

问题 17. 计算以下定积分:

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x} \, dx, \quad \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin x} \, dx, \quad \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan x} \, dx.$$

问题 18. 计算以下定积分:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx, \quad \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx.$$

问题 19. 计算以下定积分:

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1 + \varepsilon \cos x} (|\varepsilon| < 1).$$

### 2.3 对称性与定积分的计算

问题 20. 计算以下定积分:

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx, \quad \int_0^\pi \frac{x \sin x}{2 + \cos x} dx, \text{ etc.}$$

问题 21. 计算以下定积分:

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx, \quad \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx, \quad \int_0^{\pi/2} \ln(\tan x) dx.$$

问题 22. 计算以下定积分:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \tan^n x}.$$

问题 23. 设  $f \in C[0, a]$ ,  $a > 0$ . 若有  $f(x)f(a-x) \equiv 1$ , 计算下列定积分:

$$\int_0^a \frac{dx}{f(x) + 1}.$$

## 2.4 反常积分的判敛

问题 24. 判定下列反常积分的敛散性:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx, \quad \int_0^{\infty} x^p \ln x dx.$$

问题 25. 判定下列反常积分的敛散性:

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx, \quad \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx.$$

问题 26. 判定下列反常积分的敛散性:

$$\int_0^{\infty} x^p \sin x^q dx.$$

问题 27. 判定下列反常积分的敛散性:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^p - \sin x} dx.$$

问题 28. 判定下列反常积分的敛散性:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x - x^p}, \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{\ln(x)^p}.$$

问题 29. 判定下列反常积分的敛散性:

$$\int_0^{\infty} \sin(x) \sin(x^2) dx.$$

问题 30. 对于连续函数  $f \in C[a, +\infty)$ , 且  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  存在, 证明:

$$f \text{ 一致连续} \Leftrightarrow f(+\infty) = 0.$$

## 2.5 反常积分的计算

问题 31. 计算以下反常积分:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} dx, \quad \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx, \quad (a > 0, n > -1)$$

问题 32. 利用 Fejer 积分, 计算 Dirichlet 积分:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

问题 33. 计算下列 Gauss 积分:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx.$$



问题 34. 计算以下反常积分:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+ax+b)^n} \quad (4b > a^2).$$

问题 35. 计算下列 Froullani 积分:

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx,$$

其中  $a, b > 0$ , 且  $f(+\infty)$  存在.

## 2.6 \* Mobius 变换与有理函数的积分: 倒代换与等域变换.

问题 36. 计算以下反常积分:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)(x^\alpha+1)}, \quad \int_0^\infty \frac{\ln(x+1)}{x^2+1} dx.$$

# 3 积分不等式与积分中值定理

## 3.1 积分的估计

问题 37. 设  $f$  在  $[a, b]$  上连续可导.

(1) 证明:

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x)| \leq |\bar{f}| + \int_a^b |f'(x)| dx$$

(2) 证明:

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - \bar{f}| \leq \frac{(b-a)}{2} \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|,$$

其中  $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ .

问题 38. 证明: 对于连续函数  $f(x) \in C[a, b]$  与  $\xi \in (a, b)$ , 有

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_a^b f(x) \frac{h}{(x - \xi)^2 + h^2} dx = \pi f(\xi).$$

### 3.2 Cauchy 不等式. Young 不等式. Holder 不等式

问题 39 (Young 不等式). 设  $f(x), g(x) \in C[a, b]$  且均为非负函数, 证明: 对于  $p, q > 1$  且  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , 有

$$\int_a^b f(x)g(x) dx \leq \left( \int_a^b f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_a^b g^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

问题 40 (Holder 不等式). 设  $f(x), g(x) \in C[a, b]$  且均为非负函数, 证明: 对于  $p, q > 1$  且  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , 有

$$\int_a^b f(x)g(x) dx \leq \left( \int_a^b f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_a^b g^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

问题 41 (Cauchy 不等式). 设  $f(x), g(x) \in C[a, b]$ , 证明:

$$\left( \int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left( \int_a^b f^2(x) dx \right) \left( \int_a^b g^2(x) dx \right).$$

问题 42. 对于满足  $f(0) = f(1) = 0$  的  $C^1[0, 1]$  函数  $f(x)$ , 证明:

$$\left( \int_0^1 x f(x) dx \right)^2 \leq \frac{1}{45} \int_0^1 (f'(x))^2 dx.$$

### 3.3 Jensen 不等式

问题 43. 证明: 对于  $\int_a^b p(x) dx = 1$ , 对于任意  $f(x) > 0 (x \in [a, b])$  有

$$\exp \left( \int_a^b p(x) \ln f(x) dx \right) \leq \int_a^b p(x) f(x) dx \leq \ln \left( \int_a^b p(x) \exp(f(x)) dx \right).$$

问题 44. 证明: 对于下凸函数  $f(x)$ , 有

$$f \left( \int_a^b p(x) dx \right) \leq \int_a^b f(p(x)) dx.$$

特别的, 取  $p(x) = x^n$ , 得到什么结果?

### 3.4 中值定理与 Taylor 公式. \*Darboux 公式

问题 45. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上具有  $n+1$  阶导数, 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$  使得

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{(k+1)!} (b-a)^{k+1} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+2)!} (b-a)^{n+2}.$$

问题 46. 设  $f$  在  $[a, b]$  上二阶连续可导, 证明:

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi),$$

其中  $\xi \in (a, b)$ .

问题 47. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上具有连续的  $n$  阶导数, 证明: *Taylor* 公式的积分余项形式为

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} (b-t)^{n-1} dt.$$

问题 48 (\*Darboux 公式). 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上具有  $n+1$  阶导数,  $\phi(t)$  是  $n$  阶多项式. 证明:

$$\phi^{(n)}(0)(f(b)-f(a)) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (\phi^{(n-k)}(1)f^{(k)}(b) - \phi^{(n-k)}(0)f^{(k)}(a)) + (-1)^n \int_0^1 \phi(t)f^{(n+1)}(a+t(b-a))(b-a)^{n+1} dt.$$

### 3.5 \* Taylor 展开与积分的估计

问题 49. 对于函数  $f(x) = e^{x^2}(\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt)$ , 证明: 在  $x \rightarrow +\infty$  时, 成立展开

$$f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^3} + \frac{3}{8x^5} - \cdots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}x^{2n+1}} + R_n(x),$$

其中余项  $R_n(x)$  满足

$$|R_n(x)| \leq \frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}x^{2n+3}}.$$

## 4 常微分方程与一元微积分学在物理学中的应用

### 4.1 可分离变量的微分方程

这一部分是关于  $y' = f(y)g(x)$  的微分方程.

问题 50. 求解下列微分方程:

$$y' = y^2 \sin x, \quad y' = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{\sqrt{x}}, \quad (x > 0).$$

### 4.2 一阶线性微分方程

问题 51. 求解下列微分方程:

$$y' + y \tan x = \sin x, \quad y' - \frac{2}{x}y = x^2, \quad (x \neq 0).$$

问题 52. 求解下列微分方程:

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x}, \quad y' + 2xy = xe^{-x^2}.$$

### 4.3 二阶线性微分方程. 常数变易法

问题 53. 求解下列微分方程:

$$y'' - y = e^x, \quad y'' + 4y = \sin 2x.$$

问题 54. 求解下列微分方程:

$$y'' + y' - 2y = e^{3x}, \quad y'' - 2y' + y = e^x.$$

#### 4.4 可以降阶的微分方程

问题 55. 求解下列微分方程:

$$y'' = (y')^2, \quad y'' = y' \ln y'.$$

问题 56 (Euler 方程). 求解下列微分方程:

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = x^2, \quad x^2 y'' + xy' - y = \ln x.$$

问题 57 (Bernoulli 方程). 求解下列微分方程:

$$y'' + y = \sec^2 x \cdot y^2, \quad y'' - y = e^x y^3.$$

#### 4.5 微分方程在物理学中的应用

问题 58. 设一质量为  $m$  的物体在重力作用下自由下落, 且受到与速度成正比的阻力. 试建立物体运动的微分方程, 并求解该微分方程, 给出物体的速度  $v$  随时间  $t$  的变化关系.

问题 59 (Tsiolkovsky 公式). 试推导火箭运动的 *Tsiolkovsky* 公式, 也就是:

$$v_f - v_i = v_e \ln \frac{m_i}{m_f},$$

其中  $v_f$  和  $v_i$  分别是火箭在燃料燃尽时和起飞时的速度,  $v_e$  是燃料相对于火箭的排出速度,  $m_i$  和  $m_f$  分别是火箭起飞时和燃料燃尽时的质量.

问题 60 (相对论性动力学). (1) 设一质量为  $m_0$  的粒子在受力  $F$  作用下运动, 其动量  $p$  与速度  $v$  的关系为  $p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ , 其中  $c$  是光速. 试建立粒子运动的微分方程, 并求解该微分方程, 给出粒子的速度  $v$  随时间  $t$  的变化关系.

(2) 引入本征时间  $\tau$ , 使得  $d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ . 试用本征时间重新推导粒子的运动方程, 并求解该方程, 给出粒子的速度  $v$  随本征时间  $\tau$  的变化关系.

## 4.6 积分学在物理学中的应用

问题 61. 设一均匀细杆长为  $L$ , 线密度为  $\lambda$ , 求杆在距其一端  $d$  处的引力.

问题 62 (浮力). 将半径为  $R$  的球体完全浸入液体中, 求克服浮力做的功.

问题 63 (圆环近轴引力势能). 对于质量密度为  $\lambda$  的圆环, 半径为  $R$ , 求其在轴线上距离圆环中心  $d$  处的引力势能. 展开到  $O(d^2)$  阶.