

高等微积分期未辅导

梁莫言, 清华大学未央书院.

2025 年 1 月 5 日

目录

1 不定积分的计算	2
1.1 分部积分法	2
1.2 换元法. 三角换元, 双曲三角换元	2
1.3 有理分式的化简与原函数	3
1.4 超越函数的原函数	4
1.5 * 配凑法	4
2 定积分的计算	4
2.1 定积分的定义与性质. Newton-Leibniz 公式	4
2.2 换元法与分部积分法在定积分中的应用	5
2.3 对称性与定积分的计算	6
2.4 反常积分的判敛	7
2.5 反常积分的计算	8
2.6 * Möbius 变换与有理函数的积分: 倒代换与等域变换.	9
3 积分不等式与积分中值定理	9
3.1 积分的估计	9
3.2 Cauchy 不等式. Young 不等式. Holder 不等式	10
3.3 Jensen 不等式	11
3.4 中值定理与 Taylor 公式. *Darboux 公式	11
3.5 * Taylor 展开与积分的估计	12
4 常微分方程与一元微积分学在物理学中的应用	13
4.1 可分离变量的微分方程	13
4.2 一阶线性微分方程	13
4.3 二阶线性微分方程. 常数变易法	13
4.4 可以降阶的微分方程	14
4.5 微分方程在物理学中的应用	14
4.6 积分学在物理学中的应用	15

1 不定积分的计算

1.1 分部积分法

问题 1. 计算以下不定积分:

$$\int x^2 e^x \, dx, \quad \int \ln x \, dx, \quad \int e^x \sin x \, dx.$$

问题 2. 计算以下不定积分:

$$\int \cos^5 x \, dx, \quad \int \arcsin x \, dx, \quad \int \sec^3 x \, dx.$$

问题 3. 推到下列积分的递推公式:

$$I_n = \int \sin^n x \, dx, \quad J_n = \int x^n e^x \, dx, \quad K_n = \int \tan^n x \, dx.$$

1.2 换元法. 三角换元, 双曲三角换元

问题 4. 计算以下不定积分:

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}.$$

问题 5. 计算以下不定积分:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - x + 1}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}, \quad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 - x^2}}.$$

问题 6. 计算以下不定积分:

$$\int \sinh^3 x \, dx, \quad \int \frac{dx}{\cosh x}, \quad \int \frac{dx}{\sinh x}.$$

问题 7. 计算以下不定积分:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

1.3 有理分式的化简与原函数

问题 8. 计算以下不定积分:

$$\int \frac{2x^2 + 3x + 1}{(x - 1)(x^2 + 1)} \, dx, \quad \int \frac{x^3 + 1}{x^2 - x} \, dx.$$

问题 9. 计算以下不定积分:

$$\int \frac{dx}{x^3 - x^2}, \quad \int \frac{dx}{x^4 + 4}, \quad \int \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1}.$$

1.4 超越函数的原函数

问题 10. 计算以下不定积分:

$$\int \sqrt{e^x - 1} dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1 - e^x}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}.$$

问题 11. 计算以下不定积分:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2 \ln x}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2 \ln x}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1 \ln x}}.$$

1.5 * 配凑法

问题 12. 计算以下不定积分:

$$\int \frac{dx}{1 + x^3}, \quad \int \frac{dx}{1 + x^4}, \quad \int \frac{dx}{1 + x^5}.$$

2 定积分的计算

2.1 定积分的定义与性质. Newton-Leibniz 公式

问题 13. 利用定积分定义计算:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}.$$

问题 14. 计算极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right)^{\frac{1}{n}}.$$

2.2 换元法与分部积分法在定积分中的应用

问题 15. 计算 Fejer 积分:

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)} dx.$$

问题 16. 计算以下定积分:

$$\int_0^{\pi/2} x \sin x dx, \quad \int_0^1 \ln(1+x^2) dx, \quad \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx.$$

问题 17. 计算以下定积分:

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x} dx, \quad \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin x} dx, \quad \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan x} dx.$$

问题 18. 计算以下定积分:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx, \quad \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx.$$

问题 19. 计算以下定积分:

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1 + \varepsilon \cos x} (|\varepsilon| < 1).$$

2.3 对称性与定积分的计算

问题 20. 计算以下定积分:

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx, \quad \int_0^\pi \frac{x \sin x}{2 + \cos x} dx, \text{ etc.}$$

问题 21. 计算以下定积分:

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx, \quad \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx, \quad \int_0^{\pi/2} \ln(\tan x) dx.$$

问题 22. 计算以下定积分:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \tan^n x}.$$

问题 23. 设 $f \in C[0, a]$, $a > 0$. 若有 $f(x)f(a - x) \equiv 1$, 计算下列定积分:

$$\int_0^a \frac{dx}{f(x) + 1}.$$

2.4 反常积分的判敛

问题 24. 判定下列反常积分的敛散性:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx, \quad \int_0^\infty x^p \ln x dx.$$

问题 25. 判定下列反常积分的敛散性:

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx, \quad \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx.$$

问题 26. 判定下列反常积分的敛散性:

$$\int_0^\infty x^p \sin x^q dx.$$

问题 27. 判定下列反常积分的敛散性:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p - \sin x} dx.$$

问题 28. 判定下列反常积分的敛散性:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^x - x^p}, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{\ln(x)^p}.$$

问题 29. 判定下列反常积分的敛散性:

$$\int_0^\infty \sin(x) \sin(x^2) dx.$$

问题 30. 对于连续函数 $f \in C[a, +\infty)$, 且 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 存在, 证明:

$$f \text{一致连续} \Leftrightarrow f(+\infty) = 0.$$

2.5 反常积分的计算

问题 31. 计算以下反常积分:

$$\int_0^\infty e^{-ax} dx, \quad \int_0^\infty x^n e^{-ax} dx, \quad (a > 0, n > -1)$$

问题 32. 利用 Fejer 积分, 计算 Dirichlet 积分:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

问题 33. 计算下列 Gauss 积分:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx, \quad \int_{-\infty}^\infty x^{2n} e^{-x^2} dx.$$

问题 34. 计算以下反常积分:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+ax+b)^n} (4b > a^2).$$

问题 35. 计算下列 Froullani 积分:

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx,$$

其中 $a, b > 0$, 且 $f(+\infty)$ 存在.

2.6 * Möbius 变换与有理函数的积分: 倒代换与等域变换.

问题 36. 计算以下反常积分:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)(x^\alpha+1)}, \quad \int_0^\infty \frac{\ln(x+1)}{x^2+1} dx.$$

3 积分不等式与积分中值定理

3.1 积分的估计

问题 37. 设 f 在 $[a, b]$ 上连续可导.

(1) 证明:

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x)| \leq |\bar{f}| + \int_a^b |f'(x)| dx$$

(2) 证明:

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - \bar{f}| \leq \frac{(b-a)}{2} \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|,$$

其中 $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

问题 38. 证明: 对于连续函数 $f(x) \in C[a, b]$ 与 $\xi \in (a, b)$, 有

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_a^b f(x) \frac{h}{(x - \xi)^2 + h^2} dx = \pi f(\xi).$$

3.2 Cauchy 不等式. Young 不等式. Holder 不等式

问题 39 (Young 不等式). 设 $f(x), g(x) \in C[a, b]$ 且均为非负函数, 证明: 对于 $p, q > 1$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 有

$$\int_a^b f(x)g(x) dx \leq \left(\int_a^b f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

问题 40 (Holder 不等式). 设 $f(x), g(x) \in C[a, b]$ 且均为非负函数, 证明: 对于 $p, q > 1$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 有

$$\int_a^b f(x)g(x) dx \leq \left(\int_a^b f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

问题 41 (Cauchy 不等式). 设 $f(x), g(x) \in C[a, b]$, 证明:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right) \left(\int_a^b g^2(x) dx \right).$$

问题 42. 对于满足 $f(0) = f(1) = 0$ 的 $C^1[0, 1]$ 函数 $f(x)$, 证明:

$$\left(\int_0^1 xf(x) dx \right)^2 \leq \frac{1}{45} \int_0^1 (f'(x))^2 dx.$$

3.3 Jensen 不等式

问题 43. 证明: 对于 $\int_a^b p(x) = 1$, 对于任意 $f(x) > 0 (x \in [a, b])$ 有

$$\exp \left(\int_a^b p(x) \ln f(x) dx \right) \leq \int_a^b p(x) f(x) dx \leq \ln \left(\int_a^b p(x) \exp(f(x)) dx \right).$$

问题 44. 证明: 对于下凸函数 $f(x)$, 有

$$f \left(\int_a^b p(x) dx \right) \leq \int_a^b f(p(x)) dx.$$

特别的, 取 $p(x) = x^n$, 得到什么结果?

3.4 中值定理与 Taylor 公式. *Darboux 公式

问题 45. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有 $n+1$ 阶导数, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{(k+1)!} (b-a)^{k+1} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+2)!} (b-a)^{n+2}.$$

问题 46. 设 f 在 $[a, b]$ 上二阶连续可导, 证明:

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi),$$

其中 $\xi \in (a, b)$.

问题 47. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有连续的 n 阶导数, 证明: Taylor 公式的积分余项形式为

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(b-t)^{n-1} dt.$$

问题 48 (*Darboux 公式). 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有 $n+1$ 阶导数, $\phi(t)$ 是 n 阶多项式. 证明:

$$\phi^{(n)}(0)(f(b)-f(a)) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (\phi^{(n-k)}(1)f^{(k)}(b) - \phi^{(n-k)}(0)f^{(k)}(a)) + (-1)^n \int_0^1 \phi(t)f^{(n+1)}(a+t(b-a))(b-a)^{n+1} dt.$$

3.5 * Taylor 展开与积分的估计

问题 49. 对于函数 $f(x) = e^{x^2} (\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt)$, 证明: 在 $x \rightarrow +\infty$ 时, 成立展开

$$f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^3} + \frac{3}{8x^5} - \cdots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}x^{2n+1}} + R_n(x),$$

其中余项 $R_n(x)$ 满足

$$|R_n(x)| \leq \frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}x^{2n+3}}.$$

4 常微分方程与一元微积分学在物理学中的应用

4.1 可分离变量的微分方程

这一部分是关于 $y' = f(y)g(x)$ 的微分方程.

问题 50. 求解下列微分方程:

$$y' = y^2 \sin x, \quad y' = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{\sqrt{x}}, \quad (x > 0).$$

4.2 一阶线性微分方程

问题 51. 求解下列微分方程:

$$y' + y \tan x = \sin x, \quad y' - \frac{2}{x}y = x^2, \quad (x \neq 0).$$

问题 52. 求解下列微分方程:

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x}, \quad y' + 2xy = xe^{-x^2}.$$

4.3 二阶线性微分方程. 常数变易法

问题 53. 求解下列微分方程:

$$y'' - y = e^x, \quad y'' + 4y = \sin 2x.$$

问题 54. 求解下列微分方程:

$$y'' + y' - 2y = e^{3x}, \quad y'' - 2y' + y = e^x.$$

4.4 可以降阶的微分方程

问题 55. 求解下列微分方程:

$$y'' = (y')^2, \quad y'' = y' \ln y'.$$

问题 56 (Euler 方程). 求解下列微分方程:

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2, \quad x^2y'' + xy' - y = \ln x.$$

问题 57 (Bernoulli 方程). 求解下列微分方程:

$$y'' + y = \sec^2 x \cdot y^2, \quad y'' - y = e^x y^3.$$

4.5 微分方程在物理学中的应用

问题 58. 设一质量为 m 的物体在重力作用下自由下落, 且受到与速度成正比的阻力. 试建立物体运动的微分方程, 并求解该微分方程, 给出物体的速度 v 随时间 t 的变化关系.

问题 59 (Tsiolkovsky 公式). 试推导火箭运动的 *Tsiolkovsky* 公式, 也就是:

$$v_f - v_i = v_e \ln \frac{m_i}{m_f},$$

其中 v_f 和 v_i 分别是火箭在燃料燃尽时和起飞时的速度, v_e 是燃料相对于火箭的排出速度, m_i 和 m_f 分别是火箭起飞时和燃料燃尽时的质量.

问题 60 (相对论性动力学). (1) 设一质量为 m_0 的粒子在受力 F 作用下运动, 其动量 p 与速度 v 的关系为 $p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, 其中 c 是光速. 试建立粒子运动的微分方程, 并求解该微分方程, 给出粒子的速度 v 随时间 t 的变化关系.

(2) 引入本征时间 τ , 使得 $d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. 试用本征时间重新推导粒子的运动方程, 并求解该方程, 给出粒子的速度 v 随本征时间 τ 的变化关系.

4.6 积分学在物理学中的应用

问题 61. 设一均匀细杆长为 L , 线密度为 λ , 求杆在距其一端 d 处的引力.

问题 62 (浮力). 将半径为 R 的球体完全浸入液体中, 求克服浮力做的功。

问题 63 (圆环近轴引力势能). 对于质量密度为 λ 的圆环, 半径为 R , 求其在轴线上距离圆环中心 d 处的引力势能。展开到 $O(d^2)$ 阶.