高等微积分期末辅导

梁莫言, 清华大学未央书院.

2025 年 1 月 5 日

目录

1 不定积分的计算

1.1 分部积分法

问题 1. 计算以下不定积分:

$$\int x^2 e^x\,dx,\quad \int \ln x\,dx,\quad \int e^x \sin x\,dx.$$

问题 2. 计算以下不定积分:

$$\int \cos^5 x\,dx,\quad \int \arcsin x\,dx,\quad \int \sec^3 x\,dx.$$

问题 3. 推到下列积分的递推公式:

$$I_n = \int \sin^n x\,dx,\quad J_n = \int x^n e^x\,dx,\quad K_n = \int \tan^n x\,dx.$$

1.2 换元法. 三角换元, 双曲三角换元

问题 4. 计算以下不定积分:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}},\quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}.$$

问题 5. 计算以下不定积分:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}},\quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}},\quad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}.$$

问题 6. 计算以下不定积分:

$$\int \sinh^3 x\,dx,\quad \int \frac{dx}{\cosh x},\quad \int \frac{dx}{\sinh x}.$$

问题 7. 计算以下不定积分:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}},\quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}},\quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1.3 有理分式的化简与原函数

问题 8. 计算以下不定积分:

$$\int \frac{2x^2+3x+1}{(x-1)(x^2+1)}\,dx,\quad \int \frac{x^3+1}{x^2-x}\,dx.$$

问题 9. 计算以下不定积分:

$$\int \frac{dx}{x^3-x^2},\quad \int \frac{dx}{x^4+4},\quad \int \frac{dx}{x^4+x^2+1}.$$

1.4 超越函数的原函数

1.5 * 配凑法

问题 10. 计算以下不定积分:

$$\int \frac{dx}{1+x^3},\quad \int \frac{dx}{1+x^4},\quad \int \frac{dx}{1+x^5}.$$

2 定积分的计算

2.1 定积分的定义与性质. Newton-Leibniz 公式

问题 11. 利用定积分定义计算:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2},\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}.$$

问题 12. 计算极限:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

2.2 换元法与分部积分法在定积分中的应用

问题 13. 计算 *Fejer* 积分:

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)}\,dx.$$

问题 14. 计算以下定积分:

$$\int_0^{\pi/2}x\sin x\,dx,\quad \int_0^1\ln(1+x^2)\,dx,\quad \int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\,dx.$$

问题 15. 计算以下定积分:

$$\int_0^1\frac{\arctan x}{x}\,dx,\quad \int_0^{\pi/2}\frac{x}{\sin x}\,dx,\quad \int_0^{\pi/2}\frac{x}{\tan x}\,dx.$$

问题 16. 计算以下定积分:

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx,\quad \int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx.$$

问题 17. 计算以下定积分:

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}(|\varepsilon|<1).$$

2.3 对称性与定积分的计算

问题 18. 计算以下定积分:

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx,\quad \int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{2+\cos x}\,dx, etc.$$

问题 19. 计算以下定积分:

$$\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\,dx,\quad \int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)\,dx,\quad \int_0^{\pi/2}\ln(\tan x)\,dx.$$

问题 20. 计算以下定积分:

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\tan^n x}.$$

问题 21. 设 $f\in C[0,a], a>0$. 若有 $f(x)f(a-x)\equiv 1$, 计算下列定积分:

$$\int_0^{a}\frac{dx}{f(x)+1}.$$

2.4 反常积分的判敛

问题 22. 判定下列反常积分的敛散性:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx, \quad \int_0^{\infty} x^p \ln x\,dx.$$

问题 23. 判定下列反常积分的敛散性:

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx, \quad \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p}\,dx.$$

问题 24. 判定下列反常积分的敛散性:

$$\int_0^{\infty} x^p \sin x^q\,dx.$$

问题 25. 判定下列反常积分的敛散性:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^p - \sin x}\,dx.$$

问题 26. 判定下列反常积分的敛散性:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x - x^p}, \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{\ln(x)^p}.$$

问题 27. 判定下列反常积分的敛散性:

$$\int_0^{\infty} \sin(x)\sin(x^2)\,dx.$$

2.5 反常积分的计算

问题 28. 计算以下反常积分:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\,dx, \quad \int_0^{\infty} x^n e^{-ax}\,dx, \quad (a > 0, n > -1)$$

问题 29. 利用 *Fejer* 积分, 计算 *Dirichlet* 积分:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

问题 30. 计算下列 *Gauss* 积分:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-x^2}\,dx.$$

问题 31. 计算以下反常积分:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+ax+b)^n}(4b > a^2).$$

问题 32. 计算下列 *Froullani* 积分:

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx,$$

其中 $a, b > 0$, 且 $f(+\infty)$ 存在.

2.6 * Mobius 变换与有理函数的积分: 倒代换与等域变换.

问题 33. 计算以下反常积分:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)(x^\alpha+1)}, \quad \int_0^\infty \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}\,dx.$$

3 积分不等式与积分中值定理

3.1 积分的估计

问题 34. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续可导.

(1) 证明:

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x)| \le |\bar{f}| + \int_a^b |f'(x)|\,dx$$

*(2)*证明:

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x)-\bar{f}| \le \frac{(b-a)}{2}\max_{x\in[a,b]}|f'(x)|,$$

其中 $\bar{f} = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

问题 35. 证明: 对于连续函数 $f(x)\in C[a,b]$ 与 $\xi\in(a,b)$, 有

$$\lim_{h\to 0^+}\int_a^b f(x)\frac{h}{(x-\xi)^2+h^2}\,dx = \pi f(\xi).$$

3.2 Cauchy 不等式. Young 不等式. Holder 不等式

问题 36 (Young 不等式)**.** 设 $f(x),g(x)\in C[a,b]$ 且均为非负函数, 证明: 对于 $p,q>1$ 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 有

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \le \left(\int_a^b f^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b g^q(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

问题 37 (Holder 不等式)**.** 设 $f(x),g(x)\in C[a,b]$ 且均为非负函数, 证明: 对于 $p,q>1$ 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 有

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \le \left(\int_a^b f^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b g^q(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

问题 38 (Cauchy 不等式)**.** 设 $f(x),g(x)\in C[a,b]$, 证明:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right).$$

问题 39. 对于满足 $f(0)=f(1)=0$ 的 $C^1[0,1]$ 函数 $f(x)$, 证明:

$$\left(\int_0^1 xf(x)\,dx\right)^2 \le \frac{1}{45}\int_0^1 (f'(x))^2\,dx.$$

3.3 Jensen 不等式

问题 40. 证明: 对于 $\int_a^b p(x)=1$, 对于任意 $f(x)>0(x\in[a,b])$ 有

$$\exp\left(\int_a^b p(x)\ln f(x)\,dx\right)\le\int_a^b p(x)f(x)\,dx\le\ln(\int_a^b p(x)\exp(f(x))\,dx).$$

问题 41. 证明: 对于下凸函数 $f(x)$, 有

$$f\left(\int_a^b p(x)\,dx\right)\le\int_a^b f(p(x))\,dx.$$

特别的, 取 $p(x)=x^n$, 得到什么结果?

3.4 中值定理与 Taylor 公式. *Darboux 公式

问题 42. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有 $n+1$ 阶导数, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{k=0}^n\frac{f^{(k)}(a)}{(k+1)!}(b-a)^{k+1}+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+2)!}(b-a)^{n+2}.$$

问题 43. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的 n 阶导数, 证明: *Taylor* 公式的积分余项形式为

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\int_a^b\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(b-t)^{n-1}\,dt.$$

问题 44 (*Darboux 公式)**.** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有 $n+1$ 阶导数, $\phi(t)$ 是 n 阶多项式. 证明:

$$\phi^{(n)}(0)(f(b)-f(a))=\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\left(\phi^{(n-k)}(1)f^{(k)}(b)-\phi^{(n-k)}(0)f^{(k)}(a)\right)+(-1)^n\int_0^1\phi(t)f^{(n+1)}(a+t(b-a))(b-a)^{n+1}\,dt.$$

4 常微分方程与一元微积分学在物理学中的应用

4.1 可分离变量的微分方程

这一部分是关于 $y'=f(y)$ 的微分方程.

4.2 一阶线性微分方程

问题 45. 求解下列微分方程:

$$y'+y\tan x=\sin x,\quad y'-\frac{2}{x}y=x^2,\quad (x\ne 0).$$

问题 46. 求解下列微分方程:

$$y'+\frac{1}{x}y=\frac{\ln x}{x},\quad y'+2xy=xe^{-x^2}.$$

4.3 二阶线性微分方程. 常数变易法

4.4 可以降阶的微分方程

4.5 微分方程在物理学中的应用

4.6 积分学在物理学中的应用