

高等微积分期末辅导

梁莫言, 清华大学未央书院.

2025 年 1 月 5 日

目录

1	不定积分的计算	2
1.1	分部积分法	2
1.2	换元法. 三角换元, 双曲三角换元	2
1.3	有理分式的化简与原函数	2
1.4	超越函数的原函数	2
1.5	* 配凑法	2
2	定积分的计算	3
2.1	定积分的定义与性质. Newton-Leibniz 公式	3
2.2	换元法与分部积分法在定积分中的应用	3
2.3	对称性与定积分的计算	3
2.4	反常积分的判敛	4
2.5	反常积分的计算	4
2.6	* Mobius 变换与有理函数的积分: 倒代换与等域变换.	5
3	积分不等式与积分中值定理	5
3.1	积分的估计	5
3.2	中值定理与积分不等式	5
3.3	Cauchy 不等式. Young 不等式. Holder 不等式	5
3.4	Jensen 不等式	5
3.5	中值定理与 Taylor 公式. *Darboux 公式	6
4	常微分方程与一元微积分学在物理学中的应用	6
4.1	可分离变量的微分方程	6
4.2	一阶线性微分方程	6
4.3	二阶线性微分方程. 常数变易法	6
4.4	可以降阶的微分方程	6
4.5	微分方程在物理学中的应用	6
4.6	积分学在物理学中的应用	6

1 不定积分的计算

1.1 分部积分法

问题 1. 计算以下不定积分:

$$\int x^2 e^x dx, \quad \int \ln x dx, \quad \int e^x \sin x dx.$$

问题 2. 计算以下不定积分:

$$\int \cos^5 x dx, \quad \int \arcsin x dx, \quad \int \sec^3 x dx.$$

问题 3. 推到下列积分的递推公式:

$$I_n = \int \sin^n x dx, \quad J_n = \int x^n e^x dx, \quad K_n = \int \tan^n x dx.$$

1.2 换元法. 三角换元, 双曲三角换元

问题 4. 计算以下不定积分:

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}.$$

问题 5. 计算以下不定积分:

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - x + 1}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}, \quad \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}}.$$

问题 6. 计算以下不定积分:

$$\int \sinh^3 x dx, \quad \int \frac{dx}{\cosh x}, \quad \int \frac{dx}{\sinh x}.$$

问题 7. 计算以下不定积分:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

1.3 有理分式的化简与原函数

问题 8. 计算以下不定积分:

$$\int \frac{2x^2 + 3x + 1}{(x - 1)(x^2 + 1)} dx, \quad \int \frac{x^3 + 1}{x^2 - x} dx.$$

问题 9. 计算以下不定积分:

$$\int \frac{dx}{x^3 - x^2}, \quad \int \frac{dx}{x^4 + 4}, \quad \int \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1}.$$

1.4 超越函数的原函数

1.5 * 配凑法

问题 10. 计算以下不定积分:

$$\int \frac{dx}{1 + x^3}, \quad \int \frac{dx}{1 + x^4}, \quad \int \frac{dx}{1 + x^5}.$$

2 定积分的计算

2.1 定积分的定义与性质. Newton-Leibniz 公式

问题 11. 利用定积分定义计算:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}.$$

问题 12. 计算极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n} \right) \right)^{\frac{1}{n}}.$$

2.2 换元法与分部积分法在定积分中的应用

问题 13. 计算 Fejer 积分:

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)} dx.$$

问题 14. 计算以下定积分:

$$\int_0^{\pi/2} x \sin x dx, \quad \int_0^1 \ln(1+x^2) dx, \quad \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx.$$

问题 15. 计算以下定积分:

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x} dx, \quad \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin x} dx, \quad \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan x} dx.$$

问题 16. 计算以下定积分:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx, \quad \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx.$$

问题 17. 计算以下定积分:

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1 + \varepsilon \cos x} (|\varepsilon| < 1).$$

2.3 对称性与定积分的计算

问题 18. 计算以下定积分:

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx, \quad \int_0^\pi \frac{x \sin x}{2 + \cos x} dx, \text{ etc.}$$

问题 19. 计算以下定积分:

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx, \quad \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx, \quad \int_0^{\pi/2} \ln(\tan x) dx.$$

问题 20. 计算以下定积分:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \tan^n x}.$$

问题 21. 设 $f \in C[0, a], a > 0$. 若有 $f(x)f(a-x) \equiv 1$, 计算下列定积分:

$$\int_0^a \frac{dx}{f(x) + 1}.$$

2.4 反常积分的判敛

问题 22. 判定下列反常积分的敛散性:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx, \quad \int_0^{\infty} x^p \ln x dx.$$

问题 23. 判定下列反常积分的敛散性:

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx, \quad \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx.$$

问题 24. 判定下列反常积分的敛散性:

$$\int_0^{\infty} x^p \sin x^q dx.$$

问题 25. 判定下列反常积分的敛散性:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^p - \sin x} dx.$$

问题 26. 判定下列反常积分的敛散性:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x - x^p}, \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{\ln(x)^p}.$$

问题 27. 判定下列反常积分的敛散性:

$$\int_0^{\infty} \sin(x) \sin(x^2) dx.$$

2.5 反常积分的计算

问题 28. 计算以下反常积分:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} dx, \quad \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx, \quad (a > 0, n > -1)$$

问题 29. 利用 Fejer 积分, 计算 Dirichlet 积分:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

问题 30. 计算下列 Gauss 积分:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx.$$

问题 31. 计算以下反常积分:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+ax+b)^n} (4b > a^2).$$

问题 32. 计算下列 Froullani 积分:

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx,$$

其中 $a, b > 0$, 且 $f(+\infty)$ 存在.

2.6 * Mobius 变换与有理函数的积分: 倒代换与等域变换.

问题 33. 计算以下反常积分:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)(x^\alpha+1)}, \quad \int_0^\infty \frac{\ln(x+1)}{x^2+1} dx.$$

3 积分不等式与积分中值定理

3.1 积分的估计

问题 34. 设 f 在 $[a, b]$ 上连续可导.

(1) 证明:

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x)| \leq |\bar{f}| + \int_a^b |f'(x)| dx$$

(2) 证明:

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - \bar{f}| \leq \frac{(b-a)}{2} \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|,$$

其中 $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

问题 35. 证明: 对于连续函数 $f(x) \in C[a, b]$ 与 $\xi \in (a, b)$, 有

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_a^b f(x) \frac{h}{(x-\xi)^2 + h^2} dx = \pi f(\xi).$$

3.2 中值定理与积分不等式

3.3 Cauchy 不等式. Young 不等式. Holder 不等式

问题 36. 对于满足 $f(0) = f(1) = 0$ 的 $C^1[0, 1]$ 函数 $f(x)$, 证明:

$$\left(\int_0^1 x f(x) dx \right)^2 \leq \frac{1}{45} \int_0^1 (f'(x))^2 dx.$$

3.4 Jensen 不等式

问题 37. 证明: 对于 $\int_a^b p(x) dx = 1$, 对于任意 $f(x) > 0 (x \in [a, b])$ 有

$$\exp \left(\int_a^b p(x) \ln f(x) dx \right) \leq \int_a^b p(x) f(x) dx \leq \ln \left(\int_a^b p(x) \exp(f(x)) dx \right).$$

问题 38. 证明: 对于下凸函数 $f(x)$, 有

$$f \left(\int_a^b p(x) dx \right) \leq \int_a^b f(p(x)) dx.$$

特别的, 取 $p(x) = x^n$, 得到什么结果?

3.5 中值定理与 Taylor 公式. *Darboux 公式

问题 39. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有 $n+1$ 阶导数, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{(k+1)!} (b-a)^{k+1} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+2)!} (b-a)^{n+2}.$$

问题 40. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有连续的 n 阶导数, 证明: Taylor 公式的积分余项形式为

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} (b-t)^{n-1} dt.$$

问题 41 (*Darboux 公式). 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有 $n+1$ 阶导数, $\phi(t)$ 是 n 阶多项式. 证明:

$$\phi^{(n)}(0)(f(b)-f(a)) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (\phi^{(n-k)}(1)f^{(k)}(b) - \phi^{(n-k)}(0)f^{(k)}(a)) + (-1)^n \int_0^1 \phi(t)f^{(n+1)}(a+t(b-a))(b-a)^{n+1} dt.$$

4 常微分方程与一元微积分学在物理学中的应用

4.1 可分离变量的微分方程

4.2 一阶线性微分方程

4.3 二阶线性微分方程. 常数变易法

4.4 可以降阶的微分方程

4.5 微分方程在物理学中的应用

4.6 积分学在物理学中的应用