



ENSTA
BRETAGNE



Navigation sous-marine

Partie I : Introduction et éléments mathématiques

FISE Semestre 5 HYO / UE 5.1

Author : Michel Legris

Mail : michel.legris@ensta-bretagne.fr

Date : Septembre 2020 v0.1.2

Table des matières

1. Préambule	7
1.1. Organisation du polycopié	7
1.2. Notations	8
1.2.1. Scalaires, vecteurs, matrices, tenseurs	8
1.2.2. Référentiels	8
1.2.3. Dérivées temporelles	9
2. Généralités	11
2.1. Quelques précisions de vocabulaire	11
2.2. Capteurs proprioceptifs et extéroceptifs	11
2.2.1. Capteurs proprioceptifs	11
2.2.2. Capteurs exteroceptifs	12
2.2.3. Ambiguïté entre les notions de capteurs extéroceptifs et proprioceptifs	13
2.2.4. Navigation à l'estime	14
2.3. Positionnement en temps réel et positionnement en temps différé	14
2.3.1. Précision pendant le levé	14
2.3.2. Précision après le levé	15
2.4. Auto-positionnement et positionnement d'autrui	16
2.5. Approche générale d'un système de navigation sous-marine	17
2.5.1. Localisation horizontale par amers d'opportunité	17
2.5.2. Localisation horizontale par systèmes de positionnement dédiés	19
2.5.3. Localisation verticale	22
2.5.4. Mesure des vitesses	23
2.5.5. Attitude	23
2.5.6. Temps	29
2.6. Centrales inertielles	29
2.6.1. Principe général	29
2.6.2. Terminologie	30
2.7. Conclusions	30
2.7.1. Stratégie capteurs	31
2.7.2. Métrologie et fusion capteurs	31
3. Référentiels	37
3.1. Contexte	37
3.2. Définition et propriétés des référentiels	38
3.2.1. Définition	38
3.2.2. Coordonnées curvilignes	39
3.2.3. Changement de référentiels	39
3.3. Les référentiels rencontrés	41
3.3.1. Référentiel capteur : “sensor frame”	41
3.3.2. Référentiel véhicules : “body frame”	43
3.3.3. Référentiel navigation : “navigation frame”	45
3.3.4. Référentiel dérivant : “wander frame”	47
3.3.5. Référentiel terrestre : “earth frame”	47

Table des matières

3.3.6. Référentiel inertiel : “inertial frame”	48
3.3.7. Autres référentiels	49
3.4. Retour sur le “mobile mapping equation”	49
3.4.1. Chaîne de mesure simplifiée	50
3.4.2. Chaîne de mesure détaillée	50
3.4.3. Chaîne de calcul	52
3.4.4. Fusion des informations de position et d’attitude	53
3.5. Description géodésique et géophysique de la terre	54
3.5.1. Ellipsoïde terrestre	54
3.5.2. Rotation terrestre	56
3.5.3. Champ de pesanteur	59
4. Rotations dans l'espace 3D	63
4.1. Introduction	63
4.1.1. Rappel succinct de la définition et des propriétés	63
4.1.2. Propriété de groupe non commutatif	64
4.1.3. Rotation dans l'espace 2D	65
4.2. Représentation par les angles d'Euler	65
4.2.1. Angles d'Euler propres	66
4.2.2. Angles de Tait Bryan ou de Cardan	67
4.2.3. Opérations à partir des angles de Tait Bryan	68
4.2.4. Avantages de la représentation par les angles d'Euler	68
4.2.5. Inconvénients de la représentation par les angles d'Euler	68
4.3. Représentation par la matrice des cosinus directeurs	69
4.3.1. Opérations à partir des matrices des cosinus directeurs	70
4.3.2. Avantages de la représentation par la matrice des cosinus directeurs	70
4.3.3. Inconvénients de la représentation par la matrice des cosinus directeurs	71
4.3.4. Conversion entre angles de Tait Bryan et la matrice de cosinus directeur	71
4.4. Vecteur de rotation	71
4.4.1. Rotation d'un vecteur	72
4.4.2. Représentation matricielle de la formule de Rodrigues	73
4.4.3. Représentation en exponentielle de matrice de la formule de Rodrigues	74
4.4.4. Opérations à partir des matrices des cosinus directeurs	76
4.4.5. Avantages de la représentation	76
4.4.6. Inconvénients de la représentation	76
4.4.7. Transformations vers d'autres représentations	76
4.5. Quaternions	77
4.5.1. Définition des quaternions	77
4.5.2. Propriétés des quaternions	78
4.5.3. Relation des quaternions avec les rotations	79
4.5.4. Composition de deux rotations	79
4.5.5. Rotation inverse	80
4.5.6. Rotation d'un vecteur	80
4.5.7. Avantages des quaternions	80
4.5.8. Inconvénients des quaternions	80
5. Eléments de cinématique	83
5.1. Introduction	83
5.2. Dérivée temporelle d'un changement de repère	83
5.2.1. Représentation des dérivées vectorielles	84
5.2.2. Dérivée des rotations	84
5.2.3. Propriétés de la matrice de vitesse de rotation	85
5.2.4. Dérivation des rotations selon les différentes représentations	86

5.3. Dérivation du changement de référentiel	87
5.3.1. Remarque sur la dérivée du vecteur taux de rotation	87
5.4. Dérivée seconde d'un changement de repère	88
5.5. Conséquences sur l'équation de la dynamique	88
5.5.1. Remarque importante sur les notations	89
5.5.2. Equation de la dynamique dans un référentiel non inertiel	89
A. Formulaire sur les éléments de géodésie	91
A.1. Coordonnées sphériques et cylindriques	91
A.1.1. Relations entre le repère sphérique et le repère cartésien	91
A.1.2. Relations entre le repère cylindrique et le repère cartésien	92
A.2. Transformation des coordonnées géographiques de la terre	92
A.2.1. Caractéristique de l'ellipsoïde de référence du système géodésique WGS84	92
A.2.2. Conversion des coordonnées géodésique vers ECEF	93
A.2.3. Conversion des coordonnées ECEF vers géodésique	93
A.2.4. Matrice de rotation entre les coordonnées ECEF et NED	95
A.2.5. Rayon de courbure locaux	95
A.2.6. Relation entre la vitesse dans le repère de navigation et les coordonnées géodésiques	96
A.2.7. Vitesse de rotation du repère NED en fonction de la vitesse du mobile	97
A.3. Rotation terrestre	97
A.3.1. Vitesse angulaire de rotation de la terre	97
A.3.2. Vecteur de rotation dans le repère ECEF	97
A.3.3. Vecteur de rotation dans le repère NED	97
A.4. Champ de pesanteur	98
A.4.1. Constante universelle de gravitation	98
A.4.2. Modèle de Somigliana	98
A.4.3. Correction de l'altitude à l'air libre	98
B. Formulaire sur les rotations	99
B.1. Angles de Tait-Bryan vers les matrices de cosinus directeur	99
B.2. Matrice des cosinus directeurs vers les angles de Tait-Bryan	99
B.2.1. Passage du vecteur rotation vers la matrice des cosinus directeurs	100
B.2.2. Passage de la matrice des cosinus directeurs vers les vecteurs de rotations	100
B.2.3. Conversion du vecteur de rotation vers le quaternion associé	100
B.2.4. Conversion du quaternion vers le vecteur rotation	100
B.2.5. Conversion du quaternion vers la matrice de rotation	100
B.2.6. Conversion de la matrice de rotation vers le quaternion	101
B.2.7. Conversion des quaternions vers les angles de Tait Bryan	101
B.2.8. Conversion des angles de Tait Bryan vers les quaternions	102
C. Déivation des représentations de rotation	103
C.1. Relation entre taux de rotation et angles de Tait Bryan	103
C.2. Relation entre taux de rotation et matrice des cosinus directeurs	104
C.3. Relation entre taux de rotation et quaternions	104
Bibliographie	107

1. Préambule

1.1. Organisation du polycopié

Ce polycopié , qui comprend 2 tomes, intègre un certain nombre de connaissances nécessaires à la formation des élèves hydrographes de l'ENSTA Bretagne et définis par l'OHI dans le cadre des compétences requises pour les hydrographes de catégorie A et décrites dans le document S-5A [S5A].

Plusieurs notions abordées liées au positionnement (tels que la géodésie, la gravimétrie, le magnétisme, le positionnement par systèmes satellitaires, l'acoustique sous-marine, ...) sont détaillées dans d'autres cours et sont donc, soit supposés connues, soit rapidement rappelées.

Pour permettre néanmoins une cohérence générale, un fil rouge a été suivi qui correspond au thème "Navigation et Positionnement Sous-Marins".

L'objectif officiel du polycopié est donc de comprendre comment un véhicule sous-marin, au sens large, c'est à dire un sous-marin habité, un robot autonome (appelé AUV pour Autonomous Underwater Vehicle) ou téléguidé (appelé ROV pour Remote Operated Vehicle) peut se localiser et naviguer.

Cependant, les éléments abordés ont une portée beaucoup plus large que le strict positionnement et permettent de traiter d'autres points importants demandés par l'OHI tels que :

- la modélisation des erreurs capteurs,
- l'ajustement des capteurs (calibrage et étalonnage),
- le positionnement sous-marin,
- la famille des capteurs acoustiques utilisant l'effet Doppler,
- les capteurs inertIELS,
- le filtrage de Kalman,
- ...

et donc, même si le thème principal est la navigation sous-marine, les méthodes et outils décrits peuvent aussi être utilisés dans :

- la conception, l'analyse et l'interprétation des systèmes de navigation de navires, aéronefs et véhicules terrestres,
- la modélisation des imperfections capteurs pour permettre d'augmenter leur performance,
- l'utilisation des filtres de Kalman à toutes fins nécessitant l'estimation de paramètres.

1. Préambule

Le document est divisé en quatre parties principales :

- des rappels sur la géodésie et la cinématique,
- les capteurs inertIELS et les systèmes de positionnement et de mesure de vitesses sous-marins,
- une introduction au filtrage de Kalman pour fusionner de manière optimale¹ les informations en vue de l'estimation de position,
- les algorithmes des systèmes de navigation.

1.2. Notations

1.2.1. Scalaires, vecteurs, matrices, tenseurs

Dans les différents chapitres, des notions de scalaires, vecteurs, matrices et tenseurs sont manipulés. Pour garder une cohérence tout au long du document, sauf cas particuliers, seront notés :

- les valeurs scalaires via un caractère latin ou grec en minuscule, par exemple x ,
- les points (positions dans un espace affine) en caractère majuscule, par exemple X ,
- les vecteurs en minuscule et caractères gras, par exemple \mathbf{x} .

Malgré tout, dans certains cas, les vecteurs pourront être exprimés en majuscules, si il n'y a pas d'ambiguité avec un point ou une matrice. Ce sera par exemple le cas du champ de gravitation, $\mathbf{\Gamma}$, pour le différencier de l'accélération $\boldsymbol{\gamma}$ et du champ de gravité \mathbf{g} .

- les matrices et tenseurs sont en majuscule et en gras, par exemple \mathbf{A} ,

1.2.2. Référentiels

En navigation, on manipule plusieurs systèmes de référence en parallèle (local, terrestre, inertiel,...).

Un système de référence \mathcal{F}_b (\mathcal{F} pour frame, ici le référentiel “body”) possède un point origine \mathbf{O}_b et une base de trois vecteurs (dans l'espace 3D), généralement orthonormée et définie dans le sens direct, nommés \mathbf{x}_b , \mathbf{y}_b et \mathbf{z}_b .

Les différents points et vecteurs sont souvent exprimés dans un système de coordonnées associé éventuellement à un autre système de référence (par exemple \mathcal{F}_e pour le référentiel terrestre).

Dans ce cas, pour indiquer qu'ils sont exprimés dans un système de coordonnées donné, cette indication est mise en exposant.

Par exemple, O_b^e , \mathbf{x}_b^e , \mathbf{y}_b^e et \mathbf{z}_b^e représentent les coordonnées de l'origine et des vecteurs canoniques de la référence “body” exprimées dans le référentiel “earth”, \mathcal{F}_e .

Parfois un vecteur peut représenter une grandeur définie à travers deux référentiels.

¹en tout cas tant que l'on reste dans le domaine linéaire et gaussien.

Par exemple, la vitesse de l'origine du repère “body” (\mathcal{F}_b) par rapport au repère “earth” (\mathcal{F}_e) est représentée par le double indice eb : \mathbf{v}_{eb} . Ce vecteur peut avoir ses coordonnées exprimées dans un troisième repère, par exemple dans le repère inertiel (\mathcal{F}_i), dans ce cas, on note \mathbf{v}_{eb}^i .

1.2.3. Dérivées temporelles

Les dérivées totales par rapport au temps sont écrites avec la notation pointée. Ainsi pour une position X_b , on note la vitesse $\frac{d\mathbf{x}_b}{dt} = \dot{\mathbf{x}}_b = \mathbf{v}_b$ et l'accélération $\frac{d^2\mathbf{x}_b}{dt^2} = \ddot{\mathbf{x}}_b = \dot{\mathbf{v}}_b$.

En revanche, nous verrons que quand les référentiels sont mobiles, les vecteurs vitesse et accélération doivent être définis par rapport à un référentiel qui doit donc être précisé. Pour éviter, les ambiguïtés, la notation pointée n'est utilisée que quand le repère de référence est aussi celui dans lequel le vecteur est exprimé.

Par exemple, dans l'exemple précédent, $\dot{\mathbf{x}}_b^e$ correspond au vecteur \mathbf{v}_{eb}^e . Par contre, on ne notera pas \mathbf{v}_{eb}^i par $\dot{\mathbf{x}}_b^i$, car il y a ambiguïté (on verra que $\mathbf{v}_{eb}^i \neq \mathbf{v}_{ib}^i$).

2. Généralités

2.1. Quelques précisions de vocabulaire

Dans ce document, on parle de **navigation**, **positionnement**, **localisation** et éventuellement de **guidage**.

Ces expressions ne sont pas tout à fait équivalentes mais malheureusement leurs significations varient parfois selon les auteurs.

Dans ce document, nous parlerons essentiellement de **positionnement**.

Positionner est l'action de déterminer la position d'un mobile.

Souvent la position correspond aux coordonnées géographiques du véhicule, mais on peut parfois se contenter de ses coordonnées dans un système de référence plus local, par exemple la position d'un meuble à l'intérieur d'une pièce.

Proche du positionnement, mais pas tout à fait identique, la **localisation** est la capacité de situer le véhicule par rapport à d'autres objets (l'environnement), mais pas forcément avec des coordonnées quantitatives.

Généralement la position correspond uniquement à la détermination des coordonnées d'un point particulier du mobile (par exemple, l'origine de son référentiel propre), mais dans notre cas, nous associerons aussi la détermination de son **orientation** ou **attitude** par rapport à un repère de référence.

Le **guidage** est l'action de trouver la direction (ou les différentes directions) à appliquer à un véhicule pour atteindre une position donnée.

Le positionnement et le guidage, ensemble, forment le sujet plus général de la **navigation**.

2.2. Capteurs proprioceptifs et extéroceptifs

Un autre concept important, issu de la robotique mobile, est la différence entre les capteurs proprioceptifs et extéroceptifs.

Ces termes sont copiés des idées similaires utilisées en médecine.

2.2.1. Capteurs proprioceptifs

Un sens proprioceptif est un sens humain qui correspond à une perception interne de la position et du déplacement des parties du corps humain (c'est à dire sans aide des sens "externes" tels que la vue, l'audition, le toucher, etc...).

2. Généralités

Par extension, en positionnement, les capteurs proprioceptifs sont ceux capables de percevoir un mouvement sans l'aide de mesures de grandeurs physiques externes.

Seuls deux capteurs “proprioceptifs” sont capable de donner des indications de position et d'attitude :

- les **accéléromètres** qui mesurent l'accélération du mobile. Plus précisément ils mesurent les forces spécifiques appliquées sur le corps (cela sera détaillé dans un chapitre ultérieur).
- les **gyromètres** qui mesurent la vitesse de rotation de l'objet.

Ces deux types de capteurs sont la base de tous les systèmes de mesure inertIELS. Ils sont généralement rassemblés dans un boitier appelé **IMU (Inertial Measurement Unit)**.

Un troisième phénomène clairement proprioceptif, et dont l'importance est souvent négligée est le **temps**. La navigation nécessite généralement des horloges de bonne qualité.

2.2.2. Capteurs extéroceptifs

Tous les autres capteurs sont au contraire extéroceptifs. Ce sont des capteurs qui mesurent des informations externes comme un champ magnétique ou electro-magnétique, un champ acoustique, etc....

Nous verrons qu'avec seulement des capteurs proprioceptifs, il n'est pas possible de mesurer précisément une position pendant un temps long. Très rapidement, les estimations deviendront grossières et le système va diverger¹.

La divergence peut malgré tout être contenue grâce à l'apport de capteurs extéroceptifs qui apportent des informations additionnelles.

Suivant l'application, les capteurs suivants peuvent être utilisés :

- pour la navigation spatiale :
 - des viseurs d'étoiles qui mesurent la direction des différentes étoiles et planètes dans le repère du satellite.
- pour la navigation aérienne :
 - des systèmes de radionavigation : VOR (VHF Omnidirectional Range), DME (Distance Measuring Equipment, ILS (Instrument Landing System) ... ,
 - des systèmes de navigation par satellite (GNSS : Global Navigation Satellite Systems),
 - un baromètre ou capteur de pression qui permet de déduire l'altitude (altimètre),
 - des capteurs de vitesses (par tube de Pitot généralement),
 - éventuellement, un radar d'altitude.
- pour la navigation terrestre :

¹Le taux de divergence dépend essentiellement de la précision des capteurs proprioceptifs, de la qualité des algorithmes, de la précision des modèles physiques et donc in fine du prix du système. Mais dans tous les cas, cela finit par diverger.

2.2. Capteurs proprioceptifs et extéroceptifs

- des systèmes de navigation par satellite,
 - un compas magnétique pour avoir la direction du Nord magnétique,
 - un baromètre (altimètre),
 - un odomètre (qui mesure la distance parcourue ou la vitesse à partir du nombre de tours d'une roue et de la circonférence de cette dernière).
- pour la navigation maritime en surface :
 - des systèmes de navigation par satellite pour la position, le cap et optionnellement la route (c'est à dire la direction de la trajectoire),
 - des systèmes de radio-navigation (même si, aujourd'hui, ces derniers sont beaucoup moins utilisés pendant le XX^{ème} siècle),
 - un compas magnétique (qui donne la direction du Nord magnétique) ou un gyroscope “chercheur de Nord”,
 - un loch (électromagnétique ou acoustique Doppler), c'est à dire un capteur qui mesure la vitesse du mobile soit par rapport à l'eau, soit par rapport au fond de la mer.
 - pour la navigation sous-marine, ce qui correspond plus à l'objectif de ce document :
 - des balises acoustiques (**Long Baseline** ou **Ultra Short Baseline Localisation systems**), qui permettent de positionner le mobile,
 - un capteur de pression (pour la profondeur),
 - un loch acoustique Doppler (pour mesurer la vitesse).

En plus des systèmes inertIELS proprioceptifs, nous étudierons essentiellement les systèmes extéroceptifs utilisés en navigation sous-marine.

2.2.3. Ambiguïté entre les notions de capteurs extéroceptifs et proprioceptifs

La classification dans la famille proprioceptive et extéroceptive doit être relativisée, car, comme pour les termes de positionnement et localisation, les auteurs ne sont pas tous d'accord sur les définitions.

Les roboticiens tendent par exemple à considérer les odomètres comme des capteurs proprioceptifs car faisant une mesure interne, la rotation d'une roue².

Grewal [GAB13] définit un capteur proprioceptif comme un capteur capable de mesurer sa grandeur à l'intérieur d'une boîte noire.

Dans notre cas, et cela suffit largement au propos, les seuls capteurs proprioceptifs considérés sont :

- les horloges qui mesurent le temps,
- les accéléromètres qui mesurent les forces spécifiques,
- les gyromètres qui mesurent les vitesses de rotation.

²ce qui sous-tend un non-glissement entre la roue et l'environnement externe.

2. Généralités

2.2.4. Navigation à l'estime

De façon simplifiée, quand seuls les capteurs proprioceptifs sont utilisés pour naviguer (incluant malgré tout la mesure de vitesse), le terme utilisé est **navigation à l'estime** (en anglais : **dead reckoning navigation**).

De manière plus exacte, la navigation à l'estime correspond à la détermination de la position au cours du temps à partir uniquement de la position initiale, des caps et vitesses successives, du temps et éventuellement de mesures et modélisations des biais causés par l'environnement (comme les courants marins par exemple).

Une telle détermination (vitesse, cap, temps) peut se faire à partir de capteurs proprioceptifs (capteurs inertIELS), mais aussi par des capteurs extéroceptifs (magnétomètre, loch Doppler, etc...).

En fait, ce qui caractérise réellement la navigation à l'estime est l'absence de mesure directe de positions (relative ou absolue) après le début de la navigation. En conséquence, ce type de navigation est toujours sujet à dérive.

2.3. Positionnement en temps réel et positionnement en temps différé

Un second point important dans le positionnement correspond aux besoins et aux moyens nécessaires au **positionnement temps réel** et au **positionnement en temps différé**.

Pour comprendre ces deux notions, imaginons le cas de la mesure de la bathymétrie d'une région océanique à partir d'un sondeur multifaisceau monté sur un AUV (Autonomous Underwater Vehicle), c'est à dire un robot sous-marin.

Dans un premier temps, l'objectif est d'avoir une couverture complète, c'est à dire que toute la surface de la zone doit être cartographiée sans laisser de "trous", c'est à dire de portions de surfaces non mesurées.

Dans un second temps, les données acquises doivent être reportées le plus précisément possible sur une carte marine.

2.3.1. Précision pendant le levé

Initialement, le véhicule sous-marin fait un point GNSS avant sa plongée pour connaître sa position géographique, puis plonge.

Pendant sa mission, il ne peut s'appuyer que sur ses capteurs proprioceptifs soumis à des dérives intrinsèques, et à des capteurs de vitesse et de profondeur dont la précision dépend de l'environnement océanique (principalement vitesse du son et densité de l'eau). En absence d'autres aides externes, la position horizontale est soumise à des dérives. De même, dans une moindre mesure, la position verticale peut devenir plus imprécise compte tenu de l'évolution de la mesure de pression qui est tributaire des variations de pression atmosphérique et de hauteur d'eau (dues à la marée par exemple).

Ces dérives peuvent être importantes vis à vis des normes de précision requises sur les cartes marines (par exemple, la norme OHI S44 [S44]), mais dans ce premier temps, ce n'est pas forcément

2.3. Positionnement en temps réel et positionnement en temps différé

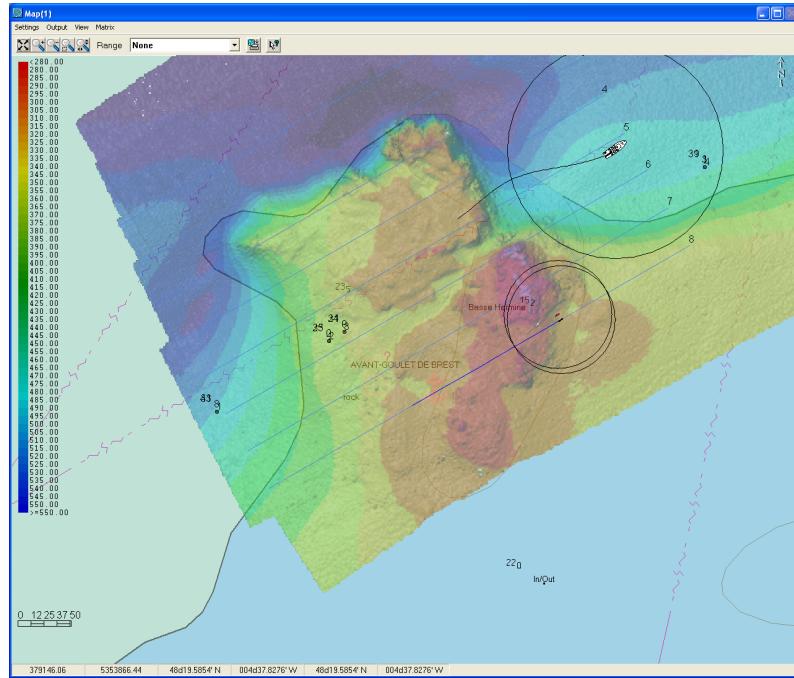


FIG. 2.1. : Exemple de levé à partir d'un AUV. (capture d'écran DGA/TN Brest)

rédhbitoire.

En effet, pendant la navigation, la précision de position du véhicule est nécessaire seulement pour deux raisons :

- garantir qu'il n'y a pas de trous de couverture, c'est à dire que la dérive possible de position ne doit pas entraîner une discontinuité entre les rails parallèles les plus proches³,
- naviguer en sécurité et rester dans des zones où, compte tenu de son réglage d'immersion, le véhicule ne peut pas entrer en collision avec le fond marin.

La précision nécessaire dépend de beaucoup de paramètres dont la fauchée insonifiée pendant un rail (qui dépend des performances du sondeur et de l'altitude) ainsi que de la proximité des zones dangereuses.

2.3.2. Précision après le levé

Une fois la mission finie, il est nécessaire de traiter les données pour faire le modèle numérique du terrain (MNT), produit intermédiaire avant la réalisation d'une carte marine.

Dans cette étape, chaque mesure de fond (les points de sonde) doit être clairement positionnée dans une référence géographique définie sur la carte. Suivant l'application, cette précision doit répondre à des normes associées par exemple à la sécurité de navigation ou à la capacité à retrouver dans une plongée un objet observé pendant le levé (par exemple en guerre des mines).

³Un trou de couverture nécessite de refaire une mission pour "combler le trou", donc du temps et de l'argent perdus

2. Généralités

Cette précision, particulièrement en hydrographie, peut être très stricte. En revanche, après la mission, des moyens supplémentaires pour améliorer la précision sont disponibles.

On peut citer :

- les mesures de l'altitude de la surface maritime et de la pression atmosphérique qui ont pu être enregistrées en parallèle à la mission par un marégraphe et un baromètre ou récupérés depuis une base de données,
- les profils de bathycélérité ont pu être faits régulièrement pendant la mission par un navire suiveur pour tenir compte de l'évolution de la célérité sonore,
- les mesures GNSS de fin de mission qui sont aussi très précieuses : elles peuvent fournir la dérive finale du mobile et à partir de là, identifier certains biais capteurs.

Ces derniers, une fois estimés, sont introduits dans le traitement pour refaire un calcul corrigé.

- enfin, de façon plus originale, l'ensemble des données peut être analysé pour extraire des informations indirectes sur la position telle que le fait que le véhicule est passé plusieurs fois au même endroit.

Plus généralement, en temps réel, on ne peut tenir compte que des mesures passées pour estimer sa position actuelle. En temps différé, on peut intégrer pour la position de chaque instant, l'ensemble des mesures (antérieures et postérieures) ce qui amène beaucoup de possibilités de raffinement de l'estimation.

2.4. Auto-positionnement et positionnement d'autrui

Une dernière notion est la différence entre la nécessité de connaître sa propre position et celle d'estimer la position d'un véhicule que l'on surveille.

En reprenant l'exemple de la figure 2.1, il y a deux acteurs : l'AUV qui exécute sa mission et le navire de surface qui suit le véhicule à distance pour surveiller le bon déroulé.

L'AUV doit avoir des moyens autonomes de localisation, à minima, pour effectuer sa navigation selon les critères de qualité demandés et en toute sécurité. Généralement, ces moyens sont son système inertiel, des capteurs de vitesse et de profondeur, éventuellement d'altitude ou de mesure de distance à des balises pré-disposées sur la zone.

Les opérateurs qui surveillent le véhicule n'ont pas accès aux informations internes du véhicule (ou alors de façon très parcellaire), mais peuvent le suivre via un ensemble de capteurs dont le plus utilisé est un système de positionnement acoustique qui donne la position relative entre le véhicule et le navire de surface nommé **USBL (Ultra Short Baseline Localisation)**. Ce dernier peut être complété par le système GNSS du navire pour obtenir une position absolue.

Bien évidemment, on pourrait imaginer que le navire de surface communique ses propres mesures à l'AUV, mais cela ajoute non seulement une complexité dans le système, mais aussi une fragilité car les communications d'informations sous-marines restent difficiles et très sujettes aux conditions environnementales.

2.5. Approche générale d'un système de navigation sous-marine



FIG. 2.2. : Exemple d'AUV : le prototype Daurade du SHOM opéré par DGA TN Brest.

2.5. Approche générale d'un système de navigation sous-marine

Soit un véhicule sous-marin en mission, par exemple celui représenté figure 2.2, il est intéressant de se poser la question des différents moyens et phénomènes physiques qui seraient possibles d'utiliser pour son repérage.

2.5.1. Localisation horizontale par amers d'opportunité

Tout d'abord, ce qui apparaît naturel, c'est la nécessité d'avoir la localisation horizontale.

Par analogie avec un piéton qui se déplace en ville ou dans la nature, le premier réflexe est d'observer l'environnement et ses particularités spatiales : **tout phénomène qui varie en espace, mais qui reste à peu près stable en temps est potentiellement candidat pour se localiser.**

Sous l'eau, les difficultés sont multiples :

- les phénomènes physiques permettant de faire une mesure à distance sont rares : on peut retenir l'acoustique dans une gamme de fréquence de l'ordre du kiloHertz au mégaHertz et les ondes électromagnétiques, soit très basses fréquences (inférieures à la centaine de Hertz), soit dans la gamme optique.
- l'environnement n'est pas très riche en caractéristiques pertinentes. On peut mentionner :
 - la bathymétrie locale, plus précisément la profondeur,
 - la forme détaillée du relief,
 - la nature du fond,
 - l'existence d'amers (épaves, rochers caractéristiques, etc...),

2. Généralités

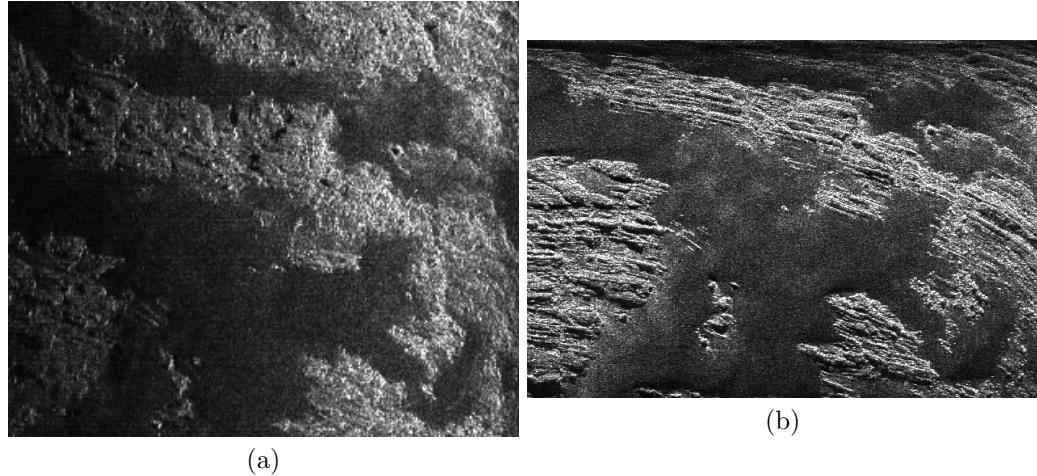


FIG. 2.3. : Diversité du fond en fonction du cap du sonar. Sonar latéral sur la même zone : (a) le sonar est passé sur le haut de l'image, (b) le sonar est passé sur la droite de l'image (données DGA TN Brest)

- les anomalies magnétiques ou gravimétriques locales⁴.
- les phénomènes précédents sont rarement pertinents partout : par exemple, sur les plaines abyssales, les fonds marins sont plats et les sédiments relativement uniformes sur de grandes distances, rendant difficiles l'utilisation de la bathymétrie. De même les amers ne sont pas distribués de manière égale et font plus figure d'opportunité.
- de même, les informations ne sont parfois que partielles : par exemple, la connaissance de la profondeur permet de situer le véhicule par rapport à une isobathe (qui est en général un ensemble de contours fermés sur une carte), mais pas de savoir où précisément le long de ces lignes. Néanmoins, cette information, même partielle, peut être très utile grâce à la fusion avec d'autres sources d'informations.
- certaines de ces caractéristiques sont difficiles à reconnaître car la mesure peut être très dépendante de la géométrie et en particulier de la direction de visée.

Par exemple, la figure 2.3 montre le même fond pris deux fois avec le même sonar mais selon un cap différent (approximativement un écart de 90°). La texture de la roche est très différente selon les deux points de vue. En revanche, la frontière roche/sédiment semble plus reconnaissable entre les deux images.

- l'échelle spatiale du phénomène utilisé doit être adaptée au problème. Si on prend le cas des anomalies magnétiques, les échelles de variations sont généralement liées à la géologie et sont observables sur des distances de la dizaine de kilomètres. Cela ne permet pas une localisation précise, mais peut, par contre, convenir à de la navigation sur une grande distance.

Ces mesures étant généralement d'opportunités, elles sont faites avec la charge utile du véhicule (c'est à dire les capteurs utilisés pour la mission et non des instruments qui seraient dédiés à la navigation).

En conséquence, les moyens utilisés peuvent être très divers tels que des sondeurs monofaisceaux,

⁴Si ces méthodes sont évoquées dans le domaine de la recherche depuis les années 1990 [Xio+07], il n'est pas très clair de savoir si il existe des applications opérationnelles.

2.5. Approche générale d'un système de navigation sous-marine

des sondeurs multifaisceaux, du sonar latéral, des caméras vidéos, des magnétomètres, etc. . . .

Contexte d'emploi

Il y a principalement deux méthodes d'utilisation des amers naturels :

- soit une cartographie préalable les amers naturels est effectuée et le véhicule utilise cette carte,
- soit les amers sont "découverts" au fur et à mesure de la navigation et exploités uniquement quand le véhicule repasse sur ces derniers et les reconnaît.

Le premier cas nécessite un levé exhaustif de la zone, ce qui peut être coûteux. En revanche, si les amers sont rares, la navigation peut être utilisée pour passer intentionnellement auprès de ces derniers, voire les rechercher explicitement en vue d'un recalage. Cette stratégie entre dans l'étape de **planification** de la mission.

Dans le second cas, on parle de **SLAM (Simultaneous Localization and Mapping)** ou de **CML (Concurrent Mapping and Localization)**. Cela permet par exemple d'identifier les dérives capteurs grâce à la comparaison des positions identifiées successives d'un même amer. Le SLAM peut aussi être employé pour revenir à son point de départ en se recalant sur les amers observés au cours de la mission.

2.5.2. Localisation horizontale par systèmes de positionnement dédiés

Les amers naturels n'étant pas toujours présents ni très fiables, il apparaît nécessaire de les remplacer par des "amers artificiels" si on en a la possibilité.

Principalement deux méthodes sont utilisées (mais avec quantité de variations) :

- les systèmes de positionnement "base longue" **LBL (Long Baseline Localisation)**,
- Les systèmes de positionnement "base ultra-courte" **USBL (Ultra Short Baseline Localisation)**

Base longue

Le principe du LBL est de disposer d'un ensemble de balises acoustiques au fond de la mer (des **transpondeurs**) qui ont la particularité de "répondre" à un signal acoustique envoyé par un émetteur situé sur le mobile par un autre signal acoustique (spécifique à chaque transpondeur) qui est détecté par le mobile. Connaissant la position exacte des transpondeurs et mesurant le temps écoulé entre l'interrogation et la réception de la réponse, puis en déduisant les distances, le mobile peut retrouver sa position.

Nous verrons que grâce à la fusion avec d'autres capteurs, on peut réduire de façon conséquente le nombre de balises (jusqu'à en avoir qu'une seule).

Base ultra-courte courte

Dans le cas d'une base ultracourte, un seul transpondeur est utilisé, fixé sur le mobile. Une petite antenne acoustique (au minimum 3 à 4 capteurs) est employée pour la réception du signal de

2. Généralités

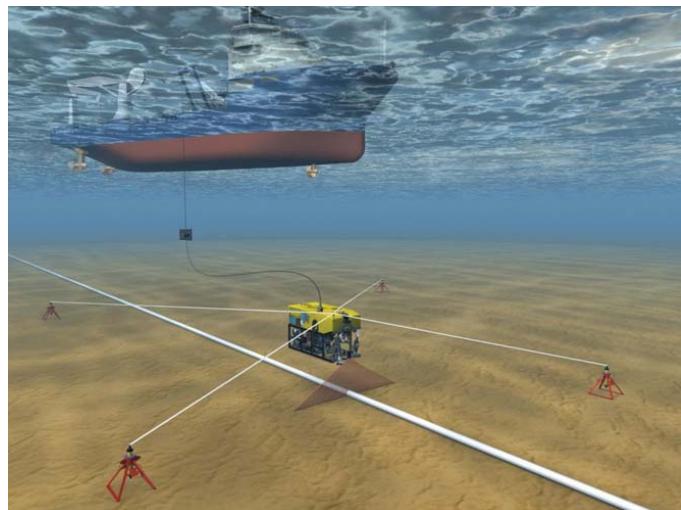


FIG. 2.4. : Illustration d'un système base longue (LBL) (documentation IMCA)

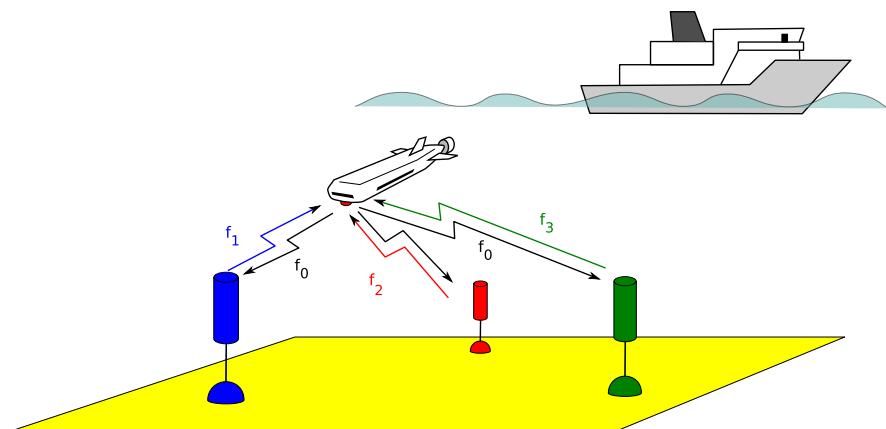


FIG. 2.5. : Principe d'un système base longue

2.5. Approche générale d'un système de navigation sous-marine

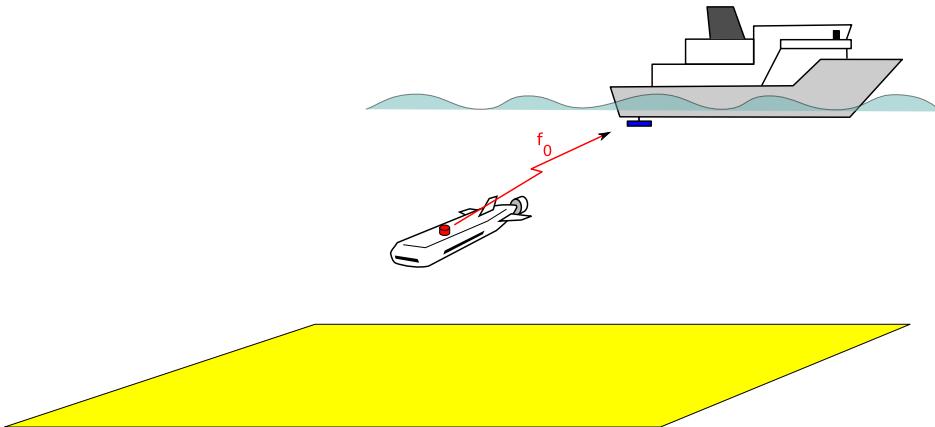


FIG. 2.6. : Principe d'un système base ultra courte (dans ce cas, c'est le navire qui mesure la position du véhicule)

réponse à l'interrogation depuis un navire de surface. Grâce à l'antenne, en plus du temps éoulé qui donne la distance, la direction d'arrivée du signal est mesurable.

Bilan

Les systèmes actifs sont beaucoup plus souples et performants que l'exploitation des amers naturels, méthode qui reste aléatoire. En revanche, cela ne va pas sans contrainte :

- les portées sont généralement limitées et donc inadaptées à de la navigation sur de grandes distances. Les rayons d'utilisation sont très dépendants des caractéristiques des systèmes, en particulier de la fréquence d'utilisation et des caractéristiques environnementales. Généralement, la portée est de quelques kilomètres.
- les systèmes bases longues sont les plus précis, mais nécessite de mouiller (c'est à dire de poser sur le fond océanique) des balises puis de mesurer leur position. C'est une opération qui peut être coûteuse en temps navire mais aussi risquée : le système peut être chaluté par un pêcheur ou perdu en cas de défaillance du système de récupération.
- les systèmes bases ultra-courtes sont plus souples d'emploi (nécessitent moins de transpondeurs). En revanche les mesures d'angles impliquent une meilleure connaissance de l'attitude du porteur (d'où l'utilisation d'une centrale d'attitude) et des conditions de propagation acoustique (mesure du profil de bathycélérité).

Positionnement via la surface

Nous n'oublierons pas aussi la possibilité de remonter à la surface périodiquement pour mesurer une position GNSS.

Cette opération est plus faisable en petit fond qu'en grand fond. Néanmoins, elle n'est pas la panacée, car

- la remontée vers la surface d'un AUV est toujours dangereuse en particulier à cause de la circulation maritime,

2. Généralités



FIG. 2.7. : Exemple de capteur de pression (documentation Valeport)

- les mesures GNSS à partir d'un AUV ne sont jamais faciles car l'antenne est généralement au ras de l'eau avec de nombreux masquages dus aux vagues,
- le transit entre la surface et le fond peut induire des pertes de précision sur le positionnement.

Une autre solution est de "suivre" le robot sous-marin à partir d'un navire de surface (habité, téléguidé ou autonome) à l'aide d'un USBL et d'une communication acoustique.

L'intérêt est que l'on n'est plus contraint par la distance véhicule/ balise et que la géométrie verticale (le sous-marin à la verticale sous le navire) est, compte tenu de la stratification horizontale des océans, très favorable en terme de qualité de communication et précision de positionnement.

2.5.3. Localisation verticale

La localisation verticale n'est pas à négliger. On peut mesurer l'altitude par rapport au fond à partir d'un sondeur monofaisceau (cela à un intérêt en terme de sécurité de navigation ou si la bathymétrie est préalablement connue ou encore si la consigne est de rester à une altitude constante).

Plus souvent, la navigation est référencée par rapport à l'immersion, c'est à dire à la distance par rapport à la surface.

Dans ce dernier cas, un capteur de pression (figure 2.7) est utilisé, et la profondeur est estimée à partir de la relation entre le poids de la colonne d'eau et la profondeur.

Suivant la précision nécessaire sur la profondeur absolue et les conditions de mesures, il peut être nécessaire de compenser d'un certain nombre de phénomènes tels que :

- la marée (généralement l'effet prédominant),
- la température de la colonne d'eau,
- la pression dynamique sur le capteur (perturbation liée à la vitesse de l'écoulement au niveau du capteur),
- la pression atmosphérique et ses variations,
- etc...

L'immersion peut potentiellement aussi être estimée à partir des systèmes de positionnement LBL et USBL, mais généralement, le capteur de pression est plus fiable et il est donc préféré.



FIG. 2.8. : Exemple de Doppler Velocity Log (documentation Rowe)

2.5.4. Mesure des vitesses

Les amers d'opportunité n'étant pas encore très utilisés compte tenu des problèmes de disponibilité et aussi des difficultés à avoir des algorithmes fiables, les systèmes de positionnement pouvant être coûteux à déployer et restreint à une zone parfois trop petite, il apparaît la nécessité d'avoir un capteur possédant plus de disponibilité et de fiabilité.

A l'heure actuelle, il n'en existe pas qui donne la position, en revanche, des capteurs de vitesses peuvent malgré tout être utilisés.

Dans le domaine sous-marin, il existe plusieurs technologies de capteurs de vitesse mais la quasi-totalité ne fournit que la vitesse du véhicule par rapport à la masse d'eau l'entourant. Cela peut poser un problème, en particulier en présence de courants car cela fausse la mesure en rajoutant un biais.

Il existe néanmoins des capteurs utilisant l'acoustique et plus particulièrement l'effet Doppler, qui peuvent produire des mesures de vitesses par rapport à un référentiel terrestre dans la limite où l'onde acoustique atteint les fonds marins.

Ce capteur est le **DVL (Doppler Velocity Log)** (figure 2.8) et apparaît comme une composante importante pour une navigation de qualité en absence de balises.

Une autre famille de capteurs acoustiques, plus rarement utilisée, peut être mentionnée : le **CVL (Correlation Velocity Log)**. Ces systèmes s'avèrent plus complexes sans forcément être plus précis.

Pour obtenir la position, en fonction de la vitesse, il est nécessaire de faire une intégration temporelle. En conséquence, en présence de biais de mesure (mêmes infimes, ils sont toujours présents), la position obtenue à partir de la vitesse sera toujours affectée d'une dérive, qui aura la propriété de dégrader la qualité de la position au cours du temps.

2.5.5. Attitude

Si le véhicule est localisé en continu par un système externe (GNSS ou balises), il peut être possible de ne pas tenir compte de l'orientation du véhicule dans l'espace car la mesure de position est donnée

2. Généralités



directement dans un référentiel externe : référentiel géodésique pour le GNSS ou repère local dans le cas d'un réseau de balises.

En revanche, beaucoup de capteurs, que ce soit pour la navigation ou pour la mission, donnent leurs mesures dans un repère "véhicule" (appelé dans le document, référentiel "**body**"). Pour passer ensuite ces informations dans un référentiel plus général (terrestre par exemple), il est nécessaire de connaître l'orientation du véhicule dans le repère externe.

L'orientation du véhicule dans le repère terrestre est appelée **attitude**, et possède 3 degrés de liberté.

Traditionnellement en navigation marine, l'orientation du mobile est caractérisé par les trois angles suivants :

- **Cap** : angle dans le plan horizontal local entre le Nord géographique et l'avant du véhicule,
- **Assiette** : angle entre l'axe du véhicule (arrière/avant) et le plan horizontal local,
- **Gîte** : angle autour de l'axe du véhicule.

Une définition plus précise est donnée dans la suite.

Les fluctuations temporelles autour du cap, de l'assiette et de la gîte sont respectivement le **lacet**, le **tangage** et le **roulis**.

Mesure de l'assiette et de la gîte

Ces deux angles sont définis par rapport à l'axe vertical local. Ils sont relativement faciles à mesurer car la verticale (et donc implicitement le plan horizontal) est définie en relation au champ de pesanteur.

Ces angles sont mesurés soit par un **inclinomètre** soit par des **accéléromètres** (figure 2.9).

La frontière entre ces deux types de capteurs est relativement floue car un inclinomètre peut fonctionner à partir d'accéléromètres (même si d'autres technologies sont possibles).

Grossièrement, un inclinomètre se contente de donner la direction du champ de pesanteur et ne fait aucune compensation des accélérations perturbatrices telles que les forces d'inertie. La mesure est donc généralement basse fréquence pour filtrer les accélérations réelles et peu précise si le véhicule subit de fortes accélérations ou rotations. En revanche, il est bon marché.

L'accéléromètre fournit une mesure quantitative de l'accélération : amplitude et direction dans le cas d'un système tri-axe. Associé à un autre type de capteurs, le **gyromètre** qui mesure les

vitesses de rotations, un traitement adéquat permet d'extraire la direction du champ de pesanteur et donc l'orientation par rapport à la verticale. L'ensemble accéléromètre et gyromètre permet, par algorithme, de compenser tous les effets inertIELS et de retrouver les attitudes.

Mesure du cap

La mesure du cap est plus complexe. Il y a principalement trois méthodes : de la plus simple à la plus sophistiquée, donc de la moins chère à la plus chère, on a :

Magnétomètre ou compas magnétique Le globe terrestre possède un champ magnétique (d'origine interne) qui se comporte (très) approximativement comme un dipôle magnétique orienté selon l'axe Nord/Sud.

L'induction magnétique mesurée par un capteur magnétique à la surface de la terre a alors une composante horizontale approximativement orientée comme la projection horizontale de l'axe de rotation terrestre.

Par analogie avec le Nord géographique, la projection horizontale de la direction du vecteur induction mesuré est appelé **Nord magnétique**.

Une fois connu le plan horizontal (par les accéléromètres ou inclinomètres), la projection du champ terrestre dans ce plan donne approximativement la direction du Nord. La sensibilité de cette mesure aux perturbations locales et la nécessité de compenser l'écart entre les lignes de champs magnétiques et les méridiens (les directions du Nord géographiques) implique une assez faible précision de la mesure (quelques degrés).

L'écart angulaire local entre la direction du Nord magnétique et la direction du Nord géographique s'appelle **déclinaison magnétique** (figure 2.10). Le champ magnétique terrestre est variable au cours du temps et donc la déclinaison aussi. Il est nécessaire dans tenir compte dans les mesures.

Il existe beaucoup de technologies pour mesurer le champ magnétique. Dans la gamme de précision nécessaire à la navigation, la technologie la plus usuelle est le **capteur fluxgate** (figure 2.11). Néanmoins des technologies récentes telles que l'**AMR (Anisotropic Magnetoresistance)** ou le **GMR (Giant MagnetoResistance)** pourraient la remplacer à court terme.

Boussole GNSS Une seconde méthode, mais qui est inapplicable dans le contexte sous-marin est la boussole GNSS.

Les GNSS modernes permettent l'estimation de la phase relative des signaux GNSS. Il est ainsi possible de mesurer au cours du temps le déphasage des signaux reçus sur deux antennes proches pour chaque satellite visible de la constellation GNSS. Connaissant les positions de ces derniers dans le repère géodésique, on remonte alors à l'orientation de l'axe entre les deux antennes par rapport au Nord géographique.

De même, en étendant à trois antennes, on peut retrouver les trois degrés de liberté de l'attitude.

Gyromètres La troisième méthode est d'utiliser des **capteurs inertIELS** (figure 2.13). Comme déjà évoqué, ce sont des capteurs proprioceptifs qui mesurent les déplacements dans un repère inertiel. Il y a deux catégories :

2. Généralités

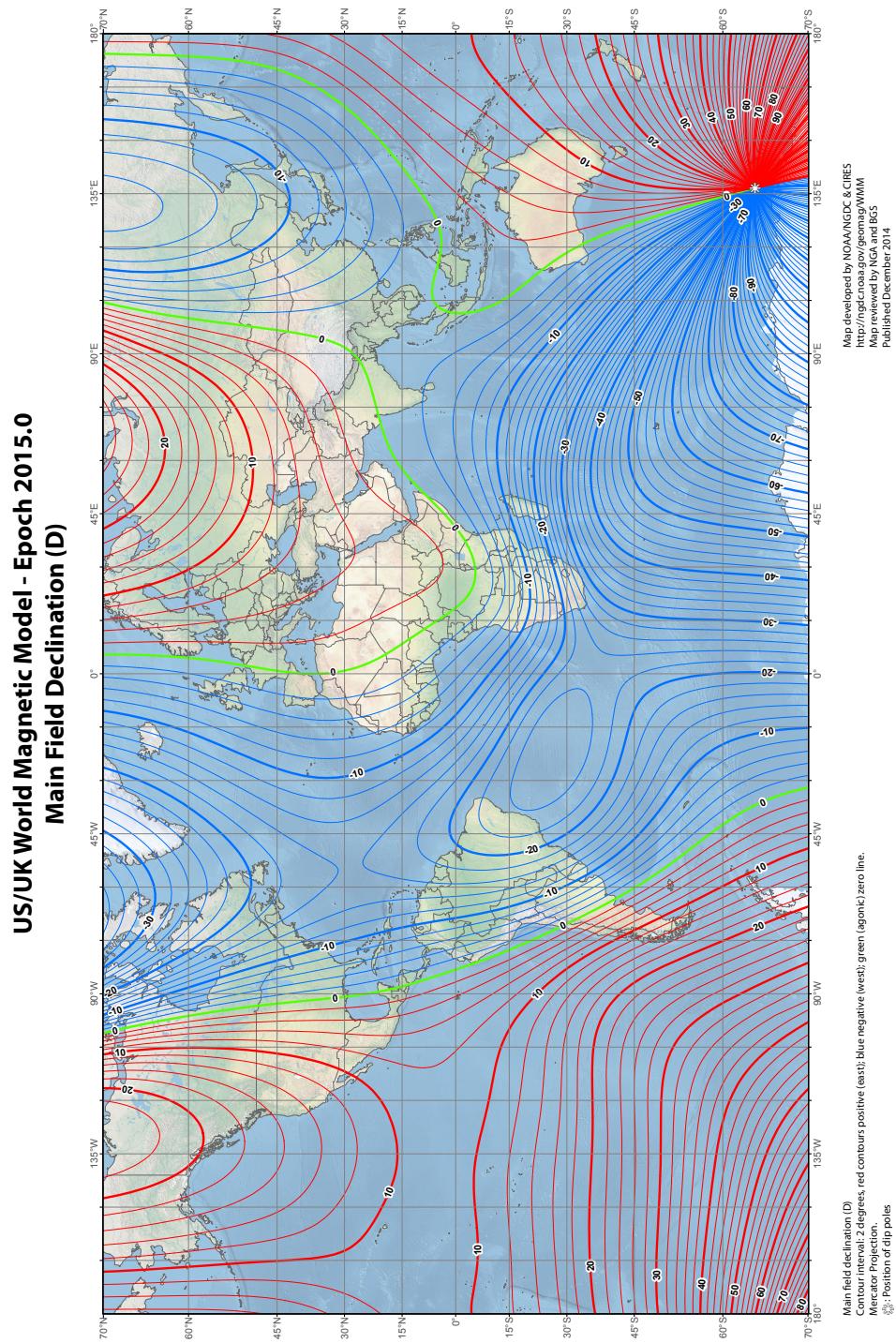


FIG. 2.10. : Déclinaison magnétique mondiale en 2015 (World Magnetic Model (WMM) de la NOAA/NGDC & Cires)

2.5. Approche générale d'un système de navigation sous-marine



FIG. 2.11. : Exemple de capteurs magnétiques “flux-gate” (documentation Wuntronic)



FIG. 2.12. : exemple de compas GNSS (documentation Hemisphere)

- les accéléromètres qui mesurent les accélérations d'un mobile,
- les gyromètres qui mesurent les vitesses de rotation⁵.

Les seuls mouvements mesurables de manière proprioceptive sont les accélérations et les vitesses de rotation par rapport à un repère inertiel (par définition, un repère où les lois de la mécanique de Newton sont vérifiées). Or, à cause de la rotation terrestre, un repère fixe par rapport à la terre n'est pas inertiel.

⁵La vitesse de rotation pourrait être mesurée à partir de la différence entre deux mesures accélérométriques, mais d'autres principes physiques permettent des mesures plus précises. En conséquence les gyromètres correspondent à une classe spécifique de capteurs.



FIG. 2.13. : Gyromètre laser (documentation Litton)

2. Généralités



FIG. 2.14. : Version moderne du gyro-compas Anschütz (Standard 22) (<https://hansbuch.dk/marine/compass-systems/anschutz-standard-22-gyro-compass>)

Ainsi un gyromètre va mesurer une rotation “composée” correspondant à la somme de la rotation du mobile par rapport au globe terrestre et... de la rotation de la terre.

En séparant les deux effets, on obtient une mesure de la rotation terrestre dans le repère du véhicule et comme l'axe de rotation est parallèle à l'axe Sud/Nord, on en déduit la direction du Nord !

En réalité, on combine cette estimation et la variation de la direction de l'accélération de pesanteur dans un repère inertiel du à la rotation terrestre (mesurée⁶ par les accéléromètres).

L'avantage des systèmes inertIELS est que le cap est déterminé réellement par rapport au repère géographique (et non par rapport au Nord magnétique qui n'en est qu'une approximation). De plus, ce système fonctionne sous l'eau contrairement à la boussole GNSS.

En revanche ces systèmes, en particulier ceux aptes à trouver le Nord, doivent être extrêmement précis et ils sont donc très onéreux. De plus la précision diminue quand le mobile est proche des pôles (c'est aussi le cas des compas magnétiques).

Gyrocompas ou gyroscope chercheur de Nord

Avant le développement des gyromètres précis, existaient des **gyroscopes “chercheur de Nord”** ou **gyrocompas** qui ont été très utilisés dans la marine marchande depuis le début du XX^{ème} siècle (dépot du brevet en 1904) et qui le sont encore aujourd’hui même si ils commencent à être détrônés par les gyromètres.

Un gyroscope (à ne pas confondre avec un gyromètre) est une masse tournant à grande vitesse. On peut montrer physiquement que si aucune force n'est appliquée à l'axe de rotation, ce dernier reste stable dans un repère inertiel (et donc pas dans un repère terrestre, sauf si son axe est parallèle à l'axe Sud/Nord). Un système astucieux de masses déséquilibrant le système fait que quelque soit l'orientation de départ du gyroscope, il va tendre vers sa position stable qui est parallèle à l'axe de rotation terrestre. Il va donc se stabiliser en s'orientant vers le Nord (ou le Sud si l'orientation initiale est trop éloignée du Nord).

⁶Nous verrons dans le chapitre sur les systèmes inertIELS que l'accélération de pesanteur n'est déterminée que de manière indirecte.

2.5.6. Temps

Nous avons vu que le capteur de vitesse peut donner la position à partir de son intégration au cours du temps. Dans la section suivante, nous reviendrons sur les systèmes inertielles qui eux mêmes sont des mesures de vitesse et d'accélération pour lesquelles des intégrations sont nécessaires. En conséquence, bien que souvent sous estimé, un capteur de temps très précis est nécessaire.

Aujourd'hui, les systèmes GNSS fournissent dans le monde entier une référence de temps d'une précision de l'ordre de 40 ns, ce qui est généralement suffisant pour les applications de navigation.

Cela permet, au départ de la mission sous-marine (mais aussi à la fin), de synchroniser les horloges internes du véhicule avec le temps **UTC (Universal Time Coordinated)**.

Dans les véhicules, les horloges fonctionnent à partir d'un oscillateur à quartz (la fréquence est asservie aux résonances naturelles d'un cristal de quartz qui ont la propriété d'être très fines et très stables). Néanmoins, la fréquence de l'oscillateur varie légèrement avec la dilatation du quartz et donc avec la température.

Pour contrer cet effet, le quartz est chauffé par un système régulé⁷ qui lui permet de rester à une température constante, supérieure à la température ambiante . Ces systèmes sont appelés **OCXO (Oven Controlled X-tal Oscillator)**

2.6. Centrales inertielles

Dans la section précédente, ont été présenté une liste de capteurs potentiellement utilisables pour le positionnement. Il se dégage deux difficultés :

- l'obligation d'utiliser et donc de fusionner plusieurs capteurs : l'idéal serait d'avoir un capteur universel qui estimerait parfaitement les 6 degrés de liberté du positionnement (3 variables de position et trois variables d'attitudes),
- chaque capteur fournit ses données à son propre rythme, parfois même, très lentement ou aléatoirement (c'est le cas des amers naturels) et il est nécessaire de mettre un "liant", c'est à dire d'être capable d'extrapoler au mieux les données pour avoir une position de qualité à tous les instants.

Il s'avère que les **capteurs inertIELS**, déjà mentionnés dans la détermination des orientations peu remplir le double rôle, d'un côté de fusion et d'aggrégation des différents capteurs, fournissant chacun une partie des informations et de l'autre, de maintien de la fourniture des meilleures estimées des positions et orientations à un rythme régulier au système de navigation.

En conséquence, ils sont l'élément essentiel de tout système de navigation.

2.6.1. Principe général

Nous avons vu qu'il y a deux types de capteurs inertIELS :

⁷On pourrait le refroidir, mais c'est beaucoup plus complexe.

2. Généralités

- les accéléromètres qui mesurent les accélérations du véhicule par rapport à un repère inertiel,
- les gyromètres qui mesurent les vitesses de rotation, toujours par rapport à un repère inertiel.

Si les vitesses de rotation sont intégrées temporellement, nous obtenons les angles de rotation (par rapport à un référentiel inertiel). Si les angles par rapport à un repère terrestre local (Nord et plan horizontal) sont recherchés, il est nécessaire retrancher la rotation terrestre.

Les vitesses (dont des effets liés à la rotation terrestre) sont déterminées par l'intégration des accélérations et les positions, par l'intégration des vitesses et donc par la double intégration des accélérations.

Les intégrations des vitesses de rotation et des accélérations impliquent des dérives, ces dernières doivent être contenues par :

- la qualité des capteurs : meilleurs sont les capteurs, plus faibles sont les dérives,
- l'estimation de la direction de l'axe de rotation terrestre et de la verticale locale, ce qui permet de supprimer la dérive en rotation et de limiter la dérive en position,
- l'utilisation de capteurs auxiliaires.

Toutes ces remarques montrent qu'un système inertiel, pour être efficace, nécessite non seulement une grande précision des capteurs, mais aussi des algorithmes performants : c'est l'ensemble des deux qui assure la qualité de la navigation.

2.6.2. Terminologie

Les systèmes inertIELS n'échappent pas à quelques définitions terminologiques :

L'ensemble des capteurs inertIELS (principalement 6 capteurs : un accéléromètre et un gyromètre pour chacun des axes cartésiens), ainsi que la couche algorithmique la plus basse (généralement implémentée au plus proche des capteurs) se nomme **IMU (Inertial Motion Unit)**.

On appelle **AHRS (Attitude and Heading Reference System)** ou **MRU (Motion Reference Unit)** la combinaison d'une IMU et d'un système de traitements permettant la fourniture des 3 angles (cap/lacet, gîte/tangage et assiette/roulis) et aussi, très souvent, les parties fluctuantes des translations (principalement le pilonnement, mais aussi éventuellement le cavalement et l'embardée). On peut aussi utiliser le terme de **centrale d'attitude**.

Enfin, les **centrales inertielles** ou **INS (Inertial Navigation Systems)** combinent l'IMU, le traitement des orientations mais aussi fournissent une estimation de la position et des vitesses au cours du temps.

2.7. Conclusions

Ce chapitre permet d'introduire à la fois la problématique de la navigation sous-marine, des principales informations disponibles et des capteurs associés ainsi que de la terminologie utilisée.

2.7.1. Stratégie capteurs

La grande variété des types de capteurs tant en technologies, en précision et en prix, entraîne des scénarios ou des conceptions qui peuvent être très différentes en fonction des besoins :

- sur un petit AUV, une stratégie minimaliste sera choisie, avec un capteur magnétique et deux inclinomètres pour l'attitude, et éventuellement, l'utilisation de balises pour le positionnement. La vitesse peut être (très approximativement) estimée à moindre coût par une relation expérimentale associant la vitesse par rapport aux masses d'eau aux régimes moteurs (tension et courant électrique débité dans les moteurs). L'immersion est déterminée par un capteur de pression.
- sur un AUV plus coûteux (comme l'AUV Daurade, figure 2.2), un système classique sera employé avec une centrale inertielle de classe "navigation", couplée à un DVL et à un capteur de pression. Le système est recalé périodiquement par GNSS (lors des remontées à la surface) et suivi par un USBL depuis un navire de surface.
- les sous-marins stratégiques, lanceurs d'engin, doivent obligatoirement être furtifs (pas d'émission acoustique ou radio et un minimum de remontée proche de la surface). Une centrale inertielle de très bonne qualité et acceptant des recalages relativement rares est nécessaire. Les méthodes de recalage ne sont pas publiques.

2.7.2. Métrologie et fusion capteurs

Un point sous-jacent de cette partie est qu'un critère essentiel pour un positionnement de qualité est la métrologie et donc le fait de bien identifier et contenir toutes les erreurs capteurs. Plus les capteurs sont précis et calibrés, plus les conditions environnementales sont maîtrisées, meilleure est la navigation.

Enfin, l'aspect fusion des informations reste important et l'établissement de filtres (généralement dérivés du filtrage de Kalman) doit être mené avec soin.

En conséquence, une partie importante du polycopié se consacre à la modélisation et fusion des informations capteurs et en particulier à l'estimation de leurs défauts.

Notions de géodésie, de cinématique et de dynamique

Cette partie rappelle les notions mathématiques et géodésiques nécessaires à la navigation sous-marine. Pour les aspects plus détaillés, par exemple de géodésie, il est conseillé de se reporter sur les autres matières enseignées à l'ENSTA Bretagne.

Au delà de la partie spécifiquement mathématique, quelques notions physiques sont abordées, essentiellement sur la gravité et la mécanique des solides.

Un point important non abordé dans ce document mais malgré tout essentiel au domaine de la navigation sous-marine est l'acoustique sous-marine. Sur ce point, l'étudiant est supposé avoir assimilé le cours précédent sur les systèmes sonars de bathymétrie et d'imagerie [Leg07].

3. Référentiels

3.1. Contexte

Les applications de la navigation sous-marine exposées dans ce document sont pratiquement exclusivement liées à la cartographie sous-marine.

Dans ce contexte, un “capteur” fixé sur un “porteur” fait une mesure à distance de son environnement. Par exemple, un sondeur multifaisceau émet une onde acoustique de durée brève qui se réfléchit sur les fonds marins. Une partie de l’énergie renvoyée revient vers le sondeur. Les échos alors enregistrés sont exploités pour retrouver la position du fond marin.

Grâce à la mesure des angles d’arrivée et des temps d’arrivée après l’émission, la position de quelques points du fond sont localisés dans un repère local relié au sondeur.

L’objectif est alors de transférer cette mesure dans un contexte plus général, par exemple sur une carte dans un référentiel géographique, permettant de situer le point sans ambiguïté sur le globe terrestre.

Le transfert des coordonnées locales du point de mesure aux coordonnées géographiques est tout sauf immédiat et nécessite un ensemble d’estimations intermédiaires, qui mène à ce que l’on appelle de manière générique (en anglais) la “**mobile mapping equation**” que l’on pourrait traduire par “**équation de cartographie mobile**”¹.

Les étapes nécessaires dépendent spécifiquement des systèmes et capteurs de position employés, mais de manière courante les points successifs sont :

- fourniture de la sonde (position d’un point du fond) dans le repère du capteur,
- passage du repère capteur au repère du véhicule “porteur” compte tenu de la position et de l’orientation du capteur dans le véhicule,
- passage dans un repère intermédiaire, associé au véhicule mais orienté selon le repère géographique local (Nord terrestre et verticale locale),
- conversion dans un repère géographique plus global compte tenu du positionnement du véhicule,
- enfin, conversion dans le repère descriptif du produit final : la carte.

Comme le montre très bien cet exemple, il est essentiel de maîtriser les référentiels ou systèmes de référence (**frame** ou **frame of reference** en anglais) et de savoir transformer les coordonnées d’un point ou d’un vecteur d’un référentiel à un autre.

¹Je suis preneur de toute traduction plus officielle ou plus claire !

3. Référentiels

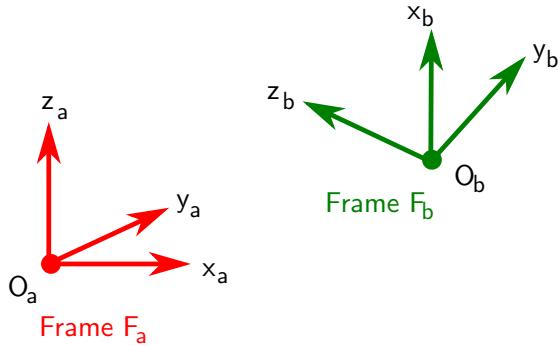


FIG. 3.1. : Repère local et global

3.2. Définition et propriétés des référentiels

3.2.1. Définition

Dans toute la mécanique des milieux solides et dans le positionnement, il est nécessaire d'être capable de définir un ensemble de règles pour situer de manière unique un solide par rapport à un autre solide. Le solide est défini comme un ensemble de points de l'espace/temps, fixes entre eux (toutes les distances point à point sont constantes).

Le solide n'est pas forcément matériel : l'ensemble des points peut rester totalement virtuel.

Il est important de remarquer qu'il n'y a pas de position absolue d'un solide dans l'espace vide. La localisation se fait forcément en référence à un autre solide.

Dans ce document, la théorie de la relativité n'étant pas pris en compte, l'aspect temporel est découplé de l'espace.

En conséquence, en se réduisant aux coordonnées d'espace, un solide $\{a\}$ peut être défini de manière non ambiguë par 4 points de l'espace au minimum ou, ce qui revient au même, un point O_a , appelé **origine du repère**, et 3 vecteurs d'espace x_a , y_a et z_a , linéairement indépendants (appelés **axes principaux** du repère) (figure 3.1). Cet ensemble est appelé **référentiel** et est noté \mathcal{F}_a .

Les trois vecteurs définissent 3 directions et forment une base vectorielle de \mathbb{R}^3 supposée orientée. Cette base est notée \mathcal{B}_a .

Ainsi, dans le cas d'un solide matériel (le navire par exemple), l'objet "navire" est totalement confondu avec le référentiel associé, c'est à dire son origine et les trois vecteurs formant la base.

Chaque point P_a du solide $\{a\}$ est caractérisé par un vecteur \mathbf{p} de coordonnées $\mathbf{p}^a = (x^a, y^a, z^a)$ dans la référence associée \mathcal{F}_a telle que

$$\mathbf{p} = \mathbf{O}_a \mathbf{P} = x^a \mathbf{x}_a + y^a \mathbf{y}_a + z^a \mathbf{z}_a \quad (3.1)$$

Pour des raisons pratiques, les 3 vecteurs sont choisis orthonormés (c'est à dire orthogonaux et de norme unité) et forment une base canonique. De plus, quand le référentiel est associé à un solide

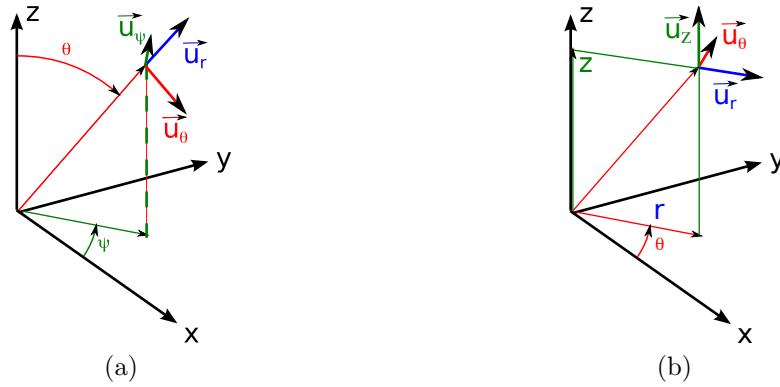


FIG. 3.2. : (a) géométrie du repère sphérique (b) géométrie du repère cylindrique

réel, les vecteurs de base sont choisis alignés avec les axes de symétrie du-dit solide quand ces derniers existent.

Dans le cas de coordonnées dans une base orthonormée fixe, on parle de **coordonnées cartésiennes**.

Dans ce document, la majorité des systèmes de coordonnées sont cartésiens. Les seules exceptions sont les coordonnées géographiques sur le globe terrestre et les points de mesure dans le référentiel capteur, où d'autres systèmes de coordonnées sont plus naturels.

3.2.2. Coordonnées curvilignes

Il existe un grand nombre d'autres systèmes de coordonnées que les systèmes cartésiens.

Une classe plus générale de systèmes de coordonnées sont les **coordonnées curvilignes** telles que localement, les directions de variations des coordonnées soient orthogonales, mais d'orientation variable d'un point à un autre.

Les deux exemples classiques de coordonnées curvilignes sont les coordonnées sphériques (définies par une distance et deux angles, figure 3.2(a)) et les coordonnées cylindriques (définies par deux distances et un angle, figure 3.2(b)). Les lois de transformation de ces coordonnées sont rappelées en annexe A.1

Les coordonnées géographiques utilisées pour ce positionner sur l'ellipsoïde terrestre (latitude, longitude, altitude) sont aussi un système de coordonnées curvilignes.

3.2.3. Changement de référentiels

Supposons deux référentiels, \mathcal{F}_a et \mathcal{F}_b qui peuvent être mobiles entre eux (c'est à dire dont les positions relatives évoluent au cours du temps).

La position du référentiel \mathcal{F}_b peut être défini par rapport au référentiel \mathcal{F}_a ou réciproquement le référentiel \mathcal{F}_a peut être défini par rapport à \mathcal{F}_b .

Par exemple, les coordonnées des 4 points caractérisant \mathcal{F}_b peuvent être exprimées dans \mathcal{F}_a au cours du temps.

3. Référentiels

On peut montrer que la position de \mathcal{F}_b dans \mathcal{F}_a peut être caractérisée par le déplacement qui permet de superposer le solide \mathcal{F}_b au solide \mathcal{F}_a .

Ce déplacement peut toujours se réduire à l'application successive :

- **d'une rotation** : isométrie (c'est à dire transformation linéaire qui conserve toutes les distances entre les points pris deux à deux), qui garde l'ordre des vecteurs $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ (isométrie dont le déterminant est +1).

La rotation est celle qui transforme la base orthonormée \mathcal{B}_b en la base orthonormée \mathcal{B}_a . Elle sera noté sous sa forme matricielle \mathbf{C}_b^a . D'autres représentations des rotations sont détaillées dans le chapitre suivant.

Elle permet d'aligner les vecteurs de \mathcal{B}_b sur les vecteurs de \mathcal{B}_a .

- **d'une translation** : ajout d'un vecteur constant aux coordonnées. Cette translation correspond au vecteur partant de O_a vers O_b , $\mathbf{O}_a \mathbf{O}_b$, qui est noté \mathbf{o}_b^a (ce qui est un abus de langage car \mathbf{o}_b^a correspond aux coordonnées de \mathbf{o}_b dans \mathcal{F}_a).

Elle permet de superposer le point origine \mathbf{O}_b sur le point origine \mathbf{O}_a .

Par convention, si le référentiel \mathcal{F}_b est exprimé par rapport à \mathcal{F}_a , c'est à dire par le vecteur \mathbf{o}_b^a et la matrice de rotation \mathbf{C}_b^a , alors \mathcal{F}_b est appelé **repère local** et \mathcal{F}_a est appelé **repère global**.

A partir de ces remarques, il est possible de définir la relation qui permet d'exprimer les coordonnées d'un point dans chacun des référentiels.

Transformation des coordonnées d'un solide

Soit un vecteur \mathbf{v} dont les coordonnées sont exprimées dans la base locale \mathcal{B}_b . Pour les calculer dans la base globale \mathcal{B}_a , on applique la rotation \mathbf{C}_b^a

$$\boxed{\mathbf{v}^a = \mathbf{C}_b^a \mathbf{v}^b} \quad (3.2)$$

Réciproquement, on applique la rotation inverse $(\mathbf{C}_b^a)^{-1}$ pour passer de la base globale \mathcal{B}_a à la base locale \mathcal{B}_b .

Une propriété de la rotation est que la transformation inverse est aussi la transformation transposée, on a

$$(\mathbf{C}_b^a)^{-1} = (\mathbf{C}_b^a)^T = \mathbf{C}_a^b \quad (3.3)$$

dont est déduit

$$\boxed{\mathbf{v}^b = (\mathbf{C}_b^a)^{-1} \mathbf{v}^a = (\mathbf{C}_b^a)^T \mathbf{v}^a = \mathbf{C}_a^b \mathbf{v}^a} \quad (3.4)$$

Soit un point P exprimé dans le référentiel local \mathcal{F}_b par \mathbf{p}^b , pour passer du repère local au repère global, on applique d'abord la rotation puis la translation pour déplacer l'origine

$$\boxed{\mathbf{p}^a = \mathbf{o}_b^a + \mathbf{C}_b^a \mathbf{p}^b} \quad (3.5)$$

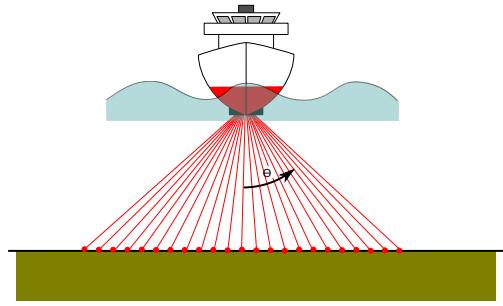


FIG. 3.3. : Géométrie de mesure d'un sondeur multifaisceau

En retour, pour passer du repère global au repère local on applique d'abord la translation opposée et ensuite rotation inverse est appliquée.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^b &= (\mathbf{C}_b^a)^{-1}(\mathbf{p}^a - \mathbf{o}_b^a) \\ &= \mathbf{C}_a^b(\mathbf{p}^a - \mathbf{o}_b^a) \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.3. Les référentiels rencontrés

Dans le cas de la navigation sous-marine, un grand nombre de référentiels successifs sont appliqués.

Présentons le cas du cheminement d'un point de mesure d'un capteur à distance (par exemple, un point de sonde d'un sondeur multifaisceau) et son cheminement pour le transformer en un point sur une carte.

3.3.1. Référentiel capteur : “sensor frame”

L'exemple débute par la mesure à distance d'un capteur qui permet de connaître la position d'un point de l'espace dans son propre repère.

Cela peut être la donnée de la position du fond marin mesurée par un sondeur acoustique. Dans le cas d'un sondeur multifaisceau, pour un cycle d'émission nous disposons de un à plusieurs points de mesures par direction acoustique, mais cela peut être un obstacle vu par un laser, voire même une image photographique ou vidéo d'une scène.

Dans tous les cas, les points sont référencés dans un repère qui est associé au capteur et généralement défini par le constructeur du capteur.

Ce référentiel est appelé **sensor frame** (ou **référentiel capteur**) et est noté \mathcal{F}_s .

Par exemple, dans le cas d'un sondeur multifaisceau, le système fournit pour chaque point de sonde une direction d'arrivée θ par rapport à l'antenne de réception et un temps d'arrivée t de l'écho référencé à partir de la date d'émission (figure 3.3).

3. Référentiels

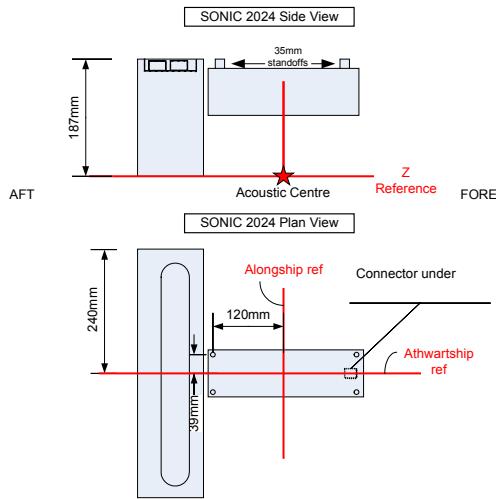


FIG. 3.4. : Description par le constructeur du centre acoustique dans le cas du sondeur R2Sonic 2024 [R2024]

Eventuellement, dans le cas d'un asservissement de la direction d'émission par rapport à l'attitude du porteur, une direction d'émission peut aussi être précisée (généralement par un angle relatif à l'antenne d'émission).

En fonction de l'électronique du sondeur, le temps d'arrivée $t = 0$ est associé à un écho dont la position serait sur un point virtuel défini par le constructeur et appelé **centre acoustique** (figure 3.4).

A partir de ce centre acoustique, des angles d'arrivée et des temps d'arrivée, la première étape est de calculer les points de sondes dans le référentiel capteur.

Pour un point de sonde P , cela correspond aux coordonnées \mathbf{p}^s .

Dans le cas du sondeur multifaisceau, les coordonnées sont généralement exprimées dans un repère sphérique associé au sondeur (coordonnées polaires), mais malheureusement, il n'y a pas vraiment de standard sur les conventions utilisées.

De plus, dans le cas des sondeurs, les positions des points de sonde peuvent dans un premier temps être calculé rapidement (mais pas très précisément...) à partir d'hypothèses de mesures simples (trajectoire des ondes rectilignes à vitesse constante, mesure instantanée) ou au contraire (ce qui est nécessaire pour certaines géométries et dans le cas de mesures précises), on tient compte :

- du profil de célérité des ondes acoustiques qui entraîne des déviations des ondes acoustiques,
- du déplacement et de la variation d'attitude du navire entre l'instant d'émission et de réception de chaque point de sonde,
- de l'écart de distance et de la taille finie des antennes d'émission et de réception,
- de l'épaisseur non nulle des faisceaux acoustiques,
- du champ proche du sondeur.

Néanmoins, même dans le cas le plus complexe, le calcul passe par l'intermédiaire de la position

du point de sonde dans le repère du capteur à la date d'émission p^s .

3.3.2. Référentiel véhicule : “body frame”

Une fois le point de sonde défini dans le repère capteur, pour continuer le processus, il doit être reporté dans un référentiel plus général.

Comme le calcul final intègre aussi des informations d'autres capteurs (position, attitude...) souvent montés de manière rigide sur le même porteur, la mesure est reportée dans un autre référentiel commun aux différents capteurs : **le référentiel véhicule** (systématiquement appelé **body frame** dans la littérature scientifique liée au positionnement).

Ce référentiel est noté \mathcal{F}_b .

Même si il y a moins de variabilité sur la définition du repère “body” que sur le(s) repère(s) capteur(s), il reste malgré tout une certaine diversité des conventions.

Origine du repère

L'origine du repère doit être choisi sur un point physique et mesurable du navire ou du véhicule.

Plusieurs choix sont possibles :

Point de référence de construction Dans le cas de navires “spéciaux”, par exemple, les navires scientifiques (océanographiques) et les bâtiments de guerre, il existe une plaque de métal solide gravée et soudée en un point rigide du navire qui marque physiquement l'origine des mesures de distance et d'orientation. L'intérêt de cette marque (appelée marbre), est qu'à l'installation de nouveaux instruments à bord, leur position exacte (les bras de leviers) peut être mesurée en référence en ce point, par exemple à partir d'une station totale².

Point de mesure du capteur de positionnement Une autre solution est de prendre pour origine la référence du capteur de position (l'antenne GNSS pour les navires de surface ou la centrale inertuelle pour les véhicules sous-marins).

L'intérêt principal est la simplicité du calcul de la position absolue des points du navire, où il suffit d'ajouter à la position fournie par le capteur, les coordonnées du point du navire (malgré tout orienté dans un système d'axe cohérent).

Point physique proche du centre de mouvement du navire Le “centre” du navire peut sembler une option intéressante pour l'origine car non seulement la position de ce point peut être considéré comme la plus représentative du navire, mais elle correspond aussi à la position du navire où les accélérations sont les plus faibles et les mouvements selon les différents axes, le plus découpés.

Il y a malgré tout de nombreux défauts, car il n'y a pas qu'un seul centre, mais plusieurs qui sont distincts et souvent mal définis. Peuvent être cités :

²ce qui n'est malgré pas simple, car il est généralement nécessaire de reporter toutes les mesures via les coursives et les écoutilles.... De plus les mesures ne peuvent être faites que quand le navire est en cale sèche.

3. Référentiels

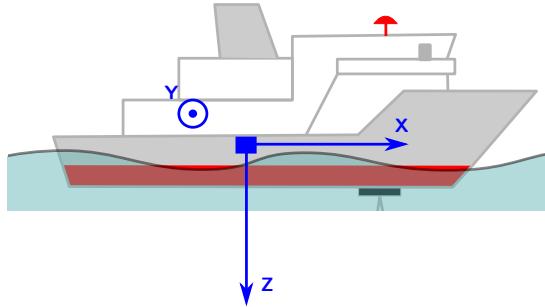


FIG. 3.5. : Repère usuel dans les métiers navals et aéronautiques.

- le centre géométrique,
- le centre de gravité,
- le métacentre de carène (qui est le centre de rotation du roulis et du tangage, lesquels, malgré tout ne sont pas forcément confondus)

De plus, ces positions peuvent être variables dans le temps et ne correspondent pas à un point physique du navire sur lequel on peut se référer.

En conséquence, un point physique du navire ou véhicule proche du centre est choisi.

Orientation des axes

Les conventions d'axes et d'orientation sont aussi malheureusement très variables.

La définition la plus usitée, en navigation, que ce soit dans le domaine naval ou aéronautique est d'avoir l'axe x pointé vers l'avant du véhicule et l'axe z vers le bas (et bien entendu un trièdre direct (figure 3.5)).

On a alors :

- x vers l'avant,
- y vers tribord,
- z vers le bas.

Dans les (nombreux) domaines terrestres, l'axe z vers le haut est préféré. Dans ce cas, soit x est conservé vers l'avant et y est permué (figure 3.6(a)), soit l'axe y est dirigé vers l'avant (figure 3.6(b)), d'où deux conventions possibles :

Convention x vers l'avant	convention y vers l'avant
x vers l'avant	y vers l'avant
y vers bâbord	x vers tribord
z vers le haut	z vers le haut

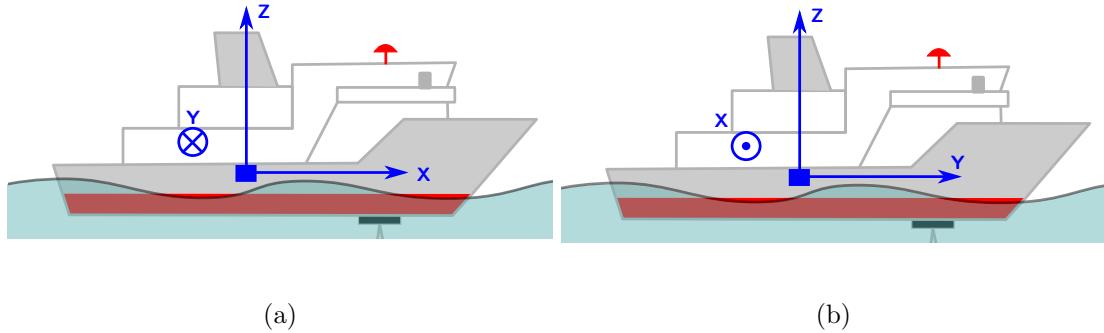
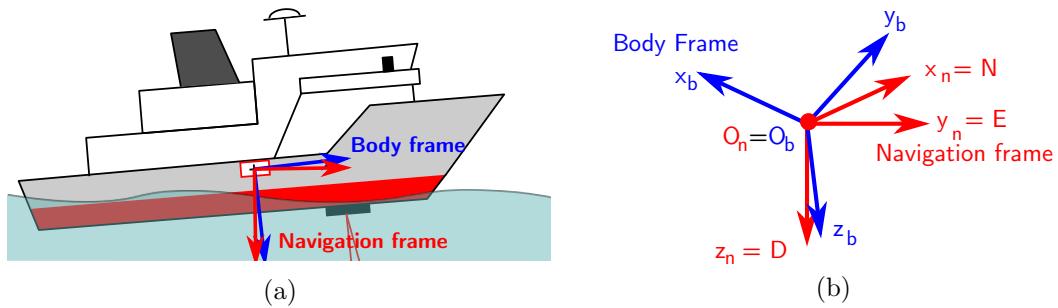

 FIG. 3.6. : (a) Convention x vers l'avant (b) Convention y vers l'avant.


FIG. 3.7. : Illustration du repère de navigation.

3.3.3. Référentiel navigation : “navigation frame”

Une fois les points de sonde exprimés dans le référentiel “body”, c'est à dire un repère lié au navire, l'étape suivante est de les relier au globe terrestre à travers des mesures de position et de rotation du véhicule.

Généralement sur terre, l'orientation est défini dans une base locale caractérisée par la verticale locale et la projection du vecteur de rotation de la terre sur la perpendiculaire à la verticale, c'est à dire le plan horizontal. La direction pointée dans le plan horizontal correspond au Nord géographique ou Nord vrai (par opposition au Nord magnétique).

On définit alors le **repère de navigation (navigation frame)** qui possède généralement la même origine que le repère body, mais dont les axes sont alignés sur le Nord géographique et la verticale locale (figure 3.7). Il est noté \mathcal{F}_n .

Ce repère existe généralement en deux variantes : **NED (North East Down)** et **ENU (East North Up)**.

Le repère **NED** (figure 3.8(a)) est défini avec le vecteur x orienté dans le plan horizontal vers le Nord, le vecteur y orienté dans le plan horizontal vers l'Est et le vecteur z orienté vers le bas selon la verticale (d'où l'acronyme NED pour North / East / Down).

Le repère **ENU** (figure 3.8(b)) suit aussi les conventions d'une base directe, mais avec z vertical orienté vers le haut. Le choix du vecteur x est alors le vecteur horizontal vers l'Est, et le vecteur y orienté vers le Nord (d'où l'acronyme ENU pour East / North / Up).

3. Référentiels

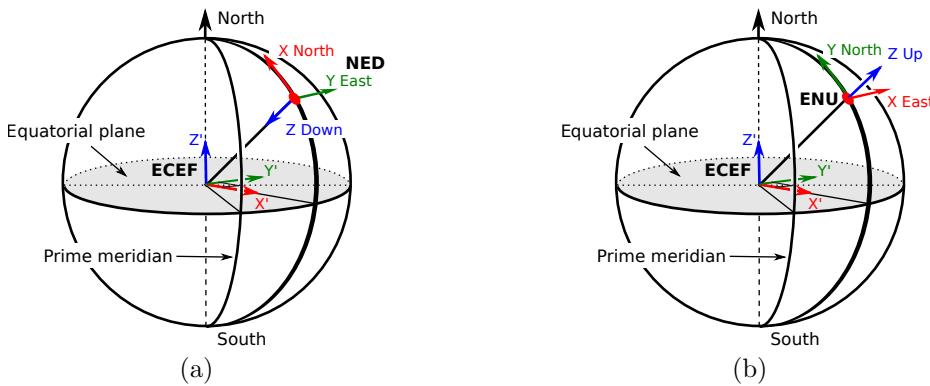


FIG. 3.8. : (a) Représentation du repère NED (North/East/Down) (b) Représentation du repère ENU (East/North/Up).

Verticale locale et direction du Nord

La définition la plus usuelle du repère de navigation implique l'utilisation des définitions géodésiques. C'est à dire que la verticale est définie comme la ligne perpendiculaire à la surface de l'ellipsoïde terrestre et l'axe Sud / Nord, la projection de l'axe de révolution de l'ellipsoïde³ représentant la terre sur le plan perpendiculaire à la verticale⁴.

En revanche, les mesures de l'orientation du véhicule se font généralement par des moyens inertIELS. La verticale est alors définie par la direction du champ de pesanteur.

En fonction des hétérogénéités de la terre, ce dernier n'est pas exactement perpendiculaire à la surface terrestre. L'angle du vecteur pesanteur par rapport à la normale à l'ellipsoïde, nommé **déviation de la verticale** est généralement faible (de l'ordre de quelques secondes d'arc) mais peut ne pas être négligeable dans le cas des systèmes les plus précis.

Près des montagnes, la déviation de verticale peut atteindre la minute d'arc.

La détermination de la direction du Nord peut se faire de trois manières différentes :

- par mesure directe ou indirecte de la rotation terrestre,
- par mesure du déphasage entre antennes GNSS,
- par capteur magnétique.

La mesure par déphasage des ondes électromagnétiques provenant des systèmes GNSS donne directement l'angle par rapport à l'ellipsoïde terrestre.

En revanche la mesure de la rotation terrestre donne l'axe de rotation instantanée qui compte tenu des phénomènes de nutation et de précession terrestre peut, là aussi, être légèrement différent de l'axe de rotation moyen (de l'ordre de quelques dixièmes de seconde d'arc par an).

La mesure par capteur magnétique donne la direction du Nord magnétique dont la direction peut significativement être différente du Nord géographique de quelques dizaines de degrés à la fois à

³(qui est aussi l'axe moyen de rotation de la terre.

⁴C'est à dire le plan horizontal local.

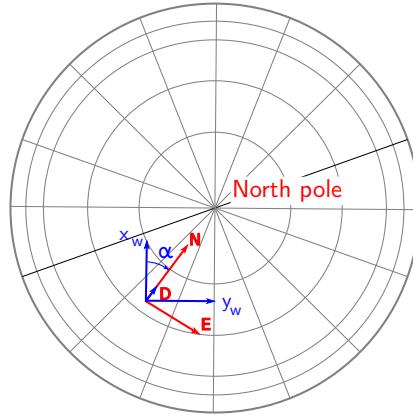


FIG. 3.9. : Référentiel dérivant.

cause de perturbations magnétiques locales et régionales (principalement liées à géologie), mais aussi à la distance des pôles magnétiques par rapport aux pôles géographiques.

En conséquence, ces corrections doivent parfois être appliquées pour permettre de trouver l'attitude du “body” dans le repère de navigation.

3.3.4. Référentiel dérivant : “wander frame”

Le repère de navigation possède intrinsèquement un gros défaut : l'orientation du Nord géographique est relativement mal défini près des pôles, et un déplacement de distance modérée (quelques kilomètres) sous les très hautes ou très basses latitudes entraînent une rotation rapide du repère de navigation pour suivre le déplacement relatif du Nord ou Sud terrestre allant même jusqu'à une singularité si on se déplace exactement aux pôles : en ces deux points, le Nord n'est plus défini car la projection de l'axe de rotation terrestre sur les pôles est nul.

Pour pallier à ce problème, on utilise parfois un référentiel intermédiaire appelé **référentiel dérivant** plus connu sous son nom anglais **wander frame** (figure 3.9) (noté \mathcal{F}_w) dont l'axe z reste vertical, mais pour lequel les axes x et y sont posés arbitrairement à l'initialisation et restent “bloqués” dans le plan horizontal local pendant le déplacement du mobile, évitant la singularité au passage près des pôles. Malgré tout l'angle entre ce repère et le repère de navigation est continûment calculé pour permettre d'estimer la direction du Nord si nécessaire.

3.3.5. Référentiel terrestre : “earth frame”

Le repère de navigation permet de connaître l'orientation du mobile par rapport à la terre, mais pas sa position.

Pour cela on utilise, le **repère terrestre (earth frame)** écrit \mathcal{F}_e .

3. Référentiels

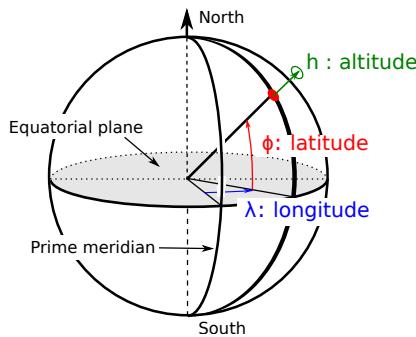


FIG. 3.10. : Repère géodésique (latitude, longitude et altitude).

C'est un repère fixe par rapport à la terre. Celui ci est généralement lié à l'approximation ellipsoïdale terrestre.

Traditionnellement, on prend les coordonnées cartésiennes du repère **ECEF (Earth-Centered, Earth-Fixed)** (figure 3.8), dont l'origine est au centre de l'ellipsoïde, les axes x et y dans le plan équatorial (perpendiculaire à l'axe de révolution de l'ellipsoïde) avec x orienté vers le méridien 0, l'axe y vers le méridien 90°, et l'axe z vers le pôle Nord.

On peut aussi utiliser, sur ce même repère, les coordonnées géodésiques (ou géographiques) (figure 3.10) avec les coordonnées de latitude, longitude et altitude au dessus (ou en dessous) de l'ellipsoïde terrestre.

Les coordonnées géodésiques sont généralement celles utilisées quand on passe par le repère de navigation pour des raisons de simplicité de calcul. En effet, il est beaucoup plus facile de calculer les coordonnées cartésiennes (ECEF) à partir des coordonnées géodésiques que le contraire.

Il y a malgré tout des ambiguïtés dans les conventions.

En fonction des corps de métiers (sciences nautiques, géographie, ...), certains auteurs utilisent le triplet (latitude / longitude / altitude) alors que d'autres le triplet (longitude / latitude / altitude).

Le code EPSG 4326 (coordonnées géodésiques WGS84) spécifie latitude puis longitude, mais les logiciels de GIS utilisant ce code définissent parfois le contraire... sans le dire....

3.3.6. Référentiel inertiel : “inertial frame”

Le référentiel terrestre est relativement général (tant que l'on reste sur terre), mais malgré tout, il n'est pas suffisant en techniques inertielles.

En effet, l'influence des forces d'inerties dues à la rotation terrestre est parfaitement mesurable par les systèmes sensibles (et est même exploitée pour le positionnement) et donc l'hypothèse que les équations fondamentales de la dynamique s'appliquent sans correction dans un repère terrestre est invalide.

Il est alors nécessaire d'utiliser un repère associé au globe terrestre, mais dans lequel les équations fondamentales de la dynamique s'appliquent sans modification. Le repère utilisé a la même origine que la terre, les axes sont définis comme confondus avec les axes cartésiens ECEF à un instant

3.4. Retour sur le “mobile mapping equation”

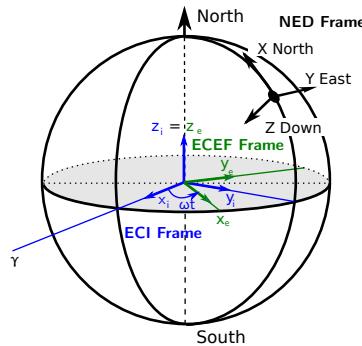


FIG. 3.11. : Repère ECI (Earth Centered Inertial) : une approximation suffisante d'un repère inertiel.

donné t_0 . En revanche, à la différence du repère terrestre, les axes de ce référentiel restent de direction fixe par rapport aux étoiles lointaines.

Bien évidemment un tel repère n'est pas parfaitement inertiel (le centre de la terre tourne autour du soleil), mais généralement l'approximation est suffisante par rapport aux précisions demandées en navigation.

Le mouvement de la terre (donc du repère ECEF) dans le repère inertiel associé est une rotation pure selon l'axe z à la vitesse de la rotation terrestre.

Ce repère est appelé **ECI (Earth Centered Inertial)** et noté \mathcal{F}_i .

3.3.7. Autres référentiels

D'autres référentiels peuvent aussi être définis en fonction des besoins.

Typiquement, les cartes peuvent utiliser des systèmes projetés sur une surface développable, c'est à dire qui peut être projetée sur un plan par une application de classe C_2 (donc continue et de dérivée continue).

C'est le cas des systèmes de coordonnées Lambert ou UTM (Universal Transverse Mercator).

De même, en cas de navigation dans une zone très restreinte, la courbure de la terre peut être négligée, et donc travailler dans un système cartésien de type NED d'origine un point proche de la zone d'évolution.

3.4. Retour sur le “mobile mapping equation”

A partir des descriptions précédentes des référentiels, les équations de la cartographie mobile peuvent être caractérisées, dans le cas d'un navire possédant un sondeur multifaisceau.

Soit un navire assimilé à un repère “body” \mathcal{F}_b , comportant trois instruments, fixes sur le navire :

- un sondeur multifaisceau, fournissant les points de sonde dans son repère \mathcal{F}_s ,

3. Référentiels

- un capteur GNSS, dont l'antenne correspond au référentiel \mathcal{F}_{gnss} ,
- une centrale d'attitude (AHRS) fournissant les attitudes et le pilonnement dans le référentiel \mathcal{F}_{ahrs} ,

Le sondeur produit un point de sonde exprimé dans son repère propre \mathcal{F}_s : le point \mathbf{x}^s . L'objectif est de calculer le point dans le repère terrestre \mathcal{F}_e , c'est à dire \mathbf{x}^e (la projection finale dans le repère de la carte n'est pas abordée).

3.4.1. Chaîne de mesure simplifiée

La première étape est de passer la sonde dans le repère navire. Pour cela, il est nécessaire de connaître la position du référentiel sondeur dans le référentiel navire, qui est caractérisé par la translation \mathbf{o}_s^b et la rotation \mathbf{C}_s^b .

Ainsi la position de la sonde dans le repère navire est

$$\mathbf{x}^b = \mathbf{o}_s^b + \mathbf{C}_s^b \mathbf{x}^s \quad (3.7)$$

Ensuite, la position est reportée dans le repère navigation. Comme, traditionnellement, le repère navigation et le repère body ont la même origine, la seule grandeur utile est \mathbf{C}_b^n d'où

$$\mathbf{x}^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{x}^b = \mathbf{C}_b^n (\mathbf{o}_s^b + \mathbf{C}_s^b \mathbf{x}^s) \quad (3.8)$$

Enfin, la position et l'orientation du repère de navigation dans le repère terrestre est ajouté

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^e &= \mathbf{o}_n^e + \mathbf{C}_n^e \mathbf{x}^n \\ &= \mathbf{o}_n^e + \mathbf{C}_n^e \mathbf{C}_b^n (\mathbf{o}_s^b + \mathbf{C}_s^b \mathbf{x}^s) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Les paramètres nécessaires à identifier sont donc \mathbf{o}_n^e , \mathbf{C}_n^e , \mathbf{C}_b^n , \mathbf{o}_s^b et \mathbf{C}_s^b .

3.4.2. Chaîne de mesure détaillée

Paramètres du sondeur

Les deux paramètres du sondeur sont \mathbf{o}_s^b et \mathbf{C}_s^b , c'est à dire la position de l'origine du repère sondeur dans le navire \mathbf{o}_s^b et l'orientation du sondeur (modélisé par la matrice de rotation \mathbf{C}_s^b).

Généralement, la précision de la position du sondeur \mathbf{o}_s^b (appelé **bras de levier (lever arm)**) n'est pas critique (une précision de l'ordre du centimètre est suffisante). Sur les petits navires, une mesure au mètre ruban (faite avec soin) peut s'avérer acceptable. Sur les grands navires, la mesure est faite à partir d'une station totale. Comme cette dernière nécessite une référence horizontale très précise cela peut n'être fait que quand le navire est en cale sèche.

De plus, la mesure doit se faire en transférant les coordonnées à travers des zones restreintes, ce qui peut s'avérer très technique.

La mesure directe de l'orientation \mathbf{C}_s^b n'est souvent pas assez précise. Une méthode de calibrage en mer est alors nécessaire.

Attitude du navire dans le repère de navigation

Le troisième terme est \mathbf{C}_n^b . Contrairement au référentiel sondeur, cette rotation est variable au cours du temps, elle doit donc être mesurée par une centrale d'attitude et de cap (**AHRS**).

Ce capteur, monté sur le navire, possède aussi une position \mathbf{o}_{ahrs}^b et une orientation \mathbf{C}_{ahrs}^b , il fournit au minimum une mesure de l'orientation de la centrale dans un référentiel $\mathcal{F}_{n'}$ très proche du référentiel de navigation \mathcal{F}_n .

En toute rigueur, le référentiel de navigation est orienté selon la verticale locale de l'ellipsoïde modélisant la terre (c'est à dire la perpendiculaire au point de la surface de l'ellipsoïde), et la direction de l'axe de révolution de l'ellipsoïde (qui correspond à l'axe moyen de rotation terrestre).

En revanche, la centrale d'attitude estime la verticale par la direction du champ de pesanteur (perpendiculaire au géoïde qui, par définition, est une équipotentielle du champ de pesanteur) et la mesure instantanée du vecteur rotation terrestre qui est (très légèrement) différent du vecteur moyen.

En conséquence, il existe une matrice de passage de l'un à l'autre $\mathbf{C}_{n'}^n$, très proche de l'identité \mathbf{I}_3 , à appliquer (elle n'est réellement significative que dans le cas de mesures très précises).

Ainsi, la centrale d'attitude mesure $\mathbf{C}_{ahrs}^{n'}$, d'où on peut déduire \mathbf{C}_b^n (mesure de l'orientation du navire dans le repère de navigation), connaissant $\mathbf{C}_{n'}^n$ l'écart entre la mesure sur le géoïde et le modèle ellipsoidal terrestre (déterminé par un modèle global), et \mathbf{C}_{ahrs}^b l'orientation de la centrale d'attitude dans le navire (mesurable, mais pas toujours avec une précision suffisante).

L'équation est, par composition des rotations,

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_b^n &= \mathbf{C}_{n'}^n \mathbf{C}_{ahrs}^{n'} \mathbf{C}_b^{ahrs} \\ &= \mathbf{C}_{n'}^n \mathbf{C}_{ahrs}^{n'} (\mathbf{C}_{ahrs}^b)^{-1}\end{aligned}\tag{3.10}$$

Dans cette équation, la position de la centrale \mathbf{o}_{ahrs}^b n'intervient pas, par contre elle est nécessaire pour fusionner les fluctuations de translation (dont le pilonnement) aux données GNSS.

Position et attitude du navire dans le repère terrestre

La position du navire dans le repère terrestre ($\mathbf{o}_n^e = \mathbf{o}_b^e$) peut être déterminée par la mesure GNSS. Ce dernier donne la position géographique de l'antenne, c'est à dire \mathbf{o}_{gnss}^e . Connaissant, la position de l'antenne dans le repère navire \mathbf{o}_{gnss}^b et l'attitude du navire \mathbf{C}_b^n , la position du navire dans le repère terrestre est déduit (en posant $\mathbf{o}_{gnss,b}^e = \mathbf{o}_b^e - \mathbf{o}_{gnss}^e$, c'est à dire le vecteur allant du point \mathbf{o}_{gnss}^e à \mathbf{o}_b^e , les coordonnées dans \mathcal{F}_e du vecteur allant de \mathbf{o}_{gnss}^e vers \mathbf{o}_b^e)

$$\begin{aligned}\mathbf{o}_n^e &= \mathbf{o}_b^e = \mathbf{o}_{gnss}^e + (\mathbf{o}_b^e - \mathbf{o}_{gnss}^e) \\ &= \mathbf{o}_{gnss}^e + \mathbf{o}_{gnss,b}^e \\ &= \mathbf{o}_{gnss}^e + \mathbf{C}_n^e \mathbf{o}_{gnss,b}^e \\ &= \mathbf{o}_{gnss}^e + \mathbf{C}_n^e \mathbf{C}_b^n \mathbf{o}_{gnss,b}^b \\ &= \mathbf{o}_{gnss}^e - \mathbf{C}_n^e \mathbf{C}_b^n \mathbf{o}_{gnss}^b\end{aligned}\tag{3.11}$$

La matrice de passage du repère de navigation vers le repère terrestre \mathbf{C}_n^e est calculable directement à partir de la connaissance de la position du véhicule sur le globe terrestre.

3.4.3. Chaîne de calcul

La combinaison des étapes précédentes donnent

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^e &= \mathbf{o}_n^e + \mathbf{C}_n^e \mathbf{C}_b^n (\mathbf{o}_s^b + \mathbf{C}_s^b \mathbf{x}^s) \\ &= \mathbf{o}_{gnss}^e + \mathbf{C}_n^e \mathbf{C}_b^n (-\mathbf{o}_{gnss}^b + \mathbf{o}_s^b + \mathbf{C}_s^b \mathbf{x}^s) \\ &= \mathbf{o}_{gnss}^e + \mathbf{C}_n^e \mathbf{C}_{n'}^n \mathbf{C}_{ahrs}^{n'} (\mathbf{C}_{ahrs}^b)^{-1} (\mathbf{o}_{gnss,s}^b + \mathbf{C}_s^b \mathbf{x}^s)\end{aligned}\quad (3.12)$$

Comme précédemment indiqué, les mesures directes de \mathbf{C}_s^b (orientation du sondeur dans le navire) et \mathbf{C}_{ahrs}^b (orientation de la centrale d'attitude dans le navire) sont difficiles à réaliser avec une précision suffisante.

La méthode utilisée est une méthode de calibrage (le “patch test” dans le cas du sondeur multifaisceau [Leg07]). Des méthodes similaires existent pour d'autre capteurs à distance.

Cependant, le calibrage mesure directement $\mathbf{C}_{ahrs}^{ahrs} = (\mathbf{C}_{ahrs}^b)^{-1} \mathbf{C}_s^b$.

L'équation (presque complète) du “mobile mapping” devient

$$\boxed{\mathbf{x}^e = \mathbf{o}_{gnss}^e + \mathbf{C}_n^e \mathbf{C}_{n'}^n \mathbf{C}_{ahrs}^{n'} [(\mathbf{C}_{ahrs}^b)^{-1} \mathbf{o}_{gnss,s}^b + \mathbf{C}_s^{ahrs} \mathbf{x}^s]} \quad (3.13)$$

Il reste malgré tout un terme difficilement observable \mathbf{C}_{ahrs}^{ahrs} . Si le bras de levier entre le capteur de position \mathbf{o}_{gnss} et le sonde \mathbf{o}_s , n'est pas trop important, la mesure directe peut être suffisamment précise.

Dans le cas contraire, il est nécessaire de mesurer finement l'alignement de la centrale par rapport au repère navire, en particulier pour le cap. L'opération est relativement délicate et peut se faire avec plusieurs points GNSS à terre, pour construire un alignement dans le repère terrestre qui est raccordé au navire à travers des mesures avec une station totale puis comparée à la mesure fournie par la centrale.

Soit le récapitulatif des différents termes :

- \mathbf{x}^e : position du point de sonde dans le repère terrestre. C'est le paramètre recherché ;
- \mathbf{o}_{gnss}^e : mesure de la position dans le repère terrestre du point de référence du capteur de position (généralement une antenne GNSS pour les navires de surface), une centrale inertie pour les véhicules sous-marins. Il est donné par le constructeur ;
- \mathbf{C}_n^e : matrice de rotation entre le repère de navigation lié à l'ellipsoïde et le repère terrestre. Il est intégré dans le modèle de l'ellipsoïde et dépend de la position ;
- $\mathbf{C}_{n'}^n$: matrice de passage entre le repère de navigation réel (lié au géoïde et à la rotation instantanée terrestre) et le repère de navigation théorique (lié au modèle ellipsoïdal terrestre). Généralement cette rotation est proche de la transformation unité (\mathbf{I}_3) et est parfois négligée. Sinon, elle peut être estimée à partir de la position et des modèles de gravitation comme par exemple le modèle EGM96 (très utilisé) ou plus récent, le modèle EGM2008. Pour la rotation terrestre, il y aussi des modèles et observations disponibles, mais cet effet est généralement négligeable ;
- $\mathbf{C}_{ahrs}^{n'}$: mesure d'orientation donnée par la centrale d'attitude. Elle correspond à l'estimation de l'orientation de la centrale dans le repère de navigation réel ;

- $(C_{ahrs}^b)^{-1}$: inverse de l'orientation de la centrale d'attitude dans le repère navire qui peut être mesuré si nécessaire ;
- $\mathbf{o}_{gnss,s}^b$: bras de levier mesuré entre la référence du capteur de position et le sondeur. Il est mesuré ;
- C_s^{ahrs} : orientation du sondeur dans le repère de la centrale d'attitude. Il est estimé par une opération spécifique de calibrage : le patch test.
- \mathbf{x}_s : mesure par le sondeur d'un point du fond marin. C'est une mesure fournie par le sondeur.

La formule 3.13 peut être simplifiée. Tout d'abord, dans beaucoup d'applications, l'écart entre le repère de navigation théorique et le repère réel peut être négligé. La rotation $C_{n'}^n$ est alors remplacée par l'identité.

Ensuite, par un choix judicieux du référentiel navire, par exemple en choisissant pour origine la référence du capteur de position et pour orientation, le référentiel de mesure du capteur d'attitude.

Enfin, en supposant que pour la mesure des bras de levier le mésalignement entre l'orientation mesurée et l'orientation réelle de la centrale d'attitude est négligeable (généralement vrai sur les petites unités), l'équation 3.13 devient

$$\mathbf{x}^e \approx \mathbf{o}_{gnss}^e + C_n^e C_{ahrs}^n [\mathbf{o}_s^b + C_s^{ahrs} \mathbf{x}^s] \quad (3.14)$$

3.4.4. Fusion des informations de position et d'attitude

Un point qui ne transparaît pas dans les équations précédentes est la fusion entre les mesures du capteur de position et des mouvements de translation fournies par le capteur d'attitude.

Les centrales d'attitude possèdent des accéléromètres qui sont capables de mesurer les petites fluctuations de translation du navire, typiquement, le cavalement (fluctuation selon l'axe du navire), l'embardée (fluctuation selon l'axe transverse du navire) et le pilonnement (fluctuation selon l'axe vertical).

Dans le cas d'un capteur de position de type GNSS ou même de positions estimées par des balises sous-marines, les informations fournies ne sont pas suffisamment précises ou nombreuses pour intégrer ces variations.

Il est alors intéressant de fusionner les deux sources d'information pour améliorer l'estimation de position.

Dans ce cas, il est nécessaire de ramener toutes les informations au même point pour opérer la fusion.

Par exemple, la position GNSS \mathbf{o}_{gnss}^e peut être “transportée” au niveau de la centrale d'attitude. Dans ce cas, la donnée recherchée est \mathbf{o}_{ahrs}^e qui vaut

$$\begin{aligned} \mathbf{o}_{ahrs}^e &= \mathbf{o}_{gnss}^e + \mathbf{o}_{gnss,ahrs}^e \\ &= \mathbf{o}_{gnss}^e + C_n^e C_b^n (\mathbf{o}_{ahrs}^b - \mathbf{o}_{gnss}^b) \end{aligned} \quad (3.15)$$

3. Référentiels

Ce déplacement des positions implique la connaissance de la position de la centrale d'attitude dans le repère navire \mathbf{o}_{ahrs}^b qui n'était pas nécessaire précédemment et de l'orientation du navire \mathbf{C}_b^n estimée par les mesures de la centrale d'attitude.

Ainsi, pour estimer une translation d'un point du navire à partir de mesures en un autre point, il faut prendre en compte les mouvements angulaires du navire. On parle alors de **mouvements induits**.

3.5. Description géodésique et géophysique de la terre

3.5.1. Ellipsoïde terrestre

Le globe terrestre peut être considéré en première approximation comme une sphère de rayon moyen de 6371 km.

En revanche, cette approximation est généralement insuffisante et une approximation ellipsoïdale est préférée.

Historiquement, plusieurs modèles ellipsoïdaux ont été proposés par différents pays, sachant que très souvent, les besoins étaient régionaux, et donc chacun définissait un ellipsoïde qui collait au mieux la surface moyenne de son pays ou de son continent.

Néanmoins, essentiellement depuis l'envoi de satellites dans l'espace, mais grâce aussi aux progrès de la géodésie, ces ellipsoïdes locaux ont laissé la place à des ellipsoïdes globaux dont l'ambition est de modéliser la terre dans sa totalité.

Aujourd'hui, l'ellipsoïde de référence associé au système géodésique WGS84 est devenu relativement universel, en particulier parce que le premier système de navigation par satellite accessible au grand public, le GPS, utilise ce système.

Dans le cadre de ce système géodésique, la terre est approchée par un ellipsoïde de révolution aplati défini par son demi-grand axe (selon l'équateur) a , et son aplatissement f .

$$a = 6378137,0 \text{ m} \quad (3.16)$$

$$f = 1/298.257223563 \quad (3.17)$$

A partir de ces paramètres, les différents autres paramètres décrivant l'ellipsoïde peuvent être définis. Dans l'annexe A.2.1, sont rappelés quelques unes des grandeurs caractéristiques de l'ellipsoïde.

Coordonnées sur l'ellipsoïde

La position d'un mobile (ou d'un amer !) sur l'ellipsoïde terrestre est généralement déterminé par des coordonnées angulaires sur la surface de l'ellipsoïde et par la distance à la surface de cet ellipsoïde de référence.

Nous pouvons habituellement considérer deux types de coordonnées angulaires sur la surface de l'ellipsoïde :

- les coordonnées géocentriques, où les angles sont considérés par rapport aux droites partant du centre de l'ellipsoïde vers le point considéré à la surface de l'ellipsoïde,
- les coordonnées géodésiques ou géographiques, où les angles sont considérés par rapport à la droite normale à la surface de l'ellipsoïde au point considéré.

Dans le cas terrestre, les coordonnées géodésiques sont généralement utilisées car la droite de référence le long de laquelle est calculée l'altitude est facilement déterminable car parallèle au champ local de gravité (la surface de la terre est approximativement une équipotentielle du champ de gravité).

Dans le cas des coordonnées géodésiques, la position sur la surface est déterminée par deux angles : la **latitude** et la **longitude** (figure 3.10).

Pour caractériser ces angles, on définit une série de demi-plans dont le bord est confondu avec l'axe de révolution de l'ellipsoïde (qui est aussi, à une très bonne approximation près, l'axe de rotation de la terre).

Ces demi-plans sont appelés **plans méridiens**, et l'intersection de ces plans avec la surface de l'ellipsoïde sont les **méridiens**.

L'un de ces méridiens est considéré comme l'origine locale. Il s'agit du **méridien 0**. Pour des raisons historiques, il passe près de Londres.

- La latitude que nous noterons Φ est l'angle entre la droite perpendiculaire à la surface locale et le plan équatorial,
- La longitude que nous noterons λ est l'angle du plan méridien qui passe par le point avec le méridien 0.

Enfin, nous définissons **l'altitude** comme étant la distance à la surface de l'ellipsoïde le long de la normale locale à cette même surface (appelée **verticale**).

Le plan tangent à la surface est appelé **plan horizontal**.

Conversion des coordonnées géodésiques en ECEF

Il est assez facile de transformer les coordonnées géodésiques (latitude Φ , longitude λ et altitude h) vers les coordonnées cartésiennes liées au repère géodésique, c'est à dire les coordonnées ECEF, selon les vecteurs \mathbf{x}_e , \mathbf{y}_e et \mathbf{z}_e .

Nous avons

$$\boxed{\begin{aligned} R_E &= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \Phi_b}} \\ x_b^e &= (R_E + h) \cos \Phi_b \cos \lambda_b \\ y_b^e &= (R_E + h) \cos \Phi_b \sin \lambda_b \\ z_b^e &= (R_E(1 - e^2) + h_b) \sin \Phi_b \end{aligned}} \quad (\text{A.8})$$

Dans les formules précédentes, R_E (*E* pour East) est le rayon de courbure de la surface terrestre perpendiculairement au plan méridien à la latitude Φ_b .

3. Référentiels

Conversion des coordonnées ECEF en géodésique

En sens inverse, le calcul est beaucoup plus difficile.

Il existe des formules exactes, approchées et itératives. On peut choisir l'une ou l'autre en fonction de ses besoins et de la précision nécessaire.

Trois méthodes sont présentées en annexe A.2.3.

La méthode la plus classique et la plus simple en terme de calcul est la méthode du gradient.

Dans le cas d'un véhicule près de la surface terrestre, la formule approchée de You [You00] est relativement rapide et suffisamment précise.

Enfin, il existe aussi une formulation exacte non itérative qui est la méthode de Ferrari [Ver02]. Dans la pratique, elle est peu utilisée.

Compte tenu de la difficulté de passer des coordonnées géodésiques aux coordonnées ECEF, les algorithmes de navigation sont dans la mesure du possible directement exprimées en fonction des latitudes et longitudes. Les différents formulaires sont dans l'annexe A.2.1.

Autres paramètres

Un certain nombre d'autres transformations sont nécessaires pour les équations de navigation. Les expressions se retrouvent en annexe.

- matrice de rotation du repère de navigation (NED) vers le repère ECEF (la matrice C_n^e) dans l'annexe A.2.4 ;
- courbures locales sur l'ellipsoïde de référence en fonction de la position (équations A.22) ;
- dérivation temporelle des latitudes / longitudes en fonction des vitesses exprimées dans le repère de navigation (équations A.24) ;
- vitesse de rotation du repère de navigation NED par rapport au repère ECEF en fonction de la vitesse du mobile (équations A.27).

3.5.2. Rotation terrestre

Dans le domaine inertiel, d'autres propriétés géophysiques de la terre sont importantes.

Tout d'abord, la terre tourne !!!. Cela a une influence importante sur les systèmes inertIELS à travers les forces d'inertie et de Coriolis qui biaissent les mesures d'accélération et de giration.

Rotation moyenne

En première approximation, l'axe de rotation de la terre est confondu à l'axe de révolution de l'ellipsoïde.

Dans le repère inertiel associé au centre de la terre, cette dernière fait en moyenne un tour complet pendant la période 23 heures 56 minutes 4 secondes et 1 dixième de seconde. (et non 24 heures qui

correspond à la périodicité de la position du soleil dans le ciel, qui intègre aussi le déplacement de la terre sur son orbite solaire).

Cette période est appelée **jour stellaire**

Cela correspond à une vitesse angulaire de

$$\omega_{ie}^i = 15.041^\circ/\text{h} = 7.29215 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s} \quad (3.18)$$

Le vecteur de rotation est positif selon l'axe z car la rotation du globe terrestre se fait dans le sens direct (de \mathbf{x}_i vers \mathbf{y}_i), c'est à dire d'Ouest vers l'Est.

Rotation instantanée

Là aussi, la rotation de la terre n'est pas parfaitement constante. Il existe des mouvements parasites de **précession** et **nutation**. La description mathématique rigoureuse de ces deux mouvements est présentée dans le chapitre sur les rotations (section 4.2.1).

Grossièrement, le mouvement principal régulier de la terre autour de l'axe Sud/Nord est appelé **rotation propre**. Cela correspond au mouvement principal (le plus rapide) d'un tour complet en 23 h 56 mn 4.1 s.

En réalité, cette vitesse de rotation est légèrement variable. La fluctuation de la période est de l'ordre de la milliseconde par jour. Actuellement, les jours sont plus longs que le temps solaire moyen. Ces variations impliquent des ajustements périodiques du temps UTC (Temps Universel Coordonné) entre 1 fois par an et une fois tous les 7 ans (figure 3.12).

En revanche, sur le très long terme la vitesse de rotation moyenne diminue de l'ordre de 0.2 ms par siècle.

Cet axe Sud/Nord n'est pas fixe mais évolue dans le temps à un rythme très lent. Sa trajectoire décrit un cône de demi-angle au sommet de 23 degrés 26 secondes sur une période de 25800 ans. C'est la **précession**.

Enfin, il subit aussi une autre variation d'amplitude plus faible mais plus rapide et irrégulier, qui prend la forme d'une sorte de "vibration" sur la trajectoire conique. C'est la **nutation**. Le mouvement dominant est une oscillation de l'axe de 9.2 seconde d'arc sur une période de 18.6 années.

L'oscillation annuelle est plus de l'ordre de 0.2 seconde d'arc (figure 3.13), ce qui correspond approximativement à un déplacement d'une dizaine de mètres.

Modélisation de la rotation moyenne

Le vecteur vitesse angulaire dans le repère ECEF est

$$\omega_{ie}^e = \omega_{ie}^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{ie}^i \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

3. Référentiels

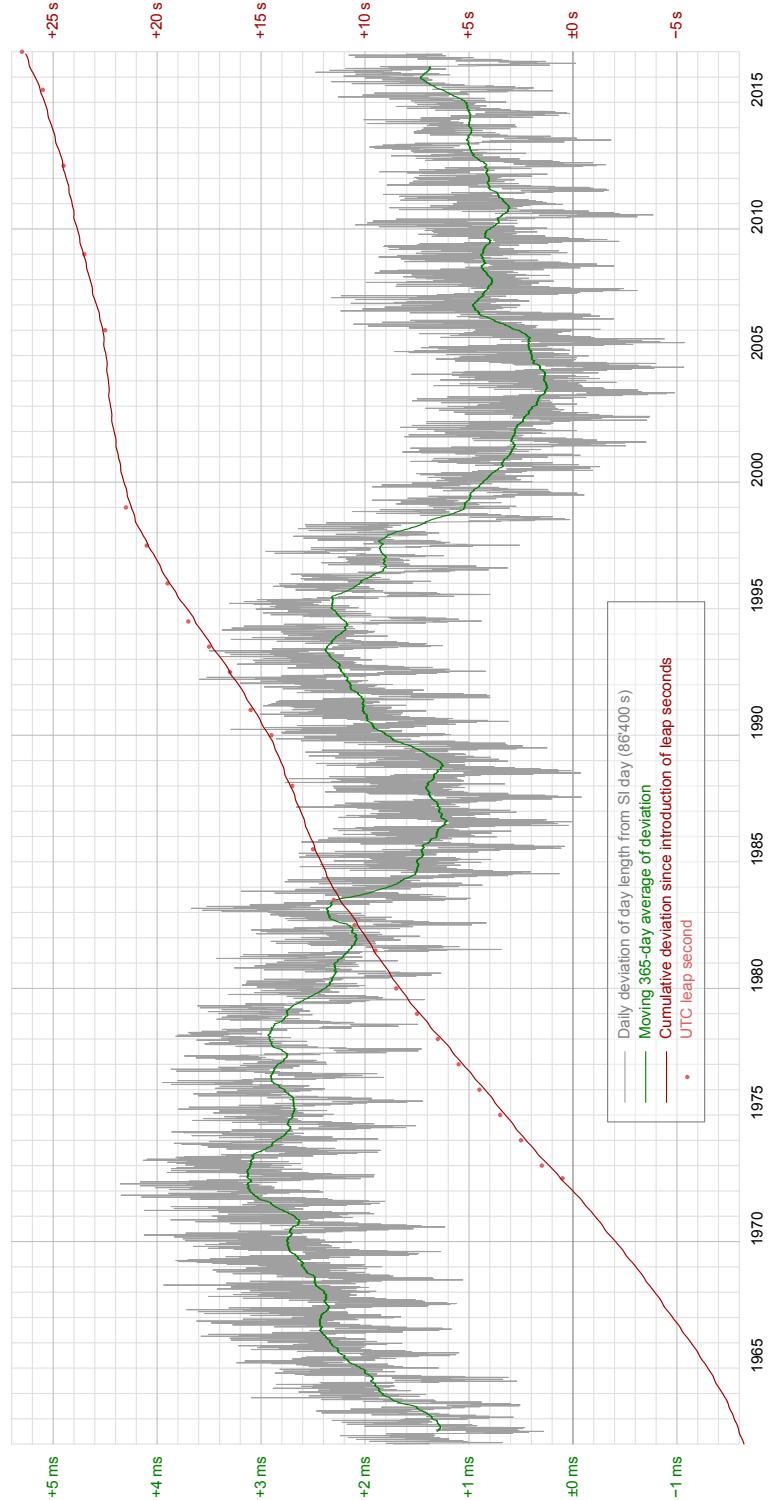


FIG. 3.12. : Variation du temps d'une journée depuis 1962, ainsi que l'écart cumulatif entre le temps sidéral et le temps atomique (domaine public).

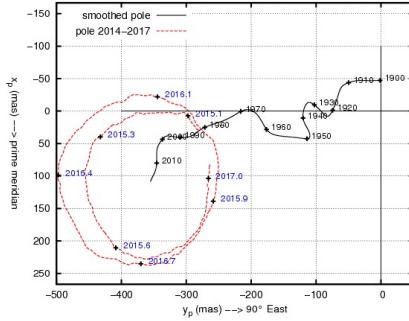


FIG. 3.13. : Déplacement moyen du pôle de 1900 à 2010 et déplacement récent de 2014 à 2017 (unités en millièmes d'arc seconde) (figure de l'Observatoire de Paris)

Si on est dans le repère NED, le vecteur rotation devient

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = \begin{pmatrix} \omega_{ie}^i \cos \Phi \\ 0 \\ -\omega_{ie}^i \sin \Phi \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

3.5.3. Champ de pesanteur

Le champ de pesanteur a aussi une importance très forte dans la mesure inertuelle car l'accélération du mobile est influencée par ce champ de forces, que les accéléromètres sont incapables de mesurer (voir le chapitre 6.3)

Le **champ de pesanteur (gravity field)** \mathbf{g}_b observé sur le mobile est composé de deux effets :

- le phénomène d'attraction universelle qui crée un champ appelé **champ de gravitation (gravitation field)** Γ_b
- la force centrifuge causée par le mouvement de rotation de la terre qui est une force d'origine inertuelle qui réduit la force de pesanteur apparente $\tilde{\mathbf{g}}_b$.

La force centrifuge a pour expression dans le repère ECEF

$$\tilde{\mathbf{g}}_b^e = \omega_{ie}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_b^e \quad (3.21)$$

donc

$$\mathbf{g}_b^e = \Gamma_b^e + \tilde{\mathbf{g}}_b^e \quad (3.22)$$

$$= \Gamma_b^e + \omega_{ie}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_b^e \quad (3.23)$$

3. Référentiels

Dans le repère de navigation

$$\mathbf{g}_b^n = \mathbf{\Gamma}_b^n + \omega_{ie}^2 \begin{pmatrix} \sin^2 \Phi_b & 0 & \cos \Phi_b \sin \Phi_b \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \Phi_b \sin \Phi_b & 0 & \cos^2 \Phi_b \end{pmatrix} \mathbf{r}_{eb}^n \quad (3.24)$$

Un modèle simple du champ de pesanteur (donc incluant les forces d'inertie) à la surface de l'ellipsoïde est celui de **Somigliana** ([Gro13]) :

$$||\mathbf{g}(\Phi_b)|| = 9.7803253359 \frac{1 + 0.001931853 \sin^2 \Phi_b}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \Phi_b}} \quad (A.32)$$

Le champ de pesanteur est approximativement perpendiculaire à la surface de l'ellipsoïde.

L'orientation du champ de pesanteur est donc (en négligeant les perturbations locales)

$$\mathbf{g}_b^n = ||\mathbf{g}(\Phi_b)|| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{g}_b^e = ||\mathbf{g}(\Phi_b)|| \begin{pmatrix} \cos \Phi \cos \lambda \\ \cos \Phi \sin \lambda \\ \sin \Phi \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

En revanche, le champ de gravitation est lui géocentrique (c'est à dire qu'il pointe vers le centre de l'ellipsoïde).

Irrégularité du champ de pesanteur

Malgré tout, localement, le champ de pesanteur peut avoir quelques variations liées aux masses locales. Elles sont modélisées à travers le géoïde qui est une approximation plus fine de l'isopotentielle de pesanteur que simplement l'ellipsoïde.

Le modèle le plus récent est le EGM2008 qui permet soit de calculer le géoïde, soit le potentiel du champ de pesanteur (et donc son gradient, c'est à dire l'accélération de pesanteur (figure 3.14)).

Influence de l'altitude et de la profondeur

Bien évidemment, le champ de gravité dépend de l'altitude de l'objet.

En air ou dans le vide, tant que l'on n'a pas besoin d'une précision extrême, on peut faire l'approximation que le champ de gravitation (donc sans la composante inertie) se comporte comme celui d'une masse ponctuelle au centre de l'ellipsoïde.

Comme :

- le champ d'une masse ponctuelle diminue en $\frac{1}{r^2}$ avec r la distance à la masse,

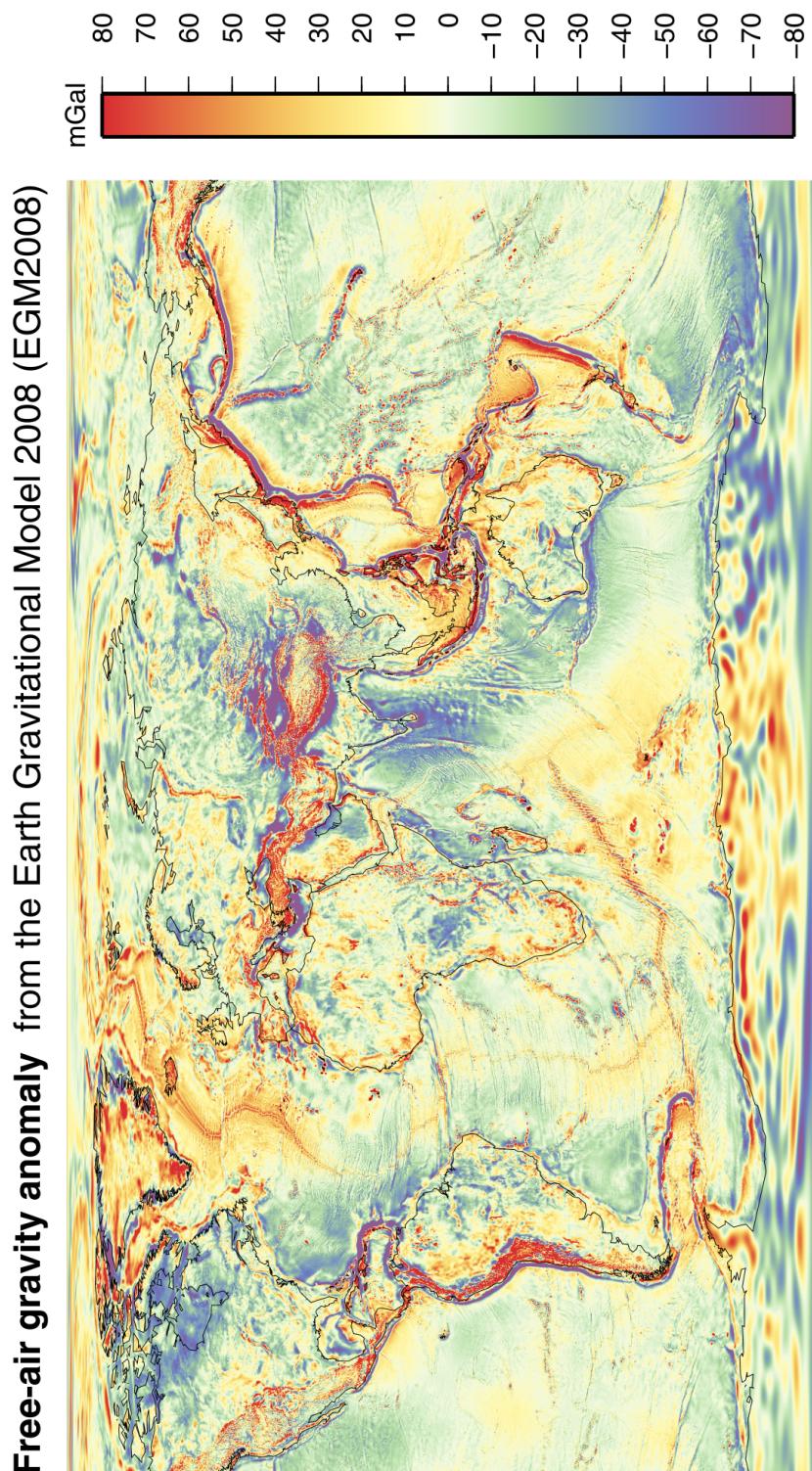


FIG. 3.14. : “free air gravity anomaly” issue du modèle EGM 2008. 1 mGal correspond à 10^{-5} m/s² (CC-BY-SA-3.0, auteur Cavit 2011)

3. Référentiels

- la distance d'un point M de la surface à l'ellipsoïde, au centre de la terre s'estime à partir des équations A.8.

$$r_{OM} = R_E(\Phi) \sqrt{\cos^2 \Phi + (1 - e^2) \sin^2 \Phi} \quad (\text{A.33})$$

Nous avons, en fonction de l'altitude h_b

$$\|\mathbf{\Gamma}_{ib}(h)\| \approx \frac{r_{0M}^2}{(r_{OM} + h)^2} \|\mathbf{\Gamma}_{ib}(0)\| \quad (3.27)$$

Comme la partie inertielle du champ de pesanteur est relativement faible, la même correction (champ géocentrique) est appliquée sur le champ de gravité.

Pour une estimation plus précise, non seulement, il faut partir d'un modèle plus fin du champ de gravité qui modélise le géoïde, comme le modèle EGM08, mais en plus, il faut utiliser des équations plus sophistiquées du champ de gravitation pour avoir l'influence des phénomènes locaux.

Sous l'eau, il faut tenir compte du poids de l'eau au dessus du mobile mais aussi de l'absence de roche. Robert S. Andrews ([And74]) propose la correction suivante entre la pesanteur théorique à la surface de l'ellipsoïde et la pesanteur à la profondeur h , pour une élévation de la surface maritime δh par rapport à l'ellipsoïde.

$$g(h) = g(0) - 4.3 \cdot 10^{-7} \delta h + 2.222 \cdot 10^{-6} h \quad (3.28)$$

avec g exprimé en m/s^2 .

Force d'inertie centrifuge ou centripète ?

Pour les forces inertielles, on parle soit de forces centrifuges, soit de forces centripètes.

Tout dépend du repère :

Un mobile dans un repère inertiel tend à se déplacer en ligne droite si aucune force ne s'applique sur lui.

Dans le repère de navigation, qui tourne avec la terre, si le champ de gravitation n'existe pas, la trajectoire apparente du mobile serait de s'élever dans les airs. Une force centrifuge s'applique donc sur lui. Les forces inertielles diminuent le champ de gravité.

Dans le repère inertiel, en revanche, si l'objet est fixe dans le repère de navigation, il tourne autour du centre de rotation. Cela apparaît comme si une force centripète s'applique à l'objet.

4. Rotations dans l'espace 3D

4.1. Introduction

Dans le chapitre précédent, il est rappelé que le passage d'un système de référence \mathcal{F}_b local à un système de référence \mathcal{F}_a global se décompose en :

- une rotation pour passer de l'orientation des axes de la base \mathcal{B}_b à l'orientation de la base \mathcal{B}_a ,
- une translation pour passer de l'origine de \mathcal{F}_b à l'origine de \mathcal{F}_a .

Si la translation n'appelle pas à beaucoup de commentaires, la rotation est un sujet suffisamment complexe pour justifier un chapitre à lui tout seul.

Dans l'espace tridimensionnel, il existe plusieurs représentations ou paramétrages de la rotation. Chacune a ses propres avantages et inconvénients ce qui fait que dans les algorithmes de positionnement, il est courant de passer d'une représentation à l'autre pour optimiser le calcul.

Les représentations qui sont successivement détaillées sont :

- **les angles d'Euler**,
- **la matrice des cosinus directeurs**,
- **le vecteur de rotation**,
- **les quaternions**.

4.1.1. Rappel succinct de la définition et des propriétés

Une rotation vectorielle est une application linéaire C dans un espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^n muni du produit scalaire $(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)$ qui :

- est une transformation unitaire

$$\forall (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad ((C\mathbf{v}_1) \cdot (C\mathbf{v}_2)) = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) \quad (4.1)$$

- et qui préserve l'orientation de l'espace. Cela implique une transformation dont le déterminant est positif. Comme le déterminant d'une transformation unitaire a pour module 1, le déterminant d'une rotation est 1.

Une rotation qui passe de la base locale \mathcal{B}_b à la base globale \mathcal{B}_a est noté \mathbf{C}_b^a

$$\boxed{\mathbf{v}^a = \mathbf{C}_b^a \mathbf{v}^b} \quad (4.2)$$

4. Rotations dans l'espace 3D

4.1.2. Propriété de groupe non commutatif

Tout d'abord l'ensemble des rotations munies de la loi de composition forme un groupe, c'est à dire qu'il possède les propriétés suivantes :

Loi de composition interne : la composition de deux rotations est une rotation,

$$C_c^a = C_b^a C_c^b \quad (4.3)$$

Associativité : la composition est associative

$$C_d^a = (C_b^a C_c^b) C_d^c = C_b^a (C_c^b C_d^c) \quad (4.4)$$

Elément neutre : Il existe une rotation I_n telle que quelle que soit la rotation :

$$C_a^b = C_a^b I_n = I_n C_a^b \quad (4.5)$$

Symétrie : Quelque soit la rotation C_a^b , il existe une rotation C_b^a telle que

$$C_a^b C_b^a = C_b^a C_a^b = I_n \quad (4.6)$$

Compte tenu de la symétrie, nous avons

$$v^b = C_a^b v^a = (C_b^a)^{-1} v^a = (C_b^a)^{-1} v^a \quad (4.7)$$

Non commutativité

Les rotations dans l'espace 3D ne sont en général pas commutatives

$$C_b^a C_c^b \neq C_c^b C_b^a \quad (4.8)$$

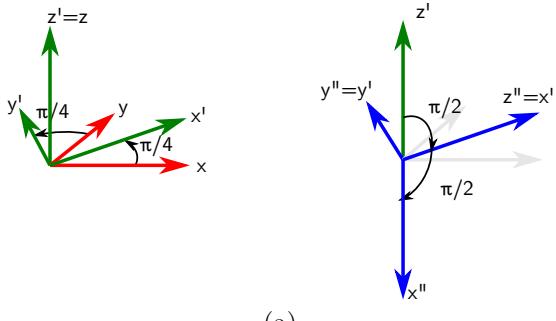
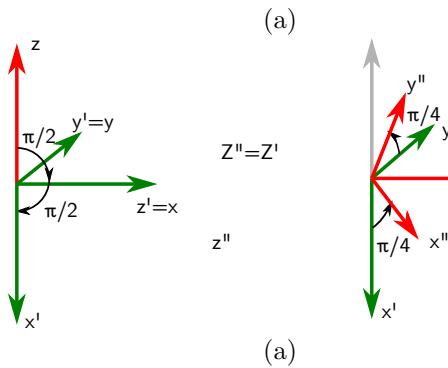
En revanche, le groupe des rotations dans le plan 2D est commutatif.

La non-commutativité peut être montrée avec un exemple simple illustré par les figures 4.1 et 4.2.

Soit deux rotations :

- la première C_1 tourne d'un angle de $\frac{\pi}{4}$ autour de l'axe z courant,
- la seconde C_2 tourne d'un angle de $\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe y courant.

Si, comme sur la figure 4.1, C_1 est appliquée avant C_2 , l'image de l'axe x se trouve colinéaire et de direction opposée au vecteur z , en revanche, dans le second cas (figure 4.2), l'image de x se retrouve dans le plan horizontal (x, y).


 FIG. 4.1. : Rotation autour de z de $\frac{\pi}{4}$ puis autour de y de $\frac{\pi}{2}$

 FIG. 4.2. : Rotation autour de y de $\frac{\pi}{2}$ puis autour de z de $\frac{\pi}{4}$

4.1.3. Rotation dans l'espace 2D

Dans l'espace vectoriel 2D, la rotation est déterminée par un scalaire : **l'angle de rotation** (noté α).

Une seconde représentation est une matrice de rotation 2D (matrice orthonormée de déterminant 1).

Soit les bases \mathcal{B}_a et \mathcal{B}_b , si α est l'angle que forme \mathcal{B}_b par rapport à \mathcal{B}_a , alors la matrice de passage des coordonnées d'un vecteur du repère local \mathcal{B}_b vers le repère global \mathcal{B}_a est

$$C_b^a = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

4.2. Représentation par les angles d'Euler

Implicitement dans le chapitre précédent, les rotations sont modélisées par la matrice associée C . Cependant, la matrice ne facilite pas une représentation intuitive de la rotation.

Pour décrire visuellement une rotation dans l'espace 3D, un triplet d'angles d'Euler est souvent choisi.

La première possibilité est donc de décomposer la rotation en trois rotations successives selon un plan perpendiculaire à l'un des vecteurs de la base canonique de l'espace courant. En effet, la rotation dans le plan est, elle, intuitive.

Ainsi, pour passer de la base locale \mathcal{B}_b munie des vecteurs orthonormés $(\mathbf{x}_b, \mathbf{y}_b, \mathbf{z}_b)$ vers la base globale \mathcal{B}_a , une première rotation d'un angle α_1 dans le plan perpendiculaire à \mathbf{z}_b peut être faite, laissant invariant ce vecteur.

4. Rotations dans l'espace 3D

Une nouvelle base \mathcal{B}_{b_1} est alors définie, image de la base canonique de \mathcal{B}_b comprenant les vecteurs orthonormés $(\mathbf{x}_{b_1}, \mathbf{y}_{b_1}, \mathbf{z}_{b_1} = \mathbf{z}_b)$

Ensuite, cette base est tournée d'un angle α_2 dans le plan perpendiculaire, par exemple à \mathbf{y}_{b_1} pour donner une base \mathcal{B}_{b_2} de vecteurs orthonormés $(\mathbf{x}_{b_2}, \mathbf{y}_{b_1} = \mathbf{y}_{b_2}, \mathbf{z}_{b_2})$ et enfin, par exemple, une troisième rotation est effectuée dans le plan perpendiculaire \mathbf{z}_{b_2}) avec un angle α_3 , donnant la base de \mathcal{B}_a .

Une telle décomposition en trois rotations planes autour d'un vecteur canonique de la base courante existe toujours quelque soient les bases orthonormées directes de départ et d'arrivée.

La décomposition est définie par les axes choisis et l'ordre de passage ainsi que par le triplet d'angles α_1 , α_2 et α_3 .

Les angles α_1 , α_2 et α_3 sont appelés **angles d'Euler**.

Il y a principalement deux avantages à cette succession de 3 rotations planes :

- les rotations autour des axes principaux sont souvent plus visuels, et il est plus facile de retrouver la succession de rotations qui permettrait par exemple à un objet de passer d'une attitude associée à un référentiel \mathcal{F}_a à celle associée à un référentiel \mathcal{F}_b que trouver la rotation "directe" ;
- parfois les phénomènes physiques qui impliquent les mouvements de rotation d'un objet se décomposent bien selon une telle série d'axe : c'est le cas du cap, tangage, roulis des navires ou de la précession, nutation, rotation propre des objets en auto-rotation.

Le problème, par contre, est que à chaque étape, il y a trois rotations 2D dans le plan perpendiculaire à un des vecteurs de la base canonique, ce qui implique 9 définitions possibles d'angles d'Euler.

Deux des conventions sont couramment utilisés :

- **les angles d'Euler propres**,
- **les angles de Tait-Bryan**.

4.2.1. Angles d'Euler propres

Les angles d'Euler propres sont utilisés principalement pour étudier les systèmes en auto-rotation comme les systèmes gyroscopiques en mécanique des corps rigides ou les planètes en mécanique céleste.

Le passage du référentiel global \mathcal{F}_a au référentiel local \mathcal{F}_b se fait, dans l'ordre selon 3 étapes (figure 4.3) :

- **précession** : rotation autour de l'axe \mathbf{z}_a selon un angle α positif de \mathbf{x}_a vers \mathbf{y}_a qui donne respectivement les vecteurs $\mathbf{x}_{a'}$ et $\mathbf{y}_{a'}$;
- **mutation** : rotation autour du nouvel axe $\mathbf{x}_{a'}$ selon un angle β positif de $\mathbf{y}_{a'}$ vers \mathbf{z}_a qui donne respectivement les vecteurs $\mathbf{y}_{a''}$ et \mathbf{z}_b ;
- **rotation propre** : rotation autour du nouvel axe \mathbf{z}_b selon un angle γ , positif de $\mathbf{x}_{a'}$ vers $\mathbf{y}_{a''}$ qui donne respectivement les vecteurs \mathbf{x}_b et \mathbf{y}_b .

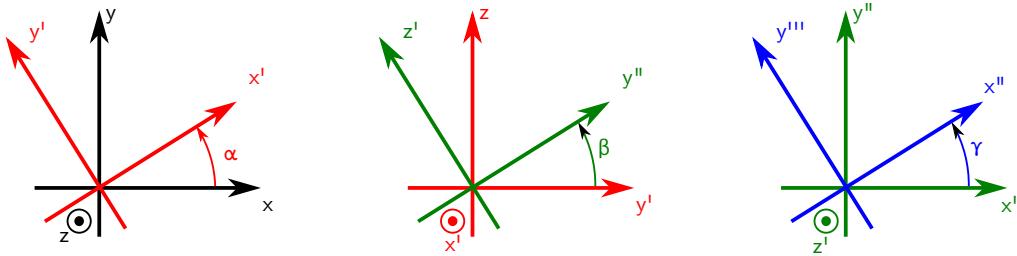


FIG. 4.3. : Séquence de rotations dans le plan pour les angles de d'Euler propres (de gauche à droite, passage du repère global (x, y, z) au repère local (x'', y'', z'))

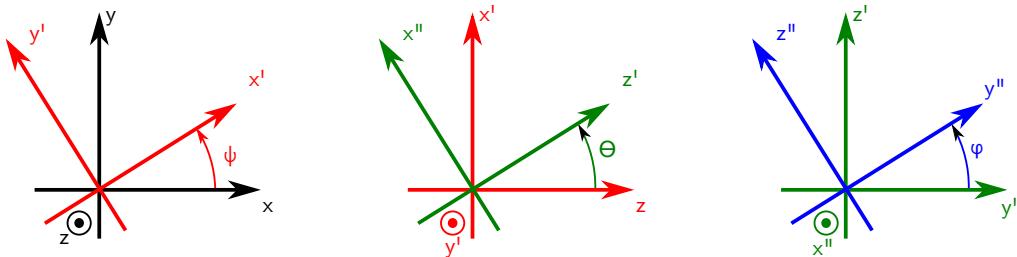


FIG. 4.4. : Séquence de rotations dans le plan pour les angles de Tait-Bryan (de gauche à droite, passage du repère global (x, y, z) au repère local (x'', y'', z''))

Un exemple de système physique qui découpe bien les trois angles de précession, nutation et rotation propre est la rotation terrestre, qui a été abordé en 3.5.2. Il a été montré que les trois angles correspondent à des mouvements élémentaires dont les échelles d'amplitude et de temps sont extrêmement différentes.

C'est aussi le cas sur les systèmes gyroscopiques tels que la toupie ou la bicyclette.

4.2.2. Angles de Tait Bryan ou de Cardan

Une autre représentation des angles d'Euler, très utilisée en navigation sont les angles de **Tait-Bryan**, plus rarement nommés angles de **Cardan** ou **angles nautiques**.

Le passage du référentiel global \mathcal{F}_a au référentiel local \mathcal{F}_b se fait, dans l'ordre selon les 3 rotations (figure 4.4) :

- **lacet ou cap** : rotation autour de l'axe z_a selon un angle ψ positif de x_a vers y_a qui donne respectivement les vecteurs $x_{a'}$ et $y_{a'}$;
- **tangage** : rotation autour du nouvel axe $y_{a'}$ selon un angle θ positif de z_a vers $x_{a'}$ qui donne respectivement les vecteurs $z_{a'}$ et x_b ;
- **roulis** : rotation autour du nouvel axe x_b selon un angle φ , positif de $y_{a'}$ vers $z_{a'}$ qui donne respectivement les vecteurs y_b et z_b .

Ce repère est préféré en navigation en particulier maritime, car compte tenu des symétrie des navires, les trois rotations en question sont aussi relativement bien découplées (c'est bien entendu aussi vrai en navigation terrestre et aérienne).

4. Rotations dans l'espace 3D

4.2.3. Opérations à partir des angles de Tait Bryan

Globalement, les opérations à faire sur les rotations, sont :

- trouver la rotation inverse,
- faire la composition de deux rotations,
- appliquer la rotation à un vecteur,
- et, présenté dans le chapitre 5, appliquer une dérivation ou une intégration.

La représentation par les angles d'Euler n'est pratique pour aucune des opérations précédentes. La stratégie est alors de passer par la matrice de cosinus directeurs ou par les quaternions puis de retrouver un triplet d'angle d'Euler correspondant au résultat.

La rotation inverse est potentiellement un piège, car il peut être tentant d'appliquer les angles opposés, mais cela donne un résultat faux, car l'ordre des rotations n'est pas la même pour la rotation inverse.

4.2.4. Avantages de la représentation par les angles d'Euler

Le principal avantage des angles d'Euler est leur compacité : une fois la convention d'axes établie, 3 scalaires seulement permettent de définir n'importe quelle rotation dans l'espace 3D. On ne peut pas être plus économique.

Comme précisé précédemment, la décomposition en une succession de 3 rotations dans les plans principaux de l'objet à souvent un sens physique et est relativement intuitif.

En revanche, suivant la dynamique de l'objet, ce n'est pas forcément la même représentation qui est adaptée : par exemple, la notion de lacet, tangage, roulis n'a pas vraiment de sens dans la description du mouvement propre d'une planète.

4.2.5. Inconvénients de la représentation par les angles d'Euler

Pour passer d'une orientation à une autre, dans certains cas, la rotation n'est pas unique. Cela rend difficile, par exemple, les tests d'égalité entre deux rotations décrites par leurs angles d'Euler.

Plus grave encore, certaines attitudes sont "dégénérées".

Par exemple, en prenant les angles d'Euler propres, si la nutation est nulle, on s'aperçoit que les repères définissant la précession et la rotation propre sont confondus.

Un problème identique apparaît si l'angle de nutation est de π .

Cela veut dire qu'une rotation angulaire δ autour de l'axe z peut indifféremment être affectée à la précession α ou à la rotation propre γ . La seule contrainte est que $\alpha + \gamma = \delta$. Les angles α et γ sont alors indéterminés.

La même situation apparaît avec les angles de Tait-Bryan. Dans le cas d'un tangage de $\pm\frac{\pi}{2}$, les angles de lacet et de roulis sont indéterminés, seule leur somme si $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ou leur différence si $\theta = \frac{\pi}{2}$ a un sens.

4.3. Représentation par la matrice des cosinus directeurs

Il existe aussi d'autres difficultés :

- la composition de deux rotations est difficile à représenter sous forme des angles d'Euler,
- le calcul numérique est lourd,
- le calcul des dérivées temporelles, si les angles varient dans le temps, sont lourds,
- l'interpolation entre deux rotations est difficile si les angles sont importants.

Au final, les angles d'Euler sont utilisés essentiellement dans la description des rotations, éventuellement dans le stockage¹, et éventuellement dans la mise en place des équations physiques dans certains cas.

Pour les calculs numériques, en revanche, cette représentation est rarement pertinente.

4.3. Représentation par la matrice des cosinus directeurs

La représentation matricielle est celle qui a implicitement été utilisée jusqu'à présent. En terme de formalisme c'est la représentation la plus souple.

La rotation vectorielle 3D est une application linéaire de l'espace vectoriel euclidien de dimension 3, et en cela, elle peut être représentée par une matrice carrée de dimension 3 par 3 qui permet de passer des coordonnées d'un vecteur exprimé dans le repère local \mathcal{B}_b aux coordonnées dans le repère global \mathcal{B}_a .

Soit la base canonique \mathcal{B}_b ($\mathbf{x}_b, \mathbf{y}_b, \mathbf{z}_b$), la matrice de passage du repère local au repère global \mathbf{C}_b^a peut être construite par la concaténation des coordonnées des vecteurs canoniques de \mathcal{B}_b dans la base \mathcal{B}_a :

$$\mathbf{C}_b^a = (\mathbf{x}_b^a | \mathbf{y}_b^a | \mathbf{z}_b^a) \quad (4.10)$$

Les coordonnées d'un vecteur \mathbf{v} dans la base \mathcal{B}_a sont respectivement les produits scalaires $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}_a)$, $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{y}_a)$ et $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}_a)$. D'où la matrice de rotation pour passer du repère local \mathcal{B}_b au repère global \mathcal{B}_a

$$\mathbf{C}_b^a = \begin{pmatrix} (\mathbf{x}_a \cdot \mathbf{x}_b) & (\mathbf{x}_a \cdot \mathbf{y}_b) & (\mathbf{x}_a \cdot \mathbf{z}_b) \\ (\mathbf{y}_a \cdot \mathbf{x}_b) & (\mathbf{y}_a \cdot \mathbf{y}_b) & (\mathbf{y}_a \cdot \mathbf{z}_b) \\ (\mathbf{z}_a \cdot \mathbf{x}_b) & (\mathbf{z}_a \cdot \mathbf{y}_b) & (\mathbf{z}_a \cdot \mathbf{z}_b) \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Par définition de l'angle $\alpha = \widehat{\mathbf{v}, \mathbf{w}}$ entre deux vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{w} , nous avons

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = |\mathbf{v}| |\mathbf{w}| \cos(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{w}}) = |\mathbf{v}| |\mathbf{w}| \cos \alpha \quad (4.12)$$

Comme les vecteurs de la base canonique sont normés nous avons directement

$$\mathbf{C}_b^a = \begin{pmatrix} \cos(\widehat{\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b}) & \cos(\widehat{\mathbf{x}_a, \mathbf{y}_b}) & \cos(\widehat{\mathbf{x}_a, \mathbf{z}_b}) \\ \cos(\widehat{\mathbf{y}_a, \mathbf{x}_b}) & \cos(\widehat{\mathbf{y}_a, \mathbf{y}_b}) & \cos(\widehat{\mathbf{y}_a, \mathbf{z}_b}) \\ \cos(\widehat{\mathbf{z}_a, \mathbf{x}_b}) & \cos(\widehat{\mathbf{z}_a, \mathbf{y}_b}) & \cos(\widehat{\mathbf{z}_a, \mathbf{z}_b}) \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

D'où le nom : **Matrice des cosinus directeurs**.

¹Mais d'autres solutions plus pertinentes existent.

4. Rotations dans l'espace 3D

4.3.1. Opérations à partir des matrices des cosinus directeurs

Inversion

Elle a déjà été présentée en tant qu'application linéaire dans le chapitre précédent. La matrice de la rotation inverse est la transposée de la matrice courante.

$$C_a^b = (C_b^a)^{-1} = (C_b^a)^T \quad (4.14)$$

Composition de deux rotations

Soit la rotation C_c^a qui correspond à la composition successive de la rotation C_c^b d'une base locale \mathcal{B}_c dans \mathcal{B}_b et d'une rotation C_b^a de \mathcal{B}_b vers \mathcal{B}_a .

La matrice de rotation totale C_c^a est

$$C_c^a = C_b^a C_c^b \quad (4.15)$$

Il est rappelé que comme les rotations, le produit matriciel n'est pas commutatif.

rotation d'un vecteur

Soit le vecteur v^b défini dans \mathcal{B}_b , pour appliquer la rotation C_b^a pour le définir dans \mathcal{B}_a , il suffit de calculer le produit de la matrice et du vecteur.

$$v^a = C_b^a v^b \quad (4.16)$$

4.3.2. Avantages de la représentation par la matrice des cosinus directeurs

Cette représentation a beaucoup d'avantages :

- la représentation formelle est très compacte (une matrice), c'est pourquoi elle est utilisée dans tous les algorithmes du document, sauf pour les points spécifiques aux autres représentations,
- numériquement, c'est la représentation la plus rapide en terme de nombre d'opérations, pour appliquer la rotation à un vecteur,
- la représentation est unique pour une transformation donnée,
- contrairement aux angles d'Euler, il n'y a pas de situation dégénérée,
- la rotation, produit de deux rotations, est simple à calculer (mais ce n'est pas la méthode la plus rapide, ni la plus robuste numériquement).

4.3.3. Inconvénients de la représentation par la matrice des cosinus directeurs

Malheureusement elle a aussi beaucoup d'inconvénients :

- la représentation possède 9 paramètres (bien évidemment, les 9 paramètres ne sont pas indépendants),
- quand on fait beaucoup d'opérations sur les matrices de rotations (ce que nous verrons dans les algorithmes inertIELS), l'accumulation du bruit numérique tend à ce que les matrices ne soient plus parfaitement orthonormées et donc des rotations valides. Par reprojection, la matrice de rotation la plus proche du résultat courant peut être calculée, néanmoins cette opération est délicate.
- l'interpolation entre deux rotations est délicate.

4.3.4. Conversion entre angles de Tait Bryan et la matrice de cosinus directeur

Il existe bien évidemment des formules pour convertir les angles d'Euler (nous ne présentons que les cas des angles de Tait-Bryan) vers les matrices de cosinus directeurs et réciproquement.

Par exemple :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_b^a &= \mathbf{C}_\psi * \mathbf{C}_\theta * \mathbf{C}_\varphi \\ \begin{pmatrix} x^a \\ y^a \\ z^a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (B.1) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi & \cos \psi \sin \theta \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi \\ \sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi & \sin \psi \sin \theta \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^b \\ y^b \\ z^b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cette transformation et la transformation inverse sont présentées dans l'annexe B.1.

4.4. Vecteur de rotation

La décomposition en vecteurs propres / valeurs propres d'une matrice de rotation dans l'espace \mathbb{R}^3 , donne trois valeurs propres non nulles :

- la valeur propre 1 associée à un vecteur propre normé \mathbf{n} ,
- deux valeurs propres complexes conjuguées $e^{j\alpha}$ et $e^{-j\alpha}$ associées à deux vecteurs du plan perpendiculaire à \mathbf{n} (notés \mathbf{u} et \mathbf{v}).

L'exception est le cas de la matrice identité \mathbf{I}_3 qui a trois valeurs propres égales à 1 (ce qui correspond à $\alpha = 0$).

On a donc

$$\mathbf{n} = \mathbf{C}_b^a \mathbf{n} \quad (4.17)$$

4. Rotations dans l'espace 3D

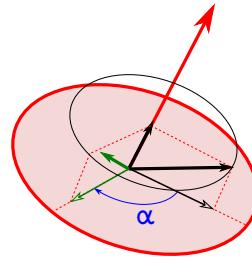


FIG. 4.5. : Décomposition d'un vecteur pour appliquer sa rotation à partir d'un vecteur de rotation

c'est à dire que le vecteur \mathbf{n} est invariant par la rotation.

L'axe défini par le vecteur \mathbf{n} est appelé **axe de rotation**.

Dans le plan perpendiculaire (défini par \mathbf{u} et \mathbf{v}), on retrouve la définition d'une rotation 2D d'angle α .

La rotation peut donc être définie par un axe (défini par un vecteur normé \mathbf{n}) et un angle α correspondant à la rotation dans le plan perpendiculaire.

Avec un vecteur normé \mathbf{n} et un angle α , on caractérise la rotation par 4 paramètres, mais cela peut être réduit à 3 paramètres en définissant le produit des deux :

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha \mathbf{n} \quad (4.18)$$

Dans la notation où le vecteur \mathbf{n} et l'angle α sont séparés, les rotations (α, \mathbf{n}) et $(-\alpha, -\mathbf{n})$ correspondent à deux rotations différentes mais dont le résultat est identique. Si seul le vecteur $\boldsymbol{\alpha}$ est conservé, les deux rotations deviennent confondues.

4.4.1. Rotation d'un vecteur

La rotation d'un vecteur via cette représentation est relativement difficile.

Prenons le cas du calcul de \mathbf{v}^a , résultat de la rotation du vecteur \mathbf{v}^b à travers une rotation d'axe \mathbf{n} et d'angle α .

Le vecteur \mathbf{v}^b à modifier peut se décomposer en deux termes. Le première selon l'axe de rotation qui est conservé dans la transformation, le second dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation qui est tourné d'un angle équivalent au module du vecteur (le terme α) (figure 4.5). Le vecteur image est recomposé comme somme des deux transformations.

Soit \mathbf{n} , le vecteur unitaire associé à la rotation, et α le module, la projection sur l'axe de rotation est $(\mathbf{v}^b \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$, et la projection dans le plan perpendiculaire est $\mathbf{v}^b - (\mathbf{v}^b \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$.

Le troisième axe, permettant de construire une base orthonormée directe est $\mathbf{n} \wedge [\mathbf{v}^b - (\mathbf{v}^b \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}]$ (on rappelle que \wedge représente le produit vectoriel).

En conséquence, la rotation du vecteur \mathbf{v}^b est

$$\mathbf{v}^a = (\mathbf{v}^b \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \cos \alpha [\mathbf{v}^b - (\mathbf{v}^b \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}] + \sin \alpha [\mathbf{n} \wedge (\mathbf{v}^b - (\mathbf{v}^b \cdot \mathbf{n})\mathbf{n})] \quad (4.19)$$

Cela mène à l'importante **formule de Rodrigues** :

$$\boxed{\mathbf{v}^a = \cos \alpha \mathbf{v}^b + \sin \alpha (\mathbf{n} \wedge \mathbf{v}^b) + (1 - \cos \alpha)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}^b)\mathbf{n}} \quad (4.20)$$

qui s'écrit aussi en fonction du vecteur $\boldsymbol{\alpha}$

$$\boxed{\mathbf{v}^a = \cos |\boldsymbol{\alpha}| \mathbf{v}^b + \frac{\sin |\boldsymbol{\alpha}|}{|\boldsymbol{\alpha}|} (\boldsymbol{\alpha} \wedge \mathbf{v}^b) + \frac{(1 - \cos |\boldsymbol{\alpha}|)}{|\boldsymbol{\alpha}|^2} (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{v}^b) \boldsymbol{\alpha}} \quad (4.21)$$

Formellement, la formule de Rodrigues a une grande importance car elle permet d'exprimer de façon efficace des approximations numériques d'intégrales de vitesse de rotation qui apparaissent dans les systèmes inertiels.

4.4.2. Représentation matricielle de la formule de Rodrigues

Pour son utilisation, il est pratique d'exprimer la formule de Rodrigues sous forme matricielle.

Soit les représentations explicites des vecteurs $\boldsymbol{\alpha}$ et \mathbf{n}

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

les matrices suivantes sont définies :

- tout d'abord, la matrice unité :

$$\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

- puis la matrice produit tensoriel

$$[\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}^T] = \begin{pmatrix} \alpha_x \alpha_x & \alpha_x \alpha_y & \alpha_x \alpha_z \\ \alpha_y \alpha_x & \alpha_y \alpha_y & \alpha_y \alpha_z \\ \alpha_z \alpha_x & \alpha_z \alpha_y & \alpha_z \alpha_z \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

- et enfin, la matrice équivalente au produit vectoriel

$$[\boldsymbol{\alpha} \wedge] = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_z & \alpha_y \\ \alpha_z & 0 & -\alpha_x \\ -\alpha_y & \alpha_x & 0 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

4. Rotations dans l'espace 3D

Il est alors facile de montrer que la formule de Rodrigues s'exprime sous forme matricielle (et donc à travers les matrices de cosinus directeurs) :

$$C_b^a = \cos |\alpha| I_3 + \frac{1 - \cos |\alpha|}{|\alpha|^2} [\alpha \alpha^T] + \frac{\sin |\alpha|}{|\alpha|} [\alpha \wedge] \quad (4.26)$$

ou avec des matrices similaires

$$C_b^a = \cos \alpha I_3 + (1 - \cos \alpha) [n n^T] + \sin \alpha [n \wedge] \quad (4.27)$$

4.4.3. Représentation en exponentielle de matrice de la formule de Rodrigues

Il existe une forme encore plus élégante de représentation de la formule de Rodrigues, via l'exponentielle de matrices.

Définition et propriétés principales des exponentielles de matrice

L'exponentielle d'une matrice \mathbf{C} , quand elle existe, est définie par la série infinie² :

$$e^{\mathbf{C}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{C}^n \quad (4.28)$$

L'exponentielle matricielle a, malheureusement, moins de propriétés intéressantes que l'exponentielle d'un nombre réel ou complexe.

En particulier,

$$e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} \neq e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} \quad (4.29)$$

sauf si \mathbf{A} et \mathbf{B} commutent c'est à dire $(\mathbf{AB} - \mathbf{BA}) = \mathbf{0}$

La principale propriété, utilisée par la suite, est le fait que l'équation différentielle où l'inconnue \mathbf{X} peut être vectorielle ou matricielle avec pour condition initiale $\mathbf{X}(t=0) = \mathbf{X}_0$:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X} = \mathbf{AX} \quad (4.30)$$

a pour solution

$$\mathbf{X} = e^{\mathbf{At}} \mathbf{X}_0 \quad (4.31)$$

si \mathbf{A} ne dépend pas de t ,

Réciproquement, l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X} = \mathbf{XA} \quad (4.32)$$

²Qui, rappelons le, est le développement de Taylor de la fonction exponentielle.

a pour solution

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 e^{\mathbf{A}t} \quad (4.33)$$

toujours si \mathbf{A} est constant.

Dans le cas où \mathbf{A} dépend de t , les solutions des deux équations différentielles s'écrivent sous la forme d'une série infinie relativement complexe et beaucoup moins exploitable.

Autres propriétés des exponentielles de matrices

D'autres propriétés des exponentielles de matrice sont :

- $e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$
- $e^{a\mathbf{A}} e^{b\mathbf{A}} = e^{(a+b)\mathbf{A}}$
- $e^{\mathbf{A}} e^{-\mathbf{A}} = \mathbf{I}$
- $e^{\mathbf{A}^T} = (e^{\mathbf{A}})^T$
- $e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A} + \mathbf{B} + \frac{1}{2}[\mathbf{AB}]}$

avec $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ le commutateur des matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} , c'est à dire par définition

$$[\mathbf{AB}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA} \quad (4.34)$$

Expression de la formule de Rodrigues à partir des exponentielles

Soit les trois matrices intervenant dans la formule de Rodrigues, \mathbf{I}_3 , $[\mathbf{n} \wedge]$ et $[\mathbf{nn}^T]$, en développant les matrices, il est facile de remarquer que

$$[\mathbf{n} \wedge] = \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

$$[\mathbf{n} \wedge]^2 = [\mathbf{nn}^T] - \mathbf{I}_3 \quad (4.36)$$

$$[\mathbf{n} \wedge]^3 = -[\mathbf{n} \wedge] \quad (4.37)$$

Ainsi toutes les puissances de $[\mathbf{n} \wedge]$ s'écrivent comme combinaisons linéaires de \mathbf{I}_3 , $[\mathbf{n} \wedge]$ et $[\mathbf{nn}^T]$.

De plus, en utilisant les développements limités des fonctions sinus et cosinus et la définition de l'exponentielle de matrice il est relativement aisé de prouver que

$$C_b^a = e^{\alpha[\mathbf{n} \wedge]} = e^{[\boldsymbol{\alpha} \wedge]} \quad (4.38)$$

Cette formule permet de relier les matrices de rotations aux intégrales des vitesses de rotation dans les algorithmes inertIELS.

Enfin en remplaçant $[\mathbf{nn}^T]$ par $\mathbf{I}_3 + [\mathbf{n} \wedge]^2$, on a une formule alternative de la formule de Rodrigues

$$C_b^a = e^{[\mathbf{n} \wedge]} = \mathbf{I}_3 + \sin \alpha [\mathbf{n} \wedge] + (1 - \cos \alpha) [\mathbf{n} \wedge]^2 \quad (4.39)$$

4. Rotations dans l'espace 3D

ou

$$C_b^a = e^{[\alpha \wedge]} = I_3 + \frac{\sin |\alpha|}{|\alpha|} [\alpha \wedge] + \frac{1 - \cos |\alpha|}{|\alpha|^2} [\alpha \wedge]^2 \quad (4.40)$$

4.4.4. Opérations à partir des matrices des cosinus directeurs

Inversion

L'inverse du vecteur rotation α est le vecteur $-\alpha$.

Composition de deux rotations

Si les deux rotations partagent le même axe, il suffit d'additionner les angles. Sinon, il n'y a pas de formules simples pour le cas général : il est souhaitable de passer par les quaternions.

rotation d'un vecteur

C'est l'application de la formule de Rodrigues, équation 4.26

4.4.5. Avantages de la représentation

Le principal avantage de la représentation en vecteur de rotation est la compacité de la représentation : seulement trois coefficients.

De plus, tout vecteur à trois composantes peut représenter une rotation selon les conventions précédentes.

Parmi les autres avantages, l'unicité de la représentation, le sens physique et la compacité de la représentation peuvent être mentionnées.

Dans quelques cas, en particulier si l'axe de rotation est constant, les formules peuvent être rapides.

4.4.6. Inconvénients de la représentation

Cette représentation possède malgré tout un certain nombre d'inconvénients.

Le principal est la difficulté mathématique d'exprimer la rotation d'un vecteur et surtout la composition de deux vecteurs.

Si la dérivation temporelle d'une rotation est facile dans cette représentation si l'axe est fixe, ce n'est pas le cas pour un axe mobile.

4.4.7. Transformations vers d'autres représentations

Elle sont représentées en annexe B.2.2

4.5. Quaternions

La représentation par vecteurs de rotation est surtout importante pour la résolution formelle des équations et pour certaines approximations qui sont vu dans le chapitre sur la mécanisation (tome 2 du polycopié).

La représentation des rotations par les quaternions en revanche possède un grand intérêt d'implémentation étant numériquement relativement stable et efficace.

4.5.1. Définition des quaternions

Les quaternions sont une extension des nombres complexes selon quatre dimensions.

Ils représentent un espace vectoriel à quatre dimensions munis d'un algèbre composé de l'addition et du produit.

Une base orthonormée des quaternions correspond au réel 1 et à trois nombres complexes notés i , j et k .

Les propriétés fondamentales des quaternions permettant de calculer le produit de deux quaternions se résument par la loi produit des nombres imaginaires :

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \quad (4.41)$$

dont est déduit la table de multiplication suivante :

$1*1=1$	$1i = i$	$1j = j$	$1k = k$
$i1 = i$	$i^2 = -1$	$ij = k$	$ik = -j$
$j1 = j$	$ji = -k$	$j^2 = -1$	$jk = i$
$k1 = k$	$ki = j$	$kj = -i$	$k^2 = -1$

Le quaternion q est représenté par les 4 composantes sur la base $\{1, i, j, k\}$ sous la forme d'un quadruplet

$$\mathbf{q} = (w, x, y, z) \quad (4.42)$$

ce qui correspond à

$$\boxed{\mathbf{q} = w + xi + yj + zk} \quad (4.43)$$

Une représentation alternative pratique est de le représenter sous la forme d'un couple composé d'un scalaire w **partie réelle du quaternion** et du vecteur

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

partie vectorielle du quaternion sous la forme

$$\boxed{\mathbf{q} = (w, \mathbf{v})} \quad (4.45)$$

4. Rotations dans l'espace 3D

4.5.2. Propriétés des quaternions

Définissons d'abord les propriétés principales des quaternions.

Soit

$$\mathbf{q}_a = (w_a, x_a, y_a, z_a) = (w_a, \mathbf{v}_a) \quad (4.46)$$

et

$$\mathbf{q}_b = (w_b, x_b, y_b, z_b) = (w_b, \mathbf{v}_b) \quad (4.47)$$

Somme de deux quaternions

La somme de deux quaternions est intuitive

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_a + \mathbf{q}_b &= (w_a + w_b, x_a + x_b, y_a + y_b, z_a + z_b) \\ &= (w_a + w_b, \mathbf{v}_a + \mathbf{v}_b) \end{aligned} \quad (4.48)$$

Norme d'un quaternion

La norme d'un quaternion est elle aussi intuitive

$$|\mathbf{q}_a| = \sqrt{w_a^2 + x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} = \sqrt{w_a^2 + |\mathbf{v}_a|^2} \quad (4.49)$$

Conjugué d'un quaternion

Comme pour les complexes, le conjugué peut être défini,

$$\bar{\mathbf{q}}_a = (w_a, -x_a, -y_a, -z_a) = (w_a, -\mathbf{v}_a) \quad (4.50)$$

Inverse d'un quaternion

Ainsi que l'inverse

$$\mathbf{q}_a^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{q}}_a}{|\mathbf{q}_a|} \quad (4.51)$$

Bien évidemment, une fois que le produit de deux quaternions est défini

$$\mathbf{q}_a^{-1} \mathbf{q}_a = \mathbf{q}_a \mathbf{q}_a^{-1} = 1 \quad (4.52)$$

Produit de deux quaternions

La formule est un peu plus complexe, mais résulte directement des produits des nombres imaginaires présentés table de la section 4.5.1.

Un point important est que comme les matrices et les rotations le produit de deux quaternions n'est pas commutatif

$$\mathbf{q}_a \mathbf{q}_b \neq \mathbf{q}_b \mathbf{q}_a \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_a \mathbf{q}_b &= (w_a w_b - x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b) \\ &\quad (w_a x_b + x_a w_b + y_a z_b - z_a y_b) i \\ &\quad (w_a y_b - x_a z_b + y_a w_b + z_a x_b) j \\ &\quad (w_a z_b + x_a y_b - y_a x_b + z_a w_b) k \end{aligned} \quad (4.54)$$

Le produit est un peu plus facile à retenir dans la représentation vectorielle

$$\mathbf{q}_a \mathbf{q}_b = (w_a w_b - (\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{v}_b), w_a \mathbf{v}_b + w_b \mathbf{v}_a + \mathbf{v}_a \wedge \mathbf{v}_b) \quad (4.55)$$

4.5.3. Relation des quaternions avec les rotations

Le lien entre les rotations et les quaternions est que l'on peut associer une correspondance entre les quaternions **normés** et les rotations dans \mathbb{R}^3 .

De plus, les compositions de matrices de rotations ainsi que la rotation d'un vecteur par une matrice peuvent être représentées par des produits de quaternions relativement simples.

Ce qui pourrait n'être qu'une curiosité mathématique correspond à un réel intérêt applicatif car les opérations sur les quaternions sont plus stables (et parfois plus rapides) que les opérations sur les matrices.

De plus, les interpolations entre deux rotations sont plus simples à faire à partir de quaternions.

La rotation définie par le couple (α, \mathbf{n}) est équivalente avec le quaternion **normé**

$$\mathbf{q} = \left(\cos \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2} \mathbf{n} \right) \quad (4.56)$$

Il peut être représenté à partir du vecteur $\boldsymbol{\alpha}$ mais de manière moins élégante

$$\mathbf{q} = \left(\cos \frac{|\boldsymbol{\alpha}|}{2}, \frac{\sin \frac{|\boldsymbol{\alpha}|}{2}}{|\boldsymbol{\alpha}|} \boldsymbol{\alpha} \right) \quad (4.57)$$

Par ailleurs, dans les calculs par quaternion, le réel a est représenté par le quaternion réel $\mathbf{q}_a = (a, \mathbf{0})$ et le vecteur \mathbf{v} est représenté par le quaternion $\mathbf{q}_v = (0, \mathbf{v})$.

4.5.4. Composition de deux rotations

La composition de deux rotations \mathbf{C}_c^b puis \mathbf{C}_c^a est représentée par le produit matriciel

$$\mathbf{C}_c^a = \mathbf{C}_c^a \mathbf{C}_c^b \quad (4.58)$$

4. Rotations dans l'espace 3D

Si \mathbf{q}_b^a est le quaternion associé à \mathbf{C}_b^a et \mathbf{q}_c^b est le quaternion associé à \mathbf{C}_c^b , alors nous avons

$$\mathbf{q}_c^a = \mathbf{q}_b^a \mathbf{q}_c^b \quad (4.59)$$

4.5.5. Rotation inverse

Si \mathbf{q}_b^a est associé à \mathbf{C}_b^a , alors $\mathbf{C}_a^b = (\mathbf{C}_b^a)^{-1} = (\mathbf{C}_b^a)^T$ est associé

$$\mathbf{q}_a^b = \bar{\mathbf{q}}_b^a = (\mathbf{q}_b^a)^{-1} \quad (4.60)$$

Nous rappelons que compte tenu de la définition de l'inverse d'un quaternion, comme les quaternions associés aux rotations sont normés, nous avons dans ce cas particulier

$$|\mathbf{q}| = 1 \implies \mathbf{q}^{-1} = \bar{\mathbf{q}} \quad (4.61)$$

4.5.6. Rotation d'un vecteur

La rotation d'un vecteur \mathbf{v} est moins intuitive :

L'équivalent de $\mathbf{v}^a = \mathbf{C}_b^a \mathbf{v}^b$ est en quaternion

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{\mathbf{v}}^a &= \mathbf{q}_b^a \mathbf{q}_{\mathbf{v}}^b \bar{\mathbf{q}}_b^a \\ &= \mathbf{q}_b^a \mathbf{q}_{\mathbf{v}}^b (\mathbf{q}_b^a)^{-1} \\ &= \mathbf{q}_b^a \mathbf{q}_{\mathbf{v}}^b \mathbf{q}_a^b \end{aligned} \quad (4.62)$$

4.5.7. Avantages des quaternions

Comme pour les vecteurs de rotations ou les angles d'Euler, les quaternions correspondent à une représentation relativement compacte des rotations.

Le principal avantage reste néanmoins l'absence de "blocage de Cardan" (les dégénérescences des angles d'Euler), contrairement à ces derniers, et la possibilité de faire des interpolations.

De plus, par rapport aux matrices de rotations, les calculs sont plus stables. Ils sont aussi plus rapides quand il s'agit de faire des produits de deux rotations (mais en revanche légèrement plus lents sur le calcul de la rotation d'un vecteur).

4.5.8. Inconvénients des quaternions

Malgré tout, bien que moins difficile que pour les matrices, lors de longs calculs, il est nécessaire de renormaliser les quaternions pour garantir qu'ils restent représentatifs de rotations même en présence de bruit numérique.

Enfin, le quaternion n'est pas unique pour une rotation donnée :

Soit le vecteur rotation $\alpha\mathbf{n}$, il est représenté par le quaternion \mathbf{q} .

$$\mathbf{q} = \left(\cos \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2} \mathbf{n} \right) \quad (4.63)$$

Si par contre, on s'intéresse au quaternion $-\mathbf{q}$, nous avons

$$\begin{aligned} -\mathbf{q} &= \left(-\cos \frac{\alpha}{2}, -\sin \frac{\alpha}{2} \mathbf{n} \right) \\ &= \left(\cos \left(\frac{\alpha}{2} + \pi \right), \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \pi \right) \mathbf{n} \right) \\ &= \left(\cos \frac{\alpha + 2\pi}{2}, \sin \frac{\alpha + 2\pi}{2} \mathbf{n} \right) \end{aligned} \quad (4.64)$$

Le quaternion opposé est donc associé au vecteur de rotation $(\alpha + 2\pi)\mathbf{n}$ qui possède le même effet que la rotation initiale.

5. Eléments de cinématique

5.1. Introduction

Dans les chapitres précédents, les notions de référentiels et de transformations (translation et rotation) ont été abordées dans le cas statique (implicitement, les repères de référence sont fixes entre eux). Dans ce chapitre, les différents référentiels (liés à des objets) sont mobiles et donc les transformations varient dans le temps.

Dans l'étude des systèmes inertiels, ce point est essentiel car la majorité des capteurs utilisés actuellement sont fixes par rapport au véhicule (les mesures inertielles sont effectuées dans le référentiel "body"), alors que toutes les équations de la dynamique ne s'appliquent sans modification que dans un référentiel inertiel. Ainsi, il est nécessaire de "transporter" les équations d'un référentiel à un autre en permanence.

5.2. Dérivée temporelle d'un changement de repère

Soit deux référentiels, le référentiel \mathcal{F}_a supposé global et le référentiel \mathcal{F}_b supposé local.

Soit un point X_c , ses coordonnées sont "transportées" entre les deux référentiels par

$$\mathbf{x}_c^a = \mathbf{o}_b^a + \mathbf{C}_b^a \mathbf{x}_c^b \quad (5.1)$$

Si à la fois le point X_c se déplace dans \mathcal{F}_b et le référentiel \mathcal{F}_b se déplace par rapport à \mathcal{F}_a , alors il existe une dépendance en temps entre tous les termes

$$\mathbf{x}_c^a(t) = \mathbf{o}_b^a(t) + \mathbf{C}_b^a(t) \mathbf{x}_c^b(t) \quad (5.2)$$

La dérivée temporelle de l'équation précédente peut être estimée par dérivation terme à terme

$$\frac{d\mathbf{x}_c^a(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{o}_b^a(t)}{dt} + \frac{d\mathbf{C}_b^a(t)}{dt} \mathbf{x}_c^b + \mathbf{C}_b^a(t) \frac{d\mathbf{x}_c^b(t)}{dt} \quad (5.3)$$

équation "allégée" grâce à la notation pointée

$$\frac{d\mathbf{x}_c^a(t)}{dt} \rightarrow \dot{\mathbf{x}}_c^a \quad (5.4)$$

$$\frac{d^2\mathbf{x}_c^a(t)}{dt^2} \rightarrow \ddot{\mathbf{x}}_c^a \quad (5.5)$$

et donc

$$\dot{\mathbf{x}}_c^a = \dot{\mathbf{o}}_b^a + \dot{\mathbf{C}}_b^a \mathbf{x}_c^b + \mathbf{C}_b^a \dot{\mathbf{x}}_c^b \quad (5.6)$$

5. Eléments de cinématique

5.2.1. Représentation des dérivées vectorielles

On peut remarquer que la dérivée du point x_c par rapport au temps apparaît deux fois : \dot{x}_c^a et \dot{x}_c^b .

- \dot{x}_c^a représente la vitesse du point X_c dans le repère global \mathcal{F}_a ,
- \dot{x}_c^b représente la vitesse de ce même point dans le repère local \mathcal{F}_b

Dans les deux cas, il s'agit d'un vecteur vitesse, **mais certainement pas du même vecteur vitesse**

Si le repère \mathcal{F}_b est mobile par rapport au repère \mathcal{F}_a , alors la vitesse du point X_c dans \mathcal{F}_a n'est pas celle de X_c dans \mathcal{F}_b

Ainsi quand les repères sont mobiles, les vitesses sont définies par rapport au référentiel, et donc la notation \dot{x}_c^a est ambiguë car on ne sait pas si on a affaire aux coordonnées de la vitesse de X_c par rapport à \mathcal{F}_a dans le repère \mathcal{F}_a ou de la vitesse de X_c par rapport à \mathcal{F}_b , exprimée dans \mathcal{F}_a , c'est à dire $C_b^a \dot{x}_c^b$.

Ainsi dans les notations, il est indispensable de préciser par rapport à quel référentiel est mesurée une vitesse, sachant que ce n'est pas forcément le référentiel dans lequel les coordonnées sont exprimées.

Ainsi, les coordonnées dans le repère \mathcal{F}_b du vecteur vitesse d'un point X_c par rapport à un référentiel \mathcal{F}_a est noté dans la suite du document v_{ac}^b

La notation pointée est réservé au cas où la référence de dérivation celle de représentation sont confondues, c'est à dire

$$\begin{aligned}\dot{x}_c^a &= v_{ac}^a \\ \dot{x}_c^b &= v_{bc}^b\end{aligned}\tag{5.7}$$

5.2.2. Dérivée des rotations

Dans l'équation 5.6 intervient aussi la dérivée de la rotation \dot{C}_b^a . La dérivée d'une rotation a un ensemble de propriétés importantes.

Pour l'étudier, nous devons remonter à la définition d'une dérivée :

$$\dot{C}_b^a(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{C_b^a(t + \delta t) - C_b^a(t)}{\delta t}\tag{5.8}$$

Comme à la fois $C_b^a(t + \delta t)$ et $C_b^a(t)$ sont des rotations, et que ces dernières forment un groupe, il existe une rotation qui permet de passer de l'une à l'autre. En notant cette dernière $S(t, \delta t)$, on a

$$C_b^a(t + \delta t) = S(t, \delta t) C_b^a(t)\tag{5.9}$$

et donc

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{C}}_b^a(t) &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{C}_b^a(t + \delta t) - \mathbf{C}_b^a(t)}{\delta t} \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{S}(t, \delta t) \mathbf{C}_b^a(t) - \mathbf{C}_b^a(t)}{\delta t} \\ &= \left[\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{S}(t, \delta t) - \mathbf{I}}{\delta t} \right] \mathbf{C}_b^a(t)\end{aligned}\quad (5.10)$$

Notons

$$\boldsymbol{\Omega}_{ab}^a(t) = \left[\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{S}(t, \delta t) - \mathbf{I}}{\delta t} \right] \quad (5.11)$$

Cette matrice est appelée **matrice de taux de rotation (rotation rate matrix)**. Elle caractérise la dérivée d'une rotation, mais n'est pas elle-même une rotation.

Une relation fondamentale en est déduite

$$\boxed{\dot{\mathbf{C}}_b^a(t) = \boldsymbol{\Omega}_{ab}^a(t) \mathbf{C}_b^a(t)} \quad (5.12)$$

ou, inversement, en multipliant les deux termes de l'égalité par \mathbf{C}_a^b

$$\boxed{\boldsymbol{\Omega}_{ab}^a(t) = \dot{\mathbf{C}}_b^a(t) \mathbf{C}_a^b(t)} \quad (5.13)$$

L'équation 5.12 a aussi une représentation alternative en changeant le repère de $\boldsymbol{\Omega}_{ab}^a$.

Comme

$$\boldsymbol{\Omega}_{ab}^a = \mathbf{C}_b^a \boldsymbol{\Omega}_{ab}^b \mathbf{C}_a^b \quad (5.14)$$

on a aussi,

$$\boxed{\dot{\mathbf{C}}_b^a = \mathbf{C}_b^a \boldsymbol{\Omega}_{ab}^b} \quad (5.15)$$

et

$$\boxed{\boldsymbol{\Omega}_{ab}^b = \mathbf{C}_a^b \dot{\mathbf{C}}_b^a} \quad (5.16)$$

5.2.3. Propriétés de la matrice de vitesse de rotation

La matrice $\boldsymbol{\Omega}_{ab}^a$ est une matrice **antisymétrique (skew-symmetric)**.

Pour le prouver, il suffit de dériver le produit $\mathbf{C}_b^a \mathbf{C}_a^b$:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_b^a \mathbf{C}_a^b &= \mathbf{I}_3 \\ \frac{d}{dt} (\mathbf{C}_b^a \mathbf{C}_a^b) &= 0 \\ \dot{\mathbf{C}}_b^a \mathbf{C}_a^b + \mathbf{C}_b^a \dot{\mathbf{C}}_a^b &= 0 \\ \dot{\mathbf{C}}_b^a \mathbf{C}_a^b + (\dot{\mathbf{C}}_b^a \mathbf{C}_a^b)^T &= 0 \\ \boldsymbol{\Omega}_{ab}^a + (\boldsymbol{\Omega}_{ab}^a)^T &= 0\end{aligned}\quad (5.17)$$

5. Eléments de cinématique

En conséquence, la matrice associée à Ω_{ab}^a , s'écrit sous la forme d'une matrice 3 par 3 anti-symétrique

$$\Omega_{ab}^a = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

avec a , b et c trois scalaires.

En notant les trois scalaires respectivement $-\omega_z$, ω_y et $-\omega_x$, on montre qu'il existe un vecteur ω_{ab}^a

$$\omega_{ab}^a = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

tel que

$$\forall \mathbf{v}^a \in \mathbb{R}^3 \quad \Omega_{ab}^a \mathbf{v}^a = \omega_{ab}^a \wedge \mathbf{v}^a \quad (5.20)$$

Ce vecteur est appelé **Vecteur de taux de rotation** et la relation avec la matrice de vitesse de rotation est

$$\Omega_{ab}^a = [\omega_{ab}^a \wedge] = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

Le vecteur taux de rotation a pour unité des radians par seconde (rad/s).

En résumé, la dérivée temporelle d'une rotation s'exprime en fonction du vecteur taux de rotation exprimé soit dans le repère \mathcal{F}_a , soit dans le repère \mathcal{F}_b avec les relations :

$$\dot{\mathbf{C}}_b^a = \Omega_{ab}^a \mathbf{C}_b^a = [\omega_{ab}^a \wedge] \mathbf{C}_b^a \quad (5.22)$$

et

$$\dot{\mathbf{C}}_b^a = \mathbf{C}_b^a \Omega_{ab}^b = \mathbf{C}_b^a [\omega_{ab}^b \wedge] \quad (5.23)$$

C'est ce vecteur qui est mesuré par les gyromètres d'une centrale inertielle.

5.2.4. Dérivation des rotations selon les différentes représentations

Comme précédemment, la dérivée d'une rotation peut être exprimée pour les différentes représentations des rotations. Elles sont détaillées en annexe C.

Cependant, il est malgré tout important de mentionner ici la relation entre le vecteur taux de rotation et la dérivée des quaternions (démonstration en annexe).

$$\omega_{ab}^a = 2\dot{\mathbf{q}}_b^a \bar{\mathbf{q}}_b^a = 2\dot{\mathbf{q}}_b^a \mathbf{q}_a^b \quad (C.19)$$

et

$$\dot{\mathbf{q}}_b^a = \frac{1}{2} \omega_{ab}^a \mathbf{q}_b^a \quad (C.20)$$

5.3. Dérivation du changement de référentiel

Muni de la dérivation des rotations, l'équation de dérivation temporelle 5.1 de la relation entre des référentiels mobiles peut être établie.

En repartant de l'équation 5.1

$$\mathbf{x}_c^a = \mathbf{o}_b^a + \mathbf{C}_b^a \mathbf{x}_c^b \quad (5.24)$$

et en la dérivant, est obtenu

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{ac}^a &= \mathbf{v}_{ab}^a + \boldsymbol{\omega}_{ab}^a \wedge (\mathbf{C}_b^a \mathbf{x}_c^b) + \mathbf{v}_{bc}^a \\ &= \mathbf{v}_{ab}^a + \boldsymbol{\omega}_{ab}^a \wedge \mathbf{x}_c^a + \mathbf{v}_{bc}^a \end{aligned} \quad (5.25)$$

avec \mathbf{v}_{ab}^a la vitesse de l'origine de \mathcal{F}_b , \mathbf{o}_b^a . ou de façon plus matricielle

$$\mathbf{v}_{ac}^a = \mathbf{v}_{ab}^a + \boldsymbol{\Omega}_{ab}^a \mathbf{C}_b^a \mathbf{x}_c^a + \mathbf{v}_{bc}^a \quad (5.26)$$

Dans le cas très courant où les origines de \mathcal{F}_a et \mathcal{F}_b restent confondues au cours du temps ($\mathbf{o}_b^a = \mathbf{0}_3$ et $\mathbf{v}_{ab}^a = \mathbf{0}_3$) (c'est effectivement le cas entre le repère ECI et le repère terrestre ECEF, ainsi qu'entre le repère de navigation et le repère body), la formule se simplifie légèrement et est connue sous le nom de **Formule de Bour**

$$\boxed{\mathbf{v}_{ac}^a = \boldsymbol{\omega}_{ab}^a \wedge \mathbf{x}_c^a + \mathbf{v}_{bc}^a} \quad (5.27)$$

Dans cette équation :

- la vitesse \mathbf{v}_{ac}^a est la vitesse absolue de X_c dans le repère \mathcal{F}_a ,
- la vitesse \mathbf{v}_{bc}^a est la vitesse relative de X_c dans le repère \mathcal{F}_b ,
- la vitesse $\boldsymbol{\omega}_{ab}^a \wedge \mathbf{x}_c^a$ due à la rotation de \mathcal{F}_b par rapport à \mathcal{F}_a est la **vitesse d'entraînement**.

5.3.1. Remarque sur la dérivée du vecteur taux de rotation

La dérivée du vecteur rotation $\boldsymbol{\omega}_{ab}^a$ est aussi un vecteur vitesse sur lequel on peut appliquer l'équation de Bour, ainsi, nous avons $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{a|ab}^a$ et $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{b|ab}^a$ avec

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{a|ab}^a = \boldsymbol{\omega}_{ab}^a \wedge \boldsymbol{\omega}_{ab}^a + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{b|ab}^a \quad (5.28)$$

Or compte tenu que le terme $\boldsymbol{\omega}_{ab}^a \wedge \boldsymbol{\omega}_{ab}^a$ vaut 0, nous avons

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{a|ab}^a = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{b|ab}^a \quad (5.29)$$

Ainsi, la variation du taux de rotation reste le même dans les deux référentiels, ce qui justifie le fait de garder la notation $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ab}^a$

5.4. Dérivée seconde d'un changement de repère

La dérivée première donne l'équation 5.25

$$\dot{\mathbf{v}}_{ac}^a = \dot{\mathbf{v}}_{ab}^a + \omega_{ab}^a \wedge \mathbf{C}_b^a \mathbf{x}_c^b + \mathbf{C}_b^a \dot{\mathbf{v}}_{bc}^b \quad (5.25)$$

L'équation peut être dérivée une seconde fois

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{v}}_{ac}^a &= \ddot{\mathbf{v}}_{ab}^a + \dot{\omega}_{ab}^a \wedge (\mathbf{C}_b^a \mathbf{x}_c^b) + \omega_{ab}^a \wedge (\dot{\mathbf{C}}_b^a \mathbf{x}_c^b) + \omega_{ab}^a \wedge (\mathbf{C}_b^a \dot{\mathbf{x}}_c^b) + \dot{\mathbf{C}}_b^a \mathbf{v}_{bc}^b + \mathbf{C}_b^a \dot{\mathbf{v}}_{bc}^b \\ &= \ddot{\mathbf{v}}_{ab}^a + \dot{\omega}_{ab}^a \wedge (\mathbf{C}_b^a \mathbf{x}_c^b) + \omega_{ab}^a \wedge (\omega_{ab}^a \wedge (\mathbf{C}_b^a \mathbf{x}_c^b)) + 2\omega_{ab}^a \wedge (\mathbf{C}_b^a \mathbf{v}_{bc}^b) + \mathbf{C}_b^a \dot{\mathbf{v}}_{bc}^b \end{aligned} \quad (5.30)$$

En posant la notation¹ qui définit l'**accelération**

$$\ddot{\mathbf{v}}_{ac}^a = \mathbf{a}_{ac}^a \quad (5.31)$$

La relation précédente devient

$$\mathbf{a}_{ac}^a = \mathbf{a}_{ab}^a + \dot{\omega}_{ab}^a \wedge (\mathbf{C}_b^a \mathbf{x}_c^b) + \omega_{ab}^a \wedge (\omega_{ab}^a \wedge (\mathbf{C}_b^a \mathbf{x}_c^b)) + 2\omega_{ab}^a \wedge (\mathbf{C}_b^a \mathbf{v}_{bc}^b) + \mathbf{C}_b^a \mathbf{a}_{bc}^b \quad (5.32)$$

Toujours dans le cas, où les origines des deux repères restent confondues mais aussi que la vitesse de rotation reste constante, l'équation se simplifie en

$$\mathbf{a}_{ac}^a = \omega_{ab}^a \wedge (\omega_{ab}^a \wedge \mathbf{x}_c^a) + 2\omega_{ab}^a \wedge \mathbf{v}_{bc}^a + \mathbf{a}_{bc}^a \quad (5.33)$$

Comme pour la formule de Bour, les différents termes ont la signification suivante :

- \mathbf{a}_{ac}^a est l'accélération de X_c dans le référentiel global,
- \mathbf{a}_{ac}^b est l'accélération de X_c dans le référentiel local,
- $\omega_{ab}^a \wedge (\omega_{ab}^a \wedge \mathbf{x}_c^a)$ est une **accélération centripète** liée à l'accélération apparente de X_c due au mouvement de \mathcal{F}_b ,
- $2\omega_{ab}^a \wedge \mathbf{v}_{bc}^a$ est appelée **accélération de Coriolis**. Elle traduit une accélération apparente dans le référentiel \mathcal{F}_a quand le point X_c se déplace dans \mathcal{F}_b .

5.5. Conséquences sur l'équation de la dynamique

Dans un repère “inertiel”, les corps solides suivent la **seconde loi de Newton** (aussi appelée **principe fondamental de la dynamique**) ou encore **loi de conservation de la quantité de mouvement** :

$$\sum f^i = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}^i) \quad (5.34)$$

¹Dans le document, les dérivées temporelles de la position puis de la vitesse seront toujours par rapport au même repère, sinon il serait nécessaire d'avoir des notations plus complexes.

5.5. Conséquences sur l'équation de la dynamique

avec $\sum f^i$, l'ensemble des forces qui s'appliquent sur le corps.

Dans le cas très général où la masse du corps est constante, $\frac{dm}{dt} = 0$, la forme plus connue est

$$\sum f^i = m \mathbf{a}^i \quad (5.35)$$

avec \mathbf{a} l'accélération du corps :

$$\mathbf{a}^i = \frac{d\mathbf{v}^i}{dt} \quad (5.36)$$

5.5.1. Remarque importante sur les notations

Dans le domaine de l'inertiel, deux notations importantes sont utilisées :

- on sépare toujours dans l'ensemble des forces, la force issue du champ de gravitation γ^i , de l'ensemble des autres forces,
- on utilise la force massique $\mathbf{f} = \frac{1}{m} \mathbf{f}$ (qui est homogène à une accélération).

Les forces massiques hors accélération de gravitation sont appelées **forces spécifiques**.

Selon les notations usuelles en inertiel, la seconde loi de Newton s'écrit donc

$$\sum \mathbf{f}^i + \boldsymbol{\gamma}^i = \mathbf{a}^i \quad (5.37)$$

Dans un repère inertiel, l'accélération du corps est égale à la somme des forces spécifiques et de l'accélération de gravitation.

5.5.2. Equation de la dynamique dans un référentiel non inertiel

En revanche, dans un repère qui n'est pas inertiel, les formules sont modifiées compte tenu des formules de changement de repères vu précédemment.

Pour étudier comment les forces sont transformées, on peut partir d'un repère global \mathcal{F}_a global, supposé inertiel donc tel que pour un objet C de masse m soumis à un ensemble de forces spécifiques $\sum \mathbf{f}$ et de l'accélération de pesanteur $\boldsymbol{\gamma}$,

$$\sum \mathbf{f}_c^a + \boldsymbol{\gamma}_c^a = \mathbf{a}_{ac}^a \quad (5.38)$$

et un repère local \mathcal{F}_b , mobile par rapport à \mathcal{F}_a et pas forcément inertiel.

Il peuvent être le référentiel ECI (Earth Centered Inertial) qui est "suffisamment proche" d'un référentiel inertiel pour nos besoins, et le repère ECEF (Earth Centered Earth Fixed) qui a une origine commune au repère ECI et qui peut être assimilé à un repère en rotation constante par rapport au repère ECI.

En reprenant l'équation précédente dans le cas simplifié **d'origine confondue et de vitesse de rotation constante**, (équation 5.33) :

5. Eléments de cinématique

$$\mathbf{a}_{ac}^a = \boldsymbol{\omega}_{ab}^a \wedge (\boldsymbol{\omega}_{ab}^a \wedge \mathbf{x}_c^a) + 2\boldsymbol{\omega}_{ab}^a \wedge \mathbf{v}_{bc}^a + \mathbf{a}_{bc}^a \quad (5.33)$$

et donc en remplaçant dans l'équation 5.38

$$\sum \mathbf{f}_c^a + \boldsymbol{\gamma}_c^a = \boldsymbol{\omega}_{ab}^a \wedge (\boldsymbol{\omega}_{ab}^a \wedge \mathbf{x}_c^a) + 2\boldsymbol{\omega}_{ab}^a \wedge \mathbf{v}_{bc}^a + \mathbf{a}_{bc}^a \quad (5.39)$$

En réarrangeant les termes, puis en calculant dans le repère \mathcal{F}_b , on obtient au final

$$\boxed{\mathbf{a}_{bc}^b = \sum \mathbf{f}_c^b + \boldsymbol{\gamma}_c^b - \boldsymbol{\omega}_{ab}^b \wedge (\boldsymbol{\omega}_{ab}^a \wedge \mathbf{x}_c^b) - 2\boldsymbol{\omega}_{ab}^a \wedge \mathbf{v}_{bc}^b} \quad (5.40)$$

En conséquence, le second principe de la dynamique, dans le repère \mathcal{F}_b est modifié par l'ajout de deux forces apparentes mais virtuelles :

- l'effet de l'accélération centripète qui apparaît comme une force centrifuge : $-\boldsymbol{\omega}_{ab}^b \wedge (\boldsymbol{\omega}_{ab}^a \wedge \mathbf{X}_c^b)$
- l'effet de la force de Coriolis, qui dépend de la vitesse de l'objet dans le référentiel mobile $-2\boldsymbol{\omega}_{ab}^a \wedge \mathbf{v}_{bc}^b$

Ces deux effets sont à prendre en compte quand les observations et les calculs sont faits dans le repère mobile ce qui est généralement le cas sur terre.

A. Formulaire sur les éléments de géodésie

A.1. Coordonnées sphériques et cylindriques

A.1.1. Relations entre le repère sphérique et le repère cartésien

Soit les coordonnées (x, y, z) dans le repère cartésien et les coordonnées (r, θ, ψ) du repère sphérique de même origine selon les conventions de la figure A.1.

Nous avons les transformations :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \psi \\ y = r \sin \theta \sin \psi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) \\ \psi = \arctan_2\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Dans les notations précédentes, nous avons utilisé la notation que l'angle θ part de l'axe z et non du plan horizontal. θ est appelé la co-latitude (cette convention est contraire à celle utilisée dans les coordonnées géographiques).

De même, $\arctan_2(y, x)$ est la notation choisie pour

$$\arctan_2(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x \geq 0 \text{ et } y < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y < 0 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

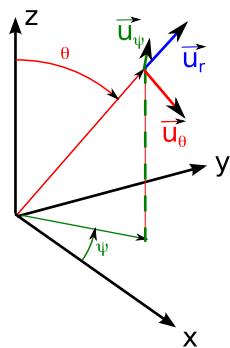


FIG. A.1. : Conventions du repère sphérique

A. Formulaire sur les éléments de géodésie

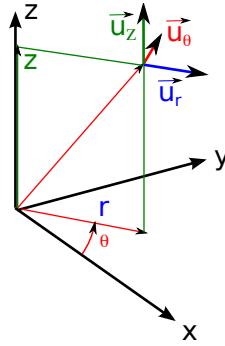


FIG. A.2. : Conventions du repère cylindrique

A.1.2. Relations entre le repère cylindrique et le repère cartésien

Soit les coordonnées (x, y, z) dans le repère cartésien et les coordonnées (r, θ, z) du repère cylindrique de même origine selon les conventions de la figure A.2.

Nous avons les transformations :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan_2(y, x) \\ z = z \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

A.2. Transformation des coordonnées géographiques de la terre

A.2.1. Caractéristique de l'ellipsoïde de référence du système géodésique WGS84

C'est un ellipsoïde de révolution aplati (oblate ellipsoid) autour de l'axe de rotation z .

Paramètres de définition

Demi grand axe : $a = 6378137,0 \text{ m}$

Applatissement : $f = 1/298.257223563$

Relation avec les autres paramètres ellipsoïdaux

Soit b le demi petit-axe, sa relation à partir de l'applatissement et le demi-grand axe est

$$b = a(1 - f) \approx 6356752.314245179 \quad (\text{A.6})$$

l'aplatissement	$f = 1 - \frac{b}{a}$	(A.7)
la première excentricité	$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \approx 0.08181919084262157$	
la seconde excentricité	$e' = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1} \approx 0.08209443794969457$	

A.2.2. Conversion des coordonnées géodésique vers ECEF

Soit la latitude Φ_b , la longitude λ_b et l'altitude h_b , les coordonnées ECEF sont :

$$\begin{aligned} R_E &= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \Phi_b}} \\ x_b^e &= (R_E + h_b) \cos \Phi_b \cos \lambda_b \\ y_b^e &= (R_E + h_b) \cos \Phi_b \sin \lambda_b \\ z_b^e &= (R_E(1 - e^2) + h_b) \sin \Phi_b \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

R_E est le rayon de courbure terrestre perpendiculairement au plan méridien.

A.2.3. Conversion des coordonnées ECEF vers géodésique

Méthode du gradient

On peut inverser la formule A.8. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \Phi_b &= \arctan \left(\frac{z_b^e(R_E(\Phi_b) + h_b)}{\sqrt{(x_b^e)^2 + (y_b^e)^2}[(1 - e^2)R_E(\Phi_b) + h_b]} \right) \\ \lambda_b &= \arctan_2(y_b^e, x_b^e) \\ h_b &= \frac{\sqrt{(x_b^e)^2 + (y_b^e)^2}}{\cos \Phi} - R_E(\Phi_b) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Dans ces formules, le rayon R_E dépend de Φ_b , il est donc nécessaire de le mettre à jour à chaque itération. De plus, comme la longitude varie entre 0 et 2π , il est nécessaire de lever l'ambiguité des quatre quadrants pour l'arc tangente de la seconde équation (fonction `atan2` ou `arctan2` dans Matlab ou Python).

A la première itération, on peut partir d'une hypothèse sphérique

$$\Phi_b = \arctan \left(\frac{z_b^e}{\sqrt{(x_b^e)^2 + (y_b^e)^2}} \right) \quad (\text{A.10})$$

D'après [Gro13], proche des pôles, il est plus précis d'utiliser

$$\begin{aligned} \Phi_b &= \frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{\sqrt{(x_b^e)^2 + (y_b^e)^2}[(1 - e^2)R_E(\Phi_b) + h_b]}{z_b^e(R_E(\Phi_b) + h_b)} \right) \\ \lambda_b &= \arctan_2(y_b^e, x_b^e) \\ h_b &= \frac{z_b^e}{\sin \Phi} - (1 - e^2)R_E(\Phi_b) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

A. Formulaire sur les éléments de géodésie

Exemple d'implémentation En terme d'implémentation, la première étape est par itération de retrouver le terme κ

$$\kappa = \frac{z_b^e(R_E(\Phi_b) + h_b)}{(1 - e^2)R_E(\Phi_b) + h_b} \quad (\text{A.12})$$

On pose :

$$p = \sqrt{(x_b^e)^2 + (y_b^e)^2}$$

$$\kappa^{(0)} = \frac{1}{1 - e^2} \quad (\text{A.13})$$

puis on itère sur k :

$$c^{(k+1)} = \frac{(p^2 + (1 - e^2)(z_b^e \kappa^{(k)})^2)^{\frac{3}{2}}}{ae^2}$$

$$\kappa^{(k+1)} = 1 + \frac{p^2 + (1 - e^2)(z_b^e)^2(\kappa^{(k+1)})^3}{c^{(k+1)} - p^2} \quad (\text{A.14})$$

Une fois la suite stoppée à l'itération k , les coordonnées sont déduites par

$$\Phi_b = \arctan\left(\frac{z_b^e \kappa^{(k)}}{p}\right)$$

$$\lambda_b = \arctan_2(y_b^e, x_b^e)$$

$$h_b = \frac{\left(\frac{1}{\kappa^{(k)}} - \frac{1}{\kappa^{(0)}}\right) \sqrt{p^2 + (z_b^e \kappa^{(k)})^2}}{e^2} \quad (\text{A.15})$$

Formule approchée de You

Près de la surface, ($|h| < 1000$ m), la formule approchée suivante par You [You00] peut être utilisée. D'après l'auteur, la précision est inférieure au centimètre.

$$\zeta = \arctan_2(z, \sqrt{1 - e^2} \sqrt{(x_b^e)^2 + (y_b^e)^2})$$

$$\Phi_b = \arctan_2\left(z_b^e + \frac{e^2}{\sqrt{1 - e^2}} a \sin^3 \zeta, \sqrt{(x_b^e)^2 + (y_b^e)^2} - e^2 a \cos^3 \zeta\right) \quad (\text{A.16})$$

$$\lambda_b = \arctan_2(y, x)$$

$$h_b = \frac{\sqrt{(x_b^e)^2 + (y_b^e)^2}}{\cos \Phi_b} - R_E(\Phi_b)$$

Formule de Ferrari

La formule de Ferrari [Ver02] est une formule exacte

$$\begin{aligned}
\zeta &= (1 - e^2) \left(\frac{z_b^e}{a} \right)^2 \\
\rho &= \frac{1}{6} \left(\frac{(x_b^e)^2 + (y_b^e)^2}{a^2} + \zeta - e^4 \right) \\
s &= \zeta \left(\frac{e^2 \sqrt{(x_b^e)^2 + (y_b^e)^2}}{2a} \right)^2 \\
t &= \left(s + \rho^3 + \sqrt{s(s + 2\rho^3)} \right)^{\frac{1}{3}} \\
u &= \rho + t + \frac{\rho^2}{t} \\
v &= \sqrt{u^2 + e^4 \zeta} \\
w &= e^2 \frac{u + v - \zeta}{2v} \\
\kappa &= 1 + e^2 \frac{w + \sqrt{u + v + w^2}}{u + v} \\
\Phi_b &= \arctan \left(\frac{z_b^e \kappa}{\sqrt{(x_b^e)^2 + (y_b^e)^2}} \right) \\
\lambda_b &= \arctan \frac{y_b^e}{x_b^e} \\
h_b &= \frac{1 - (1 - e^2)\kappa}{e^2} \sqrt{(x_b^e)^2 + (y_b^e)^2 + (z_b^e \kappa)^2}
\end{aligned} \tag{A.17}$$

A.2.4. Matrice de rotation entre les coordonnées ECEF et NED

Compte tenu de la définition du repère NED, nous pouvons calculer les matrices de rotations pour passer du repère NED au repère ECEF et inversement.

Soit un vecteur v

$$\mathbf{v}^e = \begin{pmatrix} -\sin \Phi_b \cos \lambda_b & -\sin \lambda_b & -\cos \Phi_b \cos \lambda_b \\ -\sin \Phi_b \sin \lambda_b & \cos \lambda_b & -\cos \Phi_b \sin \lambda_b \\ \cos \Phi_b & 0 & -\sin \Phi_b \end{pmatrix} \mathbf{v}^n \tag{A.18}$$

$$\mathbf{v}^n = \begin{pmatrix} -\sin \Phi_b \cos \lambda_b & -\sin \Phi_b \sin \lambda_b & \cos \Phi_b \\ -\sin \lambda_b & \cos \lambda_b & 0 \\ -\cos \Phi_b \cos \lambda_b & -\cos \Phi_b \sin \lambda_b & -\sin \lambda_b \end{pmatrix} \mathbf{v}^e \tag{A.19}$$

A.2.5. Rayon de courbure locaux

Aux coordonnées (Φ_b, λ_b, h_b) , on peut définir le rayon de courbure associé à l'ellipsoïde à la hauteur h_b , au dessus de l'ellipsoïde.

A. Formulaire sur les éléments de géodésie

À la surface de l'ellipsoïde, la courbure est caractérisée par deux rayons :

- le rayon $R_N(\Phi_b)$ selon le méridien (donc dans l'axe Nord/Sud),
- le rayon $R_E(\Phi_b)$ selon l'axe perpendiculaire (donc sur la direction locale Est/Ouest)

Le rayon de courbure $R_N(\Phi_b)$ est directement le rayon de courbure si le mobile se déplace le long d'un méridien sur la surface de l'ellipsoïde. Ainsi, pour un déplacement infinitésimal dx le long du méridien (λ constant),

$$dx = R_N(\Phi_b) d\Phi_b \quad (\text{A.20})$$

Le rayon de courbure $R_E(\Phi_b)$ est le rayon de courbure perpendiculaire au méridien sur la surface de l'ellipsoïde.

En revanche, ce n'est pas le rayon de courbure pour un déplacement dy à latitude constante. La relation est en revanche.

$$dy = R_E(\Phi_b) \cos \Phi_b d\lambda \quad (\text{A.21})$$

Les expressions des rayons de courbure sont

$$\begin{aligned} R_N(\Phi_b) &= \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \Phi_b)^{\frac{3}{2}}} \\ R_E(\Phi_b) &= \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \Phi_b}} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Si le rayon est calculé pour une altitude h_b au dessus de la surface ellipsoidale, il suffit de rajouter h_b à $R_N(\Phi_b)$ et $R_E(\Phi_b)$.

Plus généralement, si le mobile se déplace dans le repère NED selon un cap ψ , le rayon de courbure le long de son déplacement est alors

$$R = \left(\frac{\cos^2 \psi}{R_N} + \frac{\sin^2 \psi}{R_E} \right)^{-1} \quad (\text{A.23})$$

A.2.6. Relation entre la vitesse dans le repère de navigation et les coordonnées géodétiques

Les variations des latitudes / longitudes / altitudes en fonction des vitesses exprimées dans le repère de navigation NED ($v_{eb,N}^n, v_{eb,E}^n, v_{eb,d}^n$) (correspondants aux composantes vitesses Nord, Est, Bas) sont

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_b &= \frac{v_{eb,N}^n}{R_N(\Phi_b) + h_b} \\ \dot{\lambda}_b &= \frac{v_{eb,E}^n}{(R_E(\Phi_b) + h_b) \cos \Phi_b} \\ \dot{h}_b &= -v_{eb,d}^n \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

A.2.7. Vitesse de rotation du repère NED en fonction de la vitesse du mobile

Comme le repère de navigation NED est un repère local, son orientation varie avec la position du mobile.

La vitesse de rotation du repère NED peut donc être exprimée en fonction de la vitesse du mobile. Elle s'exprime sous la forme

$$\dot{\mathbf{C}}_e^n = -\boldsymbol{\Omega}_{en}^n \mathbf{C}_e^n \quad (\text{A.25})$$

avec $\boldsymbol{\Omega}_{en}^n$ une matrice antisymétrique

$$\boldsymbol{\Omega}_{en}^n = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{en,z}^n & \omega_{en,y}^n \\ \omega_{en,z}^n & 0 & -\omega_{en,x}^n \\ -\omega_{en,y}^n & \omega_{en,x}^n & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.26})$$

et

$$\boldsymbol{\omega}_{en}^n = \begin{pmatrix} \omega_{en,x}^n \\ \omega_{en,y}^n \\ \omega_{en,z}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\lambda} \cos \Phi_b \\ -\dot{\Phi}_b \\ -\dot{\lambda} \sin \Phi_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{v}_{eb,E}^n}{R_E(\Phi_b) + h_b} \\ -\frac{\mathbf{v}_{eb,N}^n}{R_N(\Phi_b) + h_b} \\ -\frac{\mathbf{v}_{eb,E}^n \tan \Phi_b}{R_E(\Phi_b) + h_b} \end{pmatrix} \quad (\text{A.27})$$

A.3. Rotation terrestre

A.3.1. Vitesse angulaire de rotation de la terre

$$\omega_{ie}^i = 15.041^\circ/\text{h} = 7.29215 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s} \quad (\text{A.28})$$

A.3.2. Vecteur de rotation dans le repère ECEF

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^e = \boldsymbol{\omega}_{ie}^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{ie}^i \end{pmatrix} \quad (\text{A.29})$$

A.3.3. Vecteur de rotation dans le repère NED

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = \begin{pmatrix} \omega_{ie}^i \cos \Phi \\ 0 \\ -\omega_{ie}^i \sin \Phi \end{pmatrix} \quad (\text{A.30})$$

A.4. Champ de pesanteur

A.4.1. Constante universelle de gravitation

$$G = 6.67408 \cdot 10^{-12} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} \quad (\text{A.31})$$

A.4.2. Modèle de Somigliana

Champ de pesanteur à la surface de l'ellipsoïde

$$\|\mathbf{g}(\Phi_b)\| = 9.7803253359 \frac{1 + 0.001931853 \sin^2 \Phi_b}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \Phi_b}} \quad (\text{A.32})$$

A.4.3. Correction de l'altitude à l'air libre

Distance d'un point M de la surface au centre de l'ellipsoïde.

$$r_{OM} = R_E(\Phi) \sqrt{\cos^2 \Phi + (1 - e^2) \sin^2 \Phi} \quad (\text{A.33})$$

Correction du champ de gravitation en fonction de l'altitude h

$$\|\mathbf{\Gamma}_{ib}(h)\| \approx \frac{r_{0M}^2}{(r_{OM} + h)^2} \|\mathbf{\Gamma}_{ib}(0)\| \quad (\text{A.34})$$

Cette correction peut être aussi appliquée au champ de pesanteur moyennant une petite approximation.

B. Formulaire sur les rotations

B.1. Angles de Tait-Bryan vers les matrices de cosinus directeur

Soit les angles d'Euler (cap, roulis, tangage) : ψ, θ, φ , entre la base globale \mathcal{B}_a et la base locale \mathcal{B}_b :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_b^a &= \mathbf{C}_\psi * \mathbf{C}_\theta * \mathbf{C}_\varphi \\ \begin{pmatrix} x^a \\ y^a \\ z^a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^b \\ y^b \\ z^b \end{pmatrix} \quad (\text{B.1}) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi & \cos \psi \sin \theta \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi \\ \sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi & \sin \psi \sin \theta \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^b \\ y^b \\ z^b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

B.2. Matrice des cosinus directeurs vers les angles de Tait-Bryan

La conversion est un peu plus complexe. En effet, compte tenu de la singularité de la représentation pour une assiette de $\pm 90^\circ$, la représentation en angles de Tait Bryan n'est pas unique.

Soit la notation suivante :

$$\mathbf{C}_b^a = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Avec la convention de notation $\arctan_2(y, x) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ pour l'arc tangente avec levé d'ambiguité sur les quatre quadrants, la formule la plus générale (tant que $|\sin \theta| < \frac{\pi}{2}$), est

$$\begin{aligned} \psi &= \arctan_2(c_{21}, c_{11}) \\ \theta &= -\arctan\left(\frac{c_{31}}{\sqrt{c_{32}^2 + c_{33}^2}}\right) \\ \varphi &= \arctan_2(c_{32}, c_{33}) \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

Dans le cas où $|\sin \theta| \approx \frac{\pi}{2}$:

$$\psi - \varphi \approx \arctan_2(c_{12}, c_{22}) \approx -\arctan_2(c_{23}, c_{33}) \quad (\text{B.4})$$

et

$$\theta \approx \frac{\pi}{2} \quad (\text{B.5})$$

B. Formulaire sur les rotations

B.2.1. Passage du vecteur rotation vers la matrice des cosinus directeurs

La transformation est directement dérivée de la formule de Rodrigues (équation 4.27)

$$C_b^a = \cos \alpha I_3 + (1 - \cos \alpha)[\mathbf{n} \mathbf{n}^T] + \sin \alpha [\mathbf{n} \wedge] \quad (\text{B.6})$$

B.2.2. Passage de la matrice des cosinus directeurs vers les vecteurs de rotations

En reprenant les notations

$$C_b^a = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

le passage au vecteur rotation peut se faire selon

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mu}{2 \sin \mu} \begin{pmatrix} c_{23} - c_{32} \\ c_{31} - c_{13} \\ c_{12} - c_{21} \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

en posant

$$\begin{aligned} \mu &= \arcsin \left(\frac{1}{2} \sqrt{(c_{23} - c_{32})^2 + (c_{31} - c_{13})^2 + (c_{12} - c_{21})^2} \right) \\ &= \arccos \left(\frac{1}{2} (c_{11} + c_{22} + c_{33} - 1) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

On rappelle que si $\mu \approx 0$, $\frac{\mu}{\sin \mu}$ tend vers 1.

B.2.3. Conversion du vecteur de rotation vers le quaternion associé

Le quaternion associé au couple (α, \mathbf{n}) est

$$q = \left(\cos \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2} \mathbf{n} \right) \quad (\text{B.10})$$

B.2.4. Conversion du quaternion vers le vecteur rotation

Soit le quaternion $q = (w, \mathbf{v})$, l'angle de rotation est

$$\alpha = 2 \arctan_2 (|\mathbf{v}|, w) \quad (\text{B.11})$$

Le vecteur de rotation est

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \quad (\text{B.12})$$

B.2.5. Conversion du quaternion vers la matrice de rotation

On peut montrer que la matrice de rotation associé au quaternion $q = (w, x, y, z)$ est

$$C_b^a = \begin{pmatrix} w^2 + x^2 - y^2 - z^2 & 2(xy - wz) & 2(xz + wy) \\ 2(xy + wz) & w^2 - x^2 + y^2 - z^2 & 2(yz - wx) \\ 2(xz - wy) & 2(yz + wx) & w^2 - x^2 - y^2 + z^2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.13})$$

B.2.6. Conversion de la matrice de rotation vers le quaternion

Compte tenu de la redondance de la matrice, la solution n'est pas unique.

Si la matrice est notée comme précédemment

$$C_b^a = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{B.14})$$

alors

- si $|w| \neq 0$

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + c_{11} + c_{22} + c_{33}} \\ x &= \frac{c_{32} - c_{23}}{4w} \\ y &= \frac{c_{13} - c_{31}}{4w} \\ z &= \frac{c_{21} - c_{12}}{4w} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

- Si $|w| \approx 0$

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + c_{11} - c_{22} - c_{33}} \\ w &= \frac{c_{32} - c_{23}}{4x} \\ y &= \frac{c_{12} + c_{21}}{4x} \\ z &= \frac{c_{13} + c_{31}}{4x} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

B.2.7. Conversion des quaternions vers les angles de Tait Bryan

La formule est simple : Soit $q = (w, x, y, z)$

$$\begin{aligned} \psi &= \arctan_2(wz + xy, 1 - 2y^2 - 2z^2) \\ \theta &= \arcsin(2(wy - xz)) \\ \varphi &= \arctan_2(2(wx + yz), 1 - 2x^2 - 2y^2) \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

B.2.8. Conversion des angles de Tait Bryan vers les quaternions

$$\begin{aligned}
 w &= \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \\
 x &= \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \\
 y &= \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \\
 z &= \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{B.18}$$

C. Dérivation des représentations de rotation

C.1. Relation entre taux de rotation et angles de Tait Bryan

La relation entre les 3 angles de Tait Bryan (ψ , θ et φ) et le vecteur de vitesse de rotation est un peu laborieuse :

En dérivant la matrice

$$\dot{\mathbf{C}}_b^a = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi & \cos \psi \sin \theta \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi \\ \sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi & \sin \psi \sin \theta \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

et en calculant Ω_{ab}^a par

$$\Omega_{ab}^a = \dot{\mathbf{C}}_b^a \mathbf{C}_a^b \quad (\text{C.2})$$

on obtient

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} = \\ \left[\begin{matrix} \dot{\psi} & \begin{pmatrix} -\sin \psi \cos \theta & -\sin \psi \sin \theta \sin \varphi - \cos \psi \cos \varphi & -\sin \psi \sin \theta \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \\ \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi & \cos \psi \sin \theta \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \dot{\theta} & \begin{pmatrix} -\cos \psi \sin \theta & \cos \psi \cos \theta \sin \varphi & \cos \psi \cos \theta \cos \varphi \\ -\sin \psi \sin \theta & \sin \psi \cos \theta \sin \varphi & \sin \psi \cos \theta \cos \varphi \\ -\cos \theta & -\sin \theta \sin \varphi & -\sin \theta \cos \varphi \end{pmatrix} \\ \dot{\varphi} & \begin{pmatrix} 0 & \cos \psi \sin \theta \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi & -\cos \psi \sin \theta \sin \varphi + \sin \psi \cos \varphi \\ 0 & \sin \psi \sin \theta \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi & -\sin \psi \sin \theta \sin \varphi - \cos \psi \cos \varphi \\ 0 & \cos \theta \cos \varphi & -\cos \theta \sin \varphi \end{pmatrix} \end{matrix} \right] (\mathbf{C}_b^a)^T \quad (\text{C.3}) \end{aligned}$$

De façon plus simple, deux relations peuvent être extraites

$$\omega_{ab}^a = \begin{pmatrix} \omega_x^a \\ \omega_y^a \\ \omega_z^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \psi & \cos \psi \cos \theta \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \cos \theta \\ 1 & 0 & -\sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \quad (\text{C.4})$$

et

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi \tan \theta & \sin \psi \tan \theta & 1 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ \frac{\cos \psi}{\cos \theta} & \frac{\sin \psi}{\cos \theta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x^a \\ \omega_y^a \\ \omega_z^a \end{pmatrix} \quad (\text{C.5})$$

C. Dérivation des représentations de rotation

Ces relations peuvent aussi être passées dans le repère local

$$\boldsymbol{\omega}_{ab}^b = \begin{pmatrix} \omega_x^b \\ \omega_y^b \\ \omega_z^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta & 0 & 1 \\ \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \quad (\text{C.6})$$

et

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sin \varphi}{\cos \theta} & \frac{\cos \varphi}{\cos \theta} \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 1 & \sin \varphi \tan \theta & \cos \varphi \tan \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x^b \\ \omega_y^b \\ \omega_z^b \end{pmatrix} \quad (\text{C.7})$$

C.2. Relation entre taux de rotation et matrice des cosinus directeurs

Soit les notations

$$\mathbf{C}_b^a = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \text{ et } \dot{\mathbf{C}}_b^a = \begin{pmatrix} \dot{c}_{11} & \dot{c}_{12} & \dot{c}_{13} \\ \dot{c}_{21} & \dot{c}_{22} & \dot{c}_{23} \\ \dot{c}_{31} & \dot{c}_{32} & \dot{c}_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{C.8})$$

En partant de

$$\boldsymbol{\Omega}_{ab}^a(t) = \dot{\mathbf{C}}_b^a(t) \mathbf{C}_a^b(t) \quad (\text{C.9})$$

on obtient

$$\begin{aligned} \omega_x^a &= \dot{c}_{31}c_{12} + \dot{c}_{32}c_{22} + \dot{c}_{33}c_{32} = -\dot{c}_{21}c_{13} - \dot{c}_{22}c_{23} - \dot{c}_{23}c_{33} \\ \omega_y^a &= \dot{c}_{11}c_{13} + \dot{c}_{12}c_{23} + \dot{c}_{13}c_{33} = -\dot{c}_{31}c_{11} - \dot{c}_{32}c_{21} - \dot{c}_{33}c_{31} \\ \omega_z^a &= \dot{c}_{21}c_{11} + \dot{c}_{22}c_{21} + \dot{c}_{23}c_{31} = -\dot{c}_{11}c_{12} - \dot{c}_{12}c_{22} - \dot{c}_{13}c_{32} \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

et inversement en partant de

$$\dot{\mathbf{C}}_b^a(t) = \boldsymbol{\Omega}_{ab}^a(t) \mathbf{C}_b^a(t) \quad (\text{C.11})$$

on retrouve

$$\dot{\mathbf{C}}_b^a = \begin{pmatrix} \omega_y^a c_{31} - \omega_z^a c_{21} & \omega_y^a c_{32} - \omega_z^a c_{22} & \omega_y^a c_{33} - \omega_z^a c_{23} \\ \omega_z^a c_{11} - \omega_x^a c_{31} & \omega_z^a c_{12} - \omega_x^a c_{32} & \omega_z^a c_{13} - \omega_x^a c_{33} \\ \omega_x^a c_{21} - \omega_y^a c_{11} & \omega_x^a c_{22} - \omega_y^a c_{12} & \omega_x^a c_{23} - \omega_y^a c_{13} \end{pmatrix} \quad (\text{C.12})$$

C.3. Relation entre taux de rotation et quaternions

Pour trouver la relation sur les quaternions, il est possible de partir de la relation entre les coordonnées d'un point \mathbf{X}_c respectivement dans \mathcal{F}_a et \mathcal{F}_b avec le référentiel \mathcal{F}_b mobile par rapport au référentiel \mathcal{F}_a .

Si l'origine commune entre les deux repères.

$$\mathbf{x}_c^a = \mathbf{C}_b^a \mathbf{x}_c^b \quad (\text{C.13})$$

après dérivation de l'équation

$$\mathbf{v}_{ac}^a = \dot{\mathbf{C}}_b^a \mathbf{x}_c^b + \mathbf{C}_b^a \mathbf{v}_{bc}^b \quad (\text{C.14})$$

C.3. Relation entre taux de rotation et quaternions

compte tenu de la définition de la dérivée d'une matrice,

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{ac}^a &= [\boldsymbol{\omega}_{ab}^a \wedge] C_b^a \mathbf{x}_c^b + C_b^a \mathbf{v}_{bc}^b \\ &= [\boldsymbol{\omega}_{ab}^a \wedge] \mathbf{x}_c^a + \mathbf{v}_{bc}^a\end{aligned}\quad (\text{C.15})$$

En faisant le même développement avec les quaternions et en prenant la notation quaternion des vecteurs, on a, de manière similaire

$$\mathbf{x}_c^a = q_b^a \mathbf{x}_c^b \bar{q}_b \quad (\text{C.16})$$

et en dérivant

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_c^a &= \mathbf{v}_{ac}^a \\ &= \frac{d}{dt}(q_b^a \mathbf{x}_c^b \bar{q}_b) \\ &= \dot{q}_b^a \mathbf{x}_c^b \bar{q}_b^a + q_b^a \mathbf{v}_{bc}^b \bar{q}_b^a + q_b^a \mathbf{x}_c^b \dot{\bar{q}}_b^a \\ &= (\dot{q}_b^a \mathbf{x}_c^b \bar{q}_b^a + q_b^a \mathbf{x}_c^b \dot{\bar{q}}_b^a) + \mathbf{v}_{bc}^a \\ &= (\dot{q}_b^a \bar{q}_b^a \mathbf{x}_c^a + \mathbf{x}_c^a \dot{\bar{q}}_b^a \bar{q}_b^a) + \mathbf{v}_{bc}^a\end{aligned}\quad (\text{C.17})$$

Soit $q_b^a = (w \quad \mathbf{v})$ et $\mathbf{c}_c^a = (0 \quad \mathbf{x})$, en développant, on montre que

$$(\dot{q}_b^a \bar{q}_b^a \mathbf{x}_c^a + \mathbf{x}_c^a \dot{\bar{q}}_b^a \bar{q}_b^a) = 2\dot{q}_b^a \bar{q}_b^a \wedge \mathbf{x}_c^a \quad (\text{C.18})$$

Comme l'équation est vraie quelle que soit \mathbf{x}_c^a , par identification avec l'expression matricielle C.15

$$\boldsymbol{\omega}_{ab}^a = 2\dot{q}_b^a \bar{q}_b^a = 2\dot{q}_b^a q_a^b \quad (\text{C.19})$$

et réciproquement

$$\dot{q}_b^a = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{ab}^a q_a^b \quad (\text{C.20})$$

Bibliographie

- [And74] Robert S. ANDREWS. **Corrections for underwater gravimetry**. Rapp. tech. Monterey, California : Naval PostGraduate School, jan. 1974.
- [GAB13] Mohinder S. GREWAL, Angus P. ANDREWS et Chris G. BARTONE. **Global Navigation Satellite Systems, Inertial Navigation and Integration**. Third. Wiley, 2013. ISBN : 978-1-118-44700-0.
- [Gro13] Paul D. GROVES. **Principles of GNSS, Inertial and Multisensor Integrated Navigation Systems**. 2nd. Artech House, 2013. ISBN : 978-1-60807-005-3.
- [Leg07] Michel LEGRIS. **Systèmes sonars de bathymétrie et d'imagerie, Support de cours ENSI2 Hydro UV 3.5, v1.3**. Rapp. tech. ENSTA Bretagne, oct. 2007.
- [R2024] **Sonic 2024/2022 Broadband Multibeam Echosounders, Operation Manual V4.1**. R2Sonic. Août 2012.
- [S44] **IHO Standards for Hydrographic Surveys**. 5th. Special Publication n°44. International Hydrographic Organization. Monaco, fév. 2008. URL : http://www.ihoh.shom.fr/publicat/free/files/S-44_5E.pdf.
- [S5A] **Standards of Competence for Category "A" Hydrographic Surveyors, Publication S-5Z, First Edition, Version 1.0.0**. Rapp. tech. International Hydrographic Organization, août 2016.
- [Ver02] H. VERMEILLE. «Direct transformation from geocentric coordinates to geodetic coordinates». In : **Journal of Geodesy** 76.8 (nov. 2002), p. 451-454. DOI : 10.1007/s00190-002-0273-6. URL : <https://doi.org/10.1007/s00190-002-0273-6>.
- [Xio+07] Ling XIONG et al. «Submarine navigation based on gravity gradient-terrain matching». In : **MIPPR 2007 : Remote Sensing and GIS Data Processing and Applications : and Innovative Multispectral Technology and Applications**. Sous la dir. de Bangjun Ley YONGJI WANG Jun Li et Jingyu YANG. T. 6790. Proc of SPIE. 2007.
- [You00] Rey-Jer YOU. «Transformation of Cartesian to Geodetic Coordinates without Iterations». In : **Journal of surveying engineering** (fév. 2000).