



Navigation sous-marine Partie III : Filtrage et Mécanisation

FISE Semestre 5 HYO / UE 5.1

Author : Michel Legris
Mail : michel.legris@ensta-bretagne.fr

Date : Septembre 2020 v0.1.2

Table des matières

11. Modélisation des capteurs	9
11.1. Pourquoi modéliser les capteurs ?	9
11.2. Types de défauts des capteurs	10
11.2.1. Erreurs statiques ou lentement évolutives	11
11.2.2. Capteurs scalaires non-linéaires	14
11.2.3. Sensibilité à des paramètres de nuisance	16
11.3. Erreurs dynamiques déterministes	16
11.3.1. Erreurs dynamiques linéaires	17
11.4. Erreurs aléatoires	20
11.4.1. Exemples de bruits aléatoires	21
11.5. Modélisation du capteur	23
11.5.1. Modèles ARMA	23
11.5.2. Identification des coefficients du modèle ARMA	27
11.5.3. Processus de Markov	28
11.6. Déviation d'Allan	29
11.6.1. Idée générale	29
11.6.2. Définition de la variance et de la déviation d'Allan	30
11.6.3. Interprétation	31
11.6.4. Limitations	32
12. Fusion des informations capteurs	35
12.1. Outils utilisés en fusion	35
12.2. Théorie de l'inférence bayesienne	35
12.2.1. Représentation des informations	36
12.2.2. Quelques notations et rappel des propriétés	37
12.2.3. Exemple d'emploi du théorème de Bayes	38
12.3. Vecteurs gaussiens	40
12.3.1. Loi gaussienne pour un scalaire	40
12.3.2. Vecteur Gaussien	41
12.3.3. Importance de la loi normale	42
12.4. Graphes bayésiens	43
13. Filtrage de Kalman	45
13.1. Bilan des outils de modélisation et fusions capteurs	45
13.2. Modèle d'un filtre de Kalman linéaire	46
13.2.1. Equation d'état	46
13.2.2. Equation de mesure	48
13.3. Modèle associé au filtre de Kalman	49
13.3.1. Le filtrage	49
13.3.2. Le lissage	50
13.3.3. Autres problèmes courants	50
13.4. Chaîne de Markov	50
13.4.1. Résolution de la chaîne	51
13.4.2. Filtre de Kalman linéaire	54

Table des matières

13.4.3. Forme générale	55
13.5. Lisseur de Kalman	55
13.6. Filtres et lisseurs de Kalman non linéaires	58
13.6.1. Filtre de Kalman étendu	59
13.6.2. Lisseur de Kalman étendu	60
13.6.3. Forme alternative du filtrage étendu	60
13.6.4. Filtre sans parfum	61
13.6.5. Filtre de Kalman sans parfum	63
13.6.6. Lissage sans parfum	64
13.6.7. Forme alternative du filtre sans parfum	65
13.7. Filtrage particulaire	66
13.7.1. Intégration par la méthode de Monte Carlo	67
13.7.2. Echantillonnage préférentiel	68
13.7.3. Algorithme du filtrage particulaire	69
13.7.4. Tirages de points selon une loi donnée	70
13.7.5. Dégénérescence des particules	71
13.8. Autres filtres	75
14. Mécanisation des capteurs inertIELS	79
14.1. Généralités	79
14.1.1. Problématique de l'intégration	79
14.1.2. Intégration de la vitesse de rotation angulaire	81
14.2. Mécanisation dans le repère inertiel	84
14.3. Mécanisation dans le repère ECEF	85
14.3.1. Mise à jour de l'attitude	85
14.3.2. Estimation de l'accélération	86
14.3.3. Estimation de la vitesse puis de la position	86
14.4. Mécanisation dans le repère local de navigation	86
14.4.1. Mise à jour de l'attitude	87
14.4.2. Estimation de la vitesse	87
14.4.3. Estimation de la position	88
14.5. Mécanisation dans le repère "wander"	89
14.6. Alignement de la centrale	90
14.6.1. Alignement par transfert	90
14.6.2. Alignement autonome	91
15. Modèle d'erreurs	95
15.1. Généralités	95
15.2. Origine des erreurs	95
15.3. Modélisation des erreurs	96
15.4. Dynamique des erreurs	97
15.4.1. Erreurs d'attitude	97
15.4.2. Erreurs sur les vitesses	98
15.4.3. Erreurs sur les positions	100
15.5. Modèle d'erreur général	100
15.5.1. Modèle discret	102
15.6. Comportement dynamique des erreurs	103
15.6.1. Oscillation de Schuler	104
15.6.2. Comportement à long terme des centrales inertielles	105
15.6.3. Comportement à moyen terme des centrales inertielles	105
15.6.4. Comportement à court terme des centrales inertielles	105

16. Hybridation	109
16.1. Objectifs	109
16.2. Principe de fonctionnement	110
16.2.1. Effet intégrateur de la centrale inertielle	110
16.2.2. Compensation des dérives et estimation des défauts capteurs	111
16.3. Terminologie	111
16.3.1. Couplage lâche (Loosely coupling)	111
16.3.2. Couplage serré (Tightly coupling)	112
16.3.3. Couplage ultra-serré (Deeply coupling)	113
16.4. Hybridation dans le cas sous-marin	113
16.4.1. DVL/CVL	114
16.4.2. LBL (Long Baseline Localisation)	114
16.4.3. USBL (Ultra Short Baseline Localisation)	115
16.5. Algorithme de fusion	116
16.6. Principe de l'algorithme d'hybridation	116
16.6.1. Préalable	116
16.6.2. Mécanisation	117
16.6.3. Modèle d'erreur	117
16.6.4. Observation	117
16.6.5. Filtrage de Kalman	118
16.6.6. Préparation de l'itération suivante	118
16.7. Remarques sur l'implémentation	118
16.7.1. Implémentation multi-cadence	118
16.7.2. Changement de référentiel des données externes	119
16.7.3. Détection de la divergence du filtre	119
16.7.4. Complexité du modèle capteur	119
16.7.5. Auto-calibrage	120
A. Formulaire de probabilité	121
A.1. Opération sur les densités de probabilités	121
A.2. Probabilité de deux vecteurs	121
A.3. Lois gaussiennes	122
A.3.1. Densité de probabilité d'une loi Gaussienne scalaire	122
A.3.2. Densité de probabilité d'un vecteur gaussien	122
A.3.3. Propriétés d'un vecteur gaussien	122
A.3.4. Identité matricielle de Woodbury	122
A.4. Relation linéaire entre deux vecteurs gaussiens	123
A.4.1. Démonstration	123
A.5. Lois conjointes et conditionnelles de deux vecteurs gaussiens	124
A.5.1. Loi conjointe de deux vecteurs gaussiens	124
A.5.2. Lois marginales	124
A.5.3. Démonstration	125
Bibliographie	127

Filtrage

11. Modélisation des capteurs

11.1. Pourquoi modéliser les capteurs ?

Le problème de la navigation est qu'il n'y a pas qu'un seul capteur qui donnerait toutes les informations nécessaires au cours du temps, c'est à dire essentiellement

- l'attitude,
- la vitesse,
- la position.

Au contraire, à partir des données provenant d'un ensemble de capteurs, il est nécessaire de fusionner "au mieux" toutes les informations en tenant compte des points forts et des points faibles de chacun des instruments de mesure.

Par exemple, dans un scénario sous-marin, le système global peut incorporer :

- un système GNSS qui permet d'avoir une position absolue de départ de mission et de retour de mission (juste mais pas forcément très fidèle¹),
- un capteur de vitesse qui fournit aussi une donnée juste mais bruitée. De plus le capteur peut "décrocher", c'est à dire être aveugle pendant quelques instants (c'est souvent le cas au moment de la plongée et de la remontée vers la surface),
- une centrale inertielle qui estime l'attitude et l'accélération à haut débit, mais qui n'est pas forcément juste mais en revanche, fidèle (l'écart type centré des erreurs est très faible).

La difficulté est alors de "fusionner" toutes ces informations au cours du temps pour extraire la meilleure estimation possible du mouvement du mobile.

La fusion, pour être le plus efficace, doit prendre en compte les caractéristiques des capteurs (qualités et défauts). Il est donc nécessaire d'être capable de modéliser au mieux les capteurs pour que l'algorithme de fusion puisse les prendre en compte.

De plus, entre les caractéristiques des capteurs et les besoins de précision du positionnement, les traitements recherchés sont toujours "à la limite" des performances.

En contrepartie, par la diversité des mesures, certaines erreurs peuvent être identifiées et corrigées, soit "au fil de l'eau", soit par des manœuvres spécifiques du mobile.

Par exemple un capteur de vitesse de type DVL (Doppler Velocity Log) est limité en précision par son mésalignement par rapport à la centrale mais aussi par un facteur d'échelle. Pendant les phases émergées, la disponibilité des données satellitaires permet d'identifier les biais de vitesse et

¹Pour reprendre la terminologie de la métrologie.

11. Modélisation des capteurs

donc extraire des informations précieuses de corrections qui peuvent servir pendant la navigation sous-marine.

Quand des mesures sont dédiées à l'estimation des erreurs on parle de **calibrage**, sinon, quand c'est en continu, on parle **d'auto-calibrage**.

11.2. Types de défauts des capteurs

Le principe d'un capteur est d'estimer la valeur d'une grandeur physique (température, accélération, etc...), à partir d'une propriété physique qui couple la grandeur recherchée à une grandeur manipulable, presque toujours électrique ou optique. Dans les systèmes modernes, la grandeur finale est numérisée.

Le système est conditionné pour que la valeur de sortie électrique ou numérique, soit le plus proche possible de la grandeur physique exprimée dans une unité déterminée.

L'opération mathématique associée est

$$y = f(x) \quad (11.1)$$

avec x la grandeur à mesurer (c'est un scalaire ou un vecteur) et y l'estimation communiquée par l'instrument.

La fonction $y = f(x)$ est la **fonction de transfert** du capteur.

Un capteur idéal donne en général²

$$y = x \quad (11.2)$$

Néanmoins, un capteur n'est jamais parfait et il possède des défauts qui font que la fonction de transfert entre x et y n'est pas l'unité.

Plus généralement, dans un formalisme probabiliste, le capteur peut être vu comme un estimateur de la grandeur physique x , c'est à dire comme une variable aléatoire dont la loi de probabilité dépend de x (c'est heureux!) et éventuellement d'autres paramètres physiques (comme la pression, la température, etc...) qui sont appelés **paramètres d'influence** ou **paramètres nuisibles**.

La mesure y à un instant t peut être vu comme la réalisation de la variable aléatoire associée à la mesure capteur.

Dans cette présentation, nous divisons les erreurs en trois familles, mais il est important de comprendre que les frontières entre ces ensembles peuvent être floues :

les erreurs statiques ou lentement évolutives,

Ce sont les erreurs constantes, comme l'incertitude sur le gain ou l'existence d'un faux zéro. De plus, elles sont statiques au sens où elles interviennent même quand la valeur à mesurer est constante.

Si elles sont réellement constantes, théoriquement il peut y avoir une procédure d'étalonnage préalable pour les déterminer ou, en cas de fluctuations, un étalonnage périodique ou un calibrage.

²dans l'unité adéquate

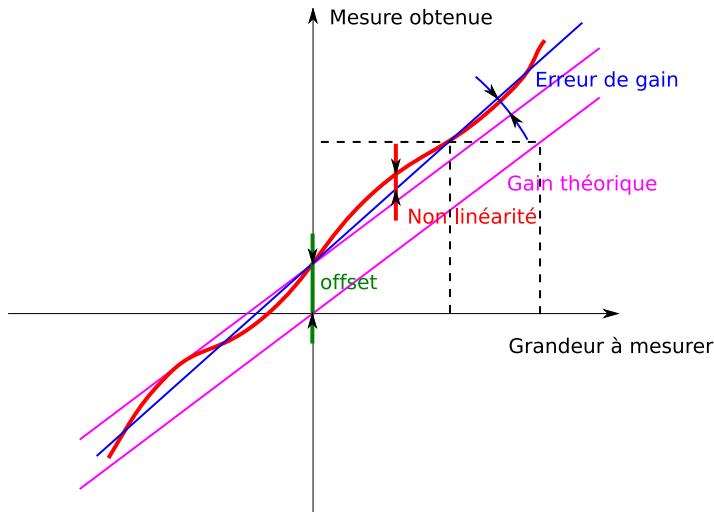


FIG. 11.1. : Modèle simplifié des défauts capteur statiques.

les erreurs dynamiques déterministes ,

Ces erreurs sont, elles aussi, constantes ou lentement variables. En revanche, elles sont indétectables quand la grandeur d'entrée est statique.

Elles ne dépendent que des fluctuations temporelles du mesurande (grandeur à mesurer).

C'est par exemple le cas de la bande passante du capteur, qui se traduit par un gain variable en fonction de la fréquence du signal.

Potentiellement ces caractéristiques sont aussi étalonnables ou calibrables mais c'est généralement beaucoup plus compliqué que pour les caractéristiques statiques.

les erreurs aléatoires ,

C'est la fluctuation aléatoire non modélisée ou non modélisable (c'est le cas par exemple du bruit thermique) qui ne peut être caractérisé que par sa fonction de probabilité.

11.2.1. Erreurs statiques ou lentement évolutives

Capteur scalaire linéaire

La modélisation la plus simple d'un capteur imparfait est une fonction $y = f(x)$ affine.

La mesure du capteur est modélisée par

$$y = x_0 + gx \quad (11.3)$$

- x_0 est une valeur constante qui est celle mesurée quand la grandeur physique est nulle. On l'appelle **biais** ou **offset** du capteur.

11. Modélisation des capteurs

- g est un scalaire constant qui correspond au **gain** du capteur (ou **facteur d'échelle**).

Avec les bonnes unités et un capteur pas trop mauvais, le gain g peut s'écrire

$$g = 1 + \epsilon \quad \text{avec } \epsilon \ll 1 \quad (11.4)$$

Capteur vectoriel linéaire

Certains capteurs mesurent des grandeurs vectorielles et donc les composantes d'un vecteur.

En navigation, c'est le cas des accéléromètres (le vecteur "accélération"), des gyromètres (le vecteur "taux de rotation") ou du magnétomètre par exemple (le vecteur "induction magnétique").

Même si souvent, le résultat est la concaténation de plusieurs capteurs scalaires d'orientations différentes, il est plus pertinent généralement de considérer le capteur comme un système global qui mesure directement le vecteur physique.

Dans le cas idéal, on a donc :

$$\mathbf{y} = \mathbf{I}_3 \mathbf{x} \quad (11.5)$$

avec \mathbf{I}_3 la matrice identité de \mathbb{R}^3 ,

et dans le cas de défauts linéaires statiques

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{G} \mathbf{x} \quad (11.6)$$

avec \mathbf{x}_0 le vecteur biais et \mathbf{G} la matrice de gain (a priori proche de la matrice identité \mathbf{I}_3).

Décomposition de la matrice de gain

Si la grandeur mesurée est un vecteur à trois composantes, par exemple le vecteur induction magnétique, la matrice de gain est une matrice 3 par 3 avec 9 composantes.

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \quad (11.7)$$

Si, comme souvent, le système est composé de 3 capteurs élémentaires quasi-orthogonaux (figure 11.2) la matrice \mathbf{G} est le produit de 3 sous-matrices.

En partant du repère body et du vecteur à mesurer dans ce repère :

matrice de mésalignement externe Transfert de la grandeur physique du repère body dans lequel le boîtier capteur est aligné au repère orthonormé des sondes internes. Il s'agit d'une rotation.

matrice de non-orthogonalité (ou de mésalignement interne) Projection de la grandeur physique sur les axes sensibles des sondes. Si le repère des sondes est bien choisi, c'est une matrice symétrique qui traduit uniquement le fait que les sondes ne sont pas parfaitement orthogonales entre elles.

matrice des gains capteurs Une fois le vecteur physique projeté sur les sondes, on applique les gains des différentes sondes.

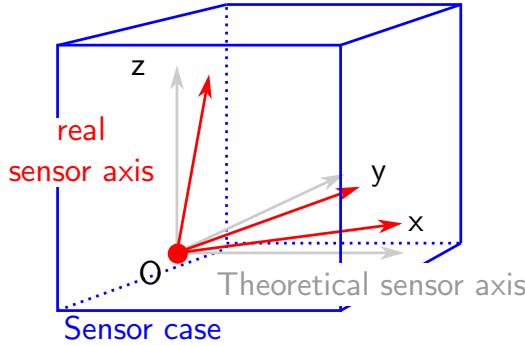


FIG. 11.2. : Géométrie d'un capteur vectoriel.

Si toutes ces erreurs sont faibles, le mésalignement externe peut se modéliser par la somme de l'identité et d'une matrice antisymétrique

$$\mathbf{G}_{\text{rot}} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ -a_1 & 1 & a_3 \\ -a_2 & -a_3 & 1 \end{pmatrix} \quad (11.8)$$

la non-orthogonalité par une matrice symétrique de diagonale unité

$$\mathbf{G}_{\text{asymmetry}} = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_2 \\ b_1 & 1 & b_3 \\ b_2 & b_3 & 1 \end{pmatrix} \quad (11.9)$$

et l'erreur de gain par une matrice diagonale proche de l'unité.

$$\mathbf{F}_{\text{scale}} = \begin{pmatrix} 1 + \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \epsilon_z \end{pmatrix} \quad (11.10)$$

Au final, la matrice de gain peut être modélisée par

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 + \epsilon_x & b_1 + a_1 & b_2 + a_2 \\ b_1 - a_1 & 1 + \epsilon_y & b_3 + a_3 \\ b_2 - a_2 & b_3 - a_3 & 1 + \epsilon_z \end{pmatrix} \quad (11.11)$$

Calibrage de capteurs vectoriels

On peut remarquer que si on connaît la valeur de la grandeur physique est que celle-ci est stable (par exemple l'opposé de la gravité pour un accéléromètre fixe, la rotation de la terre pour un gyromètre fixe, ou le champ terrestre local pour un magnétomètre), 5 à 6 paramètres de \mathbf{G} ainsi que le vecteur offset peuvent être identifiés en tournant le capteur selon un ensemble varié de directions dans le champ constant.

En effet, en calculant le module des trois sorties du capteur, nous obtenons

$$|\mathbf{y}| = \sqrt{y_x^2 + y_y^2 + y_z^2} \quad (11.12)$$

11. Modélisation des capteurs

Si la grandeur physique est constante, la valeur calculée est constante et indépendante de l'orientation du capteur.

Si ce n'est pas le cas, c'est que le capteur a des défauts du type erreurs de gain, offsets et erreurs de mésalignement interne.

Si la valeur de la grandeur physique est connue, tous les termes de gains peuvent être identifiés. En revanche, si elle n'est pas connue, les gains identifiés ne peuvent être que relatifs.

Le mésalignement externe traduit la relation entre le boîtier et les sondes et n'influe pas sur le module de la mesure. Pour identifier ces termes, il est nécessaire d'avoir une mesure d'attitude du capteur dans le référentiel body.

Deux remarques :

- les magnétomètres de téléphone portable et plus généralement les compas magnétiques sont calibrés ainsi. En revanche les effets principaux à corriger sont l'existence de masses magnétiques dans le référentiel capteur. Ces derniers se traduisent aussi par un vecteur offset et une matrice de gain.
- les termes hors diagonales de \mathbf{G} ne sont pas dus qu'aux non-orthogonalités et aux mésalignements internes. Ils peuvent venir d'un autre type d'erreur : **le cross-talk**. Ce dernier correspond à un couplage (souvent d'origine électrique) entre les différentes sondes.

11.2.2. Capteurs scalaires non-linéaires

Les capteurs peuvent aussi avoir des erreurs non-linéaires.

Cela se traduit par le fait que le gain n'est pas constant, mais dépend de la grandeur physique mesurée.

Généralement la non-linéarité est déterminée à partir de l'écart entre la vraie fonction de sensibilité et la droite la plus proche au sens de l'erreur quadratique (figure 11.1).

Souvent, en cas de non linéarité la fonction de transfert est modélisée par un développement de Taylor, c'est à dire un polynôme.

Plus le degré du polynôme est élevé, meilleure pourra être l'approximation de la fonction de transfert

$$\mathbf{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \quad (11.13)$$

D'autres modèles peuvent malgré tout être utilisés en fonction des besoins, comme par exemple une fonction linéaire par morceaux.

Erreurs non-linéaires "typiques"

Il existe un ensemble de non-linéarités assez courantes.

A titre d'exemple, peuvent être cités :

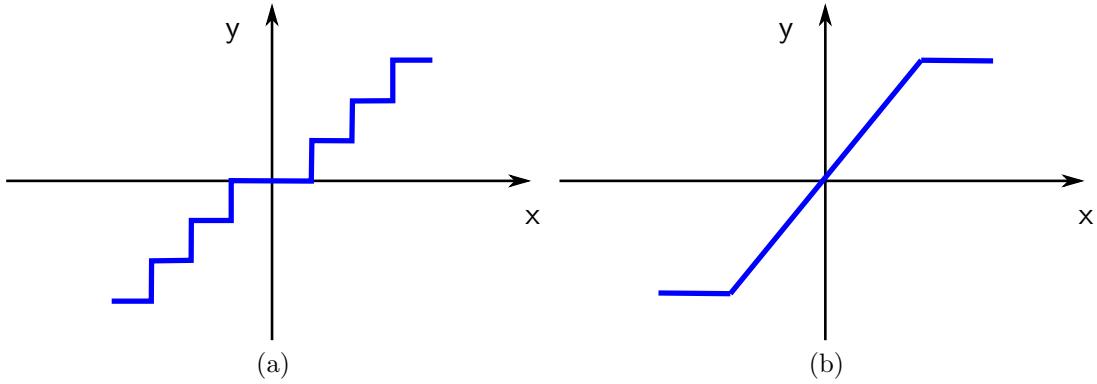


FIG. 11.3. : (a) Forme de la fonction de transfert en présence de quantification (b) Forme de la fonction de transfert en présence de saturation.

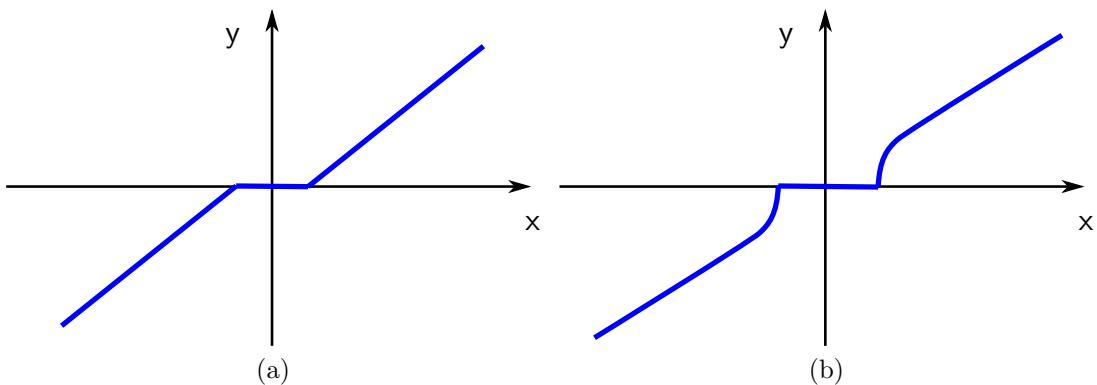


FIG. 11.4. : (a) et (b) Formes de la fonction de transfert en présence d'effet de seuil.

Bruit de quantification La quantification est présente dans tout système numérique. En effet, la plupart des phénomènes physiques sont continues aux échelles de mesure usuelles, mais la numérisation transforme ces grandeurs en un nombre réduit de bits (le plus souvent entre 8 et 24 bits). En conséquence, chaque valeur de sortie, ne correspond pas à une seule valeur possible pour la grandeur physique mais à tout un intervalle (figure 11.3(a)).

Saturation De même, le mécanisme de mesure n'a généralement pas une dynamique de mesure infinie. Cela se traduit souvent par une valeur de sortie possible maximum et minimum. Si la grandeur physique est en dehors de ces bornes, la valeur fournie est généralement constante (figure 11.3(b)).

Seuil de mesure Certains capteurs ne sont sensibles que si la grandeur physique dépasse une certaine valeur, sinon le capteur reste bloqué sur sa valeur nulle. Dans ce cas, on parle d'effet de seuil. Un cas classique, est celui des gyromètres laser : la mesure de rotation se fait par la mesure de différence de fréquences entre la sortie avant et arrière d'un laser. Si cette différence est trop faible, les deux faisceaux se synchronisent et la valeur de sortie est nulle (le locking des gyrolasers correspond à la figure 11.4(b)).

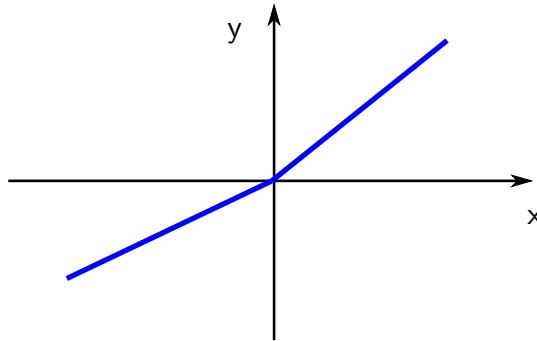


FIG. 11.5. : Forme de la fonction de transfert en présence d'asymétrie.

Asymétrie de la fonction de transfert Plus rare, certains systèmes ont une sonde différente suivant le signe de la grandeur à mesurer. Dans ce cas, le gain quand la grandeur est positive et quand la grandeur négative sont différents, ce qui provoque une asymétrie de la fonction de transfert (figure 11.5).

11.2.3. Sensibilité à des paramètres de nuisance

Tous les paramètres de la fonction de transfert du capteur peuvent être influencés par d'autres grandeurs physiques. On parle alors de paramètres d'influence ou de paramètres de nuisances. Si on cherche à compenser de ce phénomène, il est alors aussi nécessaire d'estimer ou de mesurer ces effets. Eventuellement un capteur additionnel de mesure des grandeurs influençantes est ajouté pour obtenir une compensation.

La grandeur qui influe presque systématiquement est la température. Ainsi, dans les centrales inertielles, l'effet de la température sur les biais et gains de mesure sont généralement identifiés et compensés.

Là, aussi, si la dépendance est complexe, elle peut être modélisée par une forme polynomiale, sous un modèle général non linéaire en fonction du paramètre de nuisance (mais linéaire en fonction des coefficients du modèle).

$$y = a_{00} + a_{01}T + a_{02}T^2 + (a_{10} + a_{11}T + a_{22}T^2)x + \dots \quad (11.14)$$

11.3. Erreurs dynamiques déterministes

Quand la grandeur à mesurer évolue dans le temps, le capteur ne suit pas toujours les variations de façon parfaite.

Dans ce cas, la mesure à l'instant t ne dépend pas seulement de la grandeur à mesurer à l'instant t mais aussi des mesures passées (et éventuellement des mesures passées des paramètres de nuisance).

$$y(t) = f(x(t), x(t'), t' < t) \quad (11.15)$$

11.3.1. Erreurs dynamiques linéaires

Si la fonction $y = f(x(t), x(t'), t' < t)$ est linéaire et constante, la sortie est alors une combinaison linéaire à coefficients constants des valeurs passées.

La combinaison linéaire pouvant avoir un nombre infini de terme, la fonction f prend la forme d'un **produit de convolution**.

On définit alors la **réponse impulsionale** qui est la sortie du capteur en réponse à une grandeur physique qui est une fonction Dirac d'amplitude unité à l'instant $t = 0$

$$y(t) = g(t) \quad (11.16)$$

La fonction est forcément causale ($\forall t < 0, g(t) = 0$) et réelle.

Si le mesurande est une fonction $x(t)$, alors le résultat s'exprime sous la forme

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{\tau=0}^{\infty} g(\tau)x(t-\tau) d\tau \\ &= g(t) * x(t) \end{aligned} \quad (11.17)$$

En prenant la transformée de Fourier de l'équation précédente, on obtient³ :

$$\begin{aligned} \int_{t=-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j2\pi\nu t} dt &= \int_{t=-\infty}^{\infty} \left[\int_{\tau=0}^{\infty} g(\tau)x(t-\tau) d\tau \right] e^{-j2\pi\nu t} dt \\ \tilde{y}(\nu) &= \int_{\tau=0}^{\infty} g(\tau)e^{-j2\pi\nu\tau} d\tau \int_{u=-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j2\pi\nu u} du \\ &= \tilde{g}(\nu)\tilde{x}(\nu) \end{aligned} \quad (11.18)$$

La réponse fréquentielle de la sortie du capteur est le produit de la transformée de Fourier de la réponse impulsionale et de la transformée de Fourier de la grandeur à mesurer.

Pour chaque fréquence, la sortie du capteur correspond à l'entrée éventuellement amplifiée ou atténuee et déphasée par la fonction de transfert.

On peut remarquer aussi que $\tilde{g}(\nu)$ est une fonction analytique. En effet, par définition, une fonction analytique à une transformée de Fourier de valeur nulle pour les abscisses négatives. Or la transformée de Fourier d'une fonction fréquentielle est une fonction temporelle, et comme la réponse impulsionale est causale, cette dernière est nulle pour les temps négatifs.

Exemples d'effets dynamiques linéaires

Parmi les erreurs dynamiques linéaires, on peut mentionner :

³Il est quand même nécessaire que f soit de carré sommable.

11. Modélisation des capteurs

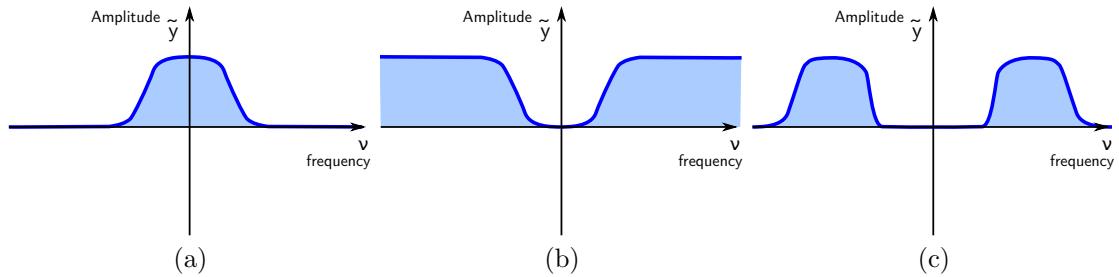


FIG. 11.6. : Transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle (a) passe bas (b) passe haut (c) passe bande

L'atténuation des hautes fréquences Tout capteur se comporte d'une façon ou d'une autre comme un filtre passe bas. La fonction de transfert fréquentielle a donc la forme de la figure 11.6(a).

Un cas particulier de fonctions de transfert passe bas sont les capteurs intégrateurs (qui mesurent l'intégrale au cours du temps d'une grandeur physique). Leur fonction de transfert fréquentielle est alors

$$\tilde{g}(\nu) = \frac{1}{j2\pi\nu} \quad (11.19)$$

On peut remarquer que cette fonction n'est pas finie pour $\nu = 0$ car l'intégration ne peut pas se faire sur un temps infini.

Il existe généralement une fréquence de coupure au delà de laquelle les fluctuations ne sont plus mesurées. Les systèmes sont dits à **bande limitée**.

L'atténuation des basses fréquences Réciproquement, certains capteurs sont incapables de mesurer des variables statiques. C'est le cas par exemple des hydrophones.

Leur fonction de transfert se comporte alors comme un filtre passe haut.

Réciproquement aux capteurs intégrateurs, certains systèmes sont déivateurs, la fonction de transfert est donc

$$\tilde{g}(\nu) = j2\pi\nu \quad (11.20)$$

Capteurs passe-bandes Comme tous les capteurs se comportent comme des systèmes passe-bas, si il y a aussi atténuation des fréquences basses, on parle alors de systèmes passe bande.

Si la bande est étroite par rapport à la fréquence centrale, on parlera de bande étroite, et réciproquement de bande large.

Capteurs à retard pur Un autre phénomène important est le retard pur. C'est souvent le cas des capteurs qui nécessitent un traitement interne pour fournir l'estimée (c'est le cas par exemple des capteurs GNSS ou des centrales inertielles). En conséquence, la donnée est fournie avec un léger retard δt par rapport à la grandeur physique.

Si ce retard est connu, il peut être compensé et la date de validité de la mesure fournie, il n'y a alors pas de problème.

En revanche, si le retard n'est pas pris en compte, la donnée sera supposée valide à la date d'acquisition t , alors qu'en fait le phénomène a eu lieu à la date $t - \delta t$.

Ce retard peut aussi être intégré dans la fonction de transfert. Temporellement, la fonction de transfert est

$$y(t) = x(t - \delta t) \quad (11.21)$$

La réponse impulsionnelle est donc $\delta(t - \delta t)$ et donc la fonction de transfert est à **phase linéaire**

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\nu) &= \int_{t=-\infty}^{\infty} \delta(t - \delta t) e^{-j2\pi\nu t} dt \\ &= e^{-j2\pi\nu\delta t} \end{aligned} \quad (11.22)$$

Existence d'une phase non nulle

La fonction de transfert fréquentielle d'un retard pur est un déphasage pur fonction linéaire de la fréquence.

La question est : peut-on avoir une fonction de transfert fréquentielle qui ne possède pas de déphasage, hormis le cas trivial de la réponse impulsionnelle $g(t) = t$?

La réponse à cette question est non.

La raison est la causalité de la réponse impulsionnelle temporelle. ($\forall t < 0 \quad g(t) = 0$).

Si il n'y a pas de déphasage, cela veut dire que la fonction de transfert fréquentielle est réelle et cela implique que la réponse impulsionnelle est symétrique ($g(-t) = g(t)$). Comme $\forall t < 0 \quad g(t) = 0$, l'unique solution est que seul $g(0)$ soit non nul.

En conséquence, il y a toujours des déphasages sur certaines fréquences dans les fonctions de transfert capteurs.

Exemples d'effets dynamiques non-linéaires

Hystérésis Le comportement dynamique peut aussi être non linéaire. L'exemple le plus commun est le phénomène d'hystérésis.

Dans ce cas, le gain du capteur dépend du sens de variation de la grandeur physique mesurée.

Ainsi, la valeur mesurée pour un phénomène x dépend des valeurs précédentes de $x(t)$ (c'est déjà le cas des systèmes passe haut et passe bas) mais aussi du sens de variation du phénomène (si il est croissant ou décroissant).

Jitter Les capteurs numériques qui mesurent un phénomène au cours du temps, échantillonnent temporellement la grandeur physique, et exécutent une mesure ordinairement à une cadence régulière δt .

Le déclenchement des acquisitions est souvent fait grâce à une horloge interne.

Dans le cas de systèmes complexes avec des traitements numériques, il se peut que les temps δt ne soient pas rigoureusement constants, on a alors une petite variation de δt . Si cette variation est

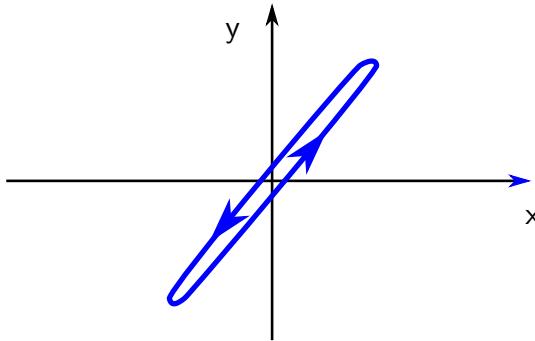


FIG. 11.7. : Forme de la fonction de transfert en présence d'hystérésis.

déterministe, l'erreur est considérée dynamique non linéaire, sinon elle rentre dans la catégorie des erreurs aléatoires.

11.4. Erreurs aléatoires

Le troisième type d'erreur englobent toutes les erreurs aléatoires. Ce sont les erreurs que l'on ne peut pas modéliser de façon plus précises que leurs propriétés statistiques (par exemple, l'espérance ou l'écart-type des valeurs au cours du temps, la corrélation, etc...).

Dans les faits, les erreurs vues précédemment comme le biais ou l'erreur de gain peuvent être considérées comme des erreurs aléatoires si on n'a connaissance que de leur espérance : chaque capteur construit va avoir des défauts différents et le constructeur ne spécifie généralement que l'espérance ou la variance des défauts.

Dans ce document, de façon assez artificielle, dans la famille des erreurs aléatoires, seules les grandeurs qui varient de manière non déterministe à chaque réalisation sont considérées.

L'origine de ces erreurs peut être réellement des signaux parasites, par exemple la pollution sonore d'un bruiteur sur un hydrophone ou le bruit thermique de l'électronique du capteur, mais cela peut être simplement la différence entre les gains ou non-linéarités du capteur réel et du capteur modélisé (dans ce cas, l'erreur apparaît comme un signal corrélé avec le signal physique réel).

Cela peut aussi englober l'incertitude de notre connaissance du modèle voire des simplifications "assumées" du modèle (si par exemple la modélisation fine est trop complexe).

Ces erreurs sont modélisées sous forme **d'un processus aléatoire** $n(t)$, c'est à dire un signal dont on ne connaît a priori que ses statistiques, mais pas ses réalisations au cours du temps.

Ce processus peut être **stationnaire** : dans ce cas, les caractéristiques statistiques sont constantes (c'est à dire que la loi de probabilité du niveau à chaque instant $p(n(t))$ est constante, indépendante de t).

De même, dans un processus stationnaire, la probabilité conjointe $p(n(t), n(t'))$ ne dépend que de l'écart temporel $\delta t = t - t'$.

$$p(n(t), n(t')) = f(\delta t) \quad (11.23)$$

Deux cas particuliers des processus stationnaires sont les processus :

- **stationnaire à l'ordre 1** : l'espérance est constante

$$\mathbb{E}(n(t)) = \mathbb{E}(n(t')) \quad (11.24)$$

- **stationnaire à l'ordre 2** : le moment d'ordre 1 (l'espérance) et les moments d'ordre 2 (les autocovariances) sont constantes

$$\begin{aligned} \forall t, t' \in \mathbb{R}^2 \quad & \mathbb{E}(n(t)) = \mathbb{E}(n(t')) \\ \forall t, t', \delta t \in \mathbb{R}^3 \quad & \mathbb{E}(n(t)\bar{n}(t - \delta t)) = \mathbb{E}(n(t')n(t' - \delta t)) \end{aligned} \quad (11.25)$$

Si on ne s'intéresse qu'aux moments à l'ordre 1 et 2 des processus stationnaires à l'ordre 2, ces derniers sont caractérisés par :

- leur espérance $\mathbb{E}(n(t))$
- leur autocovariance $\gamma(\tau) = \mathbb{E}(n(t)\bar{n}(t - \tau))$

Pour rappel, la transformée de Fourier de l'autocovariance est la densité spectrale de puissance du processus (théorème de Wiener-Khintchine).

$$\Gamma(\nu) = \tilde{\gamma}(\nu) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(n(t)\bar{n}(t - \tau))e^{-j2\pi\nu\tau} d\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathbb{E} \left(\left| \int_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} n(t)e^{-j2\pi\nu t} dt \right|^2 \right) \quad (11.26)$$

Les signaux aléatoires s'étendent naturellement aux signaux vectoriels $\mathbf{n}(t)$, l'espérance $\mathbb{E}(\mathbf{n}(t))$ est alors un vecteur et l'autocovariance devient une matrice $\mathbb{E}(\mathbf{n}(t)\bar{\mathbf{n}}^T(t - \delta t))$.

11.4.1. Exemples de bruits aléatoires

Bruit additif Classiquement, la réalisation de la mesure est modélisée par la somme d'une fonction de la mesure (dépendant du temps) et d'un signal aléatoire indépendant de la mesure

$$y(t) = f(x(t)) + n(t) \quad (11.27)$$

On parle alors de **bruit additif**.

Cependant, d'autres fonctions sont possibles. Par exemple, les signaux de rétrodiffusion acoustique (comme les mesures ADCP dans la colonne d'eau) sont affectées d'interférences qui peuvent être modélisées par un bruit multiplicatif

$$s(t) = n(t)x(t) \quad (11.28)$$

où

- $s(t)$ est le signal mesuré,
- $n(t)$ est un signal aléatoire suivant une loi de probabilité de Rayleigh,
- $x(t)$ est le niveau de rétrodiffusion volumique.

11. Modélisation des capteurs

Bruit blanc La définition du bruit blanc est un bruit dont la densité spectrale de puissance est constante en fonction de la fréquence ν est vaut $\frac{N}{2}$.

Comme l'autocovariance est la transformée inverse de la densité spectrale de puissance, elle correspond à un Dirac

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}(\nu) &= \frac{N}{2} \\ \gamma(\tau) &= N\delta(\tau)\end{aligned}\tag{11.29}$$

Cette représentation n'est pas physique, puisque la puissance du signal est infinie, néanmoins elle est très utilisée car c'est le modèle le plus simple.

Bruit coloré et bruit rose Un bruit coloré est un bruit dont la densité spectrale de puissance est dépendant de la fréquence, généralement sous la forme

$$\Gamma(\nu) \propto \frac{1}{\nu^\alpha}\tag{11.30}$$

avec α un scalaire.

Plus spécifiquement, un bruit rose est un bruit dont la densité spectrale de puissance est constante par octave⁴.

Sa densité spectrale a donc la forme (pour un signal monodimensionnel)

$$\Gamma(\nu) \propto \frac{1}{\nu}\tag{11.31}$$

Là aussi, la variance du bruit est infinie. Néanmoins c'est un modèle de bruit très courant dans les systèmes physiques.

Bruit corrélé Plus généralement, la densité spectrale de puissance peut avoir une forme arbitraire de type passe bas, passe haut ou passe bande. Dans le cas où la densité spectrale est sur une largeur de bande très étroite, la réalisation temporelle du bruit apparaît très corrélée.

Présence de valeurs aberrantes Un autre cas important est la présence de points aberrants (outliers). Par exemple, le capteur fournit des données avec un faible bruit dans le cas général, mais de temps en temps produit une mesure très éloignée de la vraie grandeur physique (figure 11.8).

L'origine peut être la présence de parasites de durées très courtes, d'un mauvais fonctionnement (par exemple un mauvais contact, etc).

Les méthodes de fusion présentées par la suite se comportent généralement très mal en présence de ce type de bruit.

⁴Une octave correspond à un doublement de la fréquence.

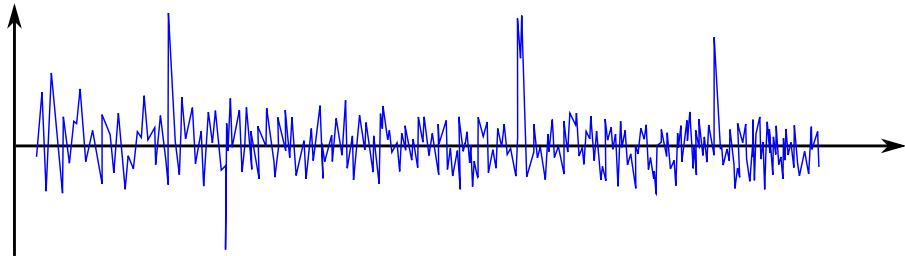


FIG. 11.8. : Exemple de présence de données aberrantes dans un signal.

11.5. Modélisation du capteur

Dans un système de navigation, on dispose de mesures $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ et on doit retrouver l'estimation la plus précise de la grandeur physique d'intérêt \mathbf{x} . Il est donc nécessaire d'inverser la fonction $f(x)$.

Pour cela, il est nécessaire de modéliser au plus près de la réalité, la fonction $f(x)$ mais, malgré tout, en gardant à l'esprit que le modèle doit aussi pouvoir être suffisamment facile à inverser.

Cette fonction $f(x)$ doit, dans la mesure du possible, intégrer :

- la fonction de transfert statique du capteur et éventuellement les influences des paramètres de nuisance,
- la fonction de transfert dynamique du capteur,
- le bruit, modélisant le bruit réel, mais aussi l'écart entre la réalité et le modèle.

Une seconde contrainte imposée est d'avoir un modèle temporel échantillonné.

- temporel et non fréquentiel car pour la navigation il est nécessaire d'avoir la meilleure estimée au cours du temps c'est à dire, le plus tôt possible pour permettre d'asservir la trajectoire⁵.
- échantillonné, car aujourd'hui la plupart des algorithmes sont numériques et, de plus, cela mène à des formulations plus simples.

11.5.1. Modèles ARMA

Dans un premier temps, les modèles linéaires vectoriels sont présentés.

Intégration des défauts statiques ou lentement évolutifs

Dans le cas linéaire, la relation entre la grandeur physique et la grandeur communiquée est une relation affine, le modèle est donc

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{G}\mathbf{x} \quad (11.32)$$

⁵En toute rigueur, si un léger retard est acceptable, des algorithmes fréquentiels pourraient aussi être envisagés (par FFT glissantes).

11. Modélisation des capteurs

Si le modèle échantillonné est souhaité, pour l'itération (k), il peut être écrit

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{G}\mathbf{x}^{(k)} \quad (11.33)$$

Si x_0 et \mathbf{G} sont parfaitement connus par étalonnage par exemple, le modèle est correct. Si ce n'est pas le cas, il est nécessaire d'intégrer aussi les paramètres inconnus comme grandeurs à estimer.

Pour cela, on complète le vecteur des grandeurs à mesurer (le vecteur \mathbf{x}) avec tous les paramètres à identifier.

Prenons le cas d'un capteur scalaire $y^{(k)} = x_0 + gx^{(k)}$, si x_0 est inconnu le modèle est modifié par

$$(y)^{(k)} = (g \quad 1) \begin{pmatrix} x \\ x_0 \end{pmatrix}^{(k)} \quad (11.34)$$

Bien entendu, dans ce cas là, le système n'est clairement pas inversible, cependant l'ajout d'informations complémentaires peut éventuellement le rendre inversible.

Si le paramètre de gain g n'est pas connu non plus, il peut aussi être ajouté dans le vecteur recherché $\begin{pmatrix} x \\ x_0 \\ g \end{pmatrix}$, cependant, comme la sortie du capteur correspond au produit gx , le modèle devient non linéaire (mais si l'incertitude sur g est faible, il peut être rendu quasi-linéaire).

Si maintenant, il est connu que x_0 et g dépendent de la température, le modèle peut être affiné en intégrant cette dépendance

$$x^{(k)} = x_0(T^{(k)}) + g(T^{(k)})x^{(k)} \quad (11.35)$$

Si T n'est pas mesuré, cela n'apporte rien à la connaissance de x , et cette dépendance peut être ignorée. En revanche si T est mesuré, le modèle peut être affiné en intégrant la température dans la grandeur physique et dans la mesure.

En se restreignant à la dépendance en température de l'offset pour garder la linéarité, l'offset devient

$$x_0^{(k)} = x_{00} + x_{01}T^{(k)} \quad (11.36)$$

et le modèle capteur (en supposant x_{00} et x_{01} connus),

le modèle capteur devient

$$\begin{pmatrix} y \\ \hat{T} \end{pmatrix}^{(k)} = \begin{pmatrix} x_{00} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & x_{01} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ T \end{pmatrix}^{(k)} \quad (11.37)$$

Intégration des propriétés dynamiques

Le second problème est d'intégrer les effets dynamiques du capteur et des paramètres à estimer.

Il a été évoqué que le capteur pouvait avoir des défauts dynamiques, ce qui se traduit par une fonction de transfert fréquentielle du capteur dont les niveaux et les déphasages dépendent de la fréquence.

De même, le système physique à mesurer \mathbf{x} évolue aussi dans le temps et sa densité spectrale de puissance n'est pas forcément constante.

La densité spectrale de puissance de la mesure est le produit du module au carré de fonction de transfert fréquentielle du capteur et la densité spectrale de la grandeur à mesurer.

$$\Gamma_y(\nu) = |\mathcal{G}(\nu)|^2 \Gamma_x(\nu) \quad (11.38)$$

L'idée est d'avoir un modèle temporel qui traduit cette propriété.

Modélisation de la dynamique du capteur Il a été vu que la fonction de transfert fréquentielle du capteur est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle du capteur $g(t)$ et que la sortie capteur peut se traduire comme la convolution du mesurande $x(t)$ et de cette réponse impulsionnelle.

Dans le cas échantillonné, les mesures peuvent être modélisées sous la forme $\{x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \dots\}$ et la réponse impulsionnelle $\{g_0, g_1, \dots, g_n, \dots, g_{N-1}\}$

Temporellement, le capteur est donc modélisable par

$$y^{(k)} = \sum_{n=0}^{N-1} g^{(n)} x^{(k-n)} \quad (11.39)$$

Comme la sortie du processus $y^{(k)}$ est en fait une moyenne pondérée (par les coefficients $g^{(n)}$) du signal d'entrée $x^{(k)}$, on parle de processus **MA**, pour **Moving Average** (moyenne glissante).

Modélisation de la dynamique du mesurande De même, il est souhaitable de modéliser les effets dynamiques des grandeurs à mesurer. En revanche, l'évolution temporelle du mesurande n'est pas déterministe ce qui rajoute une difficulté.

Dans le cas où les statistiques de l'évolution du signal sont stationnaires, on peut malgré tout chercher à simuler le comportement du signal.

Pour "sculpter" un processus aléatoire ayant les propriétés spectrales souhaitées, on part d'un signal aléatoire sous forme de bruit blanc centré normé (espérance nulle, variance unité, et si vectoriel, de covariance nulle), $\epsilon(t)$ et on le fait passer à travers un filtre numérique causal dont les paramètres sont choisis de telle sorte que la densité spectrale de sortie soit la plus proche de celle souhaitée.

Comme précédemment, le filtre souhaitable peut être défini par sa réponse impulsionnelle, on obtient donc un filtre **MA** :

$$x^{(k)} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \epsilon^{(k-n)} \quad (11.40)$$

Ce filtre a l'avantage d'être inconditionnellement stable (quelques soient les valeurs de a_n et de $n^{(k)}$ d'amplitude finie, la sortie du filtre est d'amplitude finie).

11. Modélisation des capteurs

En revanche, il modélise très mal des comportements de type bande étroite (par exemple si il y a des résonances). Dans ces cas, le nombre de coefficients nécessaires pour avoir un modèle représentatif est trop important.

Une autre forme est alors utilisée qui est le processus **autorégressif (AR)** de la forme

$$x^{(k)} = \sum_{m=1}^{M-1} b_m x^{(k-m)} + b_0 \epsilon^{(k)} \quad (11.41)$$

De même, de façon plus générale, le modèle peut être un processus **ARMA (AutoRegressive Moving Average)** qui combine les deux méthodes et conduit potentiellement aux modèles les plus compacts.

$$x^{(k)} = \sum_{m=1}^{M-1} b_m x^{(k-m)} + \sum_{n=0}^{N-1} a_n \epsilon^{(k-n)} \quad (11.42)$$

Les modèles AR et ARMA sont généralement beaucoup plus compacts que les modèles MA, mais peuvent pour certains choix de coefficients poser des problèmes de stabilité.

Tout combiné, la fonction de transfert du capteur plus le modèle de la fonction de transfert du capteur entraîne un modèle ARMA (la composition de deux modèles ARMA est un modèle ARMA), il existe donc une équation de type

$$y^{(k)} = \sum_{m=1}^{M''-1} b''_m y^{(k-m)} + \sum_{n=0}^{N''-1} a''_n \epsilon^{(k-n)} \quad (11.43)$$

avec $\{\epsilon^{(k)}\}$ une séquence de bruit blanc centrée, normée qui modélise (pas trop mal), la sortie du capteur.

Intégration des bruits aléatoires

Dans le paragraphe précédent, la grandeur à mesurer est modélisée sous forme d'un processus aléatoire blanc passé à travers un filtre.

Pour le vrai bruit, bien évidemment, le même modèle peut être utilisé pour respecter la densité spectrale de puissance du bruit (et donc son autocorrélation).

Le modèle de bruit peut donc aussi être écrit sous la forme d'un processus ARMA nourri par un bruit blanc.

On peut poser

$$n^{(k)} = \sum_{m=1}^{M'-1} b'_m n^{(k-m)} + \sum_{n=0}^{N'-1} a'_n (\epsilon')^{(k-n)} \quad (11.44)$$

11.5.2. Identification des coefficients du modèle ARMA

Il existe différentes méthodes pour identifier les coefficients des modèles ARMA connaissant les propriétés des signaux à modéliser. Ils peuvent être trouvés dans des livres sur la synthèse de filtre (par exemple [Vas00]).

Cependant, comme les algorithmes de fusion se déroulent au fil de l'arrivée des mesures, il est important de garder des modèles extrêmement simples à peu de coefficients pour permettre des calculs rapides.

Les modèles choisis sont donc généralement des filtres numériques du premier ordre ou du second ordre.

De façon pragmatique, on identifie le comportement souhaité par des filtres d'ordre 0, 1 ou 2, souvent définis par un gabarit, soit sous forme d'une **transformée de Laplace** $\tilde{F}(s)$, soit sous forme fréquentielle $\tilde{F}(j2\pi\nu)$, si possible, dans les deux cas, la fonction \tilde{F} doit être une fonction rationnelle.

Il existe alors des méthodes, pour transformer ces filtres pour forme échantillonnée.

Transformation bilinéaire ou transformation de Tustin

Une des méthodes les plus correctes est d'appliquer le changement de variable suivant sur la fonction de Laplace du filtre $\tilde{F}(s)$

$$s = \frac{2}{\delta t} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (11.45)$$

On obtient alors une fonction "transformée en z " qui, si la fonction $\tilde{F}(s)$ est une fonction rationnelle, modélise un processus ARMA.

Cette transformation à l'avantage de fournir un filtre stable possédant les mêmes propriétés d'amplitude et de phase que le filtre initial (pour une abscisse fréquentielle légèrement modifiée).

En revanche, le processus obtenu n'est pas très compact.

Conservation des pôles et des zéros

Une seconde solution est de rechercher les pôles $\{p_i\}$ et les zéros $\{z_i\}$ de la transformée de Laplace puis de créer la fonction rationnelle en z^{-1} avec les pôles $e^{-jp_i\delta t}$ et les zéros $e^{-jz_i\delta t}$.

Il n'y a malgré tout pas garanti de stabilité du filtre numérique.

Différences finies

La troisième méthode, la plus simple mais pas potentiellement la moins stable est d'écrire l'équation différentielle associée à la transformée de Fourier du filtre $F(j2\pi\nu)$ et de la transformée en équation discrète par différences finies.

11. Modélisation des capteurs

Filtres du premier ordre

Les filtres du premier ordre sont définis par une fréquence de coupure ν_s et ont une atténuation de 6 dB/octave (20 dB par décade).

Si la fréquence d'échantillonnage est ν_s , un filtre passe bas de fréquence de coupure ν_c peut s'écrire (c'est la version par différences finies qui est la plus compacte, mais ni la seule, ni la meilleure)

$$\begin{aligned}\alpha &= 2\pi \frac{\nu_c}{\nu_s} \\ y^{(k)} &= (1 - \alpha)y^{(k-1)} + \alpha\epsilon^{(k)} \\ y^{(k)} &= \frac{\alpha}{1 + \alpha}y^{(k-1)} + \frac{1}{1 + \alpha}\epsilon^{(k)}\end{aligned}\tag{11.46}$$

11.5.3. Processus de Markov

Les modèles capteurs peuvent être écrit avec une relation linéaire entre les valeurs successives d'entrée (les $\epsilon^{(k)}$) et les valeurs successives de sorties (les $y^{(k)}$).

Cette représentation, relativement puissante, n'est pas encore tout à fait suffisante.

Il s'avère plus pratique pour les algorithmes de fusion de ne garder que les données de l'instant courant (exposant (k)) et de l'instant précédent (exposant ($k - 1$)). Cependant, on accepte les données vectorielles.

On utilise alors une astuce, qui est de stocker dans le vecteur paramètre les valeurs anciennes que l'on souhaite garder.

Si le processus peut s'écrire avec l'état courant ne dépendant que de l'état précédent, on parle de **processus de Markov (Markov process)**.

L'idée est alors d'avoir un vecteur \mathbf{y} tel que le modèle s'écrive

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{A}\mathbf{y}^{(k-1)} + \mathbf{B}\epsilon^{(k)}\tag{11.47}$$

avec ϵ un vecteur aléatoire, centré, normé de composantes indépendantes deux à deux.

Supposons par exemple que nous ayons l'équation

$$y^{(k)} = b_1y^{(k-1)} + b_2y^{(k-2)} + a_0\epsilon^{(k)} + a_1\epsilon^{(k-1)}\tag{11.48}$$

on peut poser le vecteur

$$\mathbf{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} y^{(k)} \\ y^{(k-1)} \\ y^{(k-2)} \\ \epsilon^{(k-1)} \end{pmatrix}\tag{11.49}$$

noté $\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ x_1 \end{pmatrix}^{(k)}$

l'équation peut alors prendre la forme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{(k)} &= \boldsymbol{Ax}^{(k-1)} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{\epsilon}^{(k)} \\ \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ x_1 \end{pmatrix}^{(k)} &= \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ x_1 \end{pmatrix}^{(k-1)} + \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (\boldsymbol{\epsilon})^{(k)} \end{aligned} \quad (11.50)$$

est équivalente à l'équation 11.48, mais elle est sous la forme d'un processus de Markov avec le vecteur $\boldsymbol{x}^{(k)}$.

11.6. Déviation d'Allan

Il est généralement difficile d'identifier le modèle d'erreur de manière précise.

Si ce dernier n'est pas indiqué dans la documentation constructeur, il est nécessaire, dans le cas général, de passer par une phase d'étalonnage potentiellement complexe et coûteuse.

Cependant, dans le cas d'un capteur qui mesure une grandeur physique a priori constante, il est possible d'effectuer un enregistrement relativement simple permettant d'estimer un certain nombre de paramètres essentiels du capteur.

C'est possible par exemple dans les cas suivants :

- la différence entre deux horloges : si les horloges sont parfaites, la différence est nulle,
- les gyromètres d'une centrale inertie : au point fixe, ils mesurent les composantes du vecteur rotation terrestre,
- les accéléromètres d'une centrale inertie : au point fixe, ils mesurent la force de réaction à la gravité terrestre.

11.6.1. Idée générale

Prenons le cas d'un gyromètre : le capteur étant parfait, si il est immobile dans le repère terrestre, il doit mesurer de manière continue la même valeur : une composante du vecteur rotation terrestre même si la mesure se fait pendant un temps très long.

La mesure étant constante, si le spectre du signal enregistré est calculé, il doit n'avoir de l'énergie qu'à la fréquence nulle.

Néanmoins, dans le cas réel, le capteur fournit une mesure potentiellement bruitée, sensible à des effets externes telle que la température ou simplement des variations de son alimentation électrique.

En conséquence, le signal enregistré va fluctuer légèrement temporellement éventuellement de manière aléatoire. Le spectre du signal présente alors un niveau non nul de densité de puissance en dehors de la composante continue.

Cependant l'interprétation de la densité spectrale n'est pas forcément simple. On préfère généralement une autre représentation, plus facile à calculer mais surtout plus directement interprétable : **la déviation d'Allan (Allan Deviation)**.

11. Modélisation des capteurs

Supposons une mesure bruitée par un bruit blanc de variance σ^2 et échantillonnée à la fréquence ν_s , le signal instantané enregistré a alors aussi une variance de σ^2 qui peut être estimé empiriquement à partir de K enregistrement par la formule (dans le cas biaisé)

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} (s^{(k)})^2 - \bar{s}^2 \quad (11.51)$$

avec \bar{s} la moyenne empirique

$$\bar{s} = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} s^{(k)} \quad (11.52)$$

Si les données sont moyennées sur une fenêtre de N échantillons correspondant à une durée $\tau = \frac{N}{\nu_s}$, la série des échantillons moyennés

$$s_\tau^{(l)} = \frac{1}{N} \sum_{n=Nl}^{(N+1)l} s^{(n)} \quad (11.53)$$

a une variance σ_τ^2

$$\sigma_\tau^2 = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} (s_\tau^{(l)})^2 - \bar{s}^2 \quad (11.54)$$

avec L le nombre de valeurs disponibles disjointes de s_τ , c'est à dire

$$L = \text{partie entière} \left(\frac{K}{N} \right) \quad (11.55)$$

Si le bruit est blanc, la courbe σ_τ^2 fonction de $\tau = \frac{N}{\nu_s}$ décroît en $\frac{1}{N}$.

Réciproquement, si le capteur n'a pas de bruit mais est affecté par une dérive, la fonction σ_τ^2 croît en fonction de τ .

En conséquence, le comportement de la courbe $\sigma_\tau^2(\tau)$ donne des informations sur les erreurs capteurs et des indices sur l'origine de ces erreurs ainsi que leur échelle de temps.

11.6.2. Définition de la variance et de la déviation d'Allan

Dans les faits, la variance calculée n'est pas directement la variance de s_τ , mais la demi-variance des différences entre les s_τ successifs.

Par définition, la **variance d'Allan** est [IEEE952]

$$\Omega^2(\tau) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-2} (s_\tau^{(l+1)} - s_\tau^{(l)})^2 \right] \quad (11.56)$$

La **Déviation d'Allan** est la racine carrée de la variance d'Allan, c'est à dire $\Omega(\tau)$.

Il est facile de montrer que la variance d'Allan tend en probabilité vers la variance de s_τ , mais est plus facile à calculer.

En effet

$$\begin{aligned}
 \Omega^2(\tau) &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{L-1} \sum_{l=0}^{L-2} (s_\tau^{(l+1)} - s_\tau^{(l)})^2 \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{L-1} \sum_{l=1}^{L-1} (s_\tau^{(l)})^2 + \frac{1}{L-1} \sum_{l=0}^{L-2} (s_\tau^{(l)})^2 + \frac{2}{L-1} \sum_{l=0}^{L-2} s_\tau^{(l+1)} s_\tau^{(l)} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{L-1} \sum_{l=1}^{L-1} (s_\tau^{(l)})^2 - (\bar{s}_\tau)^2 + \frac{1}{L-1} \sum_{l=0}^{L-2} (s_\tau^{(l)})^2 - (\bar{s}_\tau)^2 + \frac{2}{L-1} \sum_{l=0}^{L-2} s_\tau^{(l+1)} s_\tau^{(l)} \right]
 \end{aligned} \tag{11.57}$$

En faisant l'hypothèse que $\mathbb{E}(s_\tau^{(l+1)} s_\tau^{(l)})$ a pour valeur $(\bar{s}_\tau)^2$ (ce qui n'est pas tout à fait vrai en présence de dérive constante), nous obtenons

$$\mathbb{E}(\Omega^2(\tau)) = \sigma_\tau^2 \tag{11.58}$$

Pratiquement, à partir d'une séquence de signaux $s^{(k)}$, la variance d'Allan peut être calculée relativement rapidement à partir de l'intégrale de $s^{(k)}$.

On calcule d'abord l'intégrale

$$S^{(k)} = \frac{1}{\nu_s} \sum_{m=0}^{k-1} s^{(m)} \tag{11.59}$$

puis en remarquant que

$$\begin{aligned}
 s_\tau^{(l)} &= \frac{1}{\tau} (S^{(N(l+1))} - S^{(Nl)}) \\
 s_\tau^{(l+1)} &= \frac{1}{\tau} (S^{(N(l+2))} - S^{(N(l+1))})
 \end{aligned} \tag{11.60}$$

on calcule directement

$$\Omega^2(\tau) = \frac{1}{2\tau^2 N(L-2)} \sum_{l=0}^{L-3} (S^{(N(l+2))} - 2S^{(N(l+1))} + S^{(Nl)})$$

(11.61)

11.6.3. Interprétation

Les courbes obtenues, toujours exprimées en log/log, comportent généralement une décroissance, un minimum pour un temps τ_{opt} , puis une remontée (figure 11.9).

Les variations de la courbe donne les écarts-types centrés de l'estimateur en fonction de la durée de moyennage τ .

Pour les τ petits, la courbe est dominée par les bruits capteurs, et pour les τ grands, elle est limitée par les dérives long terme.

Les pentes de la courbe donne aussi des indications ([Hou04]).

- le bruit de quantification (le fait que la mesure est numérique et ne possède qu'un nombre fini d'états) se traduit par une pente en -1 (-2 si on trace la variance d'Allan) et n'influence que les faibles durées de moyennage,

11. Modélisation des capteurs

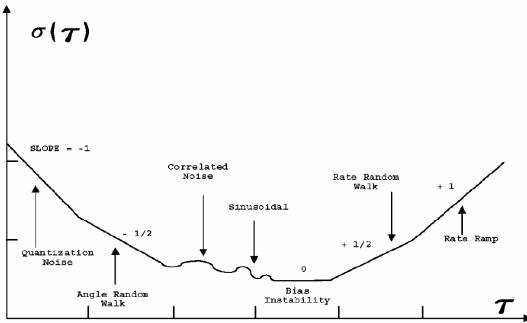


FIG. 11.9. : Exemple et interprétation d'une courbe de déviation d'Allan (extrait de [IEEE952]).

- le bruit blanc des capteurs, correspond comme présenté précédemment une décroissance en $-\frac{1}{2}$,
- le comportement de l'instabilité de la valeur de biais du capteur se présente sous la forme de la pente nulle. C'est aussi le cas du bruit de scintillation (flicker noise) qui est un bruit dans la densité spectrale est en $\frac{1}{f}$;
- dans certains cas, la dérivée de la grandeur physique mesurée est affectée d'un bruit blanc (c'est à dire l'accélération de la vitesse de rotation pour un gyromètre). Alors, la grandeur physique possède un bruit correspondant à l'intégrale d'un bruit blanc), on parle de "modèle de marche aléatoire (random walk)". Ce bruit se traduit par une remontée de pente $\frac{1}{2}$ sur le diagramme de déviation d'Allan.
- Enfin une dérive constante et linéaire du biais se traduit par une pente +1.

Au delà de l'interprétation des défauts du capteur, la courbe de déviation d'Allan, permet d'optimiser les modèles d'équation d'état du capteur.

En particulier, le minimum de la courbe d'Allan correspond à la précision maximale que l'on peut espérer d'un capteur en fonction du moyennage (si la mesure est statique) ou tout au moins au réglage des constantes de temps des offsets du capteur.

Ainsi, une telle courbe permet de connaître les réglages optimaux d'un filtre de Kalman modélisant le capteur.

11.6.4. Limitations

Malgré la puissance potentielle d'une telle méthode (largement utilisée en inertiel), elle garde néanmoins des défauts.

Le principal est que cela ne caractérise que certaines fluctuations dynamiques des défauts, pas les effets non linéaires ni les effets statiques.

Typiquement, les biais, erreurs de gains, mésalignements, jitter⁶, hystéresis ne sont absolument pas caractérisables par la déviation d'Allan.

⁶sauf pour une horloge.

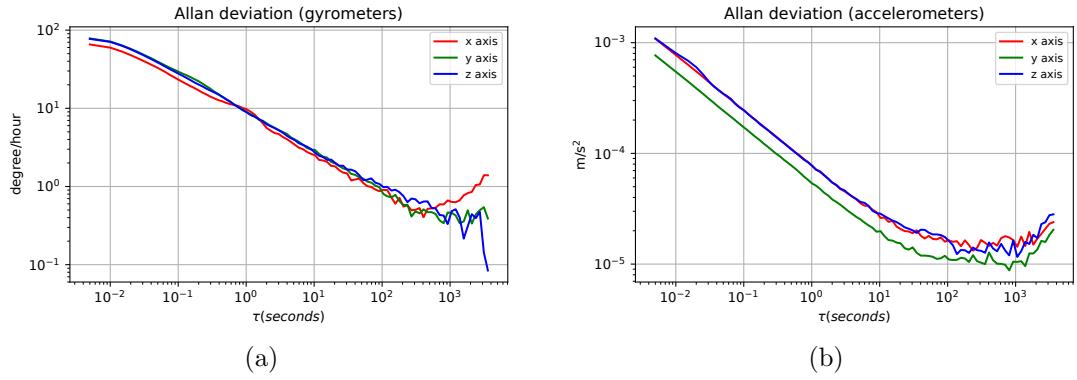


FIG. 11.10. : Déviation d'Allan de l'Ekinox 2 de l'Ensta Bretagne. (a) les trois gyromètres, (b) les trois accéléromètres.

De même, plusieurs sources d'erreurs peuvent mener à des effets similaires. Il convient donc d'être très prudent dans l'interprétation.

12. Fusion des informations capteurs

12.1. Outils utilisés en fusion

Dans le chapitre précédent, nous avons recensé quelques erreurs typiques des capteurs, et nous avons aussi établi une formulation temporelle du modèle capteur, suffisamment pratique pour opérer la fusion “optimale” des informations en présence de plusieurs capteurs.

L’étape suivante est d’utiliser un outil mathématique permettant d’établir un raisonnement logique qui permet l’estimation des grandeurs physiques recherchées à partir de toutes les informations disponibles.

On a vu que les capteurs pouvaient avoir des erreurs aléatoires. Ces dernières se modélisent bien à l’aide de la théorie des probabilités.

Par ailleurs, ne connaissant pas les valeurs à mesurer, celles-ci peuvent aussi être considérées comme incertaines et être aussi modélisées sous forme d’une variable aléatoire dont la valeur est une réalisation.

Enfin, nous pouvons avoir une idée a priori sur les valeurs attendues, que l’on souhaite aussi prendre en compte dans le choix final.

Le formalisme choisi est **la théorie de l’inférence bayesienne** qui a l’avantage d’avoir des fondations solides, mais l’inconvénient de fournir des algorithmes complexes et difficilement solubles dans le cas général.

Néanmoins, il est facilement utilisable dans le cas linéaire gaussien qui est détaillé dans ce chapitre. Des pistes sont abordées pour présenter les extensions dans le cas faiblement non-linéaire et le cas fortement non linéaire.

Dans les cas linéaires et quasi-linéaires, le formalisme final se résume à un filtre ou un lisseur de Kalman.

12.2. Théorie de l’inférence bayesienne

La théorie de l’inférence bayesienne est calquée sur la théorie des probabilités (les équations sont les mêmes), mais en revanche, étendue à la notion d’information incertaine.

Dans ce document, nous suivons le formalisme de Jeffreys [Jay03]. Dans cette théorie, la notion de probabilité ne concerne plus seulement la méconnaissance du résultat d’une expérience aléatoire répétable à l’infini, mais plus généralement, la probabilité modélise la notion plus floue de l’incertitude sur la connaissance d’une information ou, autrement dit, **la plausibilité d’une information**.

En partant d’un ensemble d’axiomes logiques sur la manipulation d’une information incertaine (par

12. Fusion des informations capteurs

exemple si notre connaissance dépend de deux informations, elle ne dépend pas de l'ordre d'arrivée des informations), on retrouve toutes les lois des probabilités.

12.2.1. Représentation des informations

Les variables aléatoires représentent des assertions (c'est à dire des affirmations) qui peuvent être testées.

Par exemple, si nous avons un thermomètre, l'assertion peut être "est-ce que la température est supérieure à 10°C ?" que nous noterons A .

La probabilité de la variable aléatoire représente la **plausibilité** de l'assertion.

- si l'assertion est certaine (c'est à dire vrai), alors sa probabilité est 1 : $p(A) = 1$,
- si l'assertion est impossible (c'est à dire fausse), alors sa probabilité est 0 : $p(A) = 0$.
- si l'assertion est incertaine, nous affecterons une probabilité comprise entre 0 et 1. Plus près de 0 si nous pensons qu'elle a plus de chance d'être fausse que vrai et réciproquement.

Les valeurs possibles des variables aléatoires peuvent être discrètes. C'est le cas, si l'ensemble des possibilités complémentaires d'une assertion sont en nombres finis.

Par exemple, nous pouvons considérer comme assertion complémentaire sur la température :

- la température est supérieure ou égale à 10°C ,
- la température est strictement inférieure à 10°C ,

Ces deux affirmations sont soit vraies, soit fausses mais si l'une est vrai, l'autre est forcément fausse.

Mais on peut aussi décomposer les informations sous la forme d'un autre ensemble d'assertions complémentaires discrètes.

- la température est supérieure ou égale à 10°C ,
- la température est strictement inférieure à 10°C mais supérieure ou égale à 0°C ,
- la température est strictement inférieure à 0°C .

Si on a N assertions complémentaires A_i , alors

$$\sum_{n=0}^{N-1} p(A_i) = 1 \quad (12.1)$$

L'ensemble des assertions complémentaires considérées peut aussi former un ensemble infini.

Par exemple, nous pouvons considérer l'affirmation "la valeur de la température est exactement $10.795891000\dots^{\circ}$ ".

L'ensemble des valeurs possibles de la température est infinie et est probablement un intervalle continu de \mathbb{R}^{+1} . Comme il y a une infinité d'événements complémentaires, la probabilité de chaque événement est nul (il est quasiment impossible que la température soit exactement $10.795891000\dots^{\circ}$).

¹Si la température est exprimée en Kelvin !

En revanche, la probabilité que la température soit entre 10°C et 11°C est une valeur finie.

Pour caractériser néanmoins la plausibilité que la température T prenne la valeur x , on utilisera alors une **densité de probabilité** notée aussi

$$p(T = x) \quad (12.2)$$

telle que l'ensemble des valeurs possibles ait une probabilité de 1

$$\int_{x=-273.15^{\circ}\text{C}}^{+\infty} p(T = x) dx = 1 \quad (12.3)$$

Dans la plupart des cas, les valeurs des grandeurs physiques sont continues et les densités de probabilité sont utilisées.

Pour alléger les notations, dans tous les cas $p(T = x)$ sera noté $p(x)$, sachant que généralement, il n'y a pas d'ambiguité sur quelle variable aléatoire est concernée.

12.2.2. Quelques notations et rappel des propriétés

Dans le cas d'évènements (d'assertions) discrets, on note pour les assertions A et B ,

- $A + B$ correspond à l'assertion A ou l'assertion B est vraie
- AB ou A, B correspondent à l'assertion A et l'assertion B sont vraies
- $A|B$ correspond à l'assertion A sachant que B est vrai
- \bar{A} correspond à l'assertion complémentaire de A .

Les deux lois principales qui découlent des axiomes sont

- la loi produit

$$p(AB|C) = p(A|BC)p(B|C) = p(B|AC)p(A|C) \quad (12.4)$$

- la loi somme

$$p(A + B|C) = p(A|C) + p(B|C) - p(AB|C) \quad (12.5)$$

De la loi somme, on déduit directement

$$p(A + \bar{A}|C) = 1 \quad \text{et} \quad p(C|A + \bar{A}) = p(C) \quad (12.6)$$

Théorème de Bayes

Dans le cas d'une densité de probabilité, la loi produit est aussi très utilisée

$$\begin{aligned} p(X = x, Y = y|Z = z) &= p(X = x|Y = y, Z = z)p(Y = y|Z = z) \\ &= p(Y = y|X = x, Z = z)p(X = x|Z = z) \end{aligned} \quad (12.7)$$

12. Fusion des informations capteurs

notée

$$p(xy|z) = p(x|yz)p(y|z) = p(y|xz)p(x|z) \quad (12.8)$$

De la loi produit, le théorème de Bayes est déduit

$$p(x|yz) = \frac{p(y|xz)p(x|z)}{p(y|z)}$$

(12.9)

$p(y|z)$ n'est pas toujours connu, mais peut éventuellement être calculé par

$$p(y|z) = \int_x p(y|xz)p(x|z) dx \quad (12.10)$$

d'où la seconde forme

$$p(x|yz) = \frac{p(y|xz)p(x|z)}{\int_x p(y|xz)p(x|z) dx}$$

(12.11)

Qui reste vraie même si la valeur n'est pas conditionnée par z

$$p(x|y) = \frac{p(y|x)p(x)}{p(y)} = \frac{p(y|x)p(x)}{\int_x p(y|x)p(x) dx}$$

(12.12)

En fait dans la théorie de l'inférence bayésienne, on a tendance à toujours mettre le terme z , qui représente souvent les hypothèses ou la connaissance générale : cela peut se noter I pour "l'information" dont on dispose ou M pour le "modèle" utilisé ou H pour les "hypothèses" prises.

L'intérêt de spécifier explicitement le modèle est de ne pas oublier que le raisonnement n'est juste que si le modèle est vrai.

12.2.3. Exemple d'emploi du théorème de Bayes

Imaginons un capteur qui fournit une mesure \mathbf{d} d'une grandeur physique $\boldsymbol{\theta}$ que l'on cherche à déterminer.

Pour simplifier, le capteur n'a ni erreur de gain, ni offset, seulement un bruit additif aléatoire :

$$\mathbf{d}(t) = \boldsymbol{\theta}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (12.13)$$

On cherche alors à connaître la plausibilité des valeurs possibles de $\boldsymbol{\theta}$, connaissant la mesure donnée par le capteur \mathbf{d} , et, de manière implicite, connaissant le modèle choisi \mathbf{m} , c'est à dire :

- l'équation 12.13,
- la loi supposée (ou mesurée) du bruit $p(\mathbf{n})$,
- la plausibilité des valeurs de $\boldsymbol{\theta}$ avant de connaître la réalisation de la mesure que l'on appelle $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{m})$.

Nous cherchons la probabilité (plausibilité) de θ connaissant le modèle est la mesure, c'est à dire $p(\theta|dm)$.

Le théorème de Bayes s'écrit

$$p(\theta|dm) = \frac{p(d|\theta m)p(\theta|m)}{p(d|m)} \quad (12.14)$$

Encore une fois, le modèle m peut être laissé implicite, dans ce cas, cela s'écrit

$$p(\theta|d) = \frac{p(d|\theta)p(\theta)}{p(d)} \quad (12.15)$$

Les quatre termes présents ont un nom et une signification :

- $p(d|\theta m)$ est appelé **la vraisemblance (likelihood)**. C'est la probabilité d'avoir la mesure connaissant la grandeur à mesurer. Dans notre cas, cela dépend uniquement du modèle capteur et dans notre cas particulier, de la probabilité du bruit du capteur.
- $p(\theta|m)$ est appelé la **probabilité a priori (prior probability)**. Cela correspond en théorie à la plausibilité de θ avant de connaître la mesure. L'aspect "a priori" est purement formel, car il peut être éventuellement affiné par des informations que l'on obtiendra après la mesure. De façon rigoureuse, c'est la plausibilité en intégrant toutes les informations que l'on a, hormis la mesure.
- $p(d|m)$ est **l'évidence du modèle (model evidence)** ou la **vraisemblance marginale (marginal likelihood)**. C'est la plausibilité de la mesure obtenue ne connaissant pas la valeur réelle de la grandeur physique.
- $p(\theta|dm)$ est **la probabilité a posteriori (posterior probability)**. C'est la plausibilité de θ , en intégrant toutes les informations disponibles y compris la mesure, c'est à dire la grandeur recherchée.

Trois remarques importantes :

- la probabilité a priori peut soit être issue d'un calcul préalable, par exemple une mesure précédente et un modèle de fluctuation de θ , soit c'est un a priori, voire même une intime conviction.

Par exemple, si on mesure la température extérieure à Brest l'été, la loi choisie peut traduire le fait qu'une valeur de 20°C peut nous paraître plus vraisemblable que 0°C ou 45°C.

Cependant, techniquement 0°C et 45°C ne sont pas impossibles, juste peu plausibles ;

- dans certains cas, soit nous ne disposons d'aucune information sur la loi a priori (donc la grandeur à mesurer), soit, simplement nous souhaitons avoir un résultat objectif qui ne soit pas biaisé par l'opinion ou une information externe.

Il est alors nécessaire de choisir $p(\theta|m)$ de telle sorte qu'il soit "le plus neutre" possible sur le résultat.

Si les valeurs de grandeur physique peuvent prendre toutes les valeurs de \mathbb{R} sans qu'une ne soit plus probable qu'une autre, le plus simple est de supposer $p(\theta|m)$ constant.

12. Fusion des informations capteurs

Cependant, cela appelle à quelques difficultés théoriques, car une densité de probabilité constante sur \mathbb{R} ne peut pas avoir 1 comme résultat de l'intégrale.

De plus, si les coordonnées de la grandeur recherchée ne sont pas définies sur l'ensemble \mathbb{R} tout entier, la loi la plus neutre possible n'est plus forcément la loi constante.

En absence d'information a priori, l'estimation de θ se réduit généralement au **maximum de vraisemblance**, c'est à dire

$$\theta = \arg \max_{\theta} p(\mathbf{d}|\theta m) \quad (12.16)$$

- l'évidence du modèle $p(\mathbf{d}|m)$ ne dépend pas de la valeur recherchée θ , de plus elle est généralement relativement difficile à calculer. Elle n'est donc estimée que très rarement.

Il peut malgré tout être riche d'enseignement.

Toujours dans le cas d'une mesure de la température extérieure à Brest en été, si la précision du capteur est de 1°C et que la mesure fournie est de 2500°C , compte tenu de la connaissance des températures possibles, il est fort probable que l'évidence du modèle $p(\mathbf{d}) = 2500^{\circ}\text{C} | \text{mesure faite à Brest avec un thermomètre précis}$ est très faible.

Cela peut dire que soit la température est réellement de 2500°C , soit que le modèle est faux :

- le capteur n'est pas un thermomètre,
- l'unité n'est pas le degré Celsius,
- le thermomètre est cassé (et donc pas précis au degré)
- etc...

Au final, on pourrait intégrer dans le raisonnement la probabilité que le modèle soit juste (par exemple avec une confiance de 99%) , et avec des valeurs réalistes de plausibilité d'erreurs du modèle, on trouverait très certainement que la probabilité que le modèle soit faux est très supérieure à la probabilité d'avoir réellement 2500°C en extérieur, en été à Brest, ce qui correspond à la conclusion logique à avoir dans ce cas précis.

12.3. Vecteurs gaussiens

Pour l'instant, les lois de probabilités utilisées que ce soit dans l'inférence bayesienne, ou dans le bruit blanc des modèles ARMA des capteurs n'ont pas été abordées.

Dans les modèles linéaires, les lois de probabilité les plus utilisées sont les lois gaussiennes, et dans le cas de grandeurs vectorielles, les **vecteurs gaussiens**.

12.3.1. Loi gaussienne pour un scalaire

Son expression pour une valeur scalaire x est

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

(12.17)

Elle est paramétrée par deux variables :

μ : qui est l'espérance de la loi,

σ^2 : qui est la variance de la loi.

Généralement, elle est notée de manière abrégée

$$p(x) = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad (12.18)$$

Cette loi est appelée **Loi de Gauss**, **Loi gaussienne** ou **loi normale**.

12.3.2. Vecteur Gaussien

Dans le cas où la variable n'est pas scalaire mais un vecteur de paramètres, nous pouvons définir la notion de **vecteur gaussien**. Elle est parfois appelé **couple gaussien** dans le cas d'un vecteur à 2 dimensions.

Un vecteur gaussien est un vecteur de variables aléatoires scalaires dont toutes les combinaisons linéaires des composantes du vecteur suivent aussi une loi gaussienne.

Il est important de noter que d'avoir toutes les composantes qui suivent une loi gaussienne ne suffit pas.

Un contre-exemple, c'est à dire un vecteur dont les composantes sont gaussiennes, mais pas certaines de leurs combinaisons linéaires peut être exhibé de la façon suivante :

soit :

- x qui suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$,
- y qui vaut 1 ou -1 avec une probabilité de $\frac{1}{2}$,

alors, chaque composante du couple

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ xy \end{pmatrix} \quad (12.19)$$

suit une loi gaussienne.

En revanche, la somme des deux composantes $x + xy$ vaut 0 avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ et donc ne suit pas une loi gaussienne.

La loi de probabilité d'un vecteur gaussien \mathbf{x} de dimension n , s'exprime par la loi

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\det(\Sigma)|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})} \quad (12.20)$$

où $\boldsymbol{\mu}$ est l'espérance du vecteur \mathbf{x} , Σ est la matrice de variance / covariance
 $\det(\Sigma)$ est le déterminant de la matrice de variance / covariance

12. Fusion des informations capteurs

Si la variance est noté σ^2 en scalaire, elle est notée Σ en matricielle (et non Σ^2).

12.3.3. Importance de la loi normale

L'importance de la loi normale vient de plusieurs facteurs :

- ses propriétés calculatoires,
- le fait que la loi de la somme de plusieurs paramètres aléatoires tend souvent vers une loi gaussienne.

Propriétés de la loi gaussienne

Les lois gaussiennes possèdent plusieurs lois de conservation :

Fonction caractéristique de la loi normale La fonction caractéristique d'une loi de probabilité est la transformée (similaire mais pas rigoureusement identique à une transformation de Fourier)

$$\Phi(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{j\nu x} dx \quad (12.21)$$

Elle sert en particulier à calculer la loi de l'addition de deux variables.

Comme la transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne, nous avons (dans le cas d'un scalaire)

$$\mathcal{F}(\mathcal{N}(\mu, \sigma)) = e^{j\mu\nu - \frac{\sigma^2\nu^2}{2}} \quad (12.22)$$

Somme de deux variables gaussiennes indépendantes Soit deux variables **indépendantes** x_1 et x_2 de loi $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, alors $x_1 + x_2$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Multiplication par un scalaire Soit une variable x suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et un scalaire λ constant, la variable λx suit la loi $\mathcal{N}(\lambda\mu, \lambda^2\sigma^2)$

Extension dans le cas vectoriel Soit un vecteur gaussien \mathbf{x}_1 de dimension n suivant une loi $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ et une matrice \mathbf{A} de dimension m, n , le vecteur $\mathbf{x}_2 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^T)$.

Convergence vers la loi normale

Le second point rendant la loi normale importante, c'est qu'au final elle se rencontre souvent dans les phénomènes physiques grâce aux lois des grands nombres.

La loi des grands nombres ou théorème central limite prend plusieurs formes :

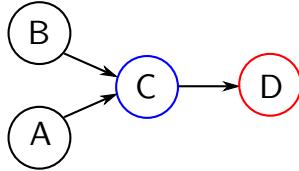


FIG. 12.1. : Schéma d'un graphe bayésien élémentaire

- la forme la plus courante est celle de **Lindeberg-Lévy** :

Soit un ensemble N de réalisations **indépendantes** suivant une **même loi** d'espérance μ et de variance (finie) σ^2 , alors la moyenne de ces réalisations $m = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n$ tend vers une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ quand n tend vers l'infini ;

- il existe aussi une version plus générale où les différentes réalisations x_n ne sont pas obligées de suivre la même loi ;

La forme de **Lyapunov** correspond à la variation suivante :

Si $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ est une séquence aléatoire de variables indépendantes, chacunes d'espérance μ_n et de variance σ_n^2 .

Soit $s_n = \sum_{i=0}^n \sigma_i^2$, si $\exists \delta > 0 / \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(|x_i - \mu_i|^{2+\delta}) = 0$ alors $\frac{1}{s_n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_i)$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$ quand n tend vers l'infini.

Sous cette forme, il n'est pas nécessaire que les variables x_i suivent la même loi.

12.4. Graphes bayésiens

Pour aider à la compréhension de la fusion de capteurs, un concept intéressant est celui des **graphes bayésiens**.

Imaginons une chaîne d'événements aléatoires avec, par exemple, deux phénomènes aléatoires indépendants A et B associés à deux densités de probabilités $p(A)$ et $p(B)$, puis une variable aléatoire C dépendante des réalisations de A et B et enfin une mesure bruitée D de C .

Potentiellement, la densité de probabilité de D dépend des probabilités de A , B , C , ce que l'on peut caractériser par

$$p(D|ABC) \tag{12.23}$$

Dans le cas général, une telle densité est complexe à calculer.

Dans le cas précédent, un graphe de dépendance peut néanmoins être tracé (figure 12.1).

Dans ce graphe de dépendance, on peut remarquer que la variable D dépend des réalisations de A et B qu'à travers la variable aléatoire C .

Réciproquement, si nous avons la mesure D et que nous cherchons la probabilité de C , nous avons, à travers la loi produit

$$p(ABCD) = p(D|ABC)p(C|AB)p(A|B)p(B) \tag{12.24}$$

12. Fusion des informations capteurs

Comme D ne dépend de A et B qu'à travers la variable C , si C est connu, D ne dépend plus de A et B d'où

$$p(D|ABC) = p(D|C) \quad (12.25)$$

De même, comme A et B sont indépendants,

$$p(A|B) = p(A) \quad (12.26)$$

D'où la loi conjointe

$$p(ABCD) = p(D|C)p(C|AB)p(A)p(B) \quad (12.27)$$

formule qui est plus simple que l'équation initiale.

Supposons maintenant que nous cherchons la probabilité de C connaissant A , B et D . Par la loi de Bayes nous avons

$$p(ABCD) = p(C|ABD)p(D|AB)p(A|B)p(B) \quad (12.28)$$

Par l'égalité des deux équations précédentes, nous avons

$$p(C|ABD) = \frac{p(D|C)p(C|AB)}{p(D|AB)} = \frac{p(D|C)p(C|AB)}{\sum_C p(D|C)p(C|AB)} \quad (12.29)$$

Comme dit précédemment, le dénominateur est difficile à calculer sauf dans le cas gaussien. Malgré tout, on peut s'en sortir car il ne dépend pas de C et que comme $p(C|ABD)$ est une densité de probabilité, son intégrale sur le domaine de définition de C est l'unité.

En conséquence, le dénominateur n'intervient que comme terme de normalisation de la densité de probabilité.

L'intérêt du graphe bayésien est de simplifier les problèmes d'inférence dans le cas de chaînes de dépendance des variables bien déterminées.

C'est typiquement, ce qui est appliqué dans le chapitre suivant pour résoudre les problèmes de navigation à travers du filtre et du lisseur de Kalman.

13. Filtrage de Kalman

13.1. Bilan des outils de modélisation et fusions capteurs

Le chapitre précédent présente les concepts théoriques associés à la fusion des informations provenant de différents capteurs.

La théorie d'inférence de Bayes présentée est un outil efficace de fusion d'informations sous réserve de deux points :

- que les hypothèses soient réalistes,
- que le calcul ne soit pas trop complexe.

Sous ces deux conditions, un filtrage permettant d'estimer au mieux le résultat est possible.

Cependant que pour que le calcul reste réalisable, il est pertinent de se contenter d'un système linéaire, et si possible avec des probabilités gaussiennes.

Malgré tout, ces contraintes ne sont pas si strictes que cela car beaucoup de propriétés des capteurs (bruit, gain, offset, retard, bande passante...), peuvent être modélisées via un processus linéaire sous forme d'un filtre ARMA (AutoRegressive Moving Average model).

Dans un premier temps, nous allons présenter un filtrage optimal sous ces hypothèses de "gaussiennité" et de linéarité. Nous obtenons alors le **filtre de Kalman** qui est

- optimal au sens de l'erreur quadratique, (c'est à dire l'estimation est celle de variance minimale),
- rapide,
- permet d'avoir les meilleures estimées au fil du temps (et pas seulement en post-processing), ce qui est un point important en navigation.

Bien évidemment, certains modèles capteurs peuvent ne pas être linéaires et certaines incertitudes sont très mal modélisées par une probabilité gaussienne.

Dans ce cas, il existe quelques extensions du filtrage de Kalman :

- le filtrage étendu (EKF), qui peut être utilisée en cas de non-linéarités "faibles",
- le filtrage "sans parfum" (Unscented Kalman Filter) qui est un peu plus complexe, mais se comporte mieux que l'EKF en cas de linéarités faibles,
- le filtrage particulier, beaucoup plus lourd, mais qui accepte des non-linéarités "fortes" et des statistiques non gaussiennes,

13. Filtrage de Kalman

- le filtrage particulaire “Rao-Blackwellisé” qui est un hybride entre le filtrage de Kalman et le filtrage particulaire qui accepte des non-linéarités “fortes” et des statistiques non gaussiennes mais est plus rapide que le filtrage particulaire (mais qui n'est pas détaillé dans ce document).

Il existe des versions continues de ces filtres, mais seules les versions échantillonnées sont abordées. Il y a deux raisons à cela :

- la forme discrète est plus intuitive que la forme continue,
- les implémentations modernes (par calculateur numérique) sont toujours sous la forme discrète.

13.2. Modèle d'un filtre de Kalman linéaire

Le filtre de Kalman s'articule autour de deux équations qui intègrent :

- le modèle des paramètres à estimer sous forme temporelle,
- l'information disponible éventuellement incertaine sous forme de relations entre la mesure et le modèle.

13.2.1. Equation d'état

Le modèle des paramètres à estimer est appelé **Equation d'état** et prend la forme d'un processus vectoriel **Markovien** linéaire :

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{F}\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{Q}\mathbf{v}^{(k)} \quad (13.1)$$

Cela correspond au modèle ARMA sous lequel les capteurs peuvent être modélisés, exprimés sous forme d'un processus Markovien (la probabilité de l'état à l'instant k ne dépend que de l'état à l'instant $k - 1$).

Dans les faits, le Kalman s'applique aussi au cas où les matrices \mathbf{F} et \mathbf{Q} sont variables dans le temps (ce qui est plus général que le modèle ARMA).

Vecteur d'état

$\mathbf{x}^{(k)}$ est le vecteur d'état. C'est un vecteur qui intègre à l'instant k les estimations de tous les paramètres incertains qui modélisent le processus et qui ont donc une influence sur le résultat final.

Les paramètres incertains peuvent se décomposer en plusieurs familles :

- les paramètres utiles : ceux dont l'estimation est notre objectif direct. En navigation, cela comprend l'attitude, la vitesse et la position ;
- les paramètres d'influence ou nuisibles : ce sont des paramètres dont l'estimation est nécessaire pour trouver les paramètres utiles mais qui ne nous intéressent pas au premier chef : c'est le cas des défauts capteurs (biais, erreurs de gain), mais aussi éventuellement de grandeurs physiques qui ont une influence sur le résultat, comme par exemple, la température.

- les paramètres auxiliaires qui ne sont là que pour “affiner” le modèle ou pour permettre de le mettre sous la forme du processus Markovien.

Le choix d'un vecteur d'état pertinent est une des difficultés du filtrage de Kalman.

Modèle Markovien linéaire

De part l'hypothèse Markovienne, l'information a priori sur la valeur du vecteur d'état à l'instant k ne dépend que de la valeur du vecteur d'état à l'instant précédent $k - 1$.

Et comme le processus est linéaire, la dépendance entre $\mathbf{x}^{(k)}$ et $\mathbf{x}^{(k-1)}$ est linéaire et donc sous la forme d'une matrice \mathbf{F} telle que

$$\hat{\mathbf{x}}^{(k)} = \mathbf{F}\mathbf{x}^{(k-1)} \quad (13.2)$$

Comme le processus n'est pas déterministe, bien évidemment $\mathbf{x}^{(k)}$ n'est pas directement $\mathbf{F}\mathbf{x}^{(k-1)}$ mais la différence entre $\mathbf{x}^{(k)}$ et $\mathbf{F}\mathbf{x}^{(k-1)}$ est totalement aléatoire et varie pour chaque k , il est modélisé alors sous la forme d'un “bruit” vectoriel additif $\mathbf{Q}\mathbf{v}^{(k)}$.

Vecteur d'innovation

Le vecteur $\mathbf{v}^{(k)}$ est appelé **vecteur d'innovation**. C'est la contribution d'apparence aléatoire qui ne peut pas être prédite par $\mathbf{x}^{(k-1)}$.

Ce n'est pas forcément un bruit (d'où on l'appelle innovation mais pas bruit) mais une incertitude ou une méconnaissance qui peut représenter :

- l'écart entre le modèle et la réalité (erreur de modélisation ou plus simplement, le modèle est une version simplifiée de la réalité),
- une perturbation réelle du système.

Généralement, pour simplifier, on le représente sous la forme d'un vecteur aléatoire dont les composantes sont gaussiennes, centrées, normées et indépendantes deux à deux, donc modélisé sous forme $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$.

Comme la contribution de l'innovation n'est elle-même, ni normée ni forcément à composantes indépendantes, on introduit la matrice \mathbf{Q} qui permet d'ajouter à $\mathbf{F}\mathbf{x}^{(k)}$ une incertitude de variance et de covariance donnée.

Si l'innovation réelle a une matrice de variance/covariance Σ , \mathbf{Q} doit posséder la propriété

$$\Sigma = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T \quad (13.3)$$

pour garantir les bonnes caractéristiques probabilistes à l'innovation.

Comme une matrice de variance / covariance Σ est une matrice symétrique positive, il existe une **matrice triangulaire inférieure \mathbf{L}** telle que

$$\Sigma = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \quad (13.4)$$

La matrice triangulaire inférieure \mathbf{L} est, si possible, choisie en tant que matrice \mathbf{Q} , car elle est facilement calculable par la **décomposition de Choleski**, et de plus, la matrice étant triangulaire, le résultat est plus compact et le calcul plus rapide. Néanmoins, ce choix n'est pas obligatoire.

Deux remarques importantes

Absence de biais dans l'innovation

La matrice \mathbf{Q} permet de modéliser la variance/covariance de l'innovation mais pas le biais.

Tout d'abord, l'espérance de l'innovation est forcément nulle. En effet, $\mathbf{F}\mathbf{x}^{(k-1)}$ doit modéliser tout ce qui est prédictible à partir des mesures précédentes $\mathbf{x}^{(k-1)}$, or le biais est, par définition, constant dans le processus, donc il n'a pas à entrer dans l'innovation.

En revanche, \mathbf{F} est linéaire, pas affine, donc on ne peut introduire une valeur constante dans l'équation d'état. Une solution alors est d'intégrer le biais dans la fonction d'état sous la forme

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{F}\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{Q}\mathbf{v}^{(k)} + \mathbf{g} \quad (13.5)$$

Comme cela ne change pas fondamentalement les algorithmes, pour alléger les notations, le vecteur \mathbf{g} sera supposé nul dans la suite du raisonnement, mais il est facile de l'inclure (ce point est abordé dans les exercices).

Variation au cours du temps des matrices

Dans les équations présentées, les matrices \mathbf{F} et \mathbf{Q} sont supposés constantes, or la théorie accepte complètement que ces termes soient variables (mais connus) au cours du temps.

Dans le cas général, nous avons $\mathbf{F}^{(k)}$ et $\mathbf{Q}^{(k)}$. Comme cela ne change aucunement les équations. Pour alléger les notations, nous n'introduisons pas l'indice k dans les matrices, mais nous gardons à l'esprit que ces deux matrices peuvent être variables.

13.2.2. Équation de mesure

La seconde équation, appelé **équation de mesure** a pour forme :

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{H}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{R}\mathbf{w}^{(k)} \quad (13.6)$$

Vecteur de mesure

$\mathbf{y}^{(k)}$ est le vecteur de mesure à l'instant k .

Il correspond aux valeurs disponibles à l'instant k pour permettre l'estimation ou la correction du vecteur d'état $\mathbf{x}^{(k)}$, l'équation de mesure étant la relation qui lie le vecteur d'état et la mesure.

Comme pour le modèle d'état, nous supposons que le vecteur de mesure est relié au vecteur d'état par une équation linéaire d'où une matrice \mathbf{H} qui relie les deux.

Cette matrice est appelée **matrice d'observation**.

Vecteur bruit de mesure

Dans le modèle, la relation "vecteur d'état" / "vecteur de mesure" est aussi supposé imparfaite et est entachée par un **bruit de mesure** additif.

Comme pour le vecteur innovation, celui-ci est modélisé par un vecteur bruit gaussien centré normé $\mathbf{w}^{(k)}$, et les variances et corrélations sont traduites par la matrice \mathbf{R} telle que $\mathbf{R}\mathbf{R}^T$ soit la matrice de variance/covariance du bruit.

Comme pour l'équation d'état, les matrices \mathbf{H} et \mathbf{R} peuvent être modifiées à chaque itération, et éventuellement un biais \mathbf{s} peut être ajouté.

Objectif de l'équation de mesure

Il est important de comprendre que l'équation de mesure correspond à la relation directe entre le vecteur d'état et la mesure disponible.

Comme la relation est directement linéaire, il n'est pas possible d'y intégrer une modélisation détaillée du capteur, mais seulement un gain connu et un bruit additif.

Toute modélisation capteur plus sophistiquée (offset, erreur de gain inconnue, bande passante ...) doit être incluse dans l'équation d'état qui, de par sa forme, permet une plus grande latitude de modèles.

13.3. Modèle associé au filtre de Kalman

Le système est donc modélisé par deux équations (équation d'état et équation de mesure) :

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{x}^{(k)} &= \mathbf{F}\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{Q}\mathbf{v}^{(k)} \\ \mathbf{y}^{(k)} &= \mathbf{H}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{R}\mathbf{w}^{(k)}\end{aligned}} \quad (13.7)$$

avec :

- les matrices \mathbf{F} , \mathbf{H} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} connues (éventuellement variables dans le temps),
- les lois de probabilité de $\mathbf{v}^{(k)}$ et $\mathbf{w}^{(k)}$ connues (et les équations "arrangées" de telle sorte qu'elles soient normales centrées normées ($\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$) grâce à l'introduction de \mathbf{Q} , \mathbf{R} et éventuellement de vecteurs biais (\mathbf{g} et \mathbf{s}) non représentés ici).
- $\mathbf{y}^{(k)}$ un vecteur mesure disponible au cours du temps à chaque échantillon k .

À partir de ce modèle, on doit rechercher la meilleure estimée du vecteur d'état $\mathbf{x}^{(k)}$ pour tous les échantillons k .

Il y a deux problèmes courants que l'on cherche à résoudre : le **filtrage** et le **lissage**.

13.3.1. Le filtrage

Le filtrage est un processus que l'on exécute au cours du temps (au fur et à mesure que les échantillons k sont reçus).

A chaque instant k , nous souhaitons estimer au mieux le vecteur $\mathbf{x}^{(k)}$ connaissant les mesures déjà disponibles $\mathbf{y}^{(i)}$ avec $i \in [0, k]$.

13. Filtrage de Kalman

Pour la navigation, le problème est de connaître à chaque instant sa position courante en fonction des données passées.

Plus formellement, à chaque itération (k), on cherche $p(\mathbf{x}^{(k)} | \mathbf{y}^{(i), i \in [0, k]}, \mathbf{x}^{(i), i \in [0, k-1]})$

13.3.2. Le lissage

Le lissage est une action faisable en temps différé après la mission, qui est de recalculer tous les vecteurs d'états successifs, une fois disponible toutes les mesures.

En effet, pour un instant k , les données futures $\mathbf{y}^{(i)}$ pour $i > k$ peuvent aider à la détermination de $\mathbf{x}^{(k)}$.

Le cas courant pour un AUV par exemple, est d'utiliser les positions de GNSS à la fin de mission (et donc l'écart entre la navigation prédictive pendant la mission et la mesure satellitaire) pour estimer la dérive totale et l'intégrer dans le calcul.

Dans le cas du lissage, l'objectif est de trouver de manière mathématique les estimées $\mathbf{x}^{(k)}$ à la fin de mission, quand K mesures sont disponibles, et ce, pour tous les instants k passés, $p(\mathbf{x}^{(k)} | \mathbf{y}^{(i), i \in [0, K]})$

13.3.3. Autres problèmes courants

Il existe aussi d'autres problèmes courants :

- Le filtrage à temps décalés

Comme les données "futures" permettent d'améliorer l'estimation de l'état à un instant donné, l'idée est de retarder l'estimation pour profiter des données suivantes.

Si, par exemple, on accepte un délai Δk pour la mise à disposition des estimées, on va chercher $p(\mathbf{x}^{(k)} | \mathbf{y}^{(i), i \in [0, k+\Delta k]}, \mathbf{x}^{(i), i \in [0, k-1]})$

Un cas classique en hydrographie, est de calculer un pilonnement plus précis que celui obtenu en temps réel, en acceptant d'intégrer quelques mesures futures. Bien entendu, cette estimée est retardée.

- Le lissage d'un point particulier

Si pour une raison ou une autre, l'estimation d'intérêt correspond à un seul instant particulier, on peut se contraindre à ne chercher que l'estimation d'un k particulier : k_0 . On cherche alors uniquement $p(\mathbf{x}^{(k_0)} | \mathbf{y}^{(i), i \in [0, K]})$

13.4. Chaîne de Markov

Le problème est de trouver la fonction $p(\mathbf{x}^{(k)})$ connaissant tous les informations déjà passées :

- les réalisations de toutes les mesures $\mathbf{y}^{(i), i \in [0, k-1]}$,

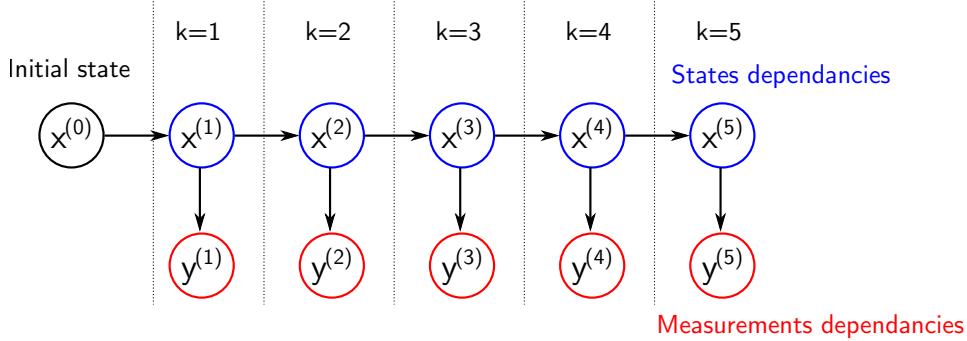


FIG. 13.1. : Dépendance probabiliste états / mesures pour un filtre de Kalman

- la probabilité initiale de \mathbf{x} : $p(\mathbf{x}^{(0)})$.

Une chaîne de traitement peut être créée où on part de l'estimation initiale de \mathbf{x} : $\mathbf{x}^{(0)}$.

Le vecteur d'état $\mathbf{x}^{(k)}$ évolue temporellement selon l'équation d'état qui lie la probabilité de l'état (k) à la probabilité de l'état précédent.

En parallèle, chaque état k est observable à travers une mesure $\mathbf{y}^{(k)}$ dont les probabilités d'apparition sont liées à l'équation de mesure.

Les dépendances probabilistes peuvent être représentées à travers du graphe de la figure 13.1.

Cette figure prend la forme d'une chaîne qui se nomme **chaîne de Markov** car chaque cellule ne dépend des cellules lointaines qu'à travers les cellules voisines (via l'équation d'état et l'équation de mesure). C'est un cas particulier du graphe bayésien.

13.4.1. Résolution de la chaîne

À la première étape, l'itération $k = 1$, d'après le dessin, les informations disponibles sont

- la connaissance de départ $p(\mathbf{x}^{(0)})$ (probabilité initiale),
- la valeur de la première mesure $\mathbf{y}^{(1)}$,
- par l'équation d'état, la valeur de $p(\mathbf{x}^{(1)}|\mathbf{x}^{(0)})$ (probabilité a priori)
- par l'équation de mesure, la valeur de $p(\mathbf{y}^{(1)}|\mathbf{x}^{(1)})$ (la vraisemblance).

L'information à calculer (la probabilité a posteriori pour l'instant k), est $p(\mathbf{x}^{(1)}|\mathbf{y}^{(1)}\mathbf{x}^{(0)})$ qui traduit toute l'information connue à l'itération $k = 1$ sur le vecteur d'état $\mathbf{x}^{(1)}$.

A la seconde étape, l'information provenant de $\mathbf{y}^{(1)}$ a déjà été complètement exploitée pour estimer $\mathbf{x}^{(1)}$, ainsi l'estimation de $p(\mathbf{x}^{(2)}|\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)})$ est égale à l'estimation de $p(\mathbf{x}^{(2)}|\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)})$

Comme le filtre est itératif, plus généralement on peut poser

$$p(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{x}^{(0)}\mathbf{y}^{(i)}, i \in [0, k]) = p(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{x}^{(0)}\mathbf{y}^{(i)}, i \in [0, k-1], \mathbf{y}^{(k)}) = p(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{x}^{(k-1)}\mathbf{y}^{(k)}) \quad (13.8)$$

A l'itération k , on doit donc calculer $p(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{x}^{(k-1)}\mathbf{y}^{(k)})$

13. Filtrage de Kalman

Cela peut être fait à partir de l'équation de Bayes.

$$p(\mathbf{x}^{(k)} | \mathbf{x}^{(k-1)} \mathbf{y}^{(k)}) = \frac{p(\mathbf{y}^{(k)} | \mathbf{x}^{(k)} \mathbf{x}^{(k-1)}) p(\mathbf{x}^{(k)} | \mathbf{x}^{(k-1)})}{p(\mathbf{y}^{(k)} | \mathbf{x}^{(k-1)})} \quad (13.9)$$

Cette équation peut être légèrement simplifiée. Dans $p(\mathbf{y}^{(k)} | \mathbf{x}^{(k)} \mathbf{x}^{(k-1)})$, l'information provenant de $\mathbf{x}^{(k-1)}$ est déjà intégrée dans $\mathbf{x}^{(k)}$ en conséquence

$$p(\mathbf{y}^{(k)} | \mathbf{x}^{(k)} \mathbf{x}^{(k-1)}) = p(\mathbf{y}^{(k)} | \mathbf{x}^{(k)}) \quad (13.10)$$

d'où

$$p(\mathbf{x}^{(k)} | \mathbf{x}^{(k-1)} \mathbf{y}^{(k)}) = \frac{p(\mathbf{y}^{(k)} | \mathbf{x}^{(k)}) p(\mathbf{x}^{(k)} | \mathbf{x}^{(k-1)})}{p(\mathbf{y}^{(k)} | \mathbf{x}^{(k-1)})} \quad (13.11)$$

La résolution de cette équation reste malgré tout assez lourde. Cela peut cependant être fait dans le cas gaussien grâce à deux lemmes démontrés en annexe.

Lemme 1 : relation linéaire entre deux vecteurs gaussiens

Soit deux vecteurs gaussiens :

- \mathbf{x} suivant la loi $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\Sigma}_{xx})$
- \mathbf{y} tel que $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ est $\mathcal{N}(\mathbf{H}\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}_v, \boldsymbol{\Sigma}_{vv})$

alors le vecteur $\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien

d'espérance $\begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_x \\ \mathbf{H}\boldsymbol{\mu}_x + \boldsymbol{\mu}_v \end{pmatrix}$

de variance $\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{xx} & \boldsymbol{\Sigma}_{xx}\mathbf{H}^T \\ \mathbf{H}\boldsymbol{\Sigma}_{xx} & \mathbf{H}\boldsymbol{\Sigma}_{xx}\mathbf{H}^T + \boldsymbol{\Sigma}_{vv} \end{pmatrix}$

La démonstration est en annexe A.4.

Ce lemme permet de calculer la loi de probabilité de $p(\mathbf{x}^{(k)} | \mathbf{y}^{(i), i \in [0, k-1]})$ noté $\mathbf{x}^{(k|k-1)}$ en fonction de la loi de probabilité $p(\mathbf{x}^{(k-1)} | \mathbf{y}^{(i), i \in [0, k-1]})$ noté $\mathbf{x}^{(k-1|k-1)}$.

Supposons que $\mathbf{x}^{(k-1|k-1)}$, résultat du filtre de Kalman à l'itération $(k-1)$ soit une loi normale

- d'espérance : $\boldsymbol{\mu}^{(k-1|k-1)}$,
- de variance : $\boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k-1|k-1)}$.

Comme $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{F}\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{Q}\mathbf{v}^{(k)}$ alors nous pouvons calculer $\mathbf{x}^{(k|k-1)}$.

Cette loi est une loi normale

d'espérance : $\boldsymbol{\mu}^{(k|k-1)} = \mathbf{F}\boldsymbol{\mu}^{(k-1|k-1)}$

de variance/covariance : $\boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k|k-1)} = \mathbf{F}\boldsymbol{\Sigma}^{(k-1|k-1)}\mathbf{F}^T + \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T$

De la même façon, $p(\mathbf{y}^{(k)} | \mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{y}^{(i), i \in [0, k-1]})$ peut être calculé connaissant $p(\mathbf{x}^{(k)} | \mathbf{y}^{(i), i \in [0, k-1]})$.

Comme $\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{H}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{R}\mathbf{w}^{(k)}$, l'évidence est alors une loi gaussienne

d'espérance : $\boldsymbol{\mu}_y^{(k)} = \mathbf{H}\boldsymbol{\mu}_x^{(k|k-1)}$

de variance/covariance : $\boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{(k)} = \mathbf{H}\boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k|k-1)}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}\mathbf{R}^T$

Lemme 2 : lois conditionnelles d'un couple gaussien

Pour calculer la probabilité a posteriori, $p(\mathbf{x}^{(k)} | \mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{y}^{(i), i \in [0, k]})$, noté $\mathbf{x}^{(k|k)}$, le plus simple est de passer par la loi conjointe $p(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ en utilisant le lemme suivant démontré en annexe A.5.

Soit deux vecteurs gaussiens \mathbf{x} et \mathbf{y} respectivement d'espérance $\boldsymbol{\mu}_x$ et $\boldsymbol{\mu}_y$, de matrice de variance / covariance $\boldsymbol{\Sigma}_{xx}$ et $\boldsymbol{\Sigma}_{yy}$ et de matrice de covariance entre les deux vecteurs $E(\mathbf{x}\mathbf{y}^T) = \boldsymbol{\Sigma}_{xy}$.

Alors, le vecteur $\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$ est un couple gaussien

d'espérance :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_x \\ \boldsymbol{\mu}_y \end{pmatrix} \quad (13.12)$$

de variance/covariance :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{xx} & \boldsymbol{\Sigma}_{xy} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{yx} & \boldsymbol{\Sigma}_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{xx} & \boldsymbol{\Sigma}_{xy} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{xy}^T & \boldsymbol{\Sigma}_{yy} \end{pmatrix} \quad (13.13)$$

De plus, nous pouvons calculer les **lois marginales**

- $p(\mathbf{x} | \mathbf{y})$ est une loi gaussienne

d'espérance :

$$\boldsymbol{\mu}_{x|y} = \boldsymbol{\mu}_x + \boldsymbol{\Sigma}_{xy}\boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y) \quad (13.14)$$

de variance/covariance :

$$\boldsymbol{\Sigma}_{x|y, x|y} = \boldsymbol{\Sigma}_{xx} - \boldsymbol{\Sigma}_{xy}\boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{xy}^T \quad (13.15)$$

- De même, $p(\mathbf{y} | \mathbf{x})$ est une loi gaussienne

d'espérance :

$$\boldsymbol{\mu}_{y|x} = \boldsymbol{\mu}_y + \boldsymbol{\Sigma}_{yx}\boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x) \quad (13.16)$$

de variance/covariance :

$$\boldsymbol{\Sigma}_{y|x, y|x} = \boldsymbol{\Sigma}_{yy} - \boldsymbol{\Sigma}_{yx}\boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{yx}^T \quad (13.17)$$

Dans notre cas, on prend comme loi de \mathbf{x} , la loi $\mathbf{x}^{(k|k-1)}$ et comme loi de \mathbf{y} , la loi $p(\mathbf{y}^{(k)} | \mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{y}^{(i), i \in [0, k-1]})$.

- \mathbf{x} correspond à $\mathbf{x}^{(k|k-1)}$ d'où

– $\boldsymbol{\mu}_x$ est remplacé par $\boldsymbol{\mu}_x^{(k|k-1)} = \mathbf{F}\boldsymbol{\mu}^{(k-1|k-1)}$

13. Filtrage de Kalman

- Σ_{xx} est remplacé par $\Sigma_{xx}^{(k|k-1)} = \mathbf{F}\Sigma_{xx}^{(k-1|k-1)}\mathbf{F}^T + \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T$
- \mathbf{y} correspond à $\mathbf{y}^{(k)}$ d'où
 - μ_y est remplacé par $\mu_y^{(k)} = \mathbf{H}\mu_x^{(k|k-1)}$
 - Σ_{yy} est remplacé par $\Sigma_{yy}^{(k)} = \mathbf{H}\Sigma_{xx}^{(k|k-1)}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}\mathbf{R}^T$

Reste à calculer Σ_{xy} qui, par définition est

$$\begin{aligned}\Sigma_{xy} &= \mathbb{E}(\mathbf{x}^{(k|k-1)}\mathbf{y}^{(k)}) \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{x}^{(k|k-1)}(\mathbf{H}\mathbf{x}^{(k|k-1)} + \mathbf{Q}\mathbf{w}^{(k)})^T) \\ &= \Sigma_{xx}\mathbf{H}^T\end{aligned}\tag{13.18}$$

En remplaçant tous les termes dans l'équation 13.14, on obtient l'espérance de $\mathbf{x}^{(k|k)}$: $\mu_x^{(k|k)}$

$$\begin{aligned}\mu_x^{(k|k)} &= \mu_x^{(k|k-1)} + \Sigma_{xx}^{(k|k-1)}\mathbf{H}(\mathbf{H}\Sigma_{xx}^{(k|k-1)}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}\mathbf{R}^T)^{-1}(\mathbf{y}^{(k)} - \mu_y^{(k)}) \\ &= \mu_x^{(k|k-1)} + \Sigma_{xx}^{(k|k-1)}\mathbf{H}(\mathbf{H}\Sigma_{xx}^{(k|k-1)}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}\mathbf{R}^T)^{-1}(\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{H}\mu_x^{(k|k-1)})\end{aligned}\tag{13.19}$$

et en remplaçant les termes dans l'équation 13.15, on obtient la matrice de variance / covariance

$$\Sigma_{xx}^{(k|k)} = \Sigma_{xx}^{(k|k-1)} - \Sigma_{xx}^{(k|k-1)}\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\Sigma_{xx}^{(k|k-1)}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}\mathbf{R}^T)^{-1}\mathbf{H}\Sigma_{xx}^{(k|k-1)}\tag{13.20}$$

D'où le

13.4.2. Filtre de Kalman linéaire

Dont chaque itération se traduit par les équations suivantes, décomposées en deux sous-étapes :

- étape de **prédition** : le modèle est itéré pour obtenir l'estimation $\mathbf{x}^{(k|k-1)}$ c'est à dire la loi de probabilité de \mathbf{x} à l'étape k sans tenir compte de la mesure courante $\mathbf{y}^{(k)}$;
- étape de **correction** : la valeur estimée est corrigée en fonction de la divergence entre la mesure “espérée” $\mathbf{H}\mathbf{x}^{(k|k-1)}$ et la mesure observée $\mathbf{y}^{(k)}$.

Initialisation

L'initialisation se fait à partir de la probabilité initiale du vecteur d'état \mathbf{x} supposée gaussienne.

Elle est caractérisée par l'espérance et la variance de \mathbf{x} juste avant la première mesure en fonction de la connaissance que l'on en a.

Pour un filtrage linéaire, il doit prendre la forme d'une probabilité gaussienne pour garder la “gaussianité” de $\mathbf{x}^{(k)}$ tout au long du processus, mais cette valeur est en général très incertaine et souvent plus liée à “son intime conviction” plus qu'à un calcul très objectif.

Si le système est observable (c'est à dire si le vecteur d'état est bien contraint par les mesures), l'estimation initiale a peu d'influence, hormis sur la vitesse de convergence.

Dans tous les cas, le système se comporte mieux si la précision initiale est sous-estimée que sur-estimée.

On part donc d'une valeur $\mu_x^{(0)}$, espérance a priori et $\Sigma_{xx}^{(0)}$, variance a priori.

Prédiction

$$\begin{aligned}\mu_x^{(k|k-1)} &= \mathbf{F}\mu_x^{(k-1|k-1)} \\ \Sigma_{xx}^{(k|k-1)} &= \mathbf{F}\Sigma_{xx}^{(k-1|k-1)}\mathbf{F}^T + \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T\end{aligned}\quad (13.21)$$

Correction

$$\begin{aligned}\mathbf{K}^{(k)} &= \Sigma_{xx}^{(k|k-1)}\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\Sigma_{xx}^{(k|k-1)}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}\mathbf{R}^T)^{-1} \\ \mu_x^{(k|k)} &= \mu_x^{(k|k-1)} + \mathbf{K}^{(k)}(\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{H}\mu_x^{(k|k-1)}) \\ \Sigma_{xx}^{(k|k)} &= \Sigma_{xx}^{(k|k-1)} - \mathbf{K}^{(k)}\mathbf{H}\Sigma_{xx}^{(k|k-1)}\end{aligned}\quad (13.22)$$

13.4.3. Forme générale

Pour des raisons de stabilité numérique, les itérations sont plutôt écrites

$$\begin{aligned}\mu_x^{(k|k-1)} &= \mathbf{F}\mu_x^{(k-1|k-1)} \\ \Sigma_{xx}^{(k|k-1)} &= \mathbf{F}\Sigma_{xx}^{(k-1|k-1)}\mathbf{F}^T + \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T \\ \Sigma_{yy}^{(k|k-1)} &= \mathbf{H}\Sigma_{xx}^{(k|k-1)}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}\mathbf{R}^T \\ \mathbf{K}^{(k)} &= \Sigma_{xx}^{(k|k-1)}\mathbf{H}^T(\Sigma_{yy}^{(k|k-1)})^{-1} \\ \mu_x^{(k|k)} &= \mu_x^{(k|k-1)} + \mathbf{K}^{(k)}(\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{H}\mu_x^{(k|k-1)}) \\ \Sigma_{xx}^{(k|k)} &= \Sigma_{xx}^{(k|k-1)} - \mathbf{K}^{(k)}\Sigma_{yy}^{(k|k-1)}(\mathbf{K}^{(k)})^T\end{aligned}\quad (13.23)$$

De plus, cette formulation permet de garder la condition de symétrie de la matrice de variance/covariance.

13.5. Lisseur de Kalman

Comme présenté précédemment, une variante utile est le [lisseur de Kalman](#).

13. Filtrage de Kalman

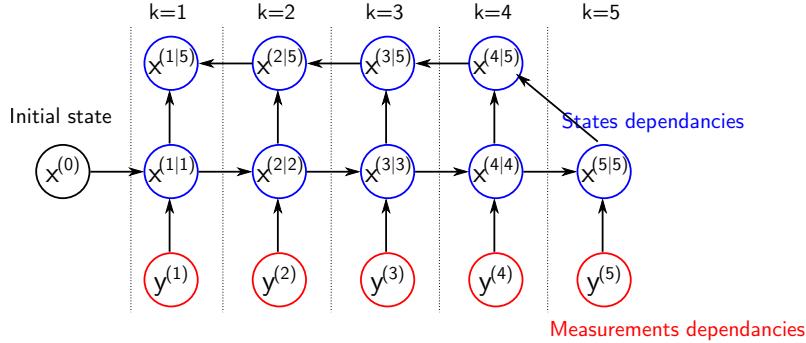


FIG. 13.2. : Dépendance probabiliste de résolution de l'état $\mathbf{x}^{(k|K)}$ à partir des réalisations calculées par le filtre de Kalman

Dans ce cas, il s'agit à la fin de l'expérimentation, de reprendre chaque état $\mathbf{x}^{(k)}$ et de calculer $p(\mathbf{x}^{(k)} | \mathbf{y}^{(i), i \in [0, K-1]})$ avec K le nombre de mesures disponibles que nous notons $\mathbf{x}^{(k|K)}$

L'algorithme présenté est le **Lisseur de Rauch, Tung et Striebel** qui est le plus courant.

La chaîne du lisseur correspond au graphe de la figure 13.2 où on récupère les données $\mathbf{x}^{(k|k)}$ issues du filtrage que l'on fusionne avec les données $\mathbf{x}^{(k+1|K)}$ en utilisant toutes les données calculées pour l'itération $k + 1$.

Le principe est le suivant :

On commence par faire fonctionner le filtre de Kalman et on stocke pour chaque valeur k ,

- l'espérance $\mu_x^{(k|k)}$
- la variance $\Sigma_{xx}^{(k|k)}$

donc la loi de probabilité gaussienne $\mathbf{x}^{(k|k)}$.

La dernière valeur disponible (pour $k = K$, c'est à dire $\mathbf{x}^{(K|K)}$) intègre l'ensemble des mesures disponibles $\mathbf{y}^{(i), i \in [0, K]}$ et donc est déjà la valeur lissée.

L'objectif est donc cette fois ci de faire des itérations en sens inverse et de calculer la probabilité de $\mathbf{x}^{(k|K)}$ en fonction de $\mathbf{x}^{(k+1|K)}$ et des données préalablement calculées $\mathbf{x}^{(k|k)}$.

La première étape est le calcul de la probabilité conjointe $p(\mathbf{x}^{(k)} \mathbf{x}^{(k+1)} | \mathbf{y}^{(i), i \in [0, k]})$, c'est à dire la probabilité conjointe $\begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(k|k)} \\ \mathbf{x}^{(k+1|k)} \end{pmatrix}$

Comme $\mathbf{x}^{(k+1|k)}$ dépend de $\mathbf{y}^{(i), i \in [0, k]}$ uniquement à travers $\mathbf{x}^{(k|k)}$ on a

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}^{(k)} \mathbf{x}^{(k+1)} | \mathbf{y}^{(i), i \in [0, k]}) &= p(\mathbf{x}^{(k+1)} | \mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{y}^{(i), i \in [0, k]}) p(\mathbf{x}^{(k)} | \mathbf{y}^{(i), i \in [0, k]}) \\ &= p(\mathbf{x}^{(k+1)} | \mathbf{x}^{(k)}) p(\mathbf{x}^{(k)} | \mathbf{y}^{(i), i \in [0, k]}) \end{aligned} \quad (13.24)$$

- $p(\mathbf{x}^{(k)} | \mathbf{y}^{(i), i \in [0, k]})$ est simplement $\mathbf{x}^{(k|k)}$ de loi $\mathcal{N}(\mu_x^{(k|k)}, \Sigma_{xx}^{(k|k)})$.
- $p(\mathbf{x}^{(k+1)} | \mathbf{x}^{(k)})$ se trouve directement comme étant l'étape de prédiction $\mathbf{x}^{(k+1|k)} = \mathbf{F}\mathbf{x}^{(k|k)} + \mathbf{Q}\mathbf{v}^{(k)}$.

A partir du lemme 1, la loi est $\mathcal{N}(\mathbf{F}\boldsymbol{\mu}_x^{(k|k)}, \mathbf{F}\boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k|k)}\mathbf{F}^T + \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T)$

On peut donc calculer la loi conjointe en utilisant le lemme 2 :

$$p\left(\begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(k|k)} \\ \mathbf{x}^{(k+1|k)} \end{pmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_x^{(k|k)} \\ F\boldsymbol{\mu}_x^{(k|k)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k|k)} & \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k|k)}\mathbf{F}^T \\ \mathbf{F}\boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k|k)} & \mathbf{F}\boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k|k)}\mathbf{F}^T + \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T \end{pmatrix}\right) \quad (13.25)$$

La démonstration peut se décomposer ainsi :

Première étape : Calcul de la probabilité $p(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{x}^{(k+1)}\mathbf{y}^{(i),i \in [0,K]})$.

En utilisant le fait que $\mathbf{x}^{(k)}$ dépend de $\mathbf{y}^{(i),i \in [k+1,K]}$ uniquement à travers $\mathbf{x}^{(k+1)}$

$$p(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{x}^{(k+1)}\mathbf{y}^{(i),i \in [0,K]}) = p(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{x}^{(k+1)}\mathbf{y}^{(i),i \in [0,k]}) \quad (13.26)$$

Cette équation peut être déduite de $p(\mathbf{x}^{(k)}\mathbf{x}^{(k+1)}|\mathbf{y}^{(i),i \in [0,k]})$ à travers le lemme A.4.

Soit les notations

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k+1|k)} &= \mathbf{F}\boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k|k)}\mathbf{F}^T + \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T \\ \mathbf{J}^{(k)} &= \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k|k)}\mathbf{F}^T(\boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k+1|k)})^{-1} \end{aligned} \quad (13.27)$$

On a

$$p(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{x}^{(k+1)}\mathbf{y}^{(i),i \in [0,k]}) = \mathcal{N}\left(\mathbf{J}^{(k)}\mathbf{x}^{(k+1)} + \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_1\right) \quad (13.28)$$

avec les notations

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_1 &= \boldsymbol{\mu}_x^{(k|k)} - \mathbf{J}^{(k)}\mathbf{F}\boldsymbol{\mu}_x^{(k|k)} \\ \boldsymbol{\Sigma}_1 &= \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k|k)} - \mathbf{J}^{(k)}\boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k+1|k)}\mathbf{J}^{(k)} \end{aligned} \quad (13.29)$$

Seconde étape : calcul de $p(\mathbf{x}^{(k)}\mathbf{x}^{(k+1)}|\mathbf{y}^{(i),i \in [0,K]})$

On a

$$p(\mathbf{x}^{(k)}\mathbf{x}^{(k+1)}|\mathbf{y}^{(i),i \in [0,K]}) = p(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{x}^{(k+1)}\mathbf{y}^{(i),i \in [0,K]})p(\mathbf{x}^{(k+1)}|\mathbf{y}^{(i),i \in [0,K]}) \quad (13.30)$$

En utilisant le lemme 2

- $p(\mathbf{x}^{(k+1)}|\mathbf{y}^{(i),i \in [0,K]}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_x^{k+1|K}, \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{k+1|K})$
- $p(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{x}^{(k+1)}\mathbf{y}^{(i),i \in [0,K]}) = \mathcal{N}(\mathbf{J}^{(k)}\mathbf{x}^{(k+1)} + \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_1)$

D'où

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}^{(k)}\mathbf{x}^{(k+1)}|\mathbf{y}^{(i),i \in [0,K]}) &= \\ \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{J}^{(k)}\boldsymbol{\mu}_x^{(k+1|K)} + \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_x^{k+1|K} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{J}^{(k)}\boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k+1|K)}(\mathbf{J}^{(k)})^T + \boldsymbol{\Sigma}_1 & \mathbf{J}^{(k)}\boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k+1|K)} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k+1|K)}(\mathbf{J}^{(k)})^T & \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k+1|K)} \end{pmatrix}\right) \end{aligned} \quad (13.31)$$

13. Filtrage de Kalman

Dernière étape : $p(\mathbf{x}^{(k)} | \mathbf{y}^{(i), i \in [0, K]})$

C'est juste la loi marginale de $p(\mathbf{x}^{(k)} \mathbf{x}^{(k+1)} | \mathbf{y}^{(i), i \in [0, K]})$

d'où l'algorithme

- **Espérance**

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}_x^{(k|K)} &= \mathbf{J}^{(k)} \boldsymbol{\mu}_x^{(k+1|K)} + \boldsymbol{\mu}_1 \\ &= \mathbf{J}^{(k)} \boldsymbol{\mu}_x^{(k+1|K)} + \boldsymbol{\mu}_x^{(k|k)} - \mathbf{J}^{(k)} \mathbf{F} \boldsymbol{\mu}_x^{(k|k)} \\ &= \boldsymbol{\mu}_x^{(k|k)} + \mathbf{J}^{(k)} (\boldsymbol{\mu}_x^{(k+1|K)} - \mathbf{F} \boldsymbol{\mu}_x^{(k|k)})\end{aligned}\quad (13.32)$$

- **Variance :**

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k|K)} &= \mathbf{J}^{(k)} \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k+1|K)} (\mathbf{J}^{(k)})^T + \boldsymbol{\Sigma}_1 \\ &= \mathbf{J}^{(k)} \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k+1|K)} (\mathbf{J}^{(k)})^T + \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k|k)} - \mathbf{J}^{(k)} \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k+1|k)} \mathbf{J}^{(k)} \\ &= \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k|k)} + \mathbf{J}^{(k)} (\boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k+1|K)} - \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k+1|k)}) (\mathbf{J}^{(k)})^T\end{aligned}\quad (13.33)$$

13.6. Filtres et lisseurs de Kalman non linéaires

Dans le cas où les conditions d'application du filtre de Kalman linéaire ne sont pas réunies, il est nécessaire d'adapter les algorithmes.

Nous pouvons distinguer essentiellement deux cas :

- L'équation d'état et/ou l'équation de mesure sont "faiblement non linéaires" et les probabilités sont proches d'une distribution gaussienne,
- L'équation d'état et/ou l'équation de mesure sont fortement non linéaires et / ou les probabilités sont fortement non gaussiennes.

La distinction nécessite de définir les notions de "faiblement non linéaire" et de probabilités proche d'une distribution gaussienne. Bien évidemment, ces notions restent floues et il n'y a pas un critère rigoureux permettant de mettre un problème dans cette classe ou non.

Globalement, "faiblement non linéaire" correspond à un problème où les fonctions de l'équation d'état et de l'équation de mesure sont assimilables à leur dérivée première, pour un point de mesure et dans l'extension de l'incertitude associée au point de mesure.

Dans ce cas, à chaque itération, on peut faire un développement limité autour de l'espérance de l'estimation de la fonction d'évolution de l'état et de la fonction de mesures.

Une densité de probabilité "proche" d'une fonction gaussienne, correspond à une densité de probabilité généralement unimodale, de variance finie et telle que la probabilité d'avoir des points très éloignés de l'espérance (relativement à l'écart-type) est très faible.

Malgré tout, dans les cas non linéaires (même faiblement), la garantie de stabilité des filtres n'existe plus et il est nécessaire généralement d'observer (et de régler les paramètres) en simulation le comportement du filtre de façon empirique.

13.6.1. Filtre de Kalman étendu

C'est l'extension non linéaire la plus connue, mais son comportement n'est généralement pas excellent.

Nous partons d'une équation d'état et une équation de mesure de la forme :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(k)} &= f(\mathbf{x}^{(k-1)}) + \mathbf{Qv}^{(k)} \\ \mathbf{y}^{(k)} &= h(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{Rw}^{(k)}\end{aligned}\quad (13.34)$$

avec f et h deux fonctions du vecteur d'état.

Nous pouvons faire le développement limité de la fonction f

$$f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\delta}\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \left[\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] \boldsymbol{\delta}\mathbf{x} + \sum_i \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}\mathbf{x}^T \left[\frac{\partial^2 f_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \right] \boldsymbol{\delta}\mathbf{x}^T \mathbf{e}_i + \dots \quad (13.35)$$

avec f_i , la $i^{\text{ème}}$ composante de f et \mathbf{e}_i , le vecteur unitaire $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ avec seulement la $i^{\text{ème}}$ composante à 1, et pareil pour la fonction h .

Dans le filtrage de Kalman étendu, on remplace à chaque itération k , les fonctions f et h par leur développement à l'ordre 1 autour de l'espérance du vecteur d'état.

Nous avons donc, pour algorithme, en notant

$$\mathbf{F}_x = \left[\frac{\partial f(\mu_x^{(k-1|k-1)})}{\partial \mathbf{x}} \right] \quad (13.36)$$

et

$$\mathbf{H}_x = \left[\frac{\partial h(\mu_x^{(k|k-1)})}{\partial \mathbf{x}} \right] \quad (13.37)$$

Prédiction

L'étape de prédiction

$$\begin{aligned}\mu_x^{k|k_1} &= f(\mu_x^{(k-1|k-1)}) \\ \Sigma_{xx}^{(k|k_1)} &= \mathbf{F}_x \Sigma_{xx}^{(k-1|k-1)} \mathbf{F}_x^T + \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T\end{aligned}\quad (13.38)$$

Correction

$$\begin{aligned}\mathbf{K}^{(k)} &= \Sigma_{xx}^{(k|k-1)} \mathbf{H}_x^T (\mathbf{H}_x \Sigma_{xx}^{(k|k-1)} \mathbf{H}_x^T + \mathbf{R} \mathbf{R}^T)^{-1} \\ \mu_x^{(k|k)} &= \mu_x^{(k|k-1)} + \mathbf{K}^{(k)} (\mathbf{y}^{(k)} - h(\mu_x^{(k|k-1)})) \\ \Sigma_{xx}^{(k|k)} &= \Sigma_{xx}^{(k|k-1)} - \mathbf{K}^{(k)} (\mathbf{H}_x \Sigma_{xx}^{(k|k-1)} \mathbf{H}_x^T + \mathbf{R} \mathbf{R}^T) \mathbf{K}^{(k)}\end{aligned}\quad (13.39)$$

13.6.2. Lisseur de Kalman étendu

De la même façon, on peut “étendre” le lisseur de Rauch, Tung et Striebel :

A chaque étape de la phase de lissage, on stocke $\mu_x^{(k|k)}$ et $\Sigma_{xx}^{(k|k)}$ puis on effectue les itérations de lissage en partant du dernier échantillon k :

Prédiction

$$\begin{aligned}\mu_x^{(k+1|k)} &= f(\mu_x^{(k|k)}) \\ \Sigma_{xx}^{(k+1|k)} &= F_x \Sigma_{xx}^{(k|k)} F_x^T + Q Q^T\end{aligned}\tag{13.40}$$

Gain de Kalman

$$J^{(k)} = \Sigma_{xx}^{(k|k)} F_x^T \Sigma_{xx}^{(k+1|k)}\tag{13.41}$$

Correction

$$\begin{aligned}\mu_x^{(k|K)} &= \mu_x^{(k|k)} + J^{(k)} (\mu_x^{(k+1|K)} - \mu_x^{(k+1|k)}) \\ \Sigma_{xx}^{(k|K)} &= \Sigma_{xx}^{(k|k)} + J^{(k)} (\Sigma_{xx}^{(k+1|K)} - \Sigma_{xx}^{(k+1|k)}) (J^{(k)})^T\end{aligned}\tag{13.42}$$

13.6.3. Forme alternative du filtrage étendu

Parfois, l’écriture du modèle nécessite d’intégrer dans la non-linéarité les vecteurs d’innovation v et de bruit w .

Nous avons alors pour modèle

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(k)} &= f(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{q}^{(k)}) \\ \mathbf{y}^{(k)} &= h(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)})\end{aligned}\tag{13.43}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathbf{q}^{(k)} &= Q^{(k)} v^{(k)} \\ \mathbf{r}^{(k)} &= R^{(k)} w^{(k)}\end{aligned}\tag{13.44}$$

Le filtre de Kalman étendu et le lisseur de Kalman étendu peuvent être écrit en linéarisant aussi autour des vecteurs innovation et bruit.

En notant

$$\mathbf{F}_q = \left[\frac{\partial f(\boldsymbol{\mu}_x^{(k-1|k-1)}, \mathbf{0})}{\partial q} \right] \quad (13.45)$$

et

$$\mathbf{H}_r = \left[\frac{\partial h(\boldsymbol{\mu}_x^{(k|k-1)}, \mathbf{0})}{\partial r} \right] \quad (13.46)$$

Nous obtenons, pour le filtre :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_x^{(k|k_1)} &= f(\boldsymbol{\mu}_x^{(k-1|k-1)}, \mathbf{0}) \\ \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k|k_1)} &= \mathbf{F}_x \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k-1|k-1)} \mathbf{F}_x^T + \mathbf{F}_q \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{F}_q^T \\ \mathbf{K}^{(k)} &= \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k|k-1)} \mathbf{H}_x^T (\mathbf{H}_x \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k|k-1)} \mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}_r \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{H}_r^T)^{-1} \\ \boldsymbol{\mu}_x^{(k|k)} &= \boldsymbol{\mu}_x^{(k|k-1)} + \mathbf{K}^{(k)} (\mathbf{y}^{(k)} - h(\boldsymbol{\mu}_x^{(k|k-1)}, \mathbf{0})) \\ \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k|k)} &= \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k|k-1)} - \mathbf{K}^{(k)} (\mathbf{H}_x \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k|k-1)} \mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}_r \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{H}_r^T) \mathbf{K}^{(k)} \end{aligned} \quad (13.47)$$

et pour le lisseur, les itérations suivantes en plus :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_x^{(k+1|k)} &= f(\boldsymbol{\mu}_x^{(k|k)}, \mathbf{0}) \\ \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k+1|k)} &= \mathbf{F}_x \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k|k)} \mathbf{F}_x^T + \mathbf{F}_q \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{F}_q^T \\ \mathbf{J}^{(k)} &= \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k|k)} \mathbf{F}_x^T \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k+1|k)} \\ \boldsymbol{\mu}_x^{(k|K)} &= \boldsymbol{\mu}_x^{(k|k)} + \mathbf{J}^{(k)} (\boldsymbol{\mu}_x^{(k+1|K)} - \boldsymbol{\mu}_x^{(k+1|k)}) \\ \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k|K)} &= \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k|k)} + \mathbf{J}^{(k)} (\boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k+1|K)} - \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k+1|k)}) (\mathbf{J}^{(k)})^T \end{aligned} \quad (13.48)$$

13.6.4. Filtre sans parfum

Un problème important du filtre étendu, et que généralement due à la courbure des fonctions non linéaires f et h , les estimateurs de $\mathbf{x}^{(k|k-1)}$ sachant $\mathbf{x}^{(k-1|k-1)}$ et de $\mathbf{x}^{(k|k)}$ sachant $\mathbf{x}^{(k|k-1)}$ sont biaisés. Cela entraîne une mauvaise estimation des paramètres voire une divergence de l'estimateur.

Un premier moyen pour s'en prémunir est d'étendre l'approximation à l'ordre 2, mais le filtre obtenu est complexe.

Une autre stratégie, plus simple, est d'estimer numériquement l'espérance et la variance de $\mathbf{x}^{(k|k-1)}$ sachant $\mathbf{x}^{(k-1|k-1)}$ et de $\mathbf{x}^{(k|k)}$ sachant $\mathbf{x}^{(k|k-1)}$, par l'image d'un ensemble de points (appelés **sigma points**) à travers les fonctions f et h .

Soit une distribution du vecteur \mathbf{x} (de dimension n) approximé par son espérance $\boldsymbol{\mu}_x$ et sa matrice de variance / covariance $\boldsymbol{\Sigma}_{xx}$.

On définit alors $2n + 1$ points, pour estimer cette distribution, qui représente symboliquement :

- l'espérance $\mathcal{X}_0 = \boldsymbol{\mu}_x$
- l'espérance plus λ fois l'écart-type sur chaque axe de l'ellipsoïde d'écart-type

13. Filtrage de Kalman

- l'espérance moins λ fois l'écart-type sur chaque axe.

Plus formellement, les points sont définis par

$$\begin{aligned} x_0 &= \mu_x \\ x_{i+1} &= \mu_x + \sqrt{n+\lambda}[\sqrt{\Sigma}]_i && \text{pour } i \in [0, n-1] \\ x_{i+n+1} &= \mu_x - \sqrt{n+\lambda}[\sqrt{\Sigma}]_i && \text{pour } i \in [0, n-1] \end{aligned} \quad (13.49)$$

Dans la définition précédente, λ est une constante “adaptée au problème” et $[\sqrt{\Sigma}]_i$ est le $i^{\text{ème}}$ vecteur colonne de la “racine carrée” de la matrice de variance / covariance.

Par abus de langage nous appelons “racine carrée” de la matrice de variance / covariance, la matrice triangulaire inférieure \mathbf{L} tel que $\Sigma = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$, qui peut être trouvée à l'aide de la décomposition de Cholesky.

L'espérance et la variance de \mathbf{x} à travers une fonction f est alors estimée à partir de l'image \mathcal{Y}_i des points x_i à travers la fonction $f : \mathcal{Y}_i = f(x_i)$.

L'espérance μ_y de $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, la variance Σ_{yy} de \mathbf{y} et la covariance Σ_{xy} entre \mathbf{x} et \mathbf{y} sont alors estimés par combinaison linéaire :

$$\begin{aligned} \mu_y &= \sum_{i=0}^{2n} w_i \mathcal{Y}_i \\ \Sigma_{yy} &= \sum_{i=0}^{2n} w'_i (\mathcal{Y}_i - \mu_y)(\mathcal{Y}_i - \mu_y)^T \\ \Sigma_{xy} &= \sum_{i=0}^{2n} w'_i (x_i - \mu_x)(\mathcal{Y}_i - \mu_y)^T \end{aligned} \quad (13.50)$$

Plusieurs choix peuvent exister pour les scalaires λ , w_i , w'_i et w''_i .

Van der Merwe [Van04] préconise les valeurs suivantes qui sont généralement utilisées par la communauté.

$$\begin{aligned} \lambda &= \alpha^2(n + \kappa) - n \\ w_0 &= \frac{\lambda}{n + \lambda} \\ w'_0 &= \frac{\lambda}{n + \lambda} + 1 - \alpha^2 + \beta \\ w_{i,i>0} &= w'_{i,i>0} = \frac{1}{2(n + \lambda)} \end{aligned} \quad (13.51)$$

Avec ces choix, l'espérance est juste pour une fonction f correspondant à un polynôme jusqu'à l'ordre 3, par contre la variance n'est exacte qu'à l'ordre 1.

Les paramètres α , β et κ sont définis par l'utilisateur, et déterminent l'espacement entre le point central et les points autour. Cela permet d'augmenter la précision des estimations mais cela devient dépendant de la forme de la fonction f et des lois de probabilités de \mathbf{x} .

Un bon choix est d'avoir α entre 0 et 1, β autour de 2 et $\kappa = 3 - n$.

13.6.5. Filtre de Kalman sans parfum

L'algorithme devient :

Prédiction

- Création des sigma-points

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{x}_0 &= \boldsymbol{\mu}_x^{(k-1|k-1)} \\ \boldsymbol{x}_{i+1} &= \boldsymbol{\mu}_x^{(k-1|k-1)} + \sqrt{n+\lambda} [\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k-1|k-1)}}]_i && \text{pour } i \in [0, n-1] \\ \boldsymbol{x}_{i+n+1} &= \boldsymbol{\mu}_x^{(k-1|k-1)} - \sqrt{n+\lambda} [\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k-1|k-1)}}]_i && \text{pour } i \in [0, n-1] \end{aligned}} \quad (13.52)$$

- Transformation des sigma-points à travers la fonction f

$$\boxed{\boldsymbol{x}'_i = f(\boldsymbol{x}_i)} \quad (13.53)$$

- Estimation de l'espérance et de la variance

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{k|k-1} &= \sum_{i=0}^{2n} w_i \boldsymbol{x}'_i \\ \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1} &= \sum_{i=0}^{2n} w'_i (\boldsymbol{\gamma}_i - \boldsymbol{x}_{k|k-1})(\boldsymbol{\gamma}_i - \boldsymbol{x}_{k|k-1})^T + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^T \\ \boldsymbol{\Sigma}'_{k|k-1} &= \sum_{i=0}^{2n} w'_i (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{k-1|k-1})(\boldsymbol{\gamma}_i - \boldsymbol{\mu}_{k|k-1})^T \end{aligned}} \quad (13.54)$$

Correction

- Génération de nouveaux sigma-points pour la mesure

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{x}''_0 &= \boldsymbol{x}_{k|k-1} \\ \boldsymbol{x}''_{i+1} &= \boldsymbol{x}_{k|k-1} + \sqrt{n+\lambda} [\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}}]_i && \text{pour } i \in [0, n-1] \\ \boldsymbol{x}''_{i+n+1} &= \boldsymbol{x}_{k-1|k-1} - \sqrt{n+\lambda} [\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{k-1|k-1}}]_i && \text{pour } i \in [0, n-1] \end{aligned}} \quad (13.55)$$

13. Filtrage de Kalman

- Propagation des sigma-points par l'équation de mesure

$$x_i''' = h(x_i'') \quad (13.56)$$

- Estimation de l'espérance, de la variance et de la covariance

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(k|k-1)} &= \sum_{i=0}^{2n} w_i x_i''' \\ \boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{(k|k-1)} &= \sum_{i=0}^{2n} w'_i (\mathcal{Y}_i - \mathbf{y}_{k|k-1})(\mathcal{Y}_i - \mathbf{y}_{k|k-1})^T + \mathbf{R}\mathbf{R}^T \\ (\boldsymbol{\Sigma}')_{yy}^{(k|k-1)} &= \sum_{i=0}^{2n} w'_i (x_i - \mathbf{x}_{k-1|k-1})(\mathcal{Y}_i - \mathbf{y}_{k|k-1})^T \end{aligned} \quad (13.57)$$

- Mise à jour du gain de Kalman et de la variance/covariance finale

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(k)} &= \boldsymbol{\Sigma}_{xy}^{(k|k-1)} (\boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{(k|k-1)})^{-1} \\ \boldsymbol{\mu}_x^{(k|k)} &= \boldsymbol{\mu}_x^{(k|k-1)} + \mathbf{K}^{(k)} (\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{y}^{(k|k-1)}) \\ \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k|k)} &= \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k|k-1)} - \mathbf{K}^{(k)} \boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{(k|k-1)} (\mathbf{K}^{(k)})^T \end{aligned} \quad (13.58)$$

13.6.6. Lissage sans parfum

De même que pour les autres filtres, le filtre de Kalman sans parfum peut être dérivé en lisseur :

Cette fois ci, les données stockées pendant la phase filtrage sont les sigma-points $x_i^{(k|k)}$ qui synthétisent espérances et variances.

On recalcule alors la prédiction et la covariance entre l'itération k et l'itération $k+1$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_x^{(k+1|k)} &= \sum_{i=0}^{2n} w_i f(x_i^{(k|k)}) \\ \boldsymbol{\Sigma}_{x'x'}^{(k+1|k)} &= \sum_{i=0}^{2n} w'_i (f(x_i^{(k+1|k)}) - \boldsymbol{\mu}_x^{(k+1|k)})(f(x_i^{(k+1|k)}) - \boldsymbol{\mu}_x^{(k+1|k)})^T \\ \boldsymbol{\Sigma}_{xx'}^{(k+1|k)} &= \sum_{i=0}^{2n} w'_i (x_i^{(k|k)} - \boldsymbol{\mu}_x^{(k|k)})(f(x_i^{(k+1|k)}) - \boldsymbol{\mu}_x^{(k+1|k)})^T \end{aligned} \quad (13.59)$$

Puis le gain du lisseur

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{J}^{(k)} &= \boldsymbol{\Sigma}_{xx'}^{(k+1|k)} (\boldsymbol{\Sigma}_{x'x'}^{(k+1|k)})^{-1} \\ \boldsymbol{\mu}_x^{(k|K)} &= \boldsymbol{\mu}_x^{(k|k-1)} + \mathbf{J}^{(k)} (\boldsymbol{\mu}_x^{(k+1|K)} - \boldsymbol{\mu}_x^{(k+1|k)}) \\ \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k|K)} &= \boldsymbol{\Sigma}_{x'x'}^{(k+1|k)} + \mathbf{J}^{(k)} (\boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k+1|K)} - \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k+1|k)}) (\mathbf{J}^{(k)})^T\end{aligned}} \quad (13.60)$$

13.6.7. Forme alternative du filtre sans parfum

De même, comme pour le filtrage étendu, on peut définir une forme alternative où l'innovation et le bruit sont aussi intégrés dans les non-linéarités f et h ([Sär13]).

La grande différence est qu'il est nécessaire d'augmenter le nombre de sigma-points pour prendre en compte les dimensions de \mathbf{q} et \mathbf{r} .

Ainsi, si \mathbf{x} a une dimension n et \mathbf{q} a une dimension n_q , il est nécessaire de créer $2n'+1 = 2(n+n_q)+1$ sigma points

$$\begin{aligned}x_0 &= (\boldsymbol{\mu}')_x^{(k-1|k-1)} \\ x_{i+1} &= (\boldsymbol{\mu}')_x^{(k-1|k-1)} + \sqrt{n'+\lambda} [\sqrt{(\boldsymbol{\Sigma}')_{xx}^{(k-1|k-1)}}]_i \quad \text{pour } i \in [0, n'-1] \\ x_{i+n'+1} &= (\boldsymbol{\mu}')_x^{(k-1|k-1)} - \sqrt{n'+\lambda} [\sqrt{(\boldsymbol{\Sigma}')_{xx}^{(k-1|k-1)}}]_i \quad \text{pour } i \in [0, n'-1]\end{aligned} \quad (13.61)$$

Dans ces équations $\boldsymbol{\mu}'_x$ et $\boldsymbol{\Sigma}'_{xx}$ sont les espérances et variances/covariances “augmentées” :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}'_x &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_x \\ \mathbf{0}_{n_q} \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{\Sigma}'_{xx} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{xx} & \mathbf{0}_{n,n_q} \\ \mathbf{0}_{n_q,n} & \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \end{pmatrix}\end{aligned} \quad (13.62)$$

Les étapes du filtrage sont alors

- Création des sigma-points $x^{(k-1|k-1)}$ selon les équations 13.61,
- Propagation des sigma-points à travers la fonction f

$$\boxed{x'_i = f(x_i)} \quad (13.63)$$

- Estimation des espérances $\boldsymbol{\mu}^{(k|k-1)}$ et covariances $\boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k|k-1)}$ à partir des sigma points
- Réestimation des nouveaux sigma points, cette fois ci en tenant compte des bruits \mathbf{r}

$$\boxed{\begin{aligned}x'_0 &= (\boldsymbol{\mu}')_x^{(k|k-1)} \\ x'_{i+1} &= (\boldsymbol{\mu}')_x^{(k|k-1)} + \sqrt{n''+\lambda} [\sqrt{(\boldsymbol{\Sigma}')_{xx}^{(k|k-1)}}]_i \quad \text{pour } i \in [0, n''-1] \\ x'_{i+n'+1} &= (\boldsymbol{\mu}')_x^{(k|k-1)} - \sqrt{n''+\lambda} [\sqrt{(\boldsymbol{\Sigma}')_{xx}^{(k|k-1)}}]_i \quad \text{pour } i \in [0, n''-1]\end{aligned}} \quad (13.64)$$

13. Filtrage de Kalman

avec cette fois ci

$$\boxed{\begin{aligned} n'' &= n + n_r \\ (\boldsymbol{\mu}')_x^{(k|k-1)} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_x^{(k|k-1)} \\ \mathbf{0}_{n_r} \end{pmatrix} \\ (\boldsymbol{\Sigma}')_{xx}^{(k|k-1)} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k|k-1)} & \mathbf{0}_{n_r, n_r} \\ \mathbf{0}_{n_r, n} & \mathbf{R}\mathbf{R}^T \end{pmatrix} \end{aligned}} \quad (13.65)$$

- Propagation à travers l'équation de mesure

$$\boxed{\mathcal{Y}_i^{(k)} = \mathbf{h}((\mathcal{X}')_i)} \quad (13.66)$$

- Calcul de l'espérance, variance et covariance

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{y}^{(k|k-1)} &= \sum_{i=0}^{2n} w_i \mathcal{X}_i''' \\ \boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{(k|k-1)} &= \sum_{i=0}^{2n} w'_i (\mathcal{Y}_i - \mathbf{y}_{k|k-1}) (\mathcal{Y}_i - \mathbf{y}_{k|k-1})^T + \mathbf{R}\mathbf{R}^T \\ \boldsymbol{\Sigma}_{xy}^{(k|k-1)} &= \sum_{i=0}^{2n} w'_i (\mathcal{X}_i - \mathbf{x}_{k-1|k-1}) (\mathcal{Y}_i - \mathbf{y}_{k|k-1})^T \end{aligned}} \quad (13.67)$$

- Calcul des gains

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{K}^{(k)} &= \boldsymbol{\Sigma}_{xy}^{(k|k-1)} (\boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{(k|k-1)})^{-1} \\ \boldsymbol{\mu}_x^{(k|k)} &= \boldsymbol{\mu}_x^{(k|k-1)} + \mathbf{K}^{(k)} (\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{y}^{(k|k-1)}) \\ \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k|k)} &= \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{(k|k-1)} - \mathbf{K}^{(k)} \boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{(k|k-1)} (\mathbf{K}^{(k)})^T \end{aligned}} \quad (13.68)$$

13.7. Filtrage particulaire

Dans le cas de fortes non-linéarités et de densités de probabilité non gaussiennes (éventuellement multi-modales), on utilise une approche différente que l'on pourrait qualifier de "force brute" : le **filtrage particulaire**.

L'idée générale est de faire une simulation de Monte-Carlo du problème, c'est à dire de générer une multitude de valeurs pour le vecteur d'état (que l'on appellera les **particules**) en respectant le plus possible la densité de probabilité initiale.

En un mot, l'histogramme des valeurs générées doit être proche de la densité de probabilité du vecteur d'état.

On fait alors évoluer chacune des particules (représentant une réalisation du vecteur d'état) à travers l'équation d'état puis à partir de l'équation d'observation, sa probabilité est mise à jour.

Globalement, on simule un grand nombre d'états initiaux possibles, de bruits capteurs et de vecteurs d'innovation, en espérant qu'au final, la statistique sur les résultats de chaque particule est représentative de la densité de probabilité que l'on cherche à calculer.

Potentiellement, grâce à la loi des grands nombres, c'est le cas.

Malgré tout voit déjà que nous avons potentiellement plusieurs difficultés :

- pour avoir une bonne estimation, il faut beaucoup de particules pour explorer le plus de cas possibles ;
- compte tenu de ce nombre, les temps de calcul et la mémoire nécessaire vont être importantes, ce qui peut poser des problèmes si l'algorithme doit être temps réel ;
- comme les tirages sont aléatoires, chaque réalisation du filtre donne des résultats différents, voire certaines réalisations peuvent converger mais pas d'autres ;
- Si le vecteur d'état à beaucoup de dimensions, il est très difficile de faire un tirage aléatoire "représentatif" : la méthode sera limitée à une dimension réduite du vecteur d'état.

La méthode s'appuie sur deux théories :

- l'intégration par la méthode de Monte Carlo,
- l'échantillonnage préférentiel.

13.7.1. Intégration par la méthode de Monte Carlo

Supposons que l'on doit intégrer sur une fonction $f(\mathbf{x})$ sur un domaine S qui peut avoir un grand nombre de degrés de liberté.

Si il n'existe pas de description analytique de la primitive de $f(\mathbf{x})$, l'intégrale doit être calculée numériquement, et si la dimension \mathbf{x} est grande, les méthodes numériques classiques ne sont pas adaptées car elles entraînent des temps calculs très conséquents.

Pour estimer l'intégrale

$$I = \int_{\mathbf{x} \in S} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (13.69)$$

on se tourne alors vers une méthode stochastique : **l'intégration par la méthode de Monte Carlo**.

Supposons que l'on fasse un tirage aléatoire de \mathbf{x} selon **une loi uniforme** dans l'espace d'intégration S , nous obtenons alors un ensemble de N valeurs $\{\mathbf{x}_n\}$ et que l'on calcule l'image des points par la fonction f , nous obtenons l'ensemble de N valeurs $f(\mathbf{x}_n)$. Nous pouvons alors montrer que (avec S la surface du domaine de définition)

$$\hat{I} = \frac{S}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\mathbf{x}_n) \quad (13.70)$$

est une variable aléatoire dont l'espérance est

$$\mathbb{E}(\hat{I}) = I \quad (13.71)$$

De plus la variance de l'estimateur décroît en $\frac{1}{N}$.

13. Filtrage de Kalman

Ce qui est remarquable, c'est que la qualité de l'estimateur ne dépend pas de la dimensionnalité de \mathbf{x} .

Plus généralement, si l'intégrale se met sous la forme

$$I = \int_{\mathbf{x} \in S} f(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (13.72)$$

avec $p(\mathbf{x})$ une densité de probabilité (donc fonction positive d'intégrale unité sur le domaine d'intégration), alors

$$I = \mathbb{E} \left(\sum_{n=0}^{N-1} f(\mathbf{x}_n) \right) \quad (13.73)$$

si $\{\mathbf{x}_n\}$ est la réalisation d'un tirage selon la densité de probabilité $p(\mathbf{x})$.

L'équation 13.69 correspond au cas particulier d'une distribution uniforme sur la surface S avec $p_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{S}$

$$I = S \int_{\mathbf{x} \in S} f(\mathbf{x}) p_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (13.74)$$

13.7.2. Echantillonnage préférentiel

Soit une intégrale sous la forme

$$I = \int_{\mathbf{x} \in S} f(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (13.72)$$

elle peut être calculée par la méthode de Monte Carlo par un tirage des $\{\mathbf{x}_n\}$ selon la densité de probabilité $p(\mathbf{x})$.

Cependant, il se peut que ce tirage soit difficile à réaliser si $p(\mathbf{x})$ est une fonction complexe pour laquelle il est difficile de générer des échantillons.

Malgré tout, il existe une méthode¹ qui permet de s'en sortir.

Supposons qu'il existe une densité de probabilité $\pi(\mathbf{x})$ "pas trop éloignée" de $p(\mathbf{x})$, c'est à dire telle que $\frac{\pi(\mathbf{x})}{p(\mathbf{x})} \approx 1$, et pour laquelle il est facile de générer des échantillons suivant cette loi.

alors l'intégrale I peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbf{x} \in S} f(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbf{x} \in S} f(\mathbf{x}) \frac{p(\mathbf{x})}{\pi(\mathbf{x})} \pi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (13.75)$$

qui peut s'estimer à partir d'un tirage des points $\{\mathbf{x}_n\}$ selon la loi $\pi(\mathbf{x})$ sous la forme

$$\hat{I} = \sum_{n=0}^{N-1} f(\mathbf{x}_n) \frac{p(\mathbf{x}_n)}{\pi(\mathbf{x}_n)} \quad (13.76)$$

La condition malgré tout indispensable pour cette approximation est que

$$\forall \mathbf{x} \in S, \quad \pi(\mathbf{x}) > 0 \quad (13.77)$$

Par ailleurs, plus les lois de $p(\mathbf{x})$ et $\pi(\mathbf{x})$ sont différentes, moins l'estimateur \hat{I} est efficace (plus la variance de l'estimateur est grande).

¹Sous-optimale malgré tout !

Conséquence de l'échantillonnage préférentiel

Soit $\{\mathbf{x}_n\}$, N échantillons tirés selon la loi $\pi(\mathbf{x})$ et w_n , un poids affecté à chaque \mathbf{x}_n tel que

$$w_n = \frac{p(\mathbf{x}_n)}{\pi(\mathbf{x}_n)} \quad (13.78)$$

alors l'ensemble des couples $\{(w_n, \mathbf{x}_n)\}$, simule la loi $p(\mathbf{x})$ pour le calcul par la méthode de Monte Carlo des intégrales de la forme

$$I = \int_{\mathbf{x} \in S} f(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (13.79)$$

sous la forme

$$\hat{I} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w_n f(\mathbf{x}_n) \quad (13.80)$$

Cela signifie que même si un tirage ne suit pas parfaitement la loi $p(\mathbf{x}_n)$, un tirage selon cette loi peut être simulée en appliquant à chaque réalisation \mathbf{x}_n un poids "pertinent" de valeur w_n .

13.7.3. Algorithme du filtrage particulaire

Supposons qu'à une itération donnée du filtre, nous avons un ensemble de N couples (w_n, \mathbf{x}_n) représentant la loi de probabilité $p(\mathbf{x}^{(k-1|k-1)})$. En utilisant les lois de l'inférence bayesienne, il est possible de remplacer les poids $\{w_n\}$ par des poids $\{w'_n\}$ telle que les couples (w'_n, \mathbf{x}_n) représente la probabilité $p(\mathbf{x}^{(k|k)})$.

Soit les équations d'états et d'observations (non linéaires)

$$\mathbf{x}^{(k)} = f(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{q}^{(k)}) \quad (13.81)$$

$$\mathbf{y}^{(k)} = h(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)}) \quad (13.43)$$

et soit l'approximation de $p(\mathbf{x}^{(k-1|k-1)})$ correspondant aux N couples (w_n, \mathbf{x}_n) .

Phase de prédiction

La loi de probabilité $\mathbf{x}^{(k|k-1)}$ est approximée en générant N échantillons \mathbf{q}_n selon la loi $p(\mathbf{q})$ et en calculant

$$\mathbf{x}'_n = f(\mathbf{x}_n, \mathbf{q}_n) \quad (13.82)$$

L'ensemble (w_n, \mathbf{x}'_n) simule alors la loi $\mathbf{x}^{(k|k-1)}$.

Phase de correction

La loi de probabilité $\mathbf{x}^{(k|k)}$ est en revanche approximé en modifiant les poids $\{w_n\}$.

Soit $\pi(\mathbf{x})$ la loi associée au tirage initiale des \mathbf{x}_n , la valeur de w_n est

$$w_n = \frac{p(\mathbf{x}'_n | \mathbf{x}^{(k-1|k-1)})}{\pi(\mathbf{x}_n)} \quad (13.83)$$

13. Filtrage de Kalman

Nous devons alors calculer w'_n qui est

$$w'_n = \frac{p(\mathbf{x}_n^{(k)} | \mathbf{y}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k|k-1)})}{\pi(\mathbf{x}_n)} \quad (13.84)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} w'_n &= \frac{p(\mathbf{x}_n^{(k)} | \mathbf{y}^{(i), i \in [0, k]}, \mathbf{x}^{(i), i \in [0, k-1]})}{\pi(\mathbf{x}_n)} \\ &= \frac{p(\mathbf{x}_n^{(k)} | \mathbf{y}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k|k-1)})}{\pi(\mathbf{x}_n)} \\ &= \frac{p(\mathbf{y}_n^{(k)} | \mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k|k-1)}) p(\mathbf{x}_n^{(k)} | \mathbf{x}^{(k|k-1)})}{\pi(\mathbf{x}_n) (\int_{\mathbf{x} \in S} p(\mathbf{y}_n^{(k)} | \mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k|k-1)}) d\mathbf{x})} \\ &= \frac{p(\mathbf{y}_n^{(k)} | \mathbf{x}^{(k)}) p(\mathbf{x}_n^{(k)} | \mathbf{x}^{(k|k-1)})}{\pi(\mathbf{x}_n) (\int_{\mathbf{x} \in S} p(\mathbf{y}_n^{(k)} | \mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k|k-1)}) d\mathbf{x})} \\ &= \frac{p(\mathbf{y}_n^{(k)} | \mathbf{x}^{(k)})}{\int_{\mathbf{x} \in S} p(\mathbf{y}_n^{(k)} | \mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k|k-1)}) d\mathbf{x}} w'_n \end{aligned} \quad (13.85)$$

Dans le résultat précédent, la probabilité de la mesure $p(\mathbf{y}_n^{(k)} | \mathbf{x}^{(k)})$ est relativement facile à calculer, par contre, pas l'intégrale $\int_{\mathbf{x} \in S} p(\mathbf{y}_n^{(k)} | \mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k|k-1)})$

Cette dernière malgré tout peut être retrouvé en remarquant que la somme des poids vaut 1 puisque

$$\begin{aligned} 1 &= \int_S p(\mathbf{x}^{(k)} | \mathbf{y}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k|k-1)}) d\mathbf{x} \\ &= \int_S \frac{p(\mathbf{x}^{(k)} | \mathbf{y}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k|k-1)})}{\pi(\mathbf{x})} \pi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\approx \sum_N w'_n \end{aligned} \quad (13.86)$$

Avant de présenter l'algorithme, il reste quelques points à étudier.

13.7.4. Tirages de points selon une loi donnée

Tout d'abord, pour le tirage initial des points ainsi que pour les générations des points liées à l'innovation \mathbf{q} , il est nécessaire de calculer un tirage selon une loi de probabilité donnée $p(x)$.

Par exemple, si la probabilité de la fonction d'état correspond à une loi gaussienne, il est nécessaire de générer un tirage associé à cette loi.

Pour les lois simples, essentiellement uniforme et gaussienne, il existe des algorithmes qui permettent directement de faire un tirage selon ces lois, généralement disponibles dans les librairies mathématiques des différents langages de programmation.

Dans le cas général, on utilise l'inverse de la fonction de répartition.

Soit la densité de probabilité $p(x)$ d'une variable x , la densité de probabilité de $y = f(x)$, avec f une fonction monotone dérivable est

$$p(y) = \frac{1}{\left| \frac{df}{dx}(x) \right|} p(x) \quad (13.87)$$

avec $x = f^{-1}(y)$

De même, nous avons :

$$\frac{df^{-1}}{dy}(y) = \frac{1}{\frac{df}{dx}(x)} \quad (13.88)$$

d'où

$$p(y) = \left| \frac{df^{-1}}{dy}(y) \right| p(x) \quad (13.89)$$

Soit $P(x)$ la fonction de répartition de x , par définition, nous avons

$$P(x) = \int_{u=-\infty}^x p(u) du \quad (13.90)$$

C'est une fonction monotone croissante et donc il existe une fonction inverse $x = P^{-1}(y)$ avec y entre 0 et 1.

Supposons que nous faisons un tirage de y selon une loi uniforme $p(y)$ entre 0 et 1, la loi de probabilité $q(x)$ de $x = P^{-1}(y)$ suit la loi $p(x)$.

En effet,

$$\begin{aligned} q(x) &= \left| \frac{d(P^{-1})^{-1}}{dx}(x) \right| p(y) \\ &= \left| \frac{dP}{dx}(x) \right| p(y) \\ &= |p(x)| p(y) \\ &= p(x) \end{aligned} \quad (13.91)$$

car $p(y)$ vaut 1 dans son domaine de définition et $p(x)$ est une fonction à valeurs positives ou nulles.

En calculant, éventuellement numériquement, la fonction $x = P^{-1}(y)$ pour y entre 0 et 1 à partir de $p(x)$, puis en générant selon une loi uniforme entre 0 et 1, des échantillons y_i , alors $x_i = P^{-1}(y_i)$ sera échantillonnée selon la loi $p(x)$.

13.7.5. Dégénérescence des particules

Le filtrage particulaire démarre à partir d'un tirage de vecteurs d'état selon la loi initiale $p(\mathbf{x}^{(0)})$.

Si l'information sur l'état initial est très faible, les particules sont très espacées dans le domaine initial.

Si la première mesure est très peu bruitée, seules les rares particules proches du point de mesure auront une probabilité forte (w proche de 1), par contre, les probabilités de la majorité des points sera très très faible.

13. Filtrage de Kalman

On a alors une dégénérescence du nuage de points où seuls quelques points sont significatifs.

De manière générale, ce phénomène arrive plus ou moins vite, et on doit alors périodiquement, refaire un tirage de points plus adaptées à la situation.

La détection des moments où il est nécessaire de rééchantillonner les points est relativement simple.

Il a été montré que l'efficacité d'un nuage de points peut être défini à partir d'un critère appelé "Estimation du nombre effectif de particules" dont la valeur est

$$n_{\text{eff}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N-1} w_n^2} \quad (13.92)$$

Si cette valeur devient trop basse (de l'ordre de $\frac{N}{10}$, alors le nuage de points doit être rééchantillonné.

Il existe plusieurs algorithmes de rééchantillonages.

Algorithme de rééchantillonnage multinomial

Le principe général est comme pour l'échantillonnage initial d'estimer la fonction de répartition du nuage de points, et de refaire un tirage aléatoire selon la loi inverse.

L'algorithme le plus simple (mais aussi le moins efficace) est l'algorithme de rééchantillonnage multinomial [Lab18].

Initialement, nous avons l'estimation d'une loi aléatoire $p(\mathbf{x})$ à travers N échantillons $\{\mathbf{x}_n\}$ tirés selon une autre loi $\pi(\mathbf{x})$ mais avec les poids associés $w_n = \frac{p(\mathbf{x}_n)}{\pi(\mathbf{x}_n)}$.

Si le nombre effectif de particules n_{eff} est trop bas, il faut recréer un ensemble de N particules $\{\mathbf{x}'_n\}$ avec des poids identiques $w'_n = \frac{1}{N}$ (ce qui maximise n_{eff}) et donc qui suivent la loi $p(\mathbf{x})$ que l'on ne connaît qu'à travers les couples (w_n, \mathbf{x}_n) .

Le moyen d'y parvenir est de faire un tirage dans l'ensemble des points $\{\mathbf{x}_n\}$ où la probabilité de tirer \mathbf{x}_n est proportionnelle à w_n .

Bien évidemment, les particules \mathbf{x}_n ayant un poids importants seront re-tirées plusieurs fois, mais ce n'est pas gênant car dès l'ajout de l'innovation qui est un vecteur aléatoire, les états vont redevenir différents.

Un moyen de refaire un tirage est de créer un vecteur de dimension $N : \mathbf{u}$, somme cumulée de tous les poids

$$u_n = \sum_{i=0}^n w_i \quad (13.93)$$

puis de tirer selon une loi uniforme entre 0 et 1, N échantillons.

Soit i_m , le $m^{\text{ième}}$ tirage, on crée la particule (w'_m, \mathbf{x}'_m)

$$\mathbf{x}'_m = \mathbf{x}_j \text{ avec } j/u_j \leq i_m < u_{j+1} \quad (13.94)$$

A chaque nouveau vecteur \mathbf{x}'_m , on affecte le nouveau poids $w_m = \frac{1}{N}$.

L'inconvénient de cette méthode est que parfois le tirage uniforme entre 0 et 1, n'est pas assez "régulier". On peut par exemple avoir une réalisation avec beaucoup de valeurs faibles et peu de valeurs fortes.

Algorithme de rééchantillonnage stratifié

Pour forcer le tirage selon la loi uniforme à être relativement “régulier”, sans l’être trop (ce qui entraînerait l’algorithme à être trop déterministe), on peut aider légèrement le hasard.

Une méthode relativement efficace est le rééchantillonnage stratifié.

Selon cet algorithme, l’intervalle $[0, 1[$ est découpé en N sous-intervalles égaux $I_k = [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}[$ et le $m^{\text{ième}}$ tirage est choisi obligatoirement dans le $m^{\text{ième}}$ intervalle.

C’est à dire

$$i_m \in \left[\frac{m}{N}, \frac{m+1}{N} \right] \quad (13.95)$$

Il existe d’autres algorithmes de rééchantillonnages ([Lab18]) dont le choix dépend du compromis que l’on souhaite entre la rapidité de calcul et la performance de l’algorithme.

Algorithme final

Initialisation

- Tirage de N échantillons x_n selon la loi de probabilité a priori des vecteurs d’état $p(x^{(0)})$
- Création du nuage initiale $\{(\frac{1}{N}, x_n^{(0)})\}$

Étape de prédiction

Soit à l’itération k , le nuage de particules $\{w_n^{(k-1|k-1)}, x_n^{(k-1|k-1)}\}$

- Tirage aléatoire de N vecteurs d’innovation $\{q_n^{(k)}\}$ selon la loi $p(q)$,
- Modification des particules

$$\begin{aligned} w_n^{(k|k-1)} &= w_n^{(k-1|k-1)} \\ x_n^{(k|k-1)} &= f(x_n^{(k-1|k-1)}, q_n^{(k)}) \end{aligned} \quad (13.96)$$

Étape de correction

- Mise à jour des poids en fonction de la probabilité de la mesure $y(k)$

$$\begin{aligned} (w')_n^{(k|k)} &= p(y^{(k)} | \mathbf{x}_n^{(k|k-1)}) w_n^{(k|k-1)} \\ w_n^{(k|k)} &= \frac{(w')_n^{(k|k)}}{\sum_{i=0}^{N-1} (w')_i^{(k|k)}} \\ \mathbf{x}_n^{(k|k)} &= \mathbf{x}_n^{(k|k-1)} \end{aligned} \quad (13.97)$$

Rééchantillonnage éventuel des particules

- Calcul du nombre effectif de particules

$$n_{\text{eff}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N-1} w_n^2} \quad (13.92)$$

- Si n_{eff} est trop faible, rééchantillonnage des particules selon la méthode du paragraphe 13.7.5.

Difficultés du filtrage particulaire

Le filtrage particulaire peut être tentant car il semble être capable de s'adapter à toutes les situations, en particulier aux cas non linéaires.

Cependant, il peut se révéler très difficile à mettre en œuvre en particulier quand la situation implique un risque important de dégénérescence du nuage de particules. C'est typiquement le cas quand l'espace des vecteurs d'état est grand et que la mesure est précise.

C'est par exemple le cas où le vecteur d'état a beaucoup de dimensions ou que le vecteur d'innovation est très aléatoire alors que la mesure est précise. On se retrouve alors avec très peu de particules valides à chaque itération.

Potentiellement, la seule solution est d'augmenter le nombre de particules (ou d'optimiser le modèle) et implique une augmentation du temps de calcul par itération.

A cause de ceci, cette méthode reste restringée à un très faible nombre de dimensions du vecteur d'état. Malgré tout, le nombre minimum de particules est généralement d'environ un millier pour les problèmes les plus simples, mais il est courant de devoir augmenter significativement ce nombre de plusieurs ordres de grandeur.

Lisseurs particulaires

Il existe un certain nombre d'algorithmes de lissage à partir de filtres particulaires.

Cependant ils ne sont guère pratiques car ils nécessitent de garder de la phase de lissage toute l'histoire de chaque particule c'est à dire les couples $(w_n^{(k)}, \mathbf{x}^{(n)})$ pour toutes les valeurs de k et n .

Le lecteur intéressé peut se reporter à [Sär13] par exemple.

13.8. Autres filtres

Les filtres et lisseurs présentés sont très efficaces mais ne sont que les représentants d'un ensemble assez vaste de filtres.

Grossièrement, les cas linéaires / gaussiens sont traités par le filtre de Kalman linéaire, les cas faiblement non linéaires et faiblement non gaussiens peuvent être résolus par le filtre sans parfum (ou à la rigueur par le filtre étendu) et les cas difficile par la force brute via le filtre particulaire.

Compte tenu de la convergence hasardeuse et surtout de la quantité de calcul nécessaire au filtre particulaire, de nombreuses versions hybrides sont apparues pour traiter les cas non linéaires.

Souvent, par exemple, si le vecteur d'état est de grande dimension, seules quelques composantes de ce dernier ont un comportement fortement non linéaire.

On peut alors utiliser un filtre qui mixtent la partie particulaire et la partie déterministe, sous la forme d'un filtre que l'on appelle **Filtre particulaire Rao-Blackwellisé**.

Le principe est le suivant : l'équation d'état et l'équation d'observation sont modélisées sous la forme, non pas de deux équations linéaires, mais d'un choix entre plusieurs couples d'équations linéaires. La probabilité d'utiliser un couple spécifique de l'ensemble est alors liée à une probabilité dépendante de la valeur courante de l'état et de la mesure.

Alors, les parties prédictions et corrections de chaque système linéaire sont traitées par les filtres classiques, par contre les séquences de probabilité du choix des équations à chaque itération sont calculées par un filtre particulaire. Cela réduit la dimensionnalité de la partie non linéaire du vecteur d'état, rendant le filtre de dimension gérable.

Une telle méthode est utilisée, par exemple, si la mesure est entachée de données aberrantes aléatoires : il existe alors deux versions de l'équation d'état : l'une avec une variance de bruit de mesure faible (mesure valide), l'autre avec une variance du bruit de mesure forte (mesure invalide).

Néanmoins dans les systèmes non-linéaires, chaque cas est particulier et il existe quantité de dérivations possibles dans l'établissement des filtres.

Mécanisation

14. Mécanisation des capteurs inertIELS

14.1. Généralités

Nous avons vu que les capteurs inertIELS possèdent deux types de capteurs principaux, les gyroscopes qui mesurent la vitesse de rotation et les accéléromètres qui mesurent les forces spécifiques.

Un système inertiel complet possède au moins 3 axes sensibles pour les gyroscopes et 3 axes sensibles pour les accéléromètres.

Pour une centrale inertIELLE, l'objectif est de retrouver l'attitude de la centrale ainsi que sa vitesse et sa position dans un référentiel 3D est à partir de ces capteurs.

C'est l'objet de la **mécanisation**.

14.1.1. Problématique de l'intégration

Tout d'abord, les gyroscopes mesurent une grandeur qui est la vitesse de rotation du mobile (plus exactement de la centrale) par rapport à un repère inertiel. Ce vecteur étant déterminé dans le repère de la centrale, c'est à dire le "body frame". La grandeur mesurée est donc ω_{ib}^b .

Pour obtenir, l'attitude du mobile C_b^i dans le repère inertiel, il est nécessaire d'intégrer cette grandeur.

De même, les accéléromètres mesurent la force effective qui correspond à l'ensemble des forces qui s'appliquent sur la centrale à l'exception notable de la force de gravitation. Là aussi, la mesure est un vecteur fourni dans le repère "body". La valeur donnée est $f_{ib}^b = \gamma_{ib}^b - \Gamma^b$, c'est à dire l'accélération subie par la centrale γ_{ib}^b moins l'accélération de gravitation Γ^b .

Pour obtenir la position, nous devons dans un premier temps ajouter le champ de gravitation pour avoir l'accélération, puis intégrer une première fois par rapport au temps pour obtenir les vitesses et une seconde fois pour obtenir la position.

Dans les deux cas, qui dit intégration dit deux choses :

- tous les biais dans les grandeurs mesurées vont se cumuler et potentiellement faire diverger les grandeurs estimées (attitude, vitesse et position),
- les intégrations se font à une constante près. Pour pouvoir intégrer, il est nécessaire de connaître les attitudes, vitesses et positions initiales.

Ainsi, dans le cas général, le système ne pourra fonctionner parfaitement que si :

- les conditions initiales $C_b^i(t_0)$, $v_{ib}^i(t_0)$ et $x_b^i(t_0)$ sont parfaitement connues,
- le champ de gravitation sur toute la trajectoire du mobile Γ^i est lui aussi parfaitement connu,

14. Mécanisation des capteurs inertIELS

- les mesures ω_{ib}^b et f_{ib}^b sont exempt d'erreurs et en particulier de biais.

Malheureusement, malgré toutes les qualités des capteurs, ces conditions ne sont jamais parfaitement vérifiées. Un système inertiel seul, quelque soit sa qualité, finit toujours par dériver. Seule la vitesse de dérive est limitée par la qualité du système.

Il est donc nécessaire de la limiter soit par des capteurs auxiliaires, soit par des contraintes sur les solutions possibles.

Dans le cas des systèmes embarqués en spatial, il y a peu de contraintes de mouvements, il est donc absolument nécessaire d'utiliser des capteurs auxiliaires pour donner des informations complémentaires dès que le système doit fonctionner longtemps.

Dans l'espace (au moins proche de la terre!), il n'y a pas de nuage, et donc on peut utiliser des viseurs d'étoiles pour éviter une dérive de l'attitude et dans une moindre mesure de la position.

Sur terre, en extérieur, on peut aussi utiliser des capteurs complémentaires :

- systèmes de positionnements satellitaires en extérieur (mais pas sous l'eau !!) ou plus généralement électro-magnétiques,
- sous l'eau, des systèmes de balises acoustiques (USBL, LBL) et de mesure de vitesse (DVL, CVL),
- sur un véhicule à roues, odométrie (mesure de la vitesse par la rotation de la roue dans une hypothèse de non glissement),
- dans tous les cas, recalages sur amers (points remarquables) préalablement cartographiés (ou non),
- sur la composante verticale, l'utilisation d'un capteur de pression sous l'eau ou en air,
- un capteur magnétique pour obtenir le cap.

Sur terre, certains mobiles ont des propriétés particulières vis à vis de leur mouvement.

Par exemple, une voiture reste sur la surface terrestre et généralement elle se déplace dans la direction des roues. De même, le pied d'un piéton est périodiquement immobile pendant la marche.

En mer, un navire de surface possède des vitesses relativement lentes et reste sur la surface maritime. De même, les mouvements de roulis et de tangage restent à moyenne nulle.

Par ailleurs, compte tenu des contraintes de mouvement, des informations utiles telles que la direction du champ de gravité local et du vecteur de rotation terrestre peuvent être extraites des mesures inertielles et donnent de précieuses informations sur l'attitude du porteur.

Nous verrons que ces informations peuvent permettre d'obtenir l'attitude quasiment sans aide externe dans le cas des systèmes inertIELS de bonne facture et de limiter les erreurs de déplacement sur la surface terrestre.

En particulier, les positions horizontales restent bornées, sauf en présence de biais sur les gyromètres (d'où l'extrême importance de la qualité des gyromètres), mais pas en vertical où la dérive est exponentielle : l'utilisation d'un capteur d'altitude (pression, généralement en sous-marin) est indispensable hormis pour un navire de surface où l'altitude reste bornée autour de la surface maritime.

Dans un premier temps, nous allons présenter les algorithmes de mécanisation pour des capteurs parfaits (donc sans inclusions d'informations externes).

Néanmoins malgré cela, des difficultés importantes existent sur l'intégration des vecteurs de rotation angulaires qui imposent de grandes précautions.

14.1.2. Intégration de la vitesse de rotation angulaire

Le problème majeur de l'intégration de la rotation angulaire vient de la non commutativité des rotations.

En effet, si pendant la mesure, le mobile tourne, le repère dans lequel les vitesses de rotation sont mesurées est variable.

Ainsi à l'instant t , on peut mesurer une vitesse de rotation $\omega_{ib}^b(t)$ dans un repère $C_{ib}^b(t)$ puis une vitesse de rotation $\omega_{ib}^b(t + \delta t)$ dans un repère $C_{ib}^b(t + \delta t)$

Le résultat final ne sera pas le même suivant la façon dont l'intégration est faite.

Cela ne devrait potentiellement pas poser problème sinon que des mouvements de rotation trop rapides pour être mesurés (par exemple issus de vibrations) peuvent entraîner des dérives basses fréquence des mesures de rotations et des mesures d'accélération.

Ces phénomènes parasites sont appelés **Coning** et **Sculling**.

Le mouvement de **Coning (mouvement conique)** correspond à la configuration d'un axe de rotation du mouvement, par exemple le vertical, qui précessionne selon une trajectoire conique. Cela crée un biais de rotation, donc une dérive, basse fréquence autour de l'axe du cône.

Bien évidemment, si les trois axes sont parfaitement mesurées et le calcul complet, cette rotation est détectée, mais si la vibration qui cause ce mouvement conique est hors bande, le biais ne sera pas compensé.

Le mouvement de **Sculling (mouvement de godille)** est similaire mais correspond à une rotation qui biaise les mesures accélérométriques.

Dans cet effet, nous avons un couplage entre une rotation oscillante autour d'un premier axe, une accélération oscillante le long d'un second axe, les deux entraînant un biais en accélération sur le troisième axe.

Pour contrer ces phénomènes, il est important, au niveau des capteurs, de :

- découpler les capteurs inertielles des vibrations (découplage mécanique),
- d'effectuer les intégrations très rapidement (quelques centaines de Hertz) pour permettre la validité de l'hypothèse d'attitude constante pendant une itération d'intégration pour limiter les effets de non commutativité.

Ainsi, technologiquement, la mécanisation implique une première couche de calcul très rapide dont le rôle est d'intégrer les vitesses de rotations angulaires et les accélérations.

En revanche, comme les calculs doivent être très rapides, la formulation exacte est souvent trop complexe pour la charge de calcul disponible et il est alors nécessaire de faire des calculs approchés (mais plus simple).

14. Mécanisation des capteurs inertIELS

Cette intégration est parfois faite au niveau de l'IMU (le boîtier capteur) et seuls les résultats intermédiaires à plus basse vitesses sont fournies.

Formule d'intégration de l'attitude

Cette intégration peut être faite dans n'importe quel référentiel mais à titre d'exemple, nous allons la présenter dans le repère inertiel.

Nous avons vu que, par définition (équation 5.15 du tome 1).

$$\dot{\mathbf{C}}_b^i = \mathbf{C}_b^i \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b \quad (14.1)$$

est une équation différentielle, qui, si $\boldsymbol{\Omega}_{ib}^b$ est constant, a pour solution (équation 4.32 du tome 1).

$$\mathbf{C}_b^i(t + \delta t) = \mathbf{C}_b^i \exp(\boldsymbol{\Omega}_{ib}^b \delta t) = \mathbf{C}_b^i \exp([\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \wedge] \delta t) \quad (14.2)$$

Dans la suite, nous utiliserons la notation $\alpha_{ib}^b = \delta t \boldsymbol{\omega}_{ib}^b$
 L'unité de α est celle d'un angle, elle est donc en radian. Généralement, c'est la donnée accessible dans une centrale inertielle.

Comme par définition, l'exponentielle d'une matrice est (équation 4.28 du tome 1)

$$\exp(\boldsymbol{\Omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{\Omega}^n}{n!} \quad (14.3)$$

qui est difficile à calculer dans le cas général, mais pas dans le cas d'une matrice de rotation.

Il a été vu (4.39 du tome 1) que la matrice de rotation $e^{[\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \wedge]}$ se décompose en trois termes :

$$e^{[\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \wedge]} = \mathbf{I} + \frac{\sin \omega_{ib}^b}{\omega_{ib}^b} [\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \wedge] + \frac{1 - \cos \omega_{ib}^b}{(\omega_{ib}^b)^2} ([\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \wedge])^2 \quad (14.4)$$

Ainsi, avec les différences d'angles α_{ib}^b , nous obtenons

$$e^{[\alpha_{ib}^b \wedge]} = \mathbf{I} + \frac{\sin \alpha_{ib}^b}{\alpha_{ib}^b} [\alpha_{ib}^b \wedge] + \frac{1 - \cos \alpha_{ib}^b}{(\alpha_{ib}^b)^2} ([\alpha_{ib}^b \wedge])^2 \quad (14.5)$$

Cette formule est exacte si le vecteur vitesse angulaire est constant mais malheureusement, les sinus et cosinus sont souvent trop long à calculer.

Sur les systèmes de moindre précision, on se contente de l'approximation à l'ordre 1 de l'équation précédente (mais réalisé à haute vitesse) :

$$e^{[\alpha_{ib}^b \wedge]} \approx \mathbf{I} + [\alpha_{ib}^b \wedge] \quad (14.6)$$

Bien évidemment, en fonction de la précision souhaitée et de la puissance de calcul disponible on peut s'arrêter à un autre ordre en utilisant les développements limités respectivement des sinus et des cosinus

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (14.7)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (14.8)$$

Formule d'intégration des forces spécifiques

Dans le cas des forces spécifiques, l'intégration peut se faire relativement simplement, sinon que, là aussi, le repère capteur bouge pendant la mesure.

Le plus simple est de mettre chaque mesure de force dans un même repère (par exemple l'inertiel) et d'intégrer les forces dans un repère constant

$$\mathbf{f}_{ib}^i = \mathbf{C}_b^i \mathbf{f}_{ib}^b \quad (14.9)$$

Ensuite on peut intégrer sous la forme

$$\mathbf{v}_{ib}^i(t + \delta t) = \mathbf{v}_{ib}^i(t) + \delta t \mathbf{f}_{ib}^i(t) + \delta t \boldsymbol{\Gamma}_b^i(t) \quad (14.10)$$

pour obtenir les vitesses.

Cependant, dans cette intégration, on s'aperçoit que l'action de \mathbf{f}_{ib}^i dure sur δt alors que le repère de mesure évolue pendant ce temps là.

On peut alors améliorer la qualité de l'intégration en moyennant l'attitude au début et à la fin de la durée δt d'itération.

Comme pour l'accélération, la centrale inertie fournit la valeur intégrée

$$\boldsymbol{\nu}_{ib}^b = \delta t \mathbf{f}_{ib}^b \quad (14.11)$$

Un moyen de réduire l'effet de rotation est de moyenne l'attitude entre le début et la fin de l'intégration

$$\boldsymbol{\nu}_{ib}^i(t) = \frac{1}{2} (\mathbf{C}_b^i(t) + \mathbf{C}_b^i(t + \delta t)) \boldsymbol{\nu}_{ib}^b \quad (14.12)$$

Cette approximation est meilleure même si la moyenne de deux matrices de rotation n'est plus vraiment une matrice de rotation.

Une approximation plus fine mais plus lourde peut être faite. D'après [Gro13], on peut remarquer qu'une meilleure approximation est la moyenne de la force spécifique pendant toute la rotation durant δt .

$$\boldsymbol{\nu}_{ib}^i(t) = \left(\frac{1}{\delta t} \int_{\tau=0}^{\delta t} \mathbf{C}_b^i(\tau) d\tau \right) \boldsymbol{\nu}_{ib}^b \quad (14.13)$$

Intégrale que l'on peut calculer en remplaçant $\mathbf{C}_b^i(\tau)$ par $\mathbf{C}_b^i(t) e^{\tau \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b}$ et plus précisément par le développement de l'exponentielle en série.

14. Mécanisation des capteurs inertIELS

On obtient alors le résultat suivant (en supposant ω_{ie}^b constant),

$$\boldsymbol{\nu}_{ib}^i(t) = \boldsymbol{C}_b^i(t) \left(\boldsymbol{I}_3 + \frac{1 - \cos \alpha_{ib}^b}{(\alpha_{ib}^b)^2} [\boldsymbol{\alpha}_{ib}^b \wedge] + \frac{1}{(\alpha_{ib}^b)^2} \left(1 - \frac{\sin \alpha_{ib}^b}{\alpha_{ib}^b} \right) [\boldsymbol{\alpha}_{ib}^b \wedge]^2 \right) \boldsymbol{\nu}_{ib}^b(t) \quad (14.14)$$

Là aussi, on peut moduler le compromis précision / charge de calcul en prenant des développements limités des fonctions sinus et cosinus.

Pour la mise à jour de la position, nous pouvons utiliser l'une des formules suivantes

$$\boldsymbol{x}_b^i(t + \delta t) = \boldsymbol{x}_b^i(t) + \boldsymbol{v}_{ib}^i(t) + \boldsymbol{\gamma}_{ib}^i(t) \frac{\delta^2 t}{2} \quad (14.15)$$

$$= \boldsymbol{x}_b^i(t) + \boldsymbol{v}_{ib}^i(t + \delta t) - \boldsymbol{\gamma}_{ib}^i(t) \frac{\delta^2 t}{2} \quad (14.16)$$

$$= \boldsymbol{x}_b^i(t) + (\boldsymbol{v}_{ib}^i(t) + \boldsymbol{v}_{ib}^i(t + \delta t)) \frac{\delta t}{2} \quad (14.17)$$

14.2. Mécanisation dans le repère inertiel

La mécanisation est plus simple à comprendre dans le repère inertiel, mais comme généralement, c'est la position dans un repère terrestre qui intéresse, cette mécanisation peut aussi être faite dans le repère ECEF ou directement dans le repère de navigation.

Dans le repère inertiel, les étapes sont les suivantes :

Elles sont écrites ici dans l'approximation d'ordre 1 pour raison de simplicité.

On part des grandeurs $\boldsymbol{C}_b^i(t = 0)$, $\boldsymbol{v}_{ib}^i(t = 0)$ et $\boldsymbol{x}_b^i(t = 0)$, des mesures au cours du temps de forces spécifiques intégrées sur δt : $\boldsymbol{\nu}_{ib}^b$ et des vecteurs rotations angulaires intégrés sur δt : $\boldsymbol{\alpha}_{ib}^b$. Enfin, on dispose d'un modèle de gravitation (et non de pesanteur) : $\boldsymbol{\Gamma}_b^i(\boldsymbol{x}_b)$

Mise à jour des attitudes

$$\boxed{\boldsymbol{C}_b^i(t + \delta t) = \boldsymbol{C}_b^i(t)(\boldsymbol{I} + [\boldsymbol{\alpha}_{ib}^i \wedge])} \quad (14.18)$$

Transformation des forces spécifiques

$$\boxed{\boldsymbol{\nu}_{ib}^i(t) = \frac{1}{2}[\boldsymbol{C}_b^i(t) + \boldsymbol{C}_b^i(t + \delta t)]\boldsymbol{\nu}_{ib}^b} \quad (14.19)$$

Calcul de l'accélération

$$\boxed{\boldsymbol{\gamma}_{ib}^i(t)\delta t = \boldsymbol{\nu}_{ib}^i(t) + \delta t \boldsymbol{\Gamma}_{ib}^i(\boldsymbol{x}_b)} \quad (14.20)$$

Mise à jour des vitesses

$$\boxed{\boldsymbol{v}_{ib}^i(t + \delta t) = \boldsymbol{v}_b^i(t) + \boldsymbol{\gamma}_{ib}^i(t)\delta t = \boldsymbol{v}_b^i(t) + \boldsymbol{\nu}_b^i(t) + \boldsymbol{\Gamma}_{ib}^i(\boldsymbol{x}_b(t))\delta t} \quad (14.21)$$

Mise à jour des positions

$$\boxed{\mathbf{x}_b^i(t + \delta t) = \mathbf{x}_b^i(t) + \frac{\delta t}{2}(\mathbf{v}_{ib}^b(t) + \mathbf{v}_{ib}^b(t + \delta t))} \quad (14.22)$$

14.3. Mécanisation dans le repère ECEF

Dans le repère ECEF, le système n'est pas fondamentalement différent, sinon qu'il y a trois modifications :

- la terre tourne autour de l'axe des pôles avec le vecteur de rotation $\boldsymbol{\omega}_{ie}$. Il est nécessaire de le retrancher au vecteur de rotation instantanée pour "suivre" la terre ;
- dans le référentiel tournant ECEF, il faut intégrer les forces de Coriolis
- il faut aussi intégrer la force centrifuge, mais comme elle est en fait déjà intégrée dans le champ de pesanteur, il suffit de prendre ce dernier et non plus le champ de gravitation.

Cette fois ci, on part des grandeurs $\mathbf{C}_b^e(t = 0)$, $\mathbf{v}_{eb}^e(t = 0)$, $\mathbf{x}_b^e(t = 0)$, \mathbf{f}_{ib}^b , $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ et $\mathbf{g}_b^e(\mathbf{x}_b)$

14.3.1. Mise à jour de l'attitude

Compte tenu de la rotation terrestre, nous avons

$$\boldsymbol{\Omega}_{eb} = \boldsymbol{\Omega}_{ib} - \boldsymbol{\Omega}_{ie} \quad (14.23)$$

L'équation différentielle devient alors

$$\dot{\mathbf{C}}_b^e = \mathbf{C}_b^e \boldsymbol{\Omega}_{eb}^b \quad (14.24)$$

Que l'on peut transformer en

$$\dot{\mathbf{C}}_b^e = \mathbf{C}_b^e (\boldsymbol{\Omega}_{ib}^b - \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e) \quad (14.25)$$

dont la solution est

$$\mathbf{C}_b^e(t + \delta t) = \mathbf{C}_b^e e^{([\boldsymbol{\alpha}_{ib}^b \wedge] - \delta t \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e)} \quad (14.26)$$

Dans la mesure où $\boldsymbol{\alpha}$ est petit et $\boldsymbol{\omega}$ est encore plus petit, on peut utiliser une approximation du type (démontrable en reprenant la définition de l'exponentielle)

$$e^{[\boldsymbol{\alpha}_{ib}^b \wedge] - \delta t \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e} \approx e^{([\boldsymbol{\alpha}_{ib}^b \wedge])} - \delta t \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \quad (14.27)$$

Sous cette approximation

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{C}_b^e(t + \delta t) &\approx \mathbf{C}_b^e(t) \left[\exp([\boldsymbol{\alpha}_{ib}^b \wedge]) - \delta t \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \right] \\ &\approx \mathbf{C}_b^e(t) \exp([\boldsymbol{\alpha}_{ib}^b \wedge]) - \delta t \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \mathbf{C}_b^e(t) \end{aligned}} \quad (14.28)$$

Une autre méthode est de ne mettre à jour la rotation terrestre qu'à un rythme plus lent que la rotation du mobile.

14.3.2. Estimation de l'accélération

Comme nous sommes dans un repère tournant, il est nécessaire de corriger des forces d'inertie et de Coriolis.

Comme dit précédemment, les forces d'inertie sont intégrées dans le champ de gravité, on utilise donc \mathbf{g}_b^e et non $\mathbf{\Gamma}_b^e$.

En revanche, on doit explicitement intégrer la force de Coriolis et donc retrancher le terme $2\Omega_{ie}^e \mathbf{v}_{eb}^e$.

Nous avons donc :

$$\delta t \boldsymbol{\gamma}_{ib}^e = \boldsymbol{\nu}_{ib}^e + \delta t (\mathbf{g}_b^e - 2\Omega_{ie}^e \mathbf{v}_{eb}^e) \quad (14.29)$$

$\boldsymbol{\nu}_{ib}^e$ est calculé comme précédemment à partir de $\boldsymbol{\nu}_{ib}^b$ via par exemple

$$\boldsymbol{\nu}_{ib}^e(t + \delta t) = \frac{1}{2}(\mathbf{C}_b^e(t) + \mathbf{C}_b^e(t + \delta t))\boldsymbol{\nu}_{ib}^b(t) \quad (14.30)$$

14.3.3. Estimation de la vitesse puis de la position

Ces deux étapes n'apportent pas de changement par rapport à la présentation précédente :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{eb}^e(t + \delta t) &= \mathbf{v}_{eb}^e(t) + \boldsymbol{\nu}_{ib}^e(t) + \delta t (\mathbf{g}_b^e - 2\Omega_{ie}^e(t) \mathbf{v}_{eb}^e(t)) \\ \mathbf{x}_b^e(t + \delta t) &= \mathbf{x}_b^e(t) + \frac{\delta t}{2}(\mathbf{v}_{eb}^e(t + \delta t) + \mathbf{v}_{eb}^e(t)) \end{aligned} \quad (14.31)$$

14.4. Mécanisation dans le repère local de navigation

La mécanisation dans le repère local de navigation (le repère NED) a l'avantage de fournir les données directement dans le repère où elles sont utilisées. En revanche, deux nouvelles difficultés apparaissent :

- le repère est local, il varie donc (les axes tournent) quand le mobile se déplace,
- il est nécessaire de convertir les positions et les orientations en fonction des angles de latitude et de longitude.

On part des valeurs $\mathbf{C}_b^n(t = 0)$, $\mathbf{v}_{eb}^n(t = 0)$, $\mathbf{x}_b^n(t = 0)$, \mathbf{f}_{ib}^b , $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ et un modèle de pesanteur \mathbf{g}_b^e

Mais cette fois ci, le vecteur position est formée par la latitude, la longitude et l'altitude.

$$\mathbf{x}_b^e = \begin{pmatrix} \Phi \\ \lambda \\ h \end{pmatrix} \quad (14.32)$$

14.4.1. Mise à jour de l'attitude

Nous devons intégrer dans cette mise à jour, la rotation du repère de navigation par rapport au repère terrestre \mathbf{C}_n^e .

Rappelons que cette matrice de rotation est (provenant de A.2.4 du tome 1)

$$\mathbf{C}_n^e = \begin{pmatrix} -\sin \Phi_b \cos \lambda_b & -\sin \lambda_b & -\cos \Phi_b \cos \lambda_b \\ -\sin \Phi_b \sin \lambda_b & \cos \lambda_b & -\cos \Phi_b \sin \lambda_b \\ \cos \Phi_b & 0 & -\sin \Phi_b \end{pmatrix} \quad (14.33)$$

La rotation de \mathbf{C}_b^n suit l'équation

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\Omega}_{nb}^b \quad (14.34)$$

et, en décomposant les différents mouvements

$$\boldsymbol{\Omega}_{nb}^b = \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b - \boldsymbol{\Omega}_{ie}^b - \boldsymbol{\Omega}_{en}^b \quad (14.35)$$

d'où

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n (\boldsymbol{\Omega}_{ib}^b - \boldsymbol{\Omega}_{ie}^b - \boldsymbol{\Omega}_{en}^b) \quad (14.36)$$

$$= \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b - (\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\Omega}_{en}^n) \mathbf{C}_b^n \quad (14.37)$$

Comme précédemment, compte tenu des faibles vitesses de rotation de \mathbf{C}_n^e (sauf près des pôles) et de \mathbf{C}_e^i nous pouvons faire le même type de mise à jour que pour l'attitude dans le repère ECEF

$$\boxed{\mathbf{C}_b^n(t + \delta t) \approx \mathbf{C}_b^n(t) e^{([\boldsymbol{\alpha}_{ib}^b \wedge] \cdot \delta t)} - \delta t (\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\Omega}_{en}^n) \mathbf{C}_b^n(t)} \quad (14.38)$$

Dans l'équation précédente, nous avons :

$$\boxed{\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n = \omega_{ie} \begin{pmatrix} 0 & \sin \Phi(t) & 0 \\ -\sin \Phi(t) & 0 & -\cos \Phi(t) \\ 0 & \cos \Phi(t) & 0 \end{pmatrix}} \quad (14.39)$$

La vitesse de rotation est présentée équation A.27 du tome 1)

$$\boxed{\boldsymbol{\omega}_{en}^n = \begin{pmatrix} \dot{\lambda} \cos \Phi_b \\ -\dot{\Phi}_b \\ -\dot{\lambda} \sin \Phi_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{v}_{eb,E}^n}{R_E(\Phi_b) + h_b} \\ -\frac{\mathbf{v}_{eb,N}^n}{R_N(\Phi_b) + h_b} \\ -\frac{\mathbf{v}_{eb,E}^n \tan \Phi_b}{R_E(\Phi_b) + h_b} \end{pmatrix}} \quad (14.40)$$

14.4.2. Estimation de la vitesse

Dans ce cas, on n'explique pas l'accélération $\boldsymbol{\gamma}_{eb}^n$, car l'objectif est d'obtenir l'évolution temporelle de \mathbf{v}_{eb}^n et donc sa dérivée temporelle dans le référentiel de navigation \mathcal{F}_n

14. Mécanisation des capteurs inertIELS

Or ce n'est pas γ_{eb}^n qui est par définition la représentation dans le repère \mathcal{F}_b de la dérivée temporelle de γ_{eb}^e .

Le plus simple est de calculer directement la dérivée de \mathbf{v}_{eb}^n .

Nous avons

$$\mathbf{v}_{eb}^n = \mathbf{C}_e^n \mathbf{v}_{eb}^e \quad (14.41)$$

sachant que nous avions calculé \mathbf{v}_{eb}^e à l'équation 14.31,

En différenciant cette équation, nous avons :

$$\dot{\mathbf{v}}_{eb}^n = \dot{\mathbf{C}}_e^n \mathbf{v}_{eb}^e + \mathbf{C}_e^n \dot{\mathbf{v}}_{eb}^e \quad (14.42)$$

$$= -\boldsymbol{\Omega}_{en} \mathbf{C}_e^n \mathbf{v}_{eb}^e + \mathbf{C}_e^n (\mathbf{f}_{ib}^e(t) + \mathbf{g}_b^e - 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e(t) \mathbf{v}_{eb}^e(t)) \quad (14.43)$$

$$= \mathbf{f}_{ib}^n(t) + \mathbf{g}_b^n - (\boldsymbol{\Omega}_{en}(t) + 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n(t)) \mathbf{v}_{eb}^n(t) \quad (14.44)$$

Nous pouvons en déduire la mise à jour du vecteur vitesse

$$\boxed{\mathbf{v}_{eb}^n(t + \delta t) = \mathbf{v}_{eb}^n(t) + \boldsymbol{\nu}_{ib}^n(t) + \delta t(\mathbf{g}_b^n - (\boldsymbol{\Omega}_{en}(t) + 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n(t)) \mathbf{v}_{eb}^n(t))} \quad (14.45)$$

14.4.3. Estimation de la position

Nous avions vu la relation entre les dérivées des latitudes, longitudes et les vitesses dans le repère de navigation à l'équation A.27 du tome 1).

$$\boldsymbol{\omega}_{en}^n = \begin{pmatrix} \dot{\lambda} \cos \Phi_b \\ -\dot{\Phi}_b \\ -\dot{\lambda} \sin \Phi_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{v}_{eb,E}^n}{R_E(\Phi_b) + h_b} \\ \frac{\mathbf{v}_{eb,N}^n}{R_N(\Phi_b) + h_b} \\ -\frac{\mathbf{v}_{eb,E}^n \tan \Phi_b}{R_E(\Phi_b) + h_b} \end{pmatrix} \quad (14.46)$$

D'où

$$\dot{\Phi}_b = \frac{\mathbf{v}_{eb,N}^n}{R_N(\Phi_b) + h_b} \quad (14.47)$$

$$\dot{\lambda}_b = \frac{\mathbf{v}_{eb,E}^n}{\cos \Phi_b (R_E(\Phi_b) + h_b)} \quad (14.48)$$

Auquel on peut rajouter la relation entre h_b et $\mathbf{v}_{eb,D}^n$.

$$\boxed{\dot{h}_b = -\mathbf{v}_{eb,D}^n} \quad (14.49)$$

Dans cette intégration, la variation des rayons est faible, ils peuvent donc être considérés comme constant pendant δt . C'est moins vrai pour h_b dans le calcul de Φ_b et λ_b .

[Gro13] recommande donc la procédure suivante :

$$\begin{aligned}
 h_b(t + \delta t) &= h_b(t) - \frac{\delta t}{2} (v_{eb,D}^n(t) + v_{eb,D}^n(t + \delta t)) \\
 \Phi_b(t + \delta t) &= \Phi_b(t) + \frac{\delta t}{2} \left(\frac{v_{eb,N}^n(t)}{R_N(\Phi_b(t)) + h_b(t)} + \frac{v_{eb,N}^n(t + \delta t)}{R_N(\Phi_b(t)) + h_b(t + \delta t)} \right) \\
 \lambda_b(t + \delta t) &= \lambda_b(t) + \frac{\delta t}{2} \left(\frac{v_{eb,E}^n(t)}{(R_E(\Phi_b(t)) + h_b(t)) \cos \Phi(t)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{v_{eb,E}^n(t + \delta t)}{(R_E(\Phi_b(t + \delta t)) + h_b(t + \delta t)) \cos \Phi(t + \delta t)} \right)
 \end{aligned} \tag{14.50}$$

14.5. Mécanisation dans le repère “wander”

La navigation près des pôles ne permet pas d'utiliser le repère de navigation, car ce dernier possède une singularité lié au fait que $\cos \Phi_b$ devient nul. En conséquence le repère de navigation tourne très rapidement autour de l'axe vertical.

Les intégrateurs préfèrent alors utiliser un autre référentiel appelé **Wander frame (\mathcal{F}_w)** qui est proche du référentiel de navigation, mais dont la rotation sur l'axe vertical est bloquée à 0.

En conséquence, les axes horizontaux de ce repère sont bloqués, ce qui rend plus robuste les calculs d'intégration, mais on garde en permanence l'angle horizontal entre le repère “wander frame” et le repère de navigation au cours du temps pour être capable de retrouver à tout instant la direction réelle du Nord.

Connaissant l'attitude dans le “wander frame”, on en déduit l'attitude dans le repère de navigation en appliquant la rotation avec l'angle entre le repère “wander frame” et le repère de navigation.

Ce dernier reste bien évidemment mal défini près du pôle, mais c'est dû à la difficulté de définir une direction Est au pôle, mais plus dû à une instabilité de navigation.

Dans tous les cas, la navigation inertielle près du pôle sans aide externe reste très délicate, car les vecteurs gravités et rotation terrestre étant confondus, l'information de cap ne plus être stabilisée par la projection du vecteur rotation terrestre dans le plan horizontal.

Le “wander angle” w_{nw} qui définit au cours du temps l'angle entre la référence de navigation et le wander frame est généralement choisi à 0 au démarrage. C'est le cap de l'axe x_w dans \mathcal{F}_n .

Ensuite, on retrouve l'attitude dans le repère de navigation la rotation par

$$\mathbf{C}_n^w = \begin{pmatrix} \cos w_{nw} & \sin w_{nw} & 0 \\ -\sin w_{nw} & \cos w_{nw} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{14.51}$$

Les équations sont les mêmes que précédemment en modifiant n par w avec les différences suivantes :

- par définition du “wander angle” (même rotation que le repère de navigation sauf sur l'axe

vertical)

$$\boldsymbol{\omega}_{ew}^w = \mathbf{C}_n^w \boldsymbol{\omega}_{ew}^n = \begin{pmatrix} \omega_{en,N}^n \\ \omega_{en,E}^n \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14.52)$$

- les latitudes, longitudes, altitudes et “wander angle” peuvent se déduire de la matrice d’attitude du wander frame $\mathbf{C}_e^w(t)$, dont l’expression est fonction de Φ_b , λ_b , h_b .

Par ailleurs l’évolution de matrice $\mathbf{C}_e^w(t)$ est calculable via

$$\dot{\mathbf{C}}_e^w = \boldsymbol{\Omega}_{ew}^w \mathbf{C}_e^w \quad (14.53)$$

et $\boldsymbol{\Omega}_{ew}^w$ via les vitesses \mathbf{v}_{eb}^w

Le lecteur peut obtenir les équations complètes (et assez complexes) dans [Gro13] par exemple.

14.6. Alignement de la centrale

Les équations présentées sont les équations d’état de la centrale inertieLle, c’est à dire les équations d’évolutions de l’attitude, de la vitesse et de la position au cours du temps.

Nous avons vu dans le cadre du filtre de Kalman, que le filtre doit être initialisé par des valeurs de départ que l’on doit estimer.

Il est d’autant plus important de les estimer précisément que le filtre est non linéaire et que nous n’avons aucune assurance de sa convergence.

Dans le cas des systèmes inertIELS, la phase d’initialisation s’appelle **Alignement de la centrale**, car l’objectif majeur est de trouver l’attitude du système (partie non linéaire du filtre).

Dans l’espace, il n’y a aucune méthode permettant de connaître l’attitude initiale du mobile sans capteurs externes (généralement des viseurs d’étoiles qui permettent de trouver l’attitude par rapport à la position angulaire d’étoiles connues).

En revanche, sur la surface terrestre, il existe malgré tout des informations qui peuvent être exploitées.

Tout d’abord, le champ de pesanteur peut indiquer la verticale locale, ensuite l’axe de rotation terrestre permet de trouver le Nord si les accéléromètres et gyromètres sont suffisamment sensibles. De même, il peut exister certaines contraintes exploitables comme par exemple le fait qu’un navire va rester en moyenne stable sur la surface maritime ou qu’un véhicule terrestre va rester (généralement !) selon un mouvement parallèle à l’axe des roues.

14.6.1. Alignement par transfert

L’alignement autonome (section 14.6.2) est généralement assez lent et peut durer 1/4 d’heure à 30 mn. En conséquence, si il y a possibilité, la méthode privilégiée est **l’alignement par transfert**.

Elle s’applique au cas d’une centrale à aligner qui se trouve déjà sur un porteur qui dispose d’une autre centrale déjà initialisée et alignée.

Ce cas s'applique, par exemple, sur un missile qui doit être tiré par un navire ou un avion de chasse¹, mais aussi, dans le domaine civil, cela peut s'appliquer à l'initialisation d'un ROV (Remote Operated Vehicle) sur le pont d'un navire scientifique.

L'idée principale est de recopier les données de la centrale déjà initialisée (appelée système maître) vers la centrale à initialiser (appelée système esclave).

Si les deux systèmes sont parfaitement parallèles et en liaisons parfaitement rigides, la copie des attitudes, vitesses et position peut être directe. Néanmoins, ce n'est malgré tout que rarement le cas.

Dans le cas le plus général, il est supposé que les centrales n'ont pas parfaitement les mêmes attitudes ni même que les bras de levier soient parfaitement rigides. La centrale esclave cherche alors son attitude de telle sorte que ses propres données soient compatibles avec les données externes.

En absence d'une centrale maître, cette dernière peut être remplacée par des informations de vitesse et position d'un GNSS.

Néanmoins, dans tous les cas, pour être sûr que le système soit observable (que tous les paramètres soient identifiables), il est nécessaire de faire varier le plus possible les trajectoires : une trajectoire rectiligne à vitesse uniforme ne permet pas de retrouver les attitudes.

14.6.2. Alignement autonome

En absence de centrale maître, l'alignement doit être autonome.

Bien évidemment, seules les attitudes sont estimées de manière autonome.

La centrale pourrait éventuellement deviner les vitesses (par la vitesse de rotation du repère de navigation) et la latitude (par l'angle entre le champ de pesanteur et l'axe de rotation terrestre) mais pas de manière suffisamment précise pour être opérationnelle.

En conséquence, les positions doivent être initialisées soit manuellement (si la centrale est immobile), soit en continu par un système GNSS.

Généralement, la période d'alignement est décomposée en deux sous-parties :

- **l'alignement grossier**, où le véhicule doit rester le plus stable possible et à l'issue duquel les attitudes sont estimées à une précision de l'ordre du degré ;
- **l'alignement fin**, où si possible le véhicule doit varier ses vitesses de rotation et ses accélérations, qui doit permettre d'affiner les mesures pour obtenir la précision nominale.

Alignement grossier

L'alignement grossier doit se faire, le mobile le plus stable possible. Si possible immobile, ou à l'extrême rigueur à vitesse et cap constant.

La centrale, dans un premier temps, cherche à trouver son attitude avec une précision approximative de l'ordre du degré.

¹Où il n'est pas question d'attendre 20 mn avant de tirer !

14. Mécanisation des capteurs inertIELS

Comme le processus est fortement non linéaire, il est indépendant du filtre de Kalman utilisé pendant le fonctionnement normal.

Cette phase est décomposée en deux étapes : la **mise à niveau (leveling)** et la **recherche de cap (gyrocompassing)**.

Mise à niveau

La mise à niveau consiste à trouver la gîte (φ) et l'assiette (θ) de la centrale, c'est à dire son attitude par rapport au plan horizontal local.

Le principe est de supposer la centrale immobile. Dans ce cas, les accéléromètres mesurent la force de réaction au champ de pesanteur local.

Dans le repère de la centrale, les forces spécifiques mesurées sont

$$\mathbf{f}_{ib}^b = \begin{pmatrix} f_{ib,x}^b \\ f_{ib,y}^b \\ f_{ib,z}^b \end{pmatrix} \quad (14.54)$$

et dans le repère de navigation, ces forces sont

$$\mathbf{f}_{ib}^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g(\Phi) \end{pmatrix} \quad (14.55)$$

La relation entre ces deux vecteurs est bien évidemment

$$\begin{pmatrix} f_{ib,x}^b \\ f_{ib,y}^b \\ f_{ib,z}^b \end{pmatrix} = \mathbf{C}_n^b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g(\Phi) \end{pmatrix} \quad (14.56)$$

avec (en utilisant les angles de Tait-Bryan)

$$\mathbf{C}_n^b = (\mathbf{C}_b^n)^T = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta & \sin \psi \cos \theta & -\sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi & \sin \psi \sin \theta \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \psi \sin \theta \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi & \sin \psi \sin \theta \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (14.57)$$

Par identification, nous en déduisons

$$\begin{pmatrix} f_{ib,x}^b \\ f_{ib,y}^b \\ f_{ib,z}^b \end{pmatrix} = -g(\Phi) \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (14.58)$$

De cette équation, nous en déduisons l'assiette et la gîte initiale

$$\theta = \arctan \left(\frac{f_{ib,x}}{\sqrt{f_{ib,y}^2 + f_{ib,z}^2}} \right)$$

$$\varphi = \text{arctan}_2(f_{ib,y}, f_{ib,z})$$

(14.59)

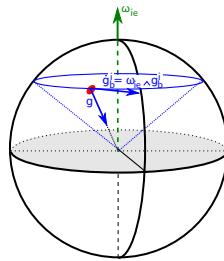


FIG. 14.1. : Trajectoire du champ de pesanteur dans un repère inertiel.

Pour compenser des mouvements parasites (secousses liées au vent, clapot résiduel, etc...), les forces spécifiques f_{ib}^n sont moyennées avant la détermination des angles.

De même, si les mouvements sont importants, un filtre de Kalman peut être préféré.

Recherche du cap

Cette étape n'est possible que si la centrale est suffisamment précise (avec une précision des gyromètres de l'ordre de $0.01^\circ/h$ ou mieux). Dans le cas contraire, le cap doit provenir d'un capteur externe préalablement aligné.

L'objectif est, une fois le plan horizontal déterminé, de trouver la direction du Nord géographique.

Il existe deux méthodes :

- **la méthode directe** : de même que pour l'accélération de pesanteur, les mesures des gyromètres sont moyennées. Si le véhicule est stable, cette mesure tend vers la vitesse de rotation terrestre exprimée dans le repère de la centrale ω_{ie}^b ;
- **la méthode indirecte** : les valeurs du vecteur rotation terrestre sont très faibles et la moyenne est généralement très perturbée par les rotations parasites.

Une mesure indirecte est alors préférée : si on mesure suffisamment longtemps, pendant l'intervalle de temps, le vecteur champ de pesanteur exprimé dans un repère inertiel, \mathbf{g}_b^i décrit un cône dont l'axe est l'axe de rotation terrestre (figure 14.1).

La vitesse de variation du vecteur champ de pesanteur est théoriquement

$$\dot{\mathbf{g}}_b^i = \omega_{ie}^i \wedge \mathbf{g}_b^i \quad (14.60)$$

On en déduit ainsi la direction du vecteur ω_{ie}^i .

Le Nord est la projection sur le plan horizontal initialement mesuré du vecteur ω_{ie}^n .

$$\omega_{ie}^n = \omega_{ie} \begin{pmatrix} \cos \Phi \\ 0 \\ -\sin \Phi \end{pmatrix} \quad (14.61)$$

De façon classique, la direction Est est estimée par

$$\mathbf{n}_y^n \propto \mathbf{g}^n \wedge \omega_{ib}^n \quad (14.62)$$

14. Mécanisation des capteurs inertIELS

et le Nord par

$$\mathbf{n}_x^n = \mathbf{n}_y^n \wedge \mathbf{n}_z^n \quad (14.63)$$

Au final, la matrice d'attitude est construite par

$$\boxed{\mathbf{C}_b^n = \begin{pmatrix} \frac{\omega_{ie,x}^b}{\omega_{ie}^b \cos \Phi} - \frac{g_x^b \tan \Phi}{g} & -c_{21}c_{33} + c_{31}c_{23} & -\frac{g_x^b}{g^b} \\ \frac{\omega_{ie,y}^b}{\omega_{ie}^b \cos \Phi} - \frac{g_y^b \tan \Phi}{g} & c_{11}c_{33} - c_{13}c_{31} & -\frac{g_y^b}{g^b} \\ \frac{\omega_{ie,z}^b}{\omega_{ie}^b \cos \Phi} - \frac{g_z^b \tan \Phi}{g} & -c_{11}c_{23} + c_{13}c_{21} & -\frac{g_z^b}{g^b} \end{pmatrix}} \quad (14.64)$$

Alignement fin

Une fois l'alignement grossier terminé, les attitudes sont estimées à 1 à 2° près.

Le système commute alors son algorithme sur son filtre de Kalman de fonctionnement normal, et à travers ce filtre, il affine les estimations d'attitude, de vitesse et de position grâce aux capteurs externes, ainsi qu'il identifie les erreurs capteurs (principalement les biais).

Dans cette phase, le mobile doit avoir une trajectoire la plus variable possible, pour permettre l'observabilité de l'ensemble des paramètres du vecteur d'état.

15. Modèle d'erreurs

15.1. Généralités

La construction d'un modèle d'erreur est essentiel dans un système inertiel. Il a principalement deux applications importantes :

- estimer les évolutions des erreurs au cours du temps en fonction des imperfections des capteurs, ce qui peut permettre à la fois le dimensionnement d'un système en fonction des performances souhaitées et l'analyse d'enregistrements de données ;
- il est le squelette de tout système d'hybridation avec des capteurs externes. En effet, les équations de mécanisation sont non linéaires. Le modèle d'erreur peut, lui, être à peu près linéarisé tant que les erreurs restent faibles. En conséquence il est plus adapté à une intégration dans un filtre de Kalman (il reste néanmoins quelques non-linéarités).

Dans ce chapitre, les calculs seront faits dans le repère de navigation, ce dernier étant le plus couramment utilisé.

15.2. Origine des erreurs

Les erreurs ont principalement trois origines :

- grandeurs initiales,
- incertitudes capteurs,
- estimation de la pesanteur.

Les grandeurs sont issues de capteurs externes mais aussi de la phase d'alignement de la centrale,

Les grandeurs nécessaires à initialiser (dans le repère du navigation) sont :

- attitude initiale : C_b^n ,
- vitesse initiale : v_{nb}^n ,
- position initiale : x_b^n

Les incertitudes capteurs sont décomposables en biais, gain, mesalignements, bruits,

Enfin, l'erreur de pesanteur est liée aux incertitudes sur la connaissance du géoïde.

15.3. Modélisation des erreurs

Comme pour l'algorithme de mécanisation, vont intervenir les grandeurs d'accélération, de vitesse, de position et d'attitude.

Si pour une grandeur \mathbf{x} , on note \mathbf{x} la grandeur réelle et $\hat{\mathbf{x}}$ la grandeur estimée, les erreurs à évaluer (qui composeront le vecteur d'état) sont

$$\begin{aligned}\delta\gamma_{nb}^n &= \hat{\gamma}_{nb}^n - \gamma_{nb}^n \\ \delta\mathbf{v}_{nb}^n &= \hat{\mathbf{v}}_{nb}^n - \mathbf{v}_{nb}^n \\ \delta\mathbf{x}_b^n &= \hat{\mathbf{x}}_b^n - \mathbf{x}_b^n\end{aligned}\tag{15.1}$$

Dans le repère de navigation, l'erreur de position $\delta\mathbf{x}_b^n$ se décompose selon la latitude, la longitude et l'altitude

$$\begin{aligned}\delta\Phi_b &= \hat{\Phi}_b - \Phi_b \\ \delta\lambda_b &= \hat{\lambda}_b - \lambda_b \\ \delta h_b &= \hat{h}_b - h_b\end{aligned}\tag{15.2}$$

Il faut aussi intégrer les erreurs d'attitude, mais celles-ci sont modélisées légèrement différemment.

Soit la matrice d'attitude réelle \mathbf{C}_b^n et l'estimée $\hat{\mathbf{C}}_b^n$, la différence entre les deux peut être modélisée à travers la matrice de rotation (proche de l'identité) qui permet de passer de la rotation réelle à la rotation estimée $\delta\mathbf{C}_b^n$.

Par composition des matrices de rotation, nous avons

$$\hat{\mathbf{C}}_b^n = \delta\mathbf{C}_b^n \mathbf{C}_b^n\tag{15.3}$$

et donc

$$\delta\mathbf{C}_b^n = \hat{\mathbf{C}}_b^n (\mathbf{C}_b^n)^T\tag{15.4}$$

Comme pour la dérivation des matrices de rotation, tant que l'erreur est faible, la matrice de passage de la rotation réelle à la rotation estimée, peut être modélisé sous la forme de la somme de la matrice identité \mathbf{I}_3 et d'une matrice anti-symétrique $-\delta\boldsymbol{\Psi}_{nb}^n$

$$\delta\mathbf{C}_b^n = \mathbf{I}_3 - \delta\boldsymbol{\Psi}_{nb}^n\tag{15.5}$$

Enfin, comme la matrice $\delta\boldsymbol{\Psi}_{nb}^n$ est anti-symétrique, elle peut être définie à partir d'un vecteur de trois composantes $\delta\alpha$, $\delta\beta$ et $\delta\gamma$

$$\delta\boldsymbol{\psi}_{nb}^n = \begin{pmatrix} \delta\alpha \\ \delta\beta \\ \delta\gamma \end{pmatrix}\tag{15.6}$$

telle que

$$\delta\boldsymbol{\Psi}_{nb}^n = [\delta\boldsymbol{\psi}_{nb}^n \wedge]\tag{15.7}$$

Le vecteur $\delta\boldsymbol{\psi}_{nb}^n$ est appelé **Vecteur de mésalignement**.

Bien entendu

$$\delta\boldsymbol{\psi}_{nb}^b = \mathbf{C}_n^b \delta\boldsymbol{\psi}_{nb}^n\tag{15.8}$$

15.4. Dynamique des erreurs

Les erreurs vont évoluer au cours du temps et ce comportement peut être modélisé sous forme d'une équation différentielle en temps.

Nous allons successivement établir les équations différentielles des erreurs d'attitude, de vitesse et de position avant de les réunir dans un modèle complet.

15.4.1. Erreurs d'attitude

Pour les attitudes, nous allons établir l'équation pour le vecteur de mésalignement.

L'équation 15.5 permet d'extraire la matrice antisymétrique de mésalignement

$$\Psi_{nb}^n = \mathbf{I}_3 - \hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{C}_n^b \quad (15.9)$$

Si on souhaite étudier la dynamique du mésalignement, on doit calculer la dérivée temporelle de l'équation précédente.

$$\dot{\Psi}_{nb}^n = -\dot{\hat{\mathbf{C}}}_b^n \mathbf{C}_n^b - \hat{\mathbf{C}}_b^n \dot{\mathbf{C}}_n^b \quad (15.10)$$

En reprenant l'équation 14.37 de la mécanisation dans le repère de navigation

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n \Omega_{ib}^b - (\Omega_{ie}^n + \Omega_{en}^n) \mathbf{C}_b^n \quad (15.11)$$

on constate que

$$\dot{\mathbf{C}}_n^b = (\dot{\mathbf{C}}_b^n)^T = -\Omega_{ib}^b \mathbf{C}_n^b + \mathbf{C}_n^b (\Omega_{ie}^n + \Omega_{en}^n) \quad (15.12)$$

d'où est déduit

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_{nb}^n &= - \left[\hat{\mathbf{C}}_b^n \hat{\Omega}_{ib}^b - (\hat{\Omega}_{ie}^n + \hat{\Omega}_{en}^n) \hat{\mathbf{C}}_b^n \right] \mathbf{C}_n^b \\ &\quad - \hat{\mathbf{C}}_b^n \left[-\Omega_{ib}^b \mathbf{C}_n^b + \mathbf{C}_n^b (\Omega_{ie}^n + \Omega_{en}^n) \right] \end{aligned} \quad (15.13)$$

En remarquant que, d'après la définition de l'erreur de mésalignement on a

$$\hat{\mathbf{C}}_b^n = \delta \mathbf{C}_b^n \mathbf{C}_b^n = (\mathbf{I}_3 - \delta \Psi_{nb}^n) \mathbf{C}_b^n \quad (15.14)$$

et en notant

$$\delta \boldsymbol{\Omega} = \hat{\boldsymbol{\Omega}} - \boldsymbol{\Omega} \quad (15.15)$$

nous pouvons exprimer l'équation différentielle correspondant à l'évolution temporelle de la matrice de mésalignement fonction de :

- l'erreur de mesure du taux de rotation : $\delta \Omega_{ib}^b$,
- la rotation terrestre : Ω_{ie}^n ,
- la rotation du référentiel de navigation : Ω_{en}^n ,
- l'attitude du véhicule \mathbf{C}_b^n et \mathbf{C}_n^b dans le repère de navigation.

15. Modèle d'erreurs

Si les erreurs sont des infiniment petits d'ordre 1, les termes couplés tel que $\delta\Omega_{in}^n \delta\Psi_{nb}^n$ peuvent être ignorés car infiniment petit d'ordre 2, ce qui simplifie l'équation en

$$\delta\dot{\Psi}_{nb}^n \approx \delta\Psi_{nb}^n(\Omega_{ie}^n + \Omega_{en}^n) - (\Omega_{ie}^n + \Omega_{en}^n)\delta\Psi_{nb}^n + \delta\Omega_{ie}^n + \delta\Omega_{en}^n - C_b^n \delta\Omega_{ib}^b (C_b^n)^T \quad (15.16)$$

Enfin, cette dernière équation peut être exprimée sous forme vectorielle grâce à l'anti-symétrie des matrices, en notant

$$\begin{aligned}\delta\Psi &= [\psi \wedge] \\ \delta\Omega &= [\omega \wedge]\end{aligned} \quad (15.17)$$

$$\boxed{\dot{\psi}_{nb}^n = -(\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \wedge \psi_{nb}^n + \delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n - C_b^n \delta\omega_{ib}^b} \quad (15.18)$$

qui est notre équation finale.

L'analyse de cette équation montre que le mésalignement évolue en fonction de :

- l'erreur sur les mesures des capteurs d'attitude $\delta\omega_{ib}^b$,
- l'erreur sur la détermination de la rotation terrestre et sur la rotation du repère de navigation $\delta\omega_{ie}^n$ et $\delta\omega_{en}^n$.

Même si la rotation terrestre est parfaitement connue, l'erreur peut être causée par une mauvaise position qui introduit une erreur sur l'orientation du repère de navigation (puisque ces vecteurs sont exprimés dans ce référentiel),

- l'erreur d'alignement est elle-même modifiée par la rotation du repère.

15.4.2. Erreurs sur les vitesses

Pour calculer le comportement des erreurs de vitesse, on peut partir de la formule qui définit les accélérations à la fois mesurées et estimées :

$$\dot{\mathbf{v}}_{eb}^n = \mathbf{f}_{ib}^n + \mathbf{g}^n - (\Omega_{en}^n + 2\Omega_{ie}^n)\mathbf{v}_{eb}^n \quad (15.19)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}}_{eb}^n = \hat{\mathbf{f}}_{ib}^n + \hat{\mathbf{g}}^n - (\hat{\Omega}_{en}^n + 2\hat{\Omega}_{ie}^n)\hat{\mathbf{v}}_{eb}^n \quad (15.20)$$

La différence est dépendante de trois termes :

- $\hat{\mathbf{f}}_{ib}^n - \mathbf{f}_{ib}^n$: erreur sur les forces spécifiques mesurées ramenées dans le repère de navigation,
- $\hat{\mathbf{g}}^n - \mathbf{g}^n$: erreur sur l'estimation des forces de pesanteur dans le repère de navigation,
- $- (\hat{\Omega}_{en}^n + 2\hat{\Omega}_{ie}^n)\hat{\mathbf{v}}_{eb}^n + (\Omega_{en}^n + 2\Omega_{ie}^n)\mathbf{v}_{eb}^n$: erreur sur l'estimation des forces inertielles et de Coriolis (toujours exprimées dans le repère de navigation)

Erreur sur les forces spécifiques

Cette erreur dépend à la fois de l'erreur de mesure et de l'erreur de mésalignement.

$$\delta \mathbf{f}_{ib}^n = \hat{\mathbf{f}}_{ib}^n - \mathbf{f}_{ib}^n = \hat{\mathbf{C}}_b^n \hat{\mathbf{f}}_{ib}^b - \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}_{ib}^b \quad (15.21)$$

Nous avons vu (équation 15.5) que $\hat{\mathbf{C}}_b^n \approx \mathbf{I}_3 - \delta \Psi_{nb}^n$

Nous en déduisons que, à l'ordre 1

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{f}_{ib}^n &= \hat{\mathbf{C}}_b^n \hat{\mathbf{f}}_{ib}^b - \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}_{ib}^b w \\ &= \mathbf{C}_b^n \delta \mathbf{f}_{ib}^b - \delta \Psi_{nb}^n \hat{\mathbf{f}}_{ib}^b \\ &\approx \mathbf{C}_b^n \delta \mathbf{f}_{ib}^b - \delta \Psi_{nb}^n \mathbf{f}_{ib}^b \end{aligned} \quad (15.22)$$

Erreur sur la pesanteur

L'erreur est

$$\delta \mathbf{g}^n = \hat{\mathbf{g}}^n - \mathbf{g}^n \quad (15.23)$$

Cette erreur est due à la mésestimation du champ de gravité, mais aussi aux erreurs de position.

Tant que l'erreur de position reste faible, c'est essentiellement l'altitude qui a un impact sur l'exac-titude du champ de gravité¹.

Erreur les forces d'entraînement

L'erreur sur les forces d'entraînement est

$$- (\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{en}^n + 2\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{ie}^n) \hat{\mathbf{v}}_{eb}^n + (\boldsymbol{\Omega}_{en}^n + 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n) \mathbf{v}_{eb}^n \quad (15.24)$$

Comme $\delta \boldsymbol{\Omega}$ est une matrice antisymétrique, on peut représenter l'erreur de rotation par un vecteur $\delta \boldsymbol{\omega}$.

$$[\delta \boldsymbol{\omega} \wedge] = \delta \boldsymbol{\Omega} = \hat{\boldsymbol{\Omega}} - \boldsymbol{\Omega} \quad (15.25)$$

on obtient

$$\begin{aligned} &- (\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{en}^n + 2\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{ie}^n) \hat{\mathbf{v}}_{eb}^n + (\boldsymbol{\Omega}_{en}^n + 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n) \mathbf{v}_{eb}^n \\ &\approx -(\delta \boldsymbol{\Omega}_{en}^n + 2\delta \boldsymbol{\Omega}_{ie}^n) \mathbf{v}_{eb}^n - (\boldsymbol{\Omega}_{en}^n + 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n) \delta \mathbf{v}_{eb}^n \\ &= -(\delta \boldsymbol{\omega}_{en}^n + 2\delta \boldsymbol{\omega}_{ie}^n) \wedge \mathbf{v}_{eb}^n - (\boldsymbol{\omega}_{en}^n + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n) \wedge \delta \mathbf{v}_{eb}^n \end{aligned} \quad (15.26)$$

La somme des trois composantes précédente donne l'expression

$$\boxed{\delta \dot{\mathbf{v}}_{eb}^n \approx \mathbf{C}_b^n \delta \mathbf{f}_{ib}^b - \delta \Psi_{nb}^n \mathbf{f}_{ib}^b + \delta \mathbf{g}^n - (\delta \boldsymbol{\omega}_{en}^n + 2\delta \boldsymbol{\omega}_{ie}^n) \wedge \mathbf{v}_{eb}^n - (\boldsymbol{\omega}_{en}^n + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n) \wedge \delta \mathbf{v}_{eb}^n} \quad (15.27)$$

¹La dépendance horizontale de l'accélération de pesanteur est plus faible que la dépendance verticale.

15.4.3. Erreurs sur les positions

L'évolution de l'erreur de position est beaucoup plus facile puisque l'on a directement

$$\delta \dot{x}_b^n = \delta \mathbf{v}_{eb}^n \quad (15.28)$$

Il faut néanmoins convertir la dérivée de l'erreur de position en fonction des dérivées des erreurs de latitude ($\delta\dot{\phi}$), de longitude ($\delta\dot{\theta}$) et d'altitude ($\delta\dot{h}$).

Nous avons le système d'équations A.24 du tome 1), remis ici :

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_b &= \frac{v_{eb,N}^n}{R_N(\Phi_b) + h_b} \\ \dot{\lambda}_b &= \frac{v_{eb,N}^n}{(R_E(\Phi_b) + h_b) \cos \Phi_b} \\ \dot{h}_b &= -v_{eb,d}^n\end{aligned}\quad (\text{I-A.24})$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\delta \dot{\Phi}_b &\approx \frac{\delta v_{eb,N}^n}{R_N(\Phi_b) + h_b} - \frac{v_{eb,N}^n}{(R_N(\Phi_b) + h_b)^2} \delta h_b \\ \delta \dot{\lambda}_b &= \frac{\delta v_{eb,N}^n}{(R_E(\Phi_b) + h_b) \cos \Phi_b} - \frac{v_{eb,N}^n}{(R_E(\Phi_b) + h_b)^2 \cos \Phi_b} \delta h_b \\ \delta \dot{h}_b &= -\delta v_{eb,d}^n\end{aligned}\quad (15.29)$$

15.5. Modèle d'erreur général

Pour construire le modèle d'erreur général, nous allons l'exprimer sous la forme d'une fonction d'état (pour l'instant en version continue) de la forme

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{v}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) \quad (15.30)$$

avec \mathbf{v} , le vecteur de paramètres à 9 états

$$\mathbf{v}^T = \left[\begin{array}{ccccccccc} \delta\alpha & \delta\beta & \delta\gamma & \delta v_{eb,N}^n & \delta v_{eb,E}^n & \delta v_{eb,D}^n & \delta\Phi_b & \delta\lambda_b & h_b \end{array} \right] \quad (15.31)$$

système qui est excitée par les erreurs capteurs et de modélisation (ici simplifié avec seulement les erreurs des trois axes gyrométriques et des trois axes accélérométriques

$$\mathbf{u}^T = \left[\begin{array}{cccccc} \delta\omega_{ib,x}^b & \delta\omega_{ib,y}^b & \delta\omega_{ib,z}^b & \delta f_{ib,x}^b & \delta f_{ib,y}^b & \delta f_{ib,z}^b \end{array} \right] \quad (15.32)$$

Comme tous les paramètres peuvent être regroupés par trois, nous noterons les vecteurs d'état

et de commande par

$$\begin{aligned}
 \delta\Psi &= (\delta\alpha \quad \delta\beta \quad \delta\gamma) \\
 \delta\mathbf{v} &= (\delta v_{eb,N}^n \quad \delta v_{eb,E}^n \quad \delta v_{eb,D}^n) \\
 \delta\mathbf{x} &= (\delta\Phi_b \quad \delta\lambda_b \quad h_b) \\
 \delta\boldsymbol{\omega} &= (\delta\omega_{ib,x}^b \quad \delta\omega_{ib,y}^b \quad \delta\omega_{ib,z}^b) \\
 \delta\mathbf{f} &= (\delta f_{ib,x}^b \quad \delta f_{ib,y}^b \quad \delta f_{ib,z}^b)
 \end{aligned} \tag{15.33}$$

A partir de ces notations, on peut modéliser l'équation d'état par un ensemble de matrices 3 par 3.

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{\Psi} \\ \delta\dot{\mathbf{v}} \\ \delta\dot{\mathbf{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{\Psi\Psi} & \mathbf{F}_{\Psi v} & \mathbf{F}_{\Psi x} \\ \mathbf{F}_{v\Psi} & \mathbf{F}_{vv} & \mathbf{F}_{vx} \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{F}_{xv} & \mathbf{F}_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\Psi \\ \delta\mathbf{v} \\ \delta\mathbf{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{\Psi\omega} & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{G}_{vf} \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\boldsymbol{\omega} \\ \delta\mathbf{f} \end{pmatrix} \tag{15.34}$$

15. Modèle d'erreurs

avec les matrices suivantes :

$$\mathbf{F}_{\Psi\Psi}^n = -[(\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \wedge] = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{ie} \sin \Phi_b - \frac{v_{eb,E}^n \tan \Phi_b}{R_\lambda + h_b} & \frac{v_{eb,N}^n}{R_\Phi + h_b} \\ \omega_{ie} \sin \Phi_b + \frac{v_{eb,E}^n \tan \Phi_b}{R_\lambda + h_b} & 0 & \omega_{ie} \cos \Phi_b + \frac{v_{eb,E}^n}{R_\lambda + h_b} \\ -\frac{v_{eb,N}^n}{R_\Phi + h_b} & -\omega_{ie} \cos \Phi_b - \frac{v_{eb,E}^n}{R_\lambda + h_b} & 0 \end{pmatrix} \quad (15.35)$$

$$\mathbf{F}_{\Psi v}^n = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{R_\lambda + h_b} & 0 \\ \frac{1}{R_\Phi + h_b} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\tan \Phi_b}{R_\lambda + h_b} & 0 \end{pmatrix} \quad (15.36)$$

$$\mathbf{F}_{\Psi x}^n = \begin{pmatrix} \omega_{ie} \sin \Phi_b & 0 & \frac{v_{eb,E}^n}{(R_\lambda + h_b)^2} \\ 0 & 0 & -\frac{v_{eb,N}^n}{(R_\Phi + h_b)^2} \\ \omega_{ie} \cos \Phi_b + \frac{v_{eb,E}^n}{(R_\lambda + h_b) \cos^2 \Phi_b} & 0 & -\frac{v_{eb,E}^n \tan \Phi}{(R_\lambda + h_b)^2} \end{pmatrix} \quad (15.37)$$

$$\mathbf{F}_{v\Psi}^n = -[\mathbf{C}_b^n \wedge] \mathbf{f}_{ib}^b = \begin{pmatrix} 0 & f_{ib,z}^n & -f_{ib,y}^n \\ -f_{ib,z}^n & 0 & f_{ib,x}^n \\ f_{ib,y}^n & -f_{ib,x}^n & 0 \end{pmatrix} \quad (15.38)$$

$$\mathbf{F}_{vv}^n = \begin{pmatrix} \frac{v_{eb,D}^n}{R_\Phi + h_b} & -\frac{2v_{eb,E}^n \tan \Phi_b}{R_\lambda + h_b} - 2\omega_{ie} \sin \Phi_b & \frac{v_{eb,N}^n}{R_\Phi + h_b} \\ \frac{v_{eb,E}^n \tan \Phi_b}{R_\lambda + h_b} + 2\omega_{ie} \sin \Phi_b & \frac{v_{eb,N}^n \tan \Phi_b + v_{eb,D}^n}{R_\lambda + h_b} & \frac{v_{eb,E}^n}{R_\lambda + h_b} + 2\omega_{ie} \cos \Phi_b \\ -\frac{2v_{eb,N}^n}{R_\Phi + h_b} & -\frac{2v_{eb,E}^n}{R_\lambda + h_b} - 2\omega_{ie} \cos \Phi_b & 0 \end{pmatrix} \quad (15.39)$$

$$\mathbf{F}_{vx}^n = \begin{pmatrix} -\frac{(v_{eb,E}^n)^2}{(R_\lambda + h_b) \cos^2 \Phi_b} - 2v_{eb,E}^n \omega_{ie} \cos \Phi_b & 0 & \frac{(v_{eb,E}^n)^2 \tan \Phi}{(R_\lambda + h_b)^2} - \frac{v_{eb,N}^n v_{eb,D}^n}{(R_\Phi + h_b)^2} \\ \frac{v_{eb,N}^n v_{eb,E}^n}{(R_\lambda + h_b) \cos^2 \Phi_b} + 2v_{eb,N}^n \omega_{ie} \cos \Phi_b - 2v_{eb,D}^n \omega_{ie} \sin \Phi_b & 0 & -\frac{(v_{eb,N}^n v_{eb,E}^n) \tan \Phi_b + v_{eb,E}^n v_{eb,D}^n}{(R_\lambda + h_b)^2} \\ 2v_{eb,E}^n \omega_{ie} \sin \Phi_b & 0 & \frac{(v_{eb,E}^n)^2}{(R_\lambda + h_b)^2} + \frac{(v_{eb,N}^n)^2}{(R_\Phi + h_b)^2} - \frac{2g}{r_G} \end{pmatrix} \quad (15.40)$$

$$\mathbf{F}_{x\Psi}^n = \mathbf{0}_3 \quad (15.41)$$

$$\mathbf{F}_{xv}^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_\Phi + h_b} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(R_\lambda + h_b) \cos \Phi_b} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (15.42)$$

$$\mathbf{F}_{xx}^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{v_{eb,N}^n}{(R_\Phi + h_b)^2} \\ \frac{v_{eb,E}^n \sin \Phi_b}{(R_\lambda + h_b) \cos^2 \Phi_b} & 0 & -\frac{v_{eb,E}^n}{(R_\lambda + h_b)^2 \cos \Phi_b} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (15.43)$$

$$\mathbf{G}_{\Psi\omega}^n = \mathbf{C}_b^n \quad (15.44)$$

$$\mathbf{G}_{vf}^n = \mathbf{C}_b^n \quad (15.45)$$

Bien évidemment, le modèle d'erreur capteur peut être amélioré en intégrant sa dynamique (biais, gain, bruit, etc...).

15.5.1. Modèle discret

Bien évidemment, l'équation d'état précédente peut aussi être transformée en version discrète.

Le plus simple est de considérer l'approximation en différences finies au premier ordre assymétrique de l'opérateur de dérivation :

$$\dot{\mathbf{v}}(k\Delta\tau) \approx \frac{\mathbf{v}^{(k+1)} - \mathbf{v}^{(k)}}{\delta\tau} \quad (15.46)$$

d'où

$$\mathbf{v}^{(k+1)} \approx \mathbf{v}^{(k)} + \delta\tau\dot{\mathbf{v}} \quad (15.47)$$

Ce qui permet d'obtenir, avec les notations précédentes

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \delta\Psi \\ \delta\mathbf{v} \\ \delta\mathbf{x} \end{pmatrix}^{(k+1)} &= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_3 + \delta\tau\mathbf{F}_{\Psi\Psi} & \delta\tau\mathbf{F}_{\Psi v} & \delta\tau\mathbf{F}_{\Psi x} \\ \delta\tau\mathbf{F}_{v\Psi} & \mathbf{I}_3 + \delta\tau\mathbf{F}_{vv} & \delta\tau\mathbf{F}_{vx} \\ \mathbf{0}_3 & \delta\tau\mathbf{F}_{xv} & \mathbf{I}_3 + \delta\tau\mathbf{F}_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\Psi \\ \delta\mathbf{v} \\ \delta\mathbf{x} \end{pmatrix}^{(k)} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \delta\tau\mathbf{G}_{\Psi\omega} & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \delta\tau\mathbf{G}_{vf} \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\omega \\ \delta f \end{pmatrix}^{(k)} \end{aligned} \quad (15.48)$$

15.6. Comportement dynamique des erreurs

Le modèle d'erreur peut être représenté graphiquement, telle que la figure 15.1 extrait de [TW04]. La figure utilise des notations différentes de celles de ce document.

Sur la figure, L représente la latitude, l la longitude, R_0 le rayon de la terre (supposée sphérique) et Ω la combinaison de la rotation terrestre et du repère de navigation.

La courbe présente un système avec plusieurs contre-réactions présentes. Ces contre-réactions sont potentiellement sources d'instabilités et d'oscillation.

La figure en présente trois :

- **l'oscillation de Schuler** : qui est excité par une erreur de gravitation associée à une erreur de latitude. C'est la boucle la plus rapide qui a une période approximative de 84.6 minutes,
- **une oscillation de période 24 heures**, due à un couplage entre l'azimut (le cap) et la latitude,
- **l'oscillation de Foucault** qui provient des erreurs sur les forces de Coriolis dues à l'erreur sur la vitesse. Cette erreur est de l'ordre de 32 heures sur Brest (la période dépend de la latitude).

Globalement, on peut montrer qu'en absence d'aide externe, les erreurs (essentiellement attitude, cap et latitude) sont bornées.

En revanche, la longitude dérive linéairement sur le long terme et l'altitude diverge exponentiellement.

En effet si par exemple on surestime l'altitude, comme le champ de gravité diminue quand on s'éloigne de la terre, on sous-estime cette force et quand on la rajoute aux forces spécifiques, il reste un résidu d'accélération vers le haut.

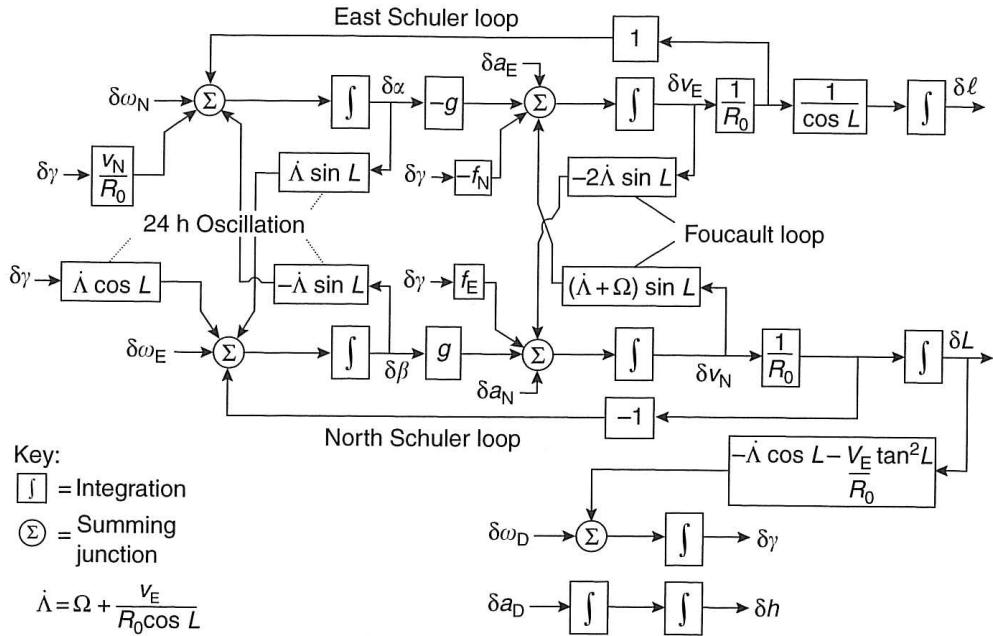


FIG. 15.1. : Graphe du modèle d'erreur (d'après Titterton&Weston [TW04])

En conséquence, si on surestime l'altitude, on croit observer une accélération vers le haut qui aggrave le problème.

Sous l'eau, le problème est plus complexe car il faut tenir compte de la masse d'eau au dessus du véhicule qui augmente quand on plonge. Néanmoins, comme observé à travers l'équation 3.28 du tome 1), comme l'eau est moins dense que la terre, le champ de pesanteur continue d'augmenter avec la profondeur, ce qui implique aussi une situation instable.

15.6.1. Oscillation de Schuler

C'est l'oscillation la plus rapide. Elle peut s'expliquer simplement.

Si, comme dans la figure 15.2, un véhicule s'estime en un point plus au Nord que la réalité, la force spécifique mesurée est dirigée dans la direction opposée à l'action de la pesanteur à la position réelle. En revanche, il va ajouter la pesanteur à la position supposée qui se trouve légèrement plus incliné vers le Sud. En conséquence, il reste une composante d'accélération résiduelle qui le fait se déplacer vers le Sud.

Cela entraîne une oscillation non amortie à la période

$$T_s = 2\pi \sqrt{\frac{R_N(\Phi)}{g(\Phi)}} \quad (15.49)$$

La démonstration se trouve dans les corrigés des exercices.

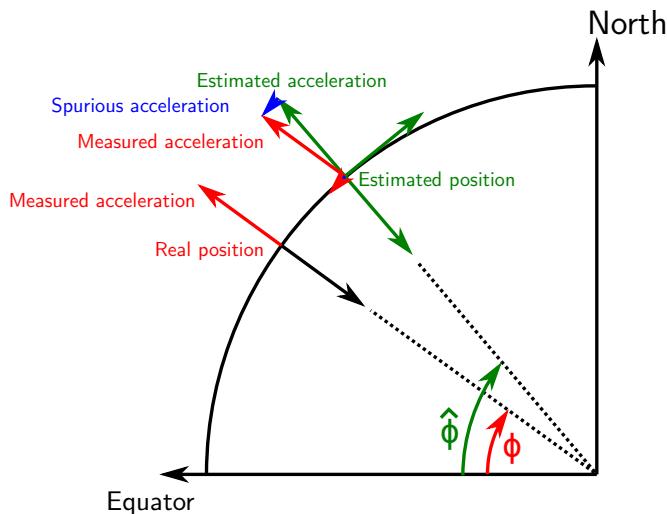


FIG. 15.2. : Principe de l'oscillation de Schuler en 1D

La période est de l'ordre de 84.6 mn à la latitude de Brest.

Nous voyons que contrairement à l'erreur d'altitude, l'erreur de latitude est bornée par un effet qui contre-balance la dérive.

15.6.2. Comportement à long terme des centrales inertielles

Les trois oscillations précédentes ont un intérêt théorique important mais ne s'observe réellement que sur les systèmes extrêmement performants (systèmes stratégiques) sur le long terme, et si le système n'a pas d'aide de capteurs externes.

Les capteurs moins performants ont des divergences qui masquent cet effet et l'insertion de l'équation d'état dans un filtre de Kalman avec une équation d'observation change la dynamique du capteur.

15.6.3. Comportement à moyen terme des centrales inertielles

Dans le cas d'une observation sur quelques heures du comportement d'une centrale inertie non hybride (sans capteur externe), seule l'oscillation de Schuler reste.

Comme sur ce terme, les couplages de 24 h et de Foucault deviennent négligeables, le système se simplifie et peut être résolu analytiquement.

15.6.4. Comportement à court terme des centrales inertielles

C'est le cas, de loin, le plus important en navigation sous-marine. En effet, la centrale a entre autre le rôle d'interpoler les données entre les arrivées des mesures externes.

15. Modèle d'erreurs

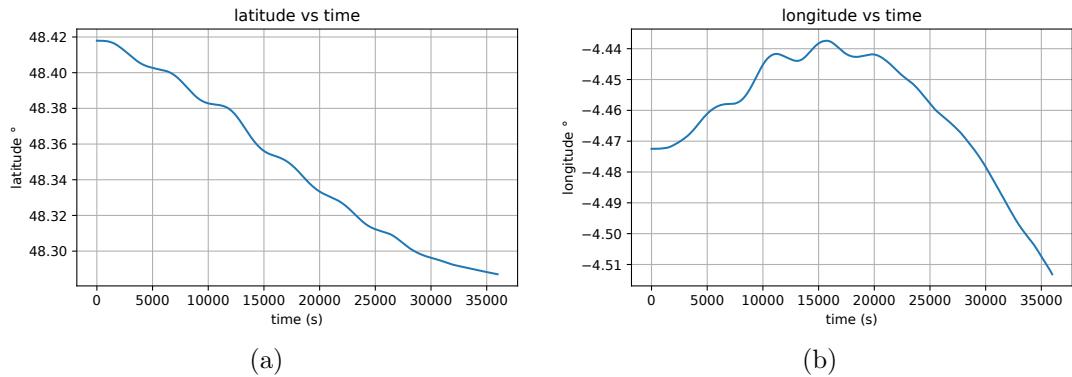


FIG. 15.3. : Dérive pendant 9h d'une INS Phins 2 de iXblue en position statique (position initialisée manuellement, pas de phase d'alignement préalable, forçage de l'altitude constante). On voit l'oscillation de Schuler (5076 s) et une oscillation plus lente (24h ou plus vraisemblablement Foucault au moins pour la latitude). La dérive totale en 9h est de l'ordre de 15 km. L'expérimentation n'a pas pu être prolongée, car la centrale a détecté qu'elle était en statique et s'est mise en mode ZUP.

Par exemple, en hydrographie, la position du navire est estimée par le système GNSS, or il se peut que périodiquement les signaux soient perturbés, soit par masquage (par exemple dans un port ou sous un pont), soit par perte des signaux de correction.

Pendant ces interruptions, c'est sur la centrale inertentielle que va reposer la qualité de la mesure. Mais, en absence du GNSS, cette dernière va se dégrader.

Meilleure est la centrale, plus longtemps le navire tient la qualité de sa position.

En conséquence, le comportement à court terme d'une centrale est très important.

Les démonstrations sont dans les corrigés des exercices, mais les résultats sont les suivants pour le comportement sur quelques minutes :

Présence de biais Dans le cas où les gyromètres, les accéléromètres et les estimations de vitesses présentent des biais, respectivement $\delta\omega_{ib}^b$, $\delta\mathbf{f}_{ib}^b$ et $\delta\mathbf{v}_{eb}^n$, le véhicule étant supposé horizontal et en trajectoire rectiligne uniforme à vitesse constante.

La dérive de position δx_b^e est de

- $\frac{1}{6} C_b^n (\delta \omega_{ib}^b \wedge f_{ib}^b) t^3$
 - $\frac{1}{2} C_b^n \delta f_{ib}^b t^2$
 - $\delta v_{eb}^n t$

Présence de bruit blanc Si l'incertitude capteur ne se présente pas sous forme de biais mais plus de bruit blanc, toujours dans l'hypothèse d'un véhicule se déplaçant en ligne droite, horizontalement à vitesse constante :

Si on suppose un bruit blanc sur une bande B et de densité spectrale bilatérale $\frac{E_\omega}{2}$ pour le gyromètre et $\frac{E_f}{2}$ pour les accéléromètres^a, l'espérance de l'erreur sur la position augmente en :

- $g\sqrt{\frac{1}{5}E_\omega B t^5}$ en fonction du bruit des gyromètres
- $\sqrt{\frac{1}{3}E_\omega B t^3}$ en fonction du bruit des accéléromètres.

^aet donc de puissance respectivement $E_\omega B$ et $E_f B$

Dans l'erreur à court terme, on peut remarquer que l'erreur de position, en présence de biais de vitesse de rotation, dérive au cube du temps, alors que la dépendance du biais d'accélération est seulement au carré du temps.

Cela appuie d'autant plus le fait que les performances du gyromètre sont plus critiques que celles de l'accéléromètre.

16. Hybridation

16.1. Objectifs

Pour l'hybridation, c'est à dire le couplage du système inertiel avec des capteurs externes (principalement de vitesse, de position, d'altitude ou de cap), le cas d'école est celui de l'hybridation d'une centrale inertielle et d'un système GNSS.

Nous illustrerons donc dans ces généralités le cas du GNSS qui permet d'illustrer les différents concepts. L'hybridation avec des capteurs plus adaptés à la navigation sous-marine ne sont pas fondamentalement différents.

Nous avons vu que les systèmes inertIELS présentent des avantages et des inconvénients.

Pour les avantages, nous pouvons citer :

- une mesure précise des attitudes au cours du temps,
- pour les systèmes perfectionnés, la détermination autonome du Nord géographique,
- une très bonne précision sur le cours terme,
- une forte cadence de mesure (≈ 200 Hz).

En revanche, le système

- peut être très cher,
- les estimations de position et de vitesse dérivent toujours au cours du temps (en cas d'utilisation sans aide),
- l'estimation de l'altitude est divergente.

Si nous regardons les avantages/inconvénients d'un système GNSS, nous avons dans la catégorie "avantage" :

- coût relativement réduit,
- pas de dérive sur le long terme,

mais

- pas d'estimation de l'attitude (sauf avec un minimum de trois antennes relativement espacées),
- une mesure bruitée (au mieux centimétrique en relatif), mais plutôt décimétrique à métrique pour les systèmes les plus courants,
- Une cadence de mesure relativement faible (au mieux 10 Hz mais plus généralement 1 Hz),

16. Hybridation

- parfois des pertes de signaux (dans un environnement encombré).

L'idée est de créer à partir de ces deux capteurs "réels", un capteur virtuel qui possède les caractéristiques suivantes :

- calcule l'attitude, le cap, la vitesse et la position dans un repère géographique,
- possède une bonne précision et aucune dérive,
- beaucoup moins cher qu'une centrale inertie seule qui fournirait les mêmes caractéristiques long terme¹.

16.2. Principe de fonctionnement

On peut se poser la question de comment deux systèmes peuvent améliorer les capacités de chacun des systèmes.

Il y a plusieurs raisons.

16.2.1. Effet intégrateur de la centrale inertie

Imaginons un GNSS au point fixe. La mesure à chaque instant donne une estimation de la position. Si la mesure est bruitée par un signal d'espérance nulle et non corrélé, chaque réalisation est légèrement différente, mais si on fait la moyenne sur n réalisations, la précision augmente selon $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Dans le cas réel, le GNSS possède une erreur corrélée et donc le gain est plus faible.

En revanche, si le GNSS est mobile et si on connaît pas la trajectoire, il est impossible de profiter du moyennage pour améliorer la qualité de l'estimation.

Cependant, l'INS peut avoir une très bonne qualité de positionnement à cours terme. En conséquence, sur quelques secondes, il est possible que connaître le déplacement réel de l'antenne GNSS très exactement et donc de séparer l'information de bruit capteur, de celle du mouvement du capteur.

On peut théoriquement moyenner les informations du GNSS malgré le déplacement, car ce dernier est estimé par l'INS.

Cela se fait, bien entendu, au moyen du filtre de Kalman² de manière relativement automatique.

Le temps d'intégration qui permet l'amélioration de l'estimée dépend de la qualité du système inertiel et il est lié au temps associé au minimum du diagramme de la déviation d'Allan.

Meilleure est la modélisation des défauts capteurs dans le filtre de Kalman, plus performant est le système.

Cet effet est très important en navigation sous-marine, où les capteurs de vitesses (principalement les Doppler Velocity Log) sont très bruités mais peu biaisés.

¹Mais qui aura au minimum le prix des deux systèmes !

²Ou du lisseur si possibilité.

16.2.2. Compensation des dérives et estimation des défauts capteurs

L'apport de capteurs externes permet d'apporter de la redondance dans la mesure. Par exemple, les variations de position sont fournies tant par le GNSS que par l'INS.

Comme l'INS dérive, mais pas le GNSS, si les mesures des deux capteurs sont incohérentes entre elles, sur le court terme, l'algorithme fait plus confiance à l'INS et sur le long terme au GNSS, mais le filtre de Kalman fait toujours une estimation cohérente de toutes les grandeurs (sauf si les hypothèses qui ont permis de concevoir le filtre s'avèrent fausses).

Ainsi, les données INS "s'adaptent" aux informations du GNSS pour estimer au mieux les informations d'attitude, de vitesse et de position.

De plus, si le filtre de Kalman possède un modèle d'erreur capteurs pertinent, grâce à la redondance entre le GNSS et l'INS, les paramètres associés au modèle peuvent être estimées ce qui améliore d'autant les deux capteurs.

Généralement, les premiers paramètres estimés sont les biais des gyromètres et accéléromètres, mais les systèmes les plus sophistiqués peuvent aussi estimer plus de paramètres comme les dérives en température, les erreurs d'alignement et de gain.

16.3. Terminologie

Pour l'hybridation, on distingue principalement trois scénarios :

- **le couplage lâche**,
- **le couplage serré**,
- **le couple ultra-serré**.

16.3.1. Couplage lâche (Loosely coupling)

C'est le plus classique.

La mécanisation et le modèle d'erreur de la centrale sont intégrés dans l'équation d'état d'un filtre de Kalman.

Les positions GNSS et les vitesses GNSS sont, elles, incluses dans l'équation d'observation du filtre de Kalman.

Ainsi, les données GNSS, en temps que mesures externes, permettent au filtre de la centrale de ne pas diverger. De même, si ils sont intégrés au filtre (et observables) les défauts capteurs peuvent être identifiés.

En revanche, le GNSS ne profite pas des données inertielles.

On peut aussi intégrer d'autres contraintes dans l'équation d'observation. Par exemple, des contraintes sur la vitesse maximale, des informations d'altitude ou de profondeur, etc...

Une contrainte particulière mais très utilisée est le mode **ZUP (Zero Update Position)**. Dans ce mode, on force le fait que la position du mobile ne varie pas quand les accélérations et girations

16. Hybridation

sont très faibles. C'est par exemple utile, pour détecter quand une voiture est à l'arrêt ou même, pour utiliser le fait que dans les pas d'un piéton, il y a toujours alternativement un pied immobile pendant une faible partie du temps.

Avantages

- le capteur virtuel est meilleur que les deux capteurs pris indépendamment,
- le volume de données échangés entre la centrale et le GNSS est très faible :
 - la position et la vitesse au cours du temps (trames NMEA 0104 \$GPGGA et \$GPVTG ou simplement \$GPRMC),
 - si possible aussi, les précisions de position et de vitesse (trame NMEA 0104 \$GPGST) ;
- l'implémentation de l'algorithme est relativement simple (juste quelques modifications de l'algorithme d'évolution d'erreurs)
- les performances sont suffisantes pour les centrales de navigation

Inconvénients

- il est difficile d'introduire des corrélations entre les données GNSS et les données INS,
- le GNSS "aide" l'INS, mais pas le contraire,
- l'INS ne peut être mis à jour que quand une solution complète GNSS est disponible (et donc suffisamment de satellites visibles).

16.3.2. Couplage serré (Tightly coupling)

Dans le couplage, l'équation d'observation n'est plus renseignée avec les positions GNSS, mais à chaque mesure de pseudo-distance d'un satellite, avec uniquement cette information.

L'intérêt est qu'une information partielle (la distance à un satellite) est déjà très utile pour lutter contre la dérive de la centrale. Cela rend le système plus robuste car même dans des situations dégradées où très peu de satellites sont visibles et la détermination d'une solution par le GNSS seule est impossible, la centrale peut trouver la position réelle.

La mesure du Doppler du signal provenant des satellites peut aussi être exploitée.

Avantages

- la centrale peut exploiter une information même partielle pour trouver sa position,
- il est plus facile d'intégrer les incertitudes de mesure dans le filtre de Kalman.

Inconvénients

- dans cette situation, le GNSS n'est toujours pas "aidée" par la centrale,
- le flot de données à échanger entre la centrale et le GNSS est plus important qu'en cas de couplage lâche.

16.3.3. Couplage ultra-serré (Deeply coupling)

Il existe plusieurs termes pour définir le couplage ultra-serré : ultra-tightly coupling, closely coupling, etc....

Dans ce scénario, les informations de la centrale sont utilisées par le GNSS, en particulier pour prédire les mouvements de l'antenne.

Le premier intérêt est pour l'acquisition des signaux satellites. La recherche d'un signal électromagnétique provenant d'un satellite est rendu difficile par un Doppler lié à la fois à la trajectoire du satellite mais aussi du mouvement de l'antenne.

Si on connaît le mouvement de l'antenne, la recherche des satellites est simplifiée. Il est en particulier possible de suivre des satellites dans un rapport signal à bruit plus faible que dans le cas où le mouvement de l'antenne n'est pas pris en compte.

De même, dans le cas de systèmes cinématiques, PPP ou les compas GNSS, la résolution des ambiguïtés est facilitée quand le mouvement de l'antenne est connue.

Avantages

- la fusion est presque optimale,
- l'algorithme est beaucoup plus résistant aux signaux GNSS dégradés,
- facilité accrue aussi pour détecter la présence de multiples dans les signaux GNSS.

Inconvénients

- l'algorithme peut être très complexe,
- le flot de données à échanger entre la centrale et le GNSS est potentiellement très important.

16.4. Hybridation dans le cas sous-marin

Dans le cas des ROV ou des AUV, les signaux GNSS ne sont disponibles qu'en surface (généralement en début et en fin de mission).

Il est donc nécessaire d'utiliser d'autres capteurs. Ce sont essentiellement ceux étudiés dans ce document :

16. Hybridation

- le capteur de pression (pour l'immersion),
- les capteurs de vitesse, principalement DVL (Doppler Velocity Log) mais parfois CVL (Correlation Velocity Log),
- les capteurs de position : LBL (Long Baseline Localisation) et USBL (Ultra Short Baseline Localisation).

16.4.1. DVL/CVL

Nous avons vu que ces capteurs mesurent la vitesse du mobile, soit dans un repère fixe par rapport à la terre (si la portée est suffisante par rapport au fond), soit seulement par rapport à la masse d'eau (si le fond est trop loin ou trop complexe, et seulement dans le cas du DVL).

Dans ce dernier cas, la vitesse est entachée par l'incertitude sur la connaissance des courants marins.

Souvent, les missions des ROV et AUV se passent près du fond (sauf pour les mesures océanographiques), et donc la mesure se fait dans le repère terrestre. Cependant, souvent seule la vitesse par rapport à la masse d'eau est disponible pendant la plongée et la remontée du véhicule. Ce problème est particulièrement important quand la mission se passe en grand fond.

Avantages

- le système est autonome, il n'y a pas besoin de mouiller un système auxiliaire,
- l'instrument peut être très précis si il est bien calibré initialement (de l'ordre de 2 à 3‰).

Inconvénients

- comme le système ne fournit que la vitesse, il reste toujours une dérive linéaire en temps (ce qui est beaucoup mieux que la dérive cubique en temps (à court terme sans aide externe)).
- parfois le fond est trop distant pour obtenir une information fiable.

16.4.2. LBL (Long Baseline Localisation)

Le LBL fournit une information de position (donc sans dérive) mais nécessite le mouillage de transpondeurs sur le fond de la mer (ou en surface). C'est probablement la solution la plus précise si la calibration est bien faite, mais la mise en oeuvre peut être lourde.

Avec le LBL, comme pour le GNSS, la notion de couplage serré à un sens : on peut là aussi, fusionner les données inertielles avec les données d'une seule balise et connaître malgré tout la position. Alors que sans centrale, une seule balise n'est pas suffisant³.

³Ce n'est pas non plus suffisant avec une centrale si le véhicule reste immobile.

Avantages

- plus de dérive de la centrale,
- système pouvant être précis,
- possibilité de couplage lâche ou serré.

Inconvénients

- le coût de mouillage et de relevage ainsi que de calibration (temps bateau) et le risque de pertes,
- nécessite l'estimation d'un profil de célérité pour profiter de la pleine précision,
- Les transpondeurs étant généralement fixes, la zone de travail possible peut être relativement petite,
- l'environnement peut être sonore ou encombrés d'obstacles, ce qui peut perturber le système.

16.4.3. USBL (Ultra Short Baseline Localisation)

L'USBL fournit aussi une information de position.

L'USBL peut se trouver sur le ROV ou l'AUV, dans ce cas il est nécessaire d'utiliser des transpondeurs et on se retrouve dans la même situation qu'avec le LBL.

Plus généralement, l'USBL se trouve sur un navire de surface et le transpondeur sur le véhicule. Si sur un ROV il est facile après de retransmettre au mobile les mesures du capteur, sur un AUV, c'est plus délicat.

Cependant les informations peuvent être exploitées en post traitement (lissage de Kalman) pour affiner la trajectoire.

Une caractéristique importante des signaux acoustiques des LBL et USBL est qu'ils sont très souvent entachés de trajets multiples. En conséquence, le système accroche parfois sur ces multiples (qui peuvent être plus intenses que le signal direct). En conséquence, l'estimation de distance peut être très affectée par ce problème qui se comporte comme un biais intermittent sur la mesure, ce qui peut poser de gros problèmes de stabilité sur le filtrage.

Les systèmes USBL peuvent être plus perturbés que les LBL car il y a moins de redondance de signaux.

Les avantages/inconvénients sont dans le cas d'un système monté sur un navire de surface, dans l'autre cas, on se retrouve dans la même situation qu'un LBL.

Avantages

- plus aucune contrainte de distance si le navire suit le véhicule,

inconvénients

- nécessite une communication acoustique dans le cas d'un AUV corrigé en temps réel,
- demande une bonne détermination du profil de célérité (les ondes traversent toute la colonne d'eau).

16.5. Algorithme de fusion

Dans le cas général, un filtre de Kalman est utilisé pour la fusion entre la centrale et les capteurs externes.

L'équation d'état modélise l'algorithme de mécanisation de la centrale mais aussi les défauts capteurs de la centrale et leur dynamique (biais, gain, dérive,...) et éventuellement aussi les paramètres des défauts des capteurs externes.

L'équation d'observation confronte les estimations internes d'attitude, accélération, vitesse et position avec les capteurs externes.

La méthode qui peut paraître la plus naturelle est d'intégrer directement la mécanisation dans le filtre de Kalman, cependant cet algorithme est trop non linéaire pour être pratique.

En général, seul le modèle d'erreur (équation 15.48) est intégré dans l'équation d'état.

La raison est que tant que les erreurs restent petites, le système d'équation est relativement facilement linéarisable.

La mécanisation est calculée en parallèle et périodiquement corrigée par les espérances des erreurs issues du filtre de Kalman.

16.6. Principe de l'algorithme d'hybridation

Si on reprend le cas du GNSS, nous pouvons présenter le principe de l'algorithme.

16.6.1. Préalable

Supposons à l'instant k , les informations suivantes :

- l'estimation de l'attitude $(\mathbf{C}_b^n)^{(k-1)}$, de la vitesse $(\mathbf{v}_{eb}^n)^{(k-1)}$ et de la position $(\mathbf{x}_b^n)^{(k-1)}$ de la récurrence précédente,
- un vecteur d'état des erreurs estimées réinitialisé à espérance nulle $\delta \mathbf{x}^{(k-1)} = \begin{pmatrix} \delta \psi_b^n \\ \delta v_{eb}^n \\ \delta x_b^n \end{pmatrix} = 0$ de la récurrence précédente,

- une estimation de la variance/covariance de l'erreur $(\Sigma_{\delta x})^{(k-1)}$,
- les variations d'angle et de vitesse entre les instants $(k-1)$ et (k) : $(\nu_{ib}^b)^{(k)}$ et $(\alpha_{ib}^b)^{(k)}$ (après compensation du coning et du sculling).

16.6.2. Mécanisation

Tout d'abord, on applique l'équation de mécanisation pour estimer les attitudes, vitesses et positions à l'instant (k) à partir des estimées de l'instant $(k-1)$:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{C}_b^n)^{(k)}, (\mathbf{v}_{eb}^n)^{(k)}, (\mathbf{x}_b^n)^{(k)} \\ & = f((\nu_{ib}^b)^{(k)}, (\alpha_{ib}^b)^{(k)}, (\mathbf{C}_b^n)^{(k-1)}, (\mathbf{v}_{eb}^n)^{(k-1)}, (\mathbf{x}_b^n)^{(k-1)}) \end{aligned} \quad (16.1)$$

16.6.3. Modèle d'erreur

En parallèle, on calcule une itération de la dynamique du modèle d'erreur ainsi que la mise à jour du vecteur espérance de l'erreur et de la matrice de variance covariance (ne pas oublier qu'à l'itération précédente, on suppose l'espérance de l'erreur comme étant nul).

C'est l'étape de prédiction

$$\delta \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{F}^{(k)} \delta \mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{Q}^{(k)} \mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{Q}^{(k)} \mathbf{v}^{(k)} \quad (16.2)$$

$$\Sigma_{\delta x \delta x}^{(k)} = \mathbf{F}^{(k)} \Sigma_{\delta x \delta x}^{(k-1)} (\mathbf{F}^{(k)})^T + \mathbf{Q}^{(k)} (\mathbf{Q}^{(k)})^T \quad (16.3)$$

16.6.4. Observation

Application de l'équation d'observation, (ici illustré dans le cas d'un GNSS) ;

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{H}^{(k)} \delta \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{R}^{(k)} \mathbf{w}^{(k)} \quad (16.4)$$

Comme il s'agit de l'observation du modèle d'erreur et non de l'observation des positions et vitesses, les mesures sont **l'erreur observée**.

Ainsi, dans le cas du GNSS, il s'agit de l'écart entre les vitesses mesurées et celles estimées par la mécanisation et pareil pour les positions.

$$\mathbf{y}^{(k)} = \begin{pmatrix} (\mathbf{v}_{b,gnss}^n)^{(k)} - (\mathbf{v}_b^n)^{(k)} \\ (\mathbf{x}_{b,gnss}^n)^{(k)} - (\mathbf{x}_b^n)^{(k)} \end{pmatrix} \quad (16.5)$$

La matrice $\mathbf{R}^{(k)}$ correspond à l'écart type des mesures capteurs (c'est à dire que $\mathbf{R}\mathbf{R}^T$ est la matrice de variance/ covariance des erreurs GNSS).

16.6.5. Filtrage de Kalman

L’itération du filtrage de Kalman fournit pour l’itération (k), l’espérance du vecteur d’erreur et sa variance covariance

- $\delta\mathbf{x}^{(k)}$
- $\Sigma_{\delta\mathbf{x}\delta\mathbf{x}}^{(k)}$

16.6.6. Préparation de l’itération suivante

On corrige les attitudes, vitesses et positions par l’espérance de $\delta\mathbf{x}^{(k)}$ que l’on remet à 0 pour l’itération suivante.

En revanche, on garde $\Sigma_{\delta\mathbf{x}\delta\mathbf{x}}^{(k)}$.

16.7. Remarques sur l’implémentation

16.7.1. Implémentation multi-cadence

L’implémentation du filtre de Kalman peut être délicat compte tenu des contraintes incompatibles de complexité des algorithmes et de faible consommation des systèmes.

En effet, les objectifs de faible consommation électrique des centrales inertielles impliquent que la puissance de calcul reste malgré tout limitée.

Par contre, les systèmes performants doivent avoir des modèles d’erreurs sophistiqués qui peuvent avoir plusieurs dizaines de paramètres dans le vecteur d’état du filtre, ce qui entraîne des algorithmes assez lourds (il ne faut pas oublier que l’inversion d’une matrice de n par n éléments, nécessaire pour la mise à jour du gain de Kalman est un algorithme qui nécessite un nombre d’opérations multiples de n^3 ce qui est relativement intensif⁴.

Enfin, les données des capteurs externes peuvent arriver “au fil de l’eau” à une cadence non régulière.

Pour résoudre ces problèmes, le filtre de Kalman est décomposé en plusieurs boucles qui se font à des vitesses différentes.

On a généralement 3 ou 4 vitesses de traitement imbriquées :

- la boucle la plus rapide est l’intégration des vitesses de giration et des accélérations, pour minimiser les effets du “coning” et du “sculling”. Cette boucle est généralement exécutée à 1 ou 2 kHz avec une cadence régulière et elle est souvent effectuée dans l’IMU (quand cette dernière est séparée du calculateur) :
- ensuite, on a la boucle de mécanisation et l’étape de prédition du modèle d’erreur sur les variables qui varient rapidement (essentiellement l’attitude, la vitesse et la position). Cette boucle est à cadence régulière et effectuée entre 100 et 200 Hz ;
- ensuite, l’étape de correction, sur une boucle irrégulière en fonction des arrivées des mesures,

⁴En fait très légèrement moins que n^3 , mais la différence est anecdotique.

- enfin, à cadence lente, la mise à jour des paramètres des modèles d'erreur des capteurs qui se font à vitesse lente (les valeurs de ces paramètres ne varient pas rapidement).

Cet échelonnement des boucles est un compromis entre la charge de calcul et l'optimalité des algorithmes.

16.7.2. Changement de référentiel des données externes

Dans l'équation d'observation, il est nécessaire de ramener les données à la position de la centrale.

Cela nécessite la prise en compte des bras de levier et l'utilisation de l'estimée de l'attitude \mathbf{C}_b^n pour transformer les positions et vitesses dans le référentiel de calcul (généralement le repère de navigation).

16.7.3. Détection de la divergence du filtre

Durant le fonctionnement du filtre, la matrice de variance/covariance du modèle d'erreur $\Sigma_{\delta\mathbf{x}\delta\mathbf{x}}$ doit d'abord décroître puis rester bornée autour d'une valeur "raisonnable".

Si ce n'est pas le cas, il se peut qu'il y ait trop de paramètres dans le modèle, ce qui peut les rendre inobservables. Dans ce cas, il faut changer le modèle.

Il se peut aussi que le système diverge pour des raisons conjoncturelles, par exemple l'absence de données capteurs pendant un certain temps ou l'arrivée de données aberrantes (outliers) non prises en compte par le modèle.

Le problème est que le modèle d'erreur s'appuie sur l'hypothèse que les erreurs restent faibles. Il est donc nécessaire de surveiller la matrice $\Sigma_{\delta\mathbf{x}\delta\mathbf{x}}$ et éventuellement si elle atteint des valeurs trop importantes, réinitialiser le filtre. Cela peut éventuellement passer par un réalignement de la centrale.

16.7.4. Complexité du modèle capteur

Dans le modèle des défauts capteurs, le plus important est de modéliser le biais et le niveau de bruit des capteurs inertIELS.

En première approximation, le bruit peut être modélisé par du bruit blanc et le biais par un bruit passant à travers un filtre passe-bas.

Le niveau de bruit et la fréquence de coupure du filtre passe-bas peuvent être déterminés par la courbe de déviation d'Allan.

Si le modèle n'est pas parfait, il est généralement nécessaire d'intégrer dans l'écart-type du bruit, l'incertitude du modèle.

Si l'IMU n'est pas très précise, un modèle d'erreur simple est suffisant (bruit, plus biais avec instabilité au premier ordre).

De même, l'équation d'état peut être très simplifiée car il n'est plus nécessaire de modéliser les effets de rotation terrestres et de rotation du repère de navigation.

16. Hybridation

En revanche, les capteurs externes sont obligatoires et le système gagnera à avoir un couplage serré pour permettre d'exploiter le plus de mesures externes possibles.

En revanche, si le système est très performant il bénéficie beaucoup à avoir un modèle d'erreur très précis⁵ (ce qui augmentera la précision de l'estimation). En revanche, il dépend moins de la cadence d'arrivée des données externes.

16.7.5. Auto-calibrage

Pour éviter un Kalman trop complexe ou avec trop de paramètres ce qui risque de créer des divergences, certaines erreurs statiques peuvent être estimées dans un mode particulier de l'algorithme.

C'est le cas par exemple des phases d'alignements grossier et fin. La phase d'alignement grossier est un algorithme non linéaire pour "dégrossir les paramètres d'attitude" de la centrale, et l'alignement fin pour estimer les biais et gains des capteurs.

Cela peut aussi être le cas des différents bras de levier.

On peut citer l'exemple l'algorithme **GAMS (GPS Azimuth Measurement Subsystem)**, qui par corrélation entre les variations des signaux GNSS et l'attitude et les accélérations de l'IMU recherche les bras de levier entre l'antenne GNSS et l'IMU ainsi que la position relative entre les deux antennes GNSS pour permettre d'avoir une référence de cap (compas GNSS).

On peut aussi trouver ainsi les mésalignement entre les capteurs auxiliaires (par exemple le DVL) et la centrale.

⁵C'est aussi valable pour le modèle de pesanteur.

A. Formulaire de probabilité

A.1. Opération sur les densités de probabilités

Loi produit

$$p(AB|C) = p(A|BC)p(B|C) = p(B|AC)p(A|C) \quad (\text{A.1})$$

Loi somme

$$p(A + B|C) = p(A|C) + p(B|C) - p(AB|C) \quad (\text{A.2})$$

Complémentaire d'une probabilité

$$p(A|C) + p(\bar{A}|C) = 1 \quad (\text{A.3})$$

Loi de Bayes

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) &= \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{x})}{p(\mathbf{y})} \\ &= \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{x})}{\int \int_{\mathbf{x}} p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Normalisation de la densité de probabilité

$$\int \cdots \int_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1 \quad (\text{A.5})$$

Lois marginales

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) &= \int \cdots \int_{\mathbf{y}} p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ p(\mathbf{y}) &= \int \cdots \int_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

A.2. Probabilité de deux vecteurs

Soit deux vecteurs \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 , respectivement de probabilité $p(\mathbf{x}_1)$ et $p(\mathbf{x}_2)$

Probabilité conjointe La probabilité $p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ est appelé probabilité conjointe

Si et seulement si \mathbf{x}_1 est indépendant de \mathbf{x}_2 alors

$$p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = p(\mathbf{x}_1)p(\mathbf{x}_2) \quad (\text{A.7})$$

A.3. Lois gaussiennes

A.3.1. Densité de probabilité d'une loi Gaussienne scalaire

Soit une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2 , son expression est

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{A.8})$$

A.3.2. Densité de probabilité d'un vecteur gaussien

Soit un vecteur gaussien \mathbf{x} d'espérance, le vecteur μ et de matrice de variance / covariance Σ , l'expression de sa loi de probabilité est

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\det(\Sigma)|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\mu)} \quad (\text{A.9})$$

A.3.3. Propriétés d'un vecteur gaussien

Somme de deux vecteurs gaussiens indépendants

Soit deux vecteurs gaussiens **indépendants** \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 de même dimension de loi $\mathcal{N}(\mu_1, \Sigma_1)$ et $\mathcal{N}(\mu_2, \Sigma_2)$, alors $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ est un vecteur gaussien $\mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \Sigma_1 + \Sigma_2)$

Multiplication par un scalaire

Soit un vecteur \mathbf{x} suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ et un scalaire λ , le vecteur $\lambda\mathbf{x}$ suit la loi $\mathcal{N}(\lambda\mu, \lambda^2\Sigma)$

Extension dans le cas d'une matrice

Soit un vecteur gaussien \mathbf{x}_1 de dimension n suivant une loi $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ et une matrice \mathbf{A} de dimension (m, n) , le vecteur $\mathbf{x}_2 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mathbf{A}\mu, \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^T)$.

A.3.4. Identité matricielle de Woodbury

L'identité matricielle de Woodbury peut sembler très artificielle mais qui s'avère utile dans beaucoup d'occasions.

Soient :

- \mathbf{A} une matrice inversible de taille (n, n) ,
- \mathbf{B} une matrice inversible de taille (m, m) ,
- \mathbf{U} une matrice de taille (n, m) ,
- \mathbf{V} une matrice de taille (m, n) ,

A.4. Relation linéaire entre deux vecteurs gaussiens

Nous avons l'égalité

$$(\mathbf{A} + \mathbf{U}\mathbf{B}\mathbf{V})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{V}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{V}\mathbf{A}^{-1} \quad (\text{A.10})$$

Démonstration

Le plus simple est de démontrer que

$$(\mathbf{A} + \mathbf{U}\mathbf{B}\mathbf{V})^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{U}\mathbf{B}\mathbf{V}) = \mathbf{I} \quad (\text{A.11})$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} & (\mathbf{A} + \mathbf{U}\mathbf{B}\mathbf{V})^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{U}\mathbf{B}\mathbf{V}) \\ &= (\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{V}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{V}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{A} + \mathbf{U}\mathbf{B}\mathbf{V}) \\ &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{B}\mathbf{V} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{V}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{V}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{V}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{V}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{B}\mathbf{V} \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{B}\mathbf{V} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{V}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{V} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{V}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{V}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{B}\mathbf{V} \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{B}\mathbf{V} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{V}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{V} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{V}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{V}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{B}\mathbf{V} \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{B}\mathbf{V} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{V}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U})^{-1}(\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{V}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U})\mathbf{B}\mathbf{V} \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{B}\mathbf{V} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{B}\mathbf{V} \\ &= \mathbf{I} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

A.4. Relation linéaire entre deux vecteurs gaussiens

Soit un vecteur gaussien \mathbf{x} d'espérance $\boldsymbol{\mu}_x$ et de variance / covariance $\boldsymbol{\Sigma}_{xx}$, soit un vecteur $\boldsymbol{\mu}_v$, une matrice \mathbf{H} et une matrice semi-définie positive $\boldsymbol{\Sigma}_{vv}$ et soit un vecteur gaussien \mathbf{y}

d'espérance $\mathbf{H}\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}_v$

de variance $\boldsymbol{\Sigma}_{vv}$

alors le vecteur $\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien

d'espérance $\begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_x \\ \mathbf{H}\boldsymbol{\mu}_x + \boldsymbol{\mu}_v \end{pmatrix}$

de variance $\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{xx} & \boldsymbol{\Sigma}_{xx}\mathbf{H}^T \\ \mathbf{H}\boldsymbol{\Sigma}_{xx} & \mathbf{H}\boldsymbol{\Sigma}_{xx}\mathbf{H}^T + \boldsymbol{\Sigma}_{vv} \end{pmatrix}$

A.4.1. Démonstration

Si on a $p\left(\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_x \\ \boldsymbol{\mu}_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{xx} & \boldsymbol{\Sigma}_{xy} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{yx} & \boldsymbol{\Sigma}_{yy} \end{pmatrix}\right)$ cela signifie que $p(\mathbf{x}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\Sigma}_{xx})$, $p(\mathbf{y}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_y, \boldsymbol{\Sigma}_{yy})$, et $E((\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x)(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y)^T) = \boldsymbol{\Sigma}_{xy}$

Si $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{v}$ with $p(\mathbf{x}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_1)$ and $p(\mathbf{v}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_2)$, on a :

A. Formulaire de probabilité

- $\mathbb{E}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mu}_1$
- $\Sigma_{xx} = \Sigma_1$
- $\mathbb{E}(\mathbf{y}) = \mathbb{E}(\mathbf{Hx} + \mathbf{v}) = \mathbf{H}\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\mu}_2$

Reste à calculer Σ_{yy} et Σ_{xy} sous l'hypothèse que \mathbf{v} et \mathbf{x} soient indépendants.

$$\begin{aligned}\Sigma_{yy} &= \mathbb{E}((\mathbf{Hx} + \mathbf{v})(\mathbf{Hx} + \mathbf{v})^T) \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{Hxx}^T \mathbf{H}^T + \mathbf{Hxv}^T + \mathbf{vx}^T \mathbf{H}^T + \mathbf{vv}^T) \\ &= \mathbf{H}\Sigma_1\mathbf{H}^T + \Sigma_2\end{aligned}\tag{A.13}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{xy} &= \mathbb{E}(\mathbf{x}(\mathbf{Hx} + \mathbf{v})^T) \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{xx}^T \mathbf{H}^T + \mathbf{xv}^T) \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{xx}^T)\mathbf{H}^T + \mathbb{E}(\mathbf{xv}^T) \\ &= \Sigma_1\mathbf{H}^T\end{aligned}\tag{A.14}$$

A.5. Lois conjointes et conditionnelles de deux vecteurs gaussiens

Soit deux vecteurs gaussiens \mathbf{x} et \mathbf{y} respectivement d'espérance $\boldsymbol{\mu}_x$ et $\boldsymbol{\mu}_y$, de matrice de variance / covariance Σ_{xx} et Σ_{yy} et de covariance entre les deux vecteurs $\mathbb{E}(\mathbf{xy}^T) = \Sigma_{xy}$, nous pouvons calculer :

A.5.1. Loi conjointe de deux vecteurs gaussiens

Soit le vecteur $\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$. Il forme un couple gaussien d'espérance $\begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_x \\ \boldsymbol{\mu}_y \end{pmatrix}$ et de matrice de variance / covariance $\begin{pmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{yx} & \Sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{xy}^T & \Sigma_{yy} \end{pmatrix}$

A.5.2. Lois marginales

Soit le couple gaussien $\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$, $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ est une loi gaussienne

d'espérance

$$\boldsymbol{\mu}_{x|y} = \boldsymbol{\mu}_x + \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y)\tag{A.15}$$

de matrice de variance / covariance

$$\Sigma_{x|y,x|y} = \Sigma_{xx} - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{xy}^T\tag{A.16}$$

$p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ est une loi gaussienne

d'espérance

$$\boldsymbol{\mu}_{y|x} = \boldsymbol{\mu}_y + \boldsymbol{\Sigma}_{yx} \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}_x) \quad (\text{A.17})$$

de matrice de variance / covariance

$$\boldsymbol{\Sigma}_{y|x, y|x} = \boldsymbol{\Sigma}_{yy} - \boldsymbol{\Sigma}_{yx} \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{yx}^T \quad (\text{A.18})$$

A.5.3. Démonstration

Comme \boldsymbol{x} et \boldsymbol{y} sont des vecteurs gaussiens, on peut trouver une relation linéaire entre \boldsymbol{x} et \boldsymbol{y} telle que

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{v}$$

avec \boldsymbol{v} un vecteur gaussien $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_v, \boldsymbol{\Sigma}_v)$.

Soit \boldsymbol{A} , $\boldsymbol{\mu}_v$ et $\boldsymbol{\Sigma}_v$:

on a d'abord

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_{yx} &= \mathbb{E}(\boldsymbol{Ax} \boldsymbol{x}^T + \boldsymbol{vx}) \\ &= \boldsymbol{A} \boldsymbol{\Sigma}_{xx} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

d'où on déduit

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\Sigma}_{yx} \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{-1} \quad (\text{A.20})$$

Comme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_y &= \mathbb{E}(\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{v}) \\ &= \boldsymbol{A} \boldsymbol{\mu}_x + \boldsymbol{\mu}_v \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

on en déduit

$$\boldsymbol{\mu}_v = \boldsymbol{\mu}_y - \boldsymbol{A} \boldsymbol{\mu}_x = \boldsymbol{\mu}_y - \boldsymbol{\Sigma}_{yx} \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{-1} \boldsymbol{\mu}_x \quad (\text{A.22})$$

et

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_{yy} &= \mathbb{E}((\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{v})(\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{v}^T)) \\ &= \boldsymbol{A} \boldsymbol{\Sigma}_{xx} \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{\Sigma}_v \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

d'où

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_v &= \boldsymbol{\Sigma}_{yy} - \boldsymbol{\Sigma}_{yx} \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{xx} \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{xy} \\ &= \boldsymbol{\Sigma}_{yy} - \boldsymbol{\Sigma}_{yx} \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{xy} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Maintenant $p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})$ peut être calculé sachant $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{v}$

L'espérance est

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_{y|x} &= \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{\mu}_v \\ &= \boldsymbol{\Sigma}_{yx} \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{-1} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu}_y - \boldsymbol{\Sigma}_{yx} \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{-1} \boldsymbol{\mu}_x \\ &= \boldsymbol{\mu}_y + \boldsymbol{\Sigma}_{yx} \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}_x) \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

et la variance est

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_{y|x} &= \boldsymbol{\Sigma}_v \\ &= \boldsymbol{\Sigma}_{yy} - \boldsymbol{\Sigma}_{yx} \boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{xy} \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Bibliographie

- [Gro13] Paul D. GROVES. **Principles of GNSS, Inertial and Multisensor Integrated Navigation Systems.** 2nd. Artech House, 2013. ISBN : 978-1-60807-005-3.
- [Hou04] Haiying HOU. «Modeling Inertial Sensors Errors Using Allan Variance». Mém. de mast. Calgary, Canada : Department of Geomatics Engineering, University of Calgary, oct. 2004.
- [IEEE952] IEEE AEROSPACE et Electronic Systems SOCIETY. **IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Interferometric Fiber Optic Gyros.** Standard IEEE. Mar. 2003.
- [Jay03] E. T. JAYNES. **Probability Theory, The Logic of Science.** University Press, Cambridge, 2003. ISBN : 978-0-521-59271-0.
- [Lab18] Roger R. LABBE JR. **Kalman and Bayesian Filters in Python.** site Git-Hub et livre pdf. 29 août 2018. URL : <https://github.com/rlabbe/Kalman-and-Bayesian-Filters-in-Python> (visité le 01/11/2018).
- [Sär13] Simo SÄRKKÄ. **Bayesian Filtering and Smoothing.** New York, NY, USA : Cambridge University Press, 2013. ISBN : 978-1107619289.
- [TW04] David TITTERTON et John WESTON. **Strapdown Inertial Navigation Technology.** 2nd. IEE Radar, Sonar, Navigation et Avionics Series, 2004. ISBN : 978-0863413582.
- [Van04] Rudolph VAN DER MERWE. «Sigma-Point Kalman Filters for Probabilistic Inference in Dynamics State-Space Models». Thèse de doct. Oregon Health & Science University, avr. 2004. URL : <http://digitalcommons.ohsu.edu/etd/8>.
- [Vas00] Saeed V. VASEGHI. **Advanced Digital Signal Processing And Noise Reduction.** 2nd. Wiley, 2000. ISBN : 0-471-62692-9.