Kalman Exercice 7.5 : Propagation

1) $\bar{x} = E(x) = AE(a) - E(b) = 0$

car $E(a) = E(b) = 0$ car a, b centrés

$\bar{y} = CE(x) + E(c) = 0$ car $E(x) = 0$ et c centré

$\Gamma_x = E((x-\bar{x})(x-\bar{x})^T) = E(xx^T) = E((Aa-b)(Aa-b)^T)$

$= A.\underbrace{E(aa^T)}_{=\Gamma_a = I}A^T - \underbrace{E(ba^T)}_{=0}A^T - A.\underbrace{E(ab^T)}_{=0} + \underbrace{E(bb^T)}_{=\Gamma_b = I}$

a, b indépendants et centrées

$= AA^T + I$

$\Gamma_y = C.\underbrace{E(xx^T)}_{=\Gamma_x}C^T + \underbrace{E(cx^T)}_{=0}C^T + C.\underbrace{E(xc^T)}_{=0} + \underbrace{E(cc^T)}_{=\Gamma_c = I}$

x, c indépendants et centrées

$= C\Gamma_x C^T + I$

2) $\bar{v} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Gamma_v = E(vv^T) = \begin{pmatrix} E(xx^T) & E(xy^T) \\ E(yx^T) & E(yy^T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_x & \Gamma_{xy} \\ \Gamma_{yx} & \Gamma_y \end{pmatrix}$

avec $\Gamma_{xy} = E(xy^T) = E(x(Cx+c))$

$= E(xx^T)C^T + \underbrace{E(xc^T)}_{=0} = \Gamma_x C^T$

donc $\Gamma_v = \begin{pmatrix} \Gamma_x & \Gamma_x C^T \\ C\Gamma_x & \Gamma_y \end{pmatrix}$

3) $z = y - x = (-1 \;\; 1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-1 \;\; 1)v$

$\bar{z} = (-1 \;\; 1)\bar{v} = 0$ $\quad \Gamma_z = (-1 \;\; 1)\Gamma_v \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \Gamma_x - \Gamma_x C^T - C\Gamma_x + \Gamma_y$

4) $\hat{x} = \bar{x} + K(y - \bar{y})$ avec $K = \Gamma_{xy} \Gamma_y^{-1}$

$\hat{x} = \Gamma_x C^T \Gamma_y^{-1} y$ avec $\Gamma_x = AA^T + I$

et $\Gamma_y = C(AA^T + I)C^T + I$.

Scanné avec CamScanner