Exercice 6.1 :

1. On calcule les dérivées partielles en (x_0, y_0) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = y_0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = x_0$$

donc le gradient est le vecteur $\begin{pmatrix} y_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$.

2. $f(x,y) = (x \ y) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}}_{Q} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad L = (0 \ 0)$ et $c = 0$

$2(x \ y) Q = (y \ x)$ ✓

3. f n'a pas de minimum (point selle)

4. 1. $\frac{dg}{dx}(x_0, y_0) = 4x_0 + y_0 - 1$

$\frac{dg}{dy}(x_0, y_0) = x_0 + 8y_0 + 1$

2. $g(x,y) = (x \ y) \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 1/2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (-1 \ 1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 3$

$2 (x \ y) \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 1/2 & 4 \end{pmatrix} + (-1 \ 1)$

$= (4x + y - 1 \quad x + 8y + 1)$

3. f admet un minimum $\left\{ \begin{array}{l} \text{paraboloïde} \\ \text{orienté vers le} \\ \text{haut} \end{array} \right.$