Approximation of ln(2)

1 Preuve

Montrons que : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$

Premièrement, $(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge par critère spécial sur les séries alternées.

Et : $|\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} - \ln(2)| = |\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^k dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t}|$
$= |\sum\limits_{k=0}^{n} \int_0^1 (-t)^k - \int_0^1 \frac{1}{1+t}| = |\int_0^1 \sum\limits_{k=0}^{n} (-t)^k - \int_0^1 \frac{1}{1+t}|$ par linéarité de l'intégrale.

Donc $|\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} - \ln(2)| = |\int_0^1 \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t} - \int_0^1 \frac{1}{1+t}| = |\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}| \leq \int_0^1 t^n = \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$