

Approximation of $\ln(2)$

1 Preuve

Montrons que : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$

Premièrement, $(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge par critère sur les séries alternées.

$$\begin{aligned} \text{Et : } & \left| \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} - \ln(2) \right| = \left| \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^k dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt \right| \\ & = \left| \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-t)^k dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt \right| = \left| \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-t)^k dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt \right| \text{ par linéarité de l'intégrale.} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \left| \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} - \ln(2) \right| = \left| \int_0^1 \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt \right| = \left| \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt \right| \leq \int_0^1 t^{n+1} dt = \frac{1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$