# Computational Stats

Group III

## Trabalho 1

### Exercício 1

1. Considere que uma variável continua $X$ com a seguinte função de densidade:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}(x^3 + x) & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{for all others } x \text{ values} \end{cases}$$

Agora considerando a variavel aliatória $Y = g(X)$, em que $g(x) = log(x^2+4)$. Estime o valor $P(1.3 < Y < 1.5)$ usando o método de monte carlo e estime o valor do desvio padrão da estimativa

---

$$P(1.3 < Y < 1.5) \quad = \quad P(1.3 < g(x) < 1.5)$$

$$D(g(x)) = D(log(x^2+4)) = [min(log(x^2+4), +\infty[ \quad , \quad min(log(x^2+4)) = log(4) = 1.386294 > 1.3$$

Onde $D(g(x))$ é o dominio de $g(x)$. Uma vez que $D(g(x))$ está definido no intervalo $[min(log(x^2+4), +\infty[$ afimar o seguinte:

$$P(1.3 < g(x) < log(4)) = 0 \quad \Longrightarrow \quad P(1.3 < g(x) < 1.5) \equiv P(log(4) < g(X) < 1.5)$$

Que se pode desenvolver :

$$P(log(4) < log(x^2+4) < 1.5) \quad = \quad P(4 < x^2+4 < e^{1.5}) \quad = \quad P(0 < x^2 < e^{1.5}-4) \quad = \quad P(0 < x < \sqrt{e^{1.5}-4})$$

Agora, sabemos que a probabilidade que queriamos calcular pode ser obtida através do seguinte integral:

$$\int_0^{\sqrt{e^{1.5}-4}} \frac{4}{3}(x^3+x)dx$$

O qual puderá ser escrito com a seguinte mudança de variável:

#### Mudança de Variável

$$z(x) = xc \quad , \quad z(\sqrt{e^{1.5}-4}) = 1 \quad \Longrightarrow c = \frac{1}{\sqrt{e^{1.5}-4}}$$

$$x = z\sqrt{e^{1.5}-4} \quad \Longrightarrow \quad x' = \sqrt{e^{1.5}-4}$$

No que resulta no seguinte integral:

$$\int_0^{\sqrt{e^{1.5}-4}} \frac{4}{3}(x^3+x)dx \quad \equiv \quad \frac{4}{3}\int_0^1 ((z\sqrt{e^{1.5}-4})^3+z\sqrt{e^{1.5}-4}).\sqrt{e^{1.5}-4}\,dz \equiv \frac{4}{3}(e^{1.5}-4)\int_0^1 (z^3(e^{1.5}-4)+z).1\,dx$$

Onde pudemos usar o método de monte carlo para estimar

$$\int_0^1 (z^3(e^{1.5}-1)+z).1\ dx$$

, assumindo que $z$ segue uma distribuição $U(0,1)$.

$$\int_0^1 (z^3(e^{1.5}-4)+z).1\ dx \quad \approx \quad \hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(z_i^3.(e^{1.5}-4)+z_i)}{n}$$

Calculo do estimador $\hat{\theta}$ do valor esperado do integral anterior.

```
int_func <- function(z){
  res=(z^3)*(exp(1.5)-4)+z
}

#z follows an uniform

sample <- runif(1000)
int_est <- mean(int_func(sample))
prob_value <- (4/3)*(exp(1.5)-4)*int_est
```

Assim sendo:

$P(1.3 < x < 1.5) \quad = \quad 0.3960328$

**Cálculo do desvio padrão do estimador da probabilidade**

$$var(P(1.3 < Y < 1.5)) \quad = \quad \left(\frac{4}{3}(e^{1.5}-4)\right)^2 .var(\theta)$$

```
varEstimator <- (1/(length(sample)^2))*sum(((4/3)*(exp(1.5)-4)*int_func(sample)-prob_value)^2)
df <- data.frame(
  probEstimated = prob_value,
  stdMC = sqrt(varEstimator)
)

knitr::kable(df)
```

| probEstimated | stdMC |
|---:|---:|
| 0.3960328 | 0.0083966 |

## Exercise 2

### 2.1

$$E(e^{x+y}) = E(e^x + e^y)$$

Sendo:

$$E(X) = \int_D \text{x.f(x)}\,\mathrm{d}x$$

, onde X é uma variável aletória e f(x) a sua função densidade de probabilidade.

Temos:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \mathrm{e}^{x+y}.\frac{2}{\sqrt{2\pi}}.\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}.\frac{2}{\sqrt{2\pi}}.\mathrm{e}^{\frac{-y^2}{2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad = \quad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty \mathrm{e}^{x}.\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}.\mathrm{e}^{y}.\mathrm{e}^{\frac{-y^2}{2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Fazendo as seguintes mudanças de variável:

$$\alpha = \mathrm{e}^{-x} \implies x = -log(\alpha)$$
$$\beta = \mathrm{e}^{-y} \implies y = -log(\beta)$$

Ficamos com os seguintes limites de integração para $\alpha$:

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$$
$$\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{-x} = 1$$

e para $\beta$:

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-y} = 0$$
$$\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{-y} = 1$$

Substituindo na equação, temos:

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{\pi}\int_1^0 \int_1^0 \mathrm{e}^{-log(\alpha)}.\mathrm{e}^{\frac{-(-log^2(\alpha))}{2}}.(-\frac{1}{\alpha}).\mathrm{e}^{-log(\beta)}.\mathrm{e}^{\frac{-(-log^2(\beta))}{2}}.(-\frac{1}{\beta})\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta \\
&= \frac{2}{\pi}.(-\int_0^1 \mathrm{e}^{-log(\alpha)}.\mathrm{e}^{\frac{-(-log^2(\alpha))}{2}}.\frac{1}{\alpha}\mathrm{d}\alpha).(-\int_0^1 \mathrm{e}^{-log(\beta)}.\mathrm{e}^{\frac{-(-log^2(\beta))}{2}}.\frac{1}{\beta}\mathrm{d}\beta) \\
&= \frac{2}{\pi}.\int_0^1 \mathrm{e}^{-log(\alpha)}.\mathrm{e}^{\frac{-log^2(\alpha)}{2}}.\frac{1}{\alpha}\mathrm{d}\alpha \int_0^1 \mathrm{e}^{-log(\beta)}.\mathrm{e}^{\frac{-log^2(\beta)}{2}}.\frac{1}{\beta}\mathrm{d}\beta \\
&= \frac{2}{\pi}.\int_0^1 \mathrm{e}^{-log(\alpha).(1+\frac{1}{2}log(\alpha))}.\frac{1}{\alpha}\mathrm{d}\alpha.\int_0^1 \mathrm{e}^{-log(\beta).(1+\frac{1}{2}log(\beta))}.\frac{1}{\beta}\mathrm{d}\beta \\
&= \frac{2}{\pi}.\int_0^1 \mathrm{e}^{-log(\alpha).(1+\frac{1}{2}log(\alpha))}.\frac{1}{\alpha}.1\mathrm{d}\alpha.\int_0^1 \mathrm{e}^{-log(\beta).(1+\frac{1}{2}log(\beta))}.\frac{1}{\beta}.1\mathrm{d}\beta \\
&= \frac{2}{\pi}.\int_0^1 \mathrm{e}^{-log(\alpha).(1+\frac{1}{2}log(\alpha))}.\frac{1}{\alpha}.\frac{1}{1-0}\mathrm{d}\alpha.\int_0^1 \mathrm{e}^{-log(\beta).(1+\frac{1}{2}log(\beta))}.\frac{1}{\beta}.\frac{1}{1-0}\mathrm{d}\beta
\end{aligned}$$

Sendo:

$$h_1(\alpha) = \mathrm{e}^{-log(\alpha).(1+\frac{1}{2}log(\alpha))}.\frac{1}{\alpha}.\frac{1}{1-0}$$
$$g_1(\alpha) = \mathrm{e}^{-log(\alpha).(1+\frac{1}{2}log(\alpha))}.\frac{1}{\alpha}$$
$$f_1(\alpha) = \frac{1}{1-0}$$

$$h_2(\beta) = \mathrm{e}^{-log(\beta).(1+\frac{1}{2}log(\beta))}.\frac{1}{\beta}.\frac{1}{1-0}.$$

$$g_2(\beta) = \mathrm{e}^{-log(\beta).(1+\frac{1}{2}log(\beta))}.\frac{1}{\beta}$$

$$f_2(\beta) = \frac{1}{1-0}$$

Onde:

$$f_1(\alpha), f_2(\beta) \sim \mathcal{U}(1,0)$$

e,

$$f_1(\alpha), f_2(\beta) \geq 0$$

Estamos em condições de aplicar Monte Carlo:

$$\begin{cases} \theta_1 = \int_D h_1(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \int_D g_1(\alpha).f_1(\alpha)\mathrm{d}\alpha = E(g_1(X)) \\ \theta_2 = \int_D h_2(\beta)\mathrm{d}\beta = \int_D g_2(\beta).f_2(\beta)\mathrm{d}\beta = E(g_2(Y)) \end{cases}$$

Se tivermos uma amostra aleatória $x_1, ..., x_n$ da variavél aleatória $X$ com densidade $f$, um estimador $\theta$ é:

$$\begin{cases} \hat{\theta_1} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{g_1(x_i)}{n} \\ \hat{\theta_2} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{g_2(y_i)}{n} \end{cases}$$

Finalmente:

$E(\hat{e^{x+y}}) = \hat{\theta} = \frac{2}{\pi}.\hat{\theta_1}.\hat{\theta_2}$

A variância de $\hat{\theta}$ será:

$v = Var(\frac{2}{\pi}.\hat{\theta_1}.\hat{\theta_2}) = \frac{4}{\pi^2}.Var(\hat{\theta_1}).Var(\hat{\theta_2})$

Aplicando o método de Monte Carlo, ficamos com:

$$\begin{cases} \hat{V}ar(\hat{\theta_1}) = \frac{1}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} (g_1(x_i) - \hat{\theta_1})^2 \\ \hat{V}ar(\hat{\theta_2}) = \frac{1}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} (g_2(y_i) - \hat{\theta_2})^2 \end{cases}$$

Substituindo na equação inicial:

$$\hat{v} = \frac{4}{\pi^2}.\sum_{i=1}^{n} \frac{(g_1(x_i) - \theta)^2}{n}.\sum_{i=1}^{n} \frac{(g_2(y_i) - \theta)^2}{n}$$

**Implementação do método:**

**Determinação do estimador e do estimador da variancia**

```
set.seed(1)
n<-1000
u1<-runif(n)
u2<-runif(n)
g1<-function(x){exp(-log(x)*(1+(1/2)*log(x)))*(1/x)}
g2<-function(y){exp(-log(y)*(1+(1/2)*log(y)))*(1/y)}
teta<-(2/pi)*mean(g1(u1))*mean(g2(u2))
teta1<-mean(g1(u1))
teta2<-mean(g2(u2))

v<-(4/(pi^2))*(mean((g1(u1)-teta1)^2)/n)*(mean((g2(u2)-teta2)^2)/n)
df <- data.frame(
  probEstimated = teta,
  varianceMC = v
)

knitr::kable(df)
```

| probEstimated | varianceMC |
|---:|---:|
| 7.874321 | 8.3e-06 |

**2.2**

Dado que:

$$X, Y \text{ random variables with p.d.f.:}$$

$$f(x) = \frac{2}{sqrt(2\pi)} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad ,0 < x < +\infty$$

precisamos de estimar o parâmetro $\theta$ com o Método de Monte Carlo utilizando uma variável que não seja Uniforme, onde o parâmetro $\theta$ é definido como:

$$\theta = E(e^{X+Y})$$

**Trabalhar o estimador**

$$\theta = E(e^{X+Y}) \quad = E(e^X \times e^Y) \quad = E(e^X) \times E(e^Y)$$

$$= \int_0^{+\infty} e^x \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \times \int_0^{+\infty} e^y \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Este integral não as condições para o Método de Monte Carlo ser aplicado, e portanto é necessário trabalhar o integral de maneira a que seja possível aplicar o método.

**Mudança de variável**

Ao aplicar a seguinte mudança de variável:

$$x = \varphi(t) = \sqrt{t}$$

$$t = \varphi^{-1}(x) = x^2$$

$$\varphi'(t) = (\sqrt{t})' = (t^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \sqrt{t} = +\infty$$

$$\lim_{t\to 0} \sqrt{t} = 0$$

podemos reorganizar o integral da seguinte maneira:

$$x = \varphi(t) = t_x \quad , y = \varphi(t) = t_y$$

$$\int_0^{+\infty} e^{\sqrt{t_x}} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t_x} \frac{1}{2} t_x^{-\frac{1}{2}} dt_x \times \int_0^{+\infty} e^{\sqrt{t_y}} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t_y} \frac{1}{2} t_y^{-\frac{1}{2}} dt_y$$

Re-ordenando a equação, estamos agora em condições de aplicar o Método de Monte Carlo uma vez que o integral é definido pela multiplicação de:

1. uma p.d.f. $f(x)$ conhecida
2. uma outra função $g(x)$

$$\int_0^{+\infty} e^{\sqrt{t_x}} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} t_x^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t_x} dt_x \times \int_0^{+\infty} e^{\sqrt{t_y}} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} t_y^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t_y} dt_y$$

onde:

$$g(x) = e^{\sqrt{x}} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{1}{2}} \quad \text{and} \quad f(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}$$

onde $f(x)$ é a função distribuição densidade de uma variável Exponencial com $\lambda = \frac{1}{2}$:

$$X \sim Exp(\frac{1}{2})$$

Portanto, é agora necessário gerar amostras aleatórias de $X \sim Exp(\frac{1}{2})$

**Gerar uma variável com distribuição Exponencial utilizando o Método da Transformação Inversa**

Comecemos com a função distribuição cumulativa de uma variável Exponencial, que é definida por:

$$F(X) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Tendo em consideração que o resultado de $F(X)$ é um número real entre 0 e 1, e que:

1. $F(X)$ é uma função monótona não decrescente
2. $F(X)$ é uma função contínua

é sabido que $F(X)$ é invertível.

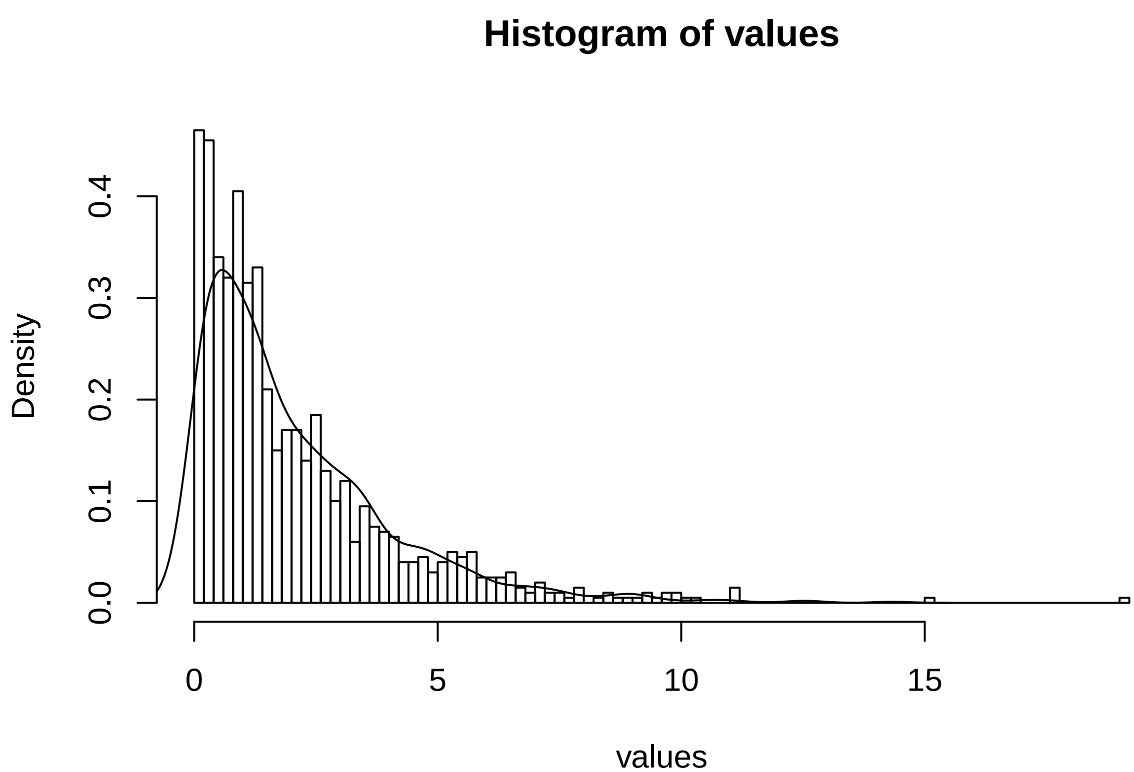
**Implementação do método**

```
set.seed(1)
lambda <- 0.5
N <- 1000
samples <- runif(N)


inverseExp <- function(u, lambda){
  -(1/lambda)*log(1-u)
}

values <- inverseExp(samples, lambda)

hist(values, breaks=100, freq = F)
lines(density(rexp(1000,0.5)))
```



```r
g <- function(x){
  exp(sqrt(x))*(2/(sqrt(2*pi)))*x^(-1/2)
}

X <- runif(N)
Y <- runif(N)

EX <- mean(g(inverseExp(X, lambda)))
EY <- mean(g(inverseExp(Y, lambda)))

theta2 <- EX*EY

vEX <- (1/(N^2))*sum((g(inverseExp(X, lambda))-EX)^2)
vEY <- (1/(N^2))*sum((g(inverseExp(Y, lambda))-EY)^2)

vtheta <-vEX*vEY

df <- data.frame(
  probEstimated = theta2,
  varianceMC = vtheta
)

knitr::kable(df)
```

| probEstimated | varianceMC |
|---:|---:|
| 7.901322 | 2.4e-06 |

### 2.3

$\hat{\theta} = E(e^{x+y})$ $var(\hat{\theta}) = \frac{4}{\pi^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{(g_1(x_i)-\hat{\theta})^2}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{(g_2(y_i)-\hat{\theta})^2}{n}$

novo estimador:

$\hat{\theta_c} \quad = \quad \hat{\theta} - \beta.(c - \mu)$

$E(C) \quad = \quad \mu$ $var(\hat{\theta_c}) = var(\hat{\theta}) + \beta^2.var(C) - 2\beta cov(\hat{\theta}, C)$

Queremos minimazar a variância, minimizando a variável $\beta$: para tal derivamos $var(\hat{\theta_c})$ em ordem a $\beta$ o que resulta na expressão: $var(\hat{\theta_c})' = 2\beta var(C) - 2cov(\hat{\theta}, C)$

Com $var(\hat{\theta_c})' = 0$ iremos obter os extremos. $\beta = \frac{-2cov(\hat{\theta},C)}{2var(C)}$

Calculo auxiliares:

$$b) \qquad var(\hat{\theta}) = Var\left(\frac{2}{\pi}.(\hat{\theta_1}.\hat{\theta_2})\right) = \frac{4}{\pi^2}.Var(\hat{\theta_1}).Var(\hat{\theta_2})$$

$$E(C) = E\left(\frac{1}{n}.\sum_{i=0}^{n} u_i\, v_i\right) = \frac{1}{n}\sum(E(u).E(v)) = E(u).E(v) = \int_0^1 u\,du.\int_0^1 v\,dv$$

$$var(C) = \frac{1}{n}.\left(\int_0^1 f_c(x)^2 - E(C)^2)\right)$$

$$Cov(\hat{\theta}, C) = cov\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(U_i, V_i), \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i, V_i\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} cov\left(g(U_i, V_i), U_i, V_i\right) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} cov\left(g(U_i, V_i), U_j V_j\right) =$$

Como os indices $i \neq j$ então$g(U_i, V_i)$ será independente de $U_i V_i$ e a sua covariância será Zero.

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} cov\left(g(U_i, V_i), U_i, V_i\right) - 0 =$$

$$= \frac{1}{n}(E(g(U, V))UV)) - \frac{\theta}{4n}$$

$$E(g(U, V))UV) = \int_0^1 \int_0^1 uv.g(u, v)\, du\, dv$$

que será estimado em r pelo método de monte carlo

```
kk=1
res_final <- data.frame(integer(), double(), double(), double(), double())
n <- 10

while(kk<6) {
    if(kk!=1) {
      if(kk%%2!=0)
        n<-n*2
      else
        n<-n*5
    }
    set.seed(1)
    u1<-runif(n)
    u2<-runif(n)
    g1<-function(x){exp(-log(x)*(1+(1/2)*log(x)))*(1/x)}
    g2<-function(y){exp(-log(y)*(1+(1/2)*log(y)))*(1/y)}
    teta1<-mean(g1(u1))
    teta2<-mean(g2(u2))
    teta<-(2/pi)*mean(g1(u1))*mean(g2(u2))
    teta_var<-(4/(pi^2))*((mean((g1(u1)-teta1)^2))/n)*((mean((g2(u2)-teta2)^2))/n)
    df <- data.frame(
      probEstimated = teta,
      varianceMC = teta_var
    )

    g1_b<-function(x){exp(-log(x)*(1+(1/2)*log(x)))}
    g2_b<-function(y){exp(-log(y)*(1+(1/2)*log(y)))}
    covar_tc<-((1/n^2)*mean(g1_b(u1)*g2_b(u2)*u1*u2))-teta/(4*n^2)

    c_var<-(7/(n*144))
    beta<-covar_tc/(c_var)
    tetac<-(teta  -   (beta*((1/4)  -   mean(u1*u2))))
    tetac_var<-(teta_var+(beta^2)*c_var-2*beta*covar_tc)

    res<-data.frame(n, teta, teta_var, tetac, tetac_var)
```

```
    res_final<-rbind(res_final,res)
    kk<-kk+1
}
knitr::kable(res_final)
```

| n | teta | teta_var | tetac | tetac_var |
|---:|---:|---:|---:|---:|
| 10 | 7.114578 | 0.0728507 | 6.962646 | 0.0401382 |
| 50 | 7.444414 | 0.0024827 | 7.432106 | 0.0021721 |
| 100 | 7.604431 | 0.0006777 | 7.598763 | 0.0006353 |
| 500 | 7.839631 | 0.0000307 | 7.839400 | 0.0000303 |
| 1000 | 7.874321 | 0.0000083 | 7.874559 | 0.0000083 |