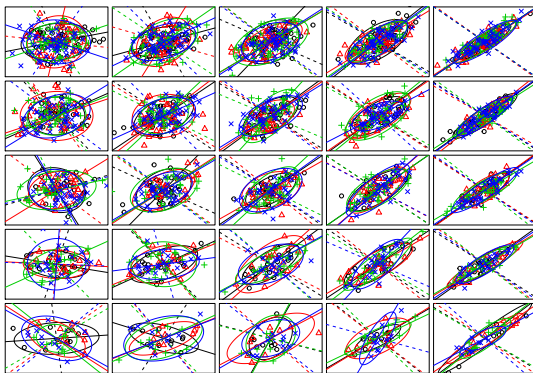


# Estatística Multivariada

Slides de apoio às aulas



Faculdade de Ciências e Tecnologia  
Universidade Nova de Lisboa  
2018/19

## Apresentação da Unidade Curricular

- **Objectivo** Esta unidade curricular aborda os principais métodos estatísticos de análise de dados multivariados. Em particular, serão abordadas as técnicas de inferência para valores médios multivariados e matrizes de covariância e modelos lineares em populações Gaussianas. Serão também focados métodos de redução da dimensionalidade, de discriminação e classificação de dados (*clustering*).
- **Programa:**
  - 1 Breves revisões (álgebra linear, variáveis e vetores aleatórios e inferência estatística)
  - 2 Introdução à estatística multivariada
  - 3 Distribuição normal multivariada e distribuição de Wishart
  - 4 Inferência sobre médias multivariadas
    - 1 Inferência sobre um vetor de médias
    - 2 Comparação de dois vetores de médias
    - 3 Comparação de  $k$  ( $k \geq 2$ ) vetores de médias
  - 5 Inferência sobre matrizes de covariâncias
  - 6 Análise da estrutura de covariância
    - 1 Análise em componentes principais
    - 2 Análise de correlação canónica
  - 7 Análise classificatória e de *clustering*
    - 1 Análise discriminante
    - 2 Análise de *clusters*

- **Método de ensino:** As aulas de EM assentam numa exposição teórico-prática, com recurso à resolução prática de exercícios (*papel-e-lápis*) e análise de dados em ambiente R. Softwares a instalar:
  - R (download a partir de <https://cran.r-project.org/bin/windows/base/>)
  - RStudio (download a partir de <https://www.rstudio.com/products/rstudio/download/>)
  - MikTeX (download a partir de <https://miktex.org/download>)
  - Versão Java 64 bits
- **Material de apoio:**
  - Slides de apoio às aulas
  - Texto de apoio (Professor Filipe Marques)
  - Caderno de exercícios (Professor Filipe Marques)

- Base:

- Johnson, R. and Wichern, D. W. (2007), Applied Multivariate Statistical Analysis, 6th Edition, Prentice Hall, New Jersey

- Complementar:

- Flury, B. (1997), A First Course in Multivariate Statistics, Springer. New York
- Morrison, D. F. (2004), Multivariate Statistical Methods, 4th Edition, Duxbury Press
- Rencher, A. C. (1998), Multivariate Statistical Inference and Applications, John Wiley & Sons
- Rencher, A. C. and Christensen, W. F. (2012). Methods of Multivariate Analysis, Third Edition, John Wiley & Sons

- Avançada:

- Anderson, T. W. (2003), An Introduction to Multivariate Statistical Analysis, 3rd ed., J. Wiley & Sons, New York
- Muirhead, R. J. (1982), Aspects of multivariate statistical theory, Wiley, New York
- Kshirsagar, A. M. (1972). Multivariate Analysis, Dekker, New York

- Aplicações em R:

- Everitt *et al* (2011). An Introduction to Applied Multivariate Analysis with R. Springer
- Zeltermann, D. (2015). Applied Multivariate Statistics with R. Springer

## 1 Frequência:

- Em todas as aulas teórico-práticas serão assinaladas as presenças dos alunos. Os alunos que queiram justificar as suas faltas devem entregar o respetivo comprovativo de justificação no prazo de 5 dias úteis, a contar da data em que ocorreram essas mesmas faltas.
- Só serão admitidos a avaliação na disciplina alunos que tenham um total de presenças superior ou igual a  $2/3$  das aulas leccionadas durante o semestre
- Esta regra é válida para todos os alunos, com exceção de alunos com o estatuto de trabalhador/estudante, ou qualquer outro reconhecido pelas regras de avaliação da faculdade.

## 2 Avaliação contínua:

- A avaliação contínua será feita através de três elementos de avaliação:
  - 1ª avaliação - Teste a realizar no período de aulas com uma ponderação de 40%. O teste terá a duração de 2h. O teste é classificado numa escala de 0 a 20 valores.
  - 2ª avaliação - Teste a realizar no período de aulas com uma ponderação de 40%. O teste terá a duração de 2h. O teste é classificado numa escala de 0 a 20 valores.
  - 3ª avaliação - Trabalho individual a realizar com o apoio do software R (é valorizado o uso de RMarkdown). O trabalho terá uma ponderação de 20% e será entregue na última aula do semestre. O trabalho é classificado numa escala de 0 a 20 valores.
- O aluno obtém aprovação na disciplina em época normal (avaliação contínua) se as notas dos testes forem superior ou iguais a 7.0 valores e se a média ponderada dos três elementos de avaliação for superior ou igual a 9.5 valores.
- Caso um aluno não compareça a uma das avaliações, esse elemento de avaliação terá nota 0.0 para a classificação final.

## ① Recurso e melhoria de nota:

- A avaliação da época de recurso (recurso ou melhoria) é feita por exame, numa única data dentro da época de recurso prevista no calendário letivo.
- O exame é classificado numa escala de 0 a 20 valores. O aluno obtém aprovação à cadeira se conseguir nota superior ou igual a 9.5 valores no exame.
- Os alunos que pretenderem realizar o exame de recurso, com vista à melhoria de nota, devem, antecipadamente, requerer essa melhoria junto dos serviços académicos.

## ② Outras notas importantes:

- A inscrição em qualquer prova de avaliação escrita é obrigatória devendo ser feita online através da página no CLIP da disciplina. As inscrições para as diferentes provas são independentes.
- As inscrições para cada teste ou exame deverão ser feitas dentro do prazo assinalado no CLIP.
- É obrigatório que os alunos se façam acompanhar do seu bilhete de identidade e de um caderno de exame para a realização dos testes ou exames.
- As tabelas estatísticas ou outro tipo de material de apoio serão fornecidos pelos professores durante as provas.

# Aula 1



## Revisões - Álgebra linear

- Um vetor  $\mathbf{x}_{n \times 1}$ , ou simplesmente  $\mathbf{x}$ , de  $n$  elementos  $x_1, \dots, x_n$  (conjunto de números - ou variáveis - organizados em linhas) representa-se por

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- Geometricamente, um vetor com  $n$  elementos identifica um ponto num espaço de dimensão  $n$ . Os elementos do vetor são as coordenadas do ponto.
- $\mathbf{x}' = (x_1, \dots, x_n)$  representa o vetor *transposto* de  $\mathbf{x}$

## Exemplo

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = (4, 5, -3)$$

### Código R:

```
> x<-matrix(c(4,5,-3),3,1)
> t(x)
```

```
      [,1] [,2] [,3]
[1,]    4    5   -3
```

- **Soma:**  $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \Leftrightarrow z_i = x_i + y_i \ (i = 1, \dots, n)$

## Exemplo

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

## Código R:

```
> matrix(c(4,5,-3),3,1)+matrix(c(1,3,1),3,1)
```

```
      [,1]  
[1,]    5  
[2,]    8  
[3,]   -2
```

- **Produto por um escalar:**  $c\mathbf{x} = c \times x_i = x_i \times c \ (i = 1, \dots, n)$

## Exemplo

$$2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ -6 \end{bmatrix}$$

## Código R:

```
> x<-matrix(c(4,5,-3),3,1)
> 2*x

      [,1]
[1,]    8
[2,]   10
[3,]   -6
```

- **Produto interno:**  $\mathbf{x}'_{1 \times n} \mathbf{y}_{n \times 1} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

## Exemplo

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}'\mathbf{y} = 19$$

## Código R:

```
> x<-matrix(c(4,5,-3),3,1)
> y<-matrix(c(2,1,-2),3,1)
> crossprod(x,y)

      [,1]
[1,]   19
```

## Comprimento de um vetor

- Os vetores têm propriedades geométricas de comprimento e direção
- O comprimento (ou *norma*) de um vetor é dado por:  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}'\mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

### Exemplo

$$\mathbf{x}' = (4, 5, -3)$$

$$\|\mathbf{x}\| = 7.071$$

- Se  $\mathbf{x}'\mathbf{x} = 1$  (norma igual a 1) então o vetor diz-se *normalizado*
- Todo o vetor pode ser normalizado dividindo-o pelo seu comprimento

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}'\mathbf{x}}}$$

### Exemplo

$$e_1 = \frac{4}{\sqrt{4^2+5^2+(-3)^2}} = 0.566$$

$$e_2 = \frac{5}{\sqrt{4^2+5^2+(-3)^2}} = 0.707$$

$$e_3 = \frac{-3}{\sqrt{4^2+5^2+(-3)^2}} = -0.424$$

### Código R:

```
> x<-c(4,5,-3)
> round(x/sqrt(sum(x^2)),3)
```

```
[1] 0.566 0.707 -0.424
```

- O ângulo  $\theta$  formado por dois vetores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  ambos de dimensão  $n$  é definido por

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{x}'\mathbf{y}}{\sqrt{\mathbf{x}'\mathbf{x}}\sqrt{\mathbf{y}'\mathbf{y}}}$$

### Exemplo

$$\mathbf{x}' = (-1, 5, 2, -2) \quad \mathbf{y}' = (4, -3, 0, 1) \quad \cos(\theta) = -0.706 \Leftrightarrow \theta = 135^\circ$$

### Código R:

```
> x1<-c(-1,5,2,-2)
> y1<-c(4,-3,0,1)
> theta<-round(sum(x1*y1)/(sqrt(sum(x1^2))*sqrt(sum(y1^2))),3)
> theta

[1] -0.706

> rad2deg <- function(rad) {(rad * 180) / (pi)}
> rad2deg(acos(theta))

[1] 134.9104
```

- $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  dizem-se *ortogonais* (geometricamente perpendiculares) se  $\mathbf{x}'\mathbf{y} = x_1y_1 + \dots + x_ny_n = 0$

## Exemplo

$$\mathbf{x}' = (2, 5, -6)$$

$$\mathbf{y}' = (1, 2, 2)$$

$$\mathbf{x}'\mathbf{y} = 0$$

- O vetor  $c_1\mathbf{x}_1 + \dots + c_n\mathbf{x}_n$  é dito uma *combinação linear* dos vetores  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$
- $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ , são *linearmente dependentes* se existirem constantes  $(c_1, \dots, c_n)$  não todas nulas, tal que  $c_1\mathbf{x}_1 + \dots + c_n\mathbf{x}_n = 0$ , ou seja, um vetor pode ser escrito como combinação linear dos restantes (serão linearmente independentes no caso contrário)

## Exemplo

$$\mathbf{x}'_1 = (1, 2, 1)$$

$$\mathbf{x}'_2 = (1, 0, -1)$$

$$\mathbf{x}'_3 = (1, -2, 1)$$

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + c_3\mathbf{x}_3 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{c}' = (0, 0, 0) \Rightarrow \text{vetores linearmente independentes.}$$

## Código R:

```
> A<-matrix(c(1,2,1,1,0,-1,1,-2,1),3,3)
> solve(A,c(0,0,0))
```

```
[1] 0 0 0
```

- Uma matriz  $\mathbf{A}_{n \times p}$ , ou simplesmente  $\mathbf{A}$  (conjunto de números - ou variáveis - organizados numa tabela em linhas e colunas) representa-se por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{np} \end{bmatrix} \equiv [a_{ij}] \ (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, p)$$

- Uma matriz com  $n = p$  diz-se *quadrada*; se  $n \neq p$  a matriz diz-se *retangular*
- A matriz transposta de  $\mathbf{A}_{n \times p}$ , representa-se por  $\mathbf{A}'_{p \times n}$  e obtém-se trocando as linhas pelas colunas da matriz  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}' = [a_{ji}] \ (j = 1, \dots, p; i = 1, \dots, n)$$

## Exemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 4 & 8 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$



## Código R:

```
> A<-matrix(c(3,-2,4,-2,5,8,1,1,-2),3,3)
```

```
> A
```

	[,1]	[,2]	[,3]
[1,]	3	-2	1
[2,]	-2	5	1
[3,]	4	8	-2

```
> t(A)
```

	[,1]	[,2]	[,3]
[1,]	3	-2	4
[2,]	-2	5	8
[3,]	1	1	-2

```
> B<-matrix(c(1,4,2,5,2,2,-5,0,1),3,3)
```

```
> B
```

	[,1]	[,2]	[,3]
[1,]	1	5	-5
[2,]	4	2	0
[3,]	2	2	1

```
> t(B)
```

	[,1]	[,2]	[,3]
[1,]	1	4	2
[2,]	5	2	2
[3,]	-5	0	1

- **Soma:**

$$\mathbf{C}_{n \times p} = \mathbf{A}_{n \times p} + \mathbf{B}_{n \times p} \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, p)$$

## Exemplo

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 4 & 8 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -4 \\ 2 & 7 & 1 \\ 6 & 10 & -1 \end{bmatrix}$$

## Código R:

```
> A+B  
      [,1] [,2] [,3]  
[1,]    4    3  -4  
[2,]    2    7    1  
[3,]    6   10   -1
```

- Produto por um escalar:

$$c \mathbf{A}_{n \times p} = \mathbf{A}_{n \times p} c = \mathbf{B}_{n \times p} = \{b_{ij}\} \Leftrightarrow b_{ij} = c \times a_{ij} = a_{ij} \times c \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, p)$$

## Exemplo

$$2 \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 4 & 8 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 2 \\ -4 & 10 & 2 \\ 8 & 16 & -4 \end{bmatrix}$$

### Código R:

```
> A
      [,1] [,2] [,3]
[1,]    3  -2    1
[2,]   -2    5    1
[3,]    4    8   -2

> 2*A
      [,1] [,2] [,3]
[1,]    6  -4    2
[2,]   -4   10    2
[3,]    8   16   -4
```

- **Produto matricial:**

$$\mathbf{AB}_{n \times m} = \mathbf{A}_{n \times p} \mathbf{B}_{p \times m} \Leftrightarrow c_{ij} = (a_i^{\text{linha}})' \times (b_j^{\text{coluna}}) = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m)$$

## Exemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 13 & 38 \\ 31 & 92 \\ 20 & 64 \\ 13 & 38 \end{bmatrix}$$

## Código R:

```
> A<-matrix(c(2,4,7,1,1,6,2,3,3,5,3,2),4,3)
> B<-matrix(c(1,2,3,4,6,8),3,2)
> A%%B
```

```
      [,1] [,2]
[1,]   13  38
[2,]   31  92
[3,]   20  64
[4,]   13  38
```

- O produto matricial não é comutativo
- Se  $\mathbf{x}$  é um vetor  $p \times 1$ ,  $\mathbf{Ax}$  é uma combinação linear dos elementos coluna da matriz  $\mathbf{A}$
- Se  $\mathbf{x}$  é um vetor  $n \times 1$ ,  $\mathbf{x}'\mathbf{A}$  é uma combinação linear dos elementos linha da matriz  $\mathbf{A}$

## Código R:

```
> A<-matrix(c(2,4,7,1,1,6,2,3,3),3,3)
> A
```

```
      [,1] [,2] [,3]
[1,]    2    1    2
[2,]    4    1    3
[3,]    7    6    3
```

```
> t(x)
      [,1] [,2] [,3]
[1,]    4    5   -3
```

```
> A%%x
```

```
      [,1]
[1,]    7
[2,]   12
[3,]   49
```

```
> t(x)%*%A
```

```
      [,1] [,2] [,3]
[1,]    7   -9   14
```

- **Matriz triangular:**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- **Matriz diagonal:**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- **Matriz identidade (caso particular):**

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

- **Determinante** de uma matriz  $\mathbf{A}_{p \times p}$  é o escalar

$$|\mathbf{A}| = a_{11} \text{ se } p = 1$$

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^p a_{1j} |\mathbf{A}_{1j}| (-1)^{1+j} \text{ se } p > 1$$

sendo  $\mathbf{A}_{1j}$  a matriz  $\mathbf{A}_{(p-1) \times (p-1)}$ , resultante de eliminar a primeira linha e  $j$ -ésima coluna de  $\mathbf{A}$

- Matriz  $2 \times 2$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} (-1)^2 + a_{12} a_{21} (-1)^3 = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

- Matriz  $3 \times 3$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} (-1)^2 + a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} (-1)^3 + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} (-1)^4$$

## Exemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = 10$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 7 & 4 & 5 \\ 2 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{B}| = -222$$

## Código R:

```
> A<-matrix(c(3,2,4,6),2,2)
> det(A)
```

```
[1] 10
```

```
> B<-matrix(c(3,7,2,1,4,-7,6,5,1),3,3)
> det(B)
```

```
[1] -222
```



- **Matriz inversa:**  $\mathbf{A}^{-1}$  é matriz inversa de  $\mathbf{A}$  se  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ . Em particular, a inversa de uma matriz  $2 \times 2$  é dada por

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

## Exemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.4 \\ -0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

## Código R:

```
> solve(A)

      [,1] [,2]
[1,]  0.6 -0.4
[2,] -0.2  0.3
```

- **Matriz ortogonal:**  $\mathbf{A}_{p \times p}$  é matriz ortogonal se  $\mathbf{A}\mathbf{A}' = \mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{I}$ , ou seja, sse  $\mathbf{A}' = \mathbf{A}^{-1}$
- **Matriz simétrica:**  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \ (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, p)$

- **Traço** de uma matriz (quadrada)

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

## Exemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = 7$$

## Código R:

```
> library(psych)
> A<-matrix(c(3,2,-2,4),2,2)
> tr(A)

[1] 7
```

- Seja  $\mathbf{A}$  uma matriz quadrada  $p \times p$  e  $\mathbf{I}$  a matriz identidade com a mesma dimensão. Os escalares  $\ell_1, \dots, \ell_p$  que satisfazem a equação (*característica*)

$$|\mathbf{A} - \ell \mathbf{I}| = 0$$

designam-se por **valores próprios** da matriz  $\mathbf{A}$  (raízes características).

- O vetor não-nulo  $\mathbf{x}_{p \times 1}$  ( $\mathbf{x}_{p \times 1} \neq \mathbf{0}_{p \times 1}$ ) tal que

$$\mathbf{Ax} = \ell \mathbf{x}$$

é chamado o **vetor próprio** da matriz  $\mathbf{A}$  associado ao valor próprio  $\ell$

- Em regra, toma-se o vetor normalizado,  $\mathbf{e}_{p \times 1}$ , de comprimento unitário, como o vetor próprio correspondente ao valor próprio  $\ell$ , i.e.,

$$e_i = \frac{x_i}{\sqrt{\mathbf{x}'\mathbf{x}}} \quad (i = 1, \dots, p)$$

Note-se que se  $\mathbf{e}$  é vetor próprio então  $-\mathbf{e}$  também o é (as soluções definem direções).

## Exemplo

Considere-se a matriz

$$S = \begin{bmatrix} 2.459 & 1.019 \\ 1.019 & 2.472 \end{bmatrix}$$

Os valores próprios de  $S$  são os valores  $\ell$  tal que  $|S - \ell I| = 0$ :

$$|S - \ell I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2.459 - \ell & 1.019 \\ 1.019 & 2.472 - \ell \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2.459 - \ell)(2.472 - \ell) - 1.019^2 = 0 \Rightarrow \ell_1 = 3.485 \wedge \ell_2 = 1.446$$

Os vetores próprios da matriz  $S$  são determinados tal que  $Sx = \ell x$ , sujeito à restrição  $\|x\| = 1$ .  
Para  $\ell_1 = 3.484$ , tem-se

$$\begin{bmatrix} 2.459 & 1.019 \\ 1.019 & 2.472 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3.484 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

com

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

Resolvendo em ordem a  $x_1$  e  $x_2$ , obtém-se o vetor próprio, associado ao valor próprio  $\ell_1$ , de elementos  $x_1 = 0.705$  e  $x_2 = 0.709$ .

Procedendo da mesma forma para  $\ell_2$ , obtém-se o segundo vetor próprio de elementos,  $x_1 = -0.709$  e  $x_2 = 0.705$ .

## Código R:

```
> S<-matrix(c(2.459,1.019,1.019,2.472),2,2)
> S

      [,1] [,2]
[1,] 2.459 1.019
[2,] 1.019 2.472

> round(eigen(S)$values,3)

[1] 3.485 1.446

> round(eigen(S)$vectors,3)

      [,1] [,2]
[1,] 0.705 -0.709
[2,] 0.709  0.705
```

- Se  $\mathbf{A}_{p \times p}$  for uma matriz *simétrica* então os seus valores/vetores próprios possuem as seguinte propriedades:
  - Os valores/vetores próprios são sempre reais
  - Vectors próprios associados a valores próprios diferentes são sempre *ortogonais*
  - $\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n \ell_i$  e  $|\mathbf{A}| = \prod_{i=1}^n \ell_i$

- Uma matriz  $\mathbf{A}_{p \times p}$  simétrica pode ser representada usando os seus valores e vetores próprios ( $\ell_i, \mathbf{e}_i$ ) através da expressão

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}' = \sum_{j=1}^p \ell_j \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j'$$

onde  $\ell_j$  ( $j = 1, \dots, p$ ) são os valores próprios de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\ell_1, \dots, \ell_p)$  e  $\mathbf{e}_j$  ( $j = 1, \dots, p$ ) os vetores próprios normalizados associados aos valores próprios  $\ell_j$ .  $\mathbf{P}$  é uma matriz ortogonal cujas colunas são os vetores próprios normalizados.

## Exemplo

Considere-se a matriz simétrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2.2 & 0.4 \\ 0.4 & 2.8 \end{bmatrix}$$

Os valores próprios de  $\mathbf{A}$  são os valores  $\ell_1 = 3$  e  $\ell_2 = 2$

Os vetores próprios normalizados da matriz  $\mathbf{A}$  são  $\mathbf{e}_1' = (0.447, 0.894)$  e  $\mathbf{e}_2' = (-0.894, 0.447)$ , logo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2.2 & 0.4 \\ 0.4 & 2.8 \end{bmatrix} = 3 \times \begin{bmatrix} 0.447 \\ 0.894 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.447 & 0.894 \end{bmatrix} + 2 \times \begin{bmatrix} -0.894 \\ 0.447 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.894 & 0.447 \end{bmatrix}$$

## Código R:

```
> A<-matrix(c(2.2,0.4,0.4,2.8),2,2)
> A

      [,1] [,2]
[1,]  2.2  0.4
[2,]  0.4  2.8

> round(eigen(A)$values,3)

[1] 3 2

> round(eigen(A)$vectors,3)

      [,1] [,2]
[1,] 0.447 -0.894
[2,] 0.894  0.447

> round(eigen(A)$values[1]*eigen(A)$vectors[,1]%*%
  t(eigen(A)$vectors[,1])+
  eigen(A)$values[2]*eigen(A)$vectors[,2]%*%
  t(eigen(A)$vectors[,2]),1)

      [,1] [,2]
[1,]  2.2  0.4
[2,]  0.4  2.8
```

- Sejam  $\mathbf{A}_{p \times p}$  uma matriz simétrica e  $\mathbf{x}$  de dimensão  $p$ . Então  $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$  designa-se por *forma quadrática* de  $\mathbf{A}$
- A matriz simétrica  $\mathbf{A}$  é designada por *definida não negativa* se para todo o vetor  $\mathbf{x}$  ( $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ )

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$$

Uma matriz simétrica é definida não negativa sse os **valores próprios são todos não negativos**.

- A matriz simétrica  $\mathbf{A}$  é designada por *definida positiva* se para todo o vetor  $\mathbf{x}$  ( $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ )

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$$

Uma matriz simétrica é definida positiva sse os **valores próprios são todos positivos**.



## Matriz inversa (por decomposição espectral)

- A decomposição espectral da matriz  $\mathbf{A}_{p \times p}$  permite expressar a matriz inversa em termos dos valores e vetores próprios

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{P}' = \sum_{j=1}^p \frac{1}{\ell_j} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j'$$

onde  $\mathbf{\Lambda}^{-1} = \text{diag}(1/\ell_1, \dots, 1/\ell_p)$

### Exemplo

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3} \times \begin{bmatrix} 0.447 \\ 0.894 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.447 & 0.894 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} -0.894 \\ 0.447 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.894 & 0.447 \end{bmatrix}$$

### Código R:

```
> round((1/eigen(A)$values[1])*eigen(A)$vectors[,1]%%  
  t(eigen(A)$vectors[,1]))+  
  (1/eigen(A)$values[2])*eigen(A)$vectors[,2]%%  
  t(eigen(A)$vectors[,2]),3)  
  
      [,1] [,2]  
[1,]  0.467 -0.067  
[2,] -0.067  0.367
```

# Matriz raiz quadrada (por decomposição espectral)

- Permite também definir a *matriz raiz-quadrada*

$$\mathbf{A}^{1/2} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{P}' = \sum_{j=1}^p \sqrt{\ell_j} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j'$$

onde  $\mathbf{\Lambda}^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{\ell_1}, \dots, \sqrt{\ell_p})$

## Exemplo

$$\mathbf{A}^{1/2} = \sqrt{3} \times \begin{bmatrix} 0.447 \\ 0.894 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.447 & 0.894 \end{bmatrix} + \sqrt{2} \times \begin{bmatrix} -0.894 \\ 0.447 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.894 & 0.447 \end{bmatrix}$$

## Código R:

```
> round(sqrt(eigen(A)$values[1])*eigen(A)$vectors[,1]**%  
  t(eigen(A)$vectors[,1])+  
  sqrt(eigen(A)$values[2])*eigen(A)$vectors[,2]**%  
  t(eigen(A)$vectors[,2]),3)  
      [,1] [,2]  
[1,] 1.478 0.127  
[2,] 0.127 1.668
```

## Revisões - Variáveis e vetores aleatórios

- ❶ Constantes/valores fixos: Letras minúsculas a itálico

*Exemplos*:  $a, c, \ell, x, y, z$

- ❷ Variáveis: Letras minúsculas

*Exemplos*:  $x, y, z$

- ❸ Parâmetros (população): Letras gregas minúsculas

*Exemplos*:  $\lambda, \mu, \rho, \sigma$

- ❹ Vetores (de números, variáveis ou parâmetros): Letras minúsculas a negrito

*Exemplos*:

$\mathbf{a}$  ( $\mathbf{a}' = (a_1, \dots, a_n)$ ),  $\mathbf{c}$  ( $\mathbf{c}' = (c_1, \dots, c_n)$ ),  $\mathbf{\ell}$  ( $\mathbf{\ell}' = (\ell_1, \dots, \ell_n)$ )

$\mathbf{x}$  ( $\mathbf{x}' = (x_1, \dots, x_n)$ ),  $\mathbf{y}$  ( $\mathbf{y}' = (y_1, \dots, y_n)$ ),  $\mathbf{z}$  ( $\mathbf{z}' = (z_1, \dots, z_n)$ )

$\mathbf{x}$  ( $\mathbf{x}' = (x_1, \dots, x_n)$ ),  $\mathbf{y}$  ( $\mathbf{y}' = (y_1, \dots, y_n)$ ),  $\mathbf{z}$  ( $\mathbf{z}' = (z_1, \dots, z_n)$ )

$\boldsymbol{\lambda}$  ( $\boldsymbol{\lambda}' = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ),  $\boldsymbol{\mu}$  ( $\boldsymbol{\mu}' = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ )

Caso particular:  $\mathbf{0}$  ( $\mathbf{0}' = (0, \dots, 0)$ )

- Em muitas situações, a análise dos resultados de uma dada experiência aleatória passa pela descrição numérica dos resultados dessa experiência aleatória.
- Porém, o espaço de resultados  $\Omega$  não é um conjunto numérico  $\Rightarrow$  Descrição dos resultados através de valores assumidos por uma **variável** no decurso de uma experiência aleatória.
- Em resumo, pretende-se passar de  $\Omega$  para  $\mathbb{R}$  (ou mais geralmente para  $\mathbb{R}^n$ )
- Designa-se por **váriável aleatória** a função  $x$  de  $\Omega$  para  $\mathbb{R}$

$$x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

- A lei de probabilidades ou distribuição de uma v.a.  $x$  pode ser descrita através de diversas funções: *função de distribuição*, *função massa de probabilidade* e *função densidade de probabilidade*:
  - *Função de distribuição*:  $F(x) = P(x \leq x)$  ( $x \in \mathbb{R}$ ;  $0 \leq F(x) \leq 1$ ) (sendo  $F(x)$  diferenciável)
  - No caso de v.a. discretas, *função massa de probabilidade*:  $f(x) = P(x = x)$  verificando as condições  $f(x) \geq 0, \forall x$  e  $\sum_{x \in \mathbb{K}} f(x) = 1$ .
  - No caso de v.a. contínuas, *função densidade de probabilidade*:  
 $f(x) = \frac{d}{dx} F(x) \Leftrightarrow F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ , verificando as condições  
 $f(x) \geq 0, \forall x$  e  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ .

## Exemplo

Seja  $p$  ( $0 < p < 1$ ) a probabilidade de sucesso de uma certa experiência aleatória e  $x$  a v.a. que representa o *número de provas necessárias até à ocorrência do primeiro sucesso*.

A variável em causa é discreta sendo a sua distribuição de probabilidade (fmp) definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 2 & 3 & \dots \\ p & (1-p)p & (1-p)^2p & \dots \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x & \\ p_x = p(1-p)^x & x = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

É fácil verificar que

- $p(1-p)^x \geq 0, \forall x \in \mathbb{N}_0$
- $\sum_{i=1}^{+\infty} p(1-p)^i = \frac{p}{1-(1-p)} = 1$

A função de distribuição é dada por

$$F(x) = P(x \leq x) = \sum_{i=1}^x p(1-p)^i$$

## Exemplo

Suponhamos que sobre um dado segmento de recta  $(a, b)$  se escolhe um ponto ao acaso, i.e., tal que a probabilidade de escolha seja independente da posição. A densidade de probabilidade deve ser então considerada constante, i.e.,

$$f(x) = \begin{cases} c & a < x < b \\ 0 & x \leq a \text{ ou } x \geq b \end{cases}$$

Para que  $f(x)$  seja fdp deve ser não negativa e verificar

$$\int_a^b f(x)dx = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{b-a}$$

A função de distribuição é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

- Dada uma v.a.  $x$  chama-se *valor médio*, valor esperado ou média e representa-se por  $E(x)$ ,  $\mu_x$  ou  $\mu$  a quantidade definida por,

- no caso discreto,

$$\mu = E(x) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

sendo  $x$  uma v.a. com distribuição  $(x_i, p_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ )

- no caso contínuo,

$$\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

sendo  $x$  uma v.a. com densidade  $f(x)$

- Dada uma v.a.  $x$  chama-se *variância* e representa-se por  $Var(x)$ ,  $\sigma_x^2$  ou  $\sigma^2$  a quantidade definida por

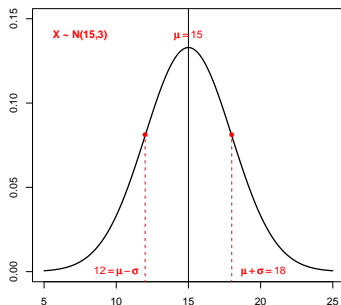
$$\sigma^2 = Var(x) = E[(x - \mu)^2] = E(x^2) - \mu^2$$



- Uma variável aleatória contínua,  $x$  diz-se ter distribuição gaussiana ou normal com valor médio  $\mu$  e desvio-padrão  $\sigma$ , i.e.,  $x \sim N(\mu, \sigma)$ , se a sua *fdp* corresponde a

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < \mu < +\infty, \quad 0 < \sigma < +\infty$$

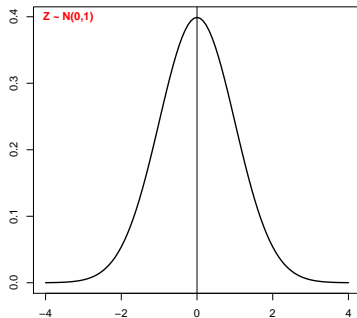
- Função densidade de probabilidade:



- Curva unimodal, sendo a moda  $x = \mu$  (maximizante da fdp)
- Simétrica em relação ao eixo  $x = \mu$
- Pontos de inflexão em  $x = \mu \pm \sigma$
- Eixo das abcissas como assíntota

- Uma v.a.  $z$  diz-se ser uma gaussiana padrão, normal padrão ou normal reduzida, isto é, uma gaussiana de parâmetros  $\mu = 0$  (centrada em zero) e  $\sigma = 1$  (com escala unitária),  $z \sim N(0, 1)$ , se a sua fdp for

$$z \sim N(0, 1) \Rightarrow f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad -\infty < z < +\infty$$

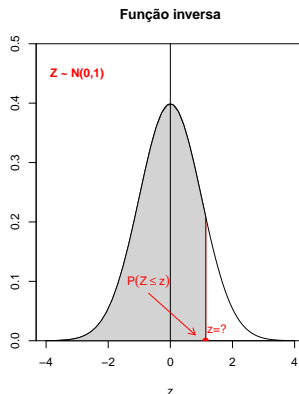
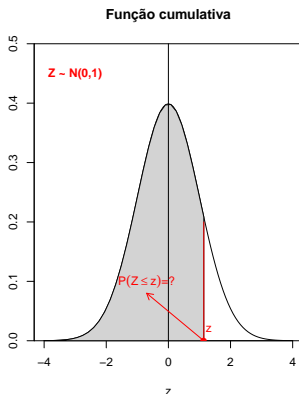


- Padronização da gaussiana:  $x \sim N(\mu, \sigma) \Rightarrow z = \frac{x-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

# Tabela da distribuição da normal padrão

- Tabela da função de distribuição da variável normal padrão:

- Função de distribuição (Função cumulativa)  $\rightarrow \Phi(z) = P(Z \leq z)$
- Inversa da função de distribuição (Função inversa)  $\rightarrow \Phi^{-1}(p) = z_p$  ( $0 < p < 1$ ) (quantis da gaussiana). Genericamente  $z_p$  representa o quantil de probabilidade  $p$  (ou percentil  $p \times 100$ ) da distribuição normal padrão, tal que  $P(Z < z_p) = p$



- Note-se que porque a curva é simétrica em relação a  $z = 0$ ,  $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

## Exemplo

$$\Phi(1.96) = P(z \leq 1.96) = 0.975$$

$z_{0.975} = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96$ , denota o quantil de probabilidade 0.975 da normal padrão

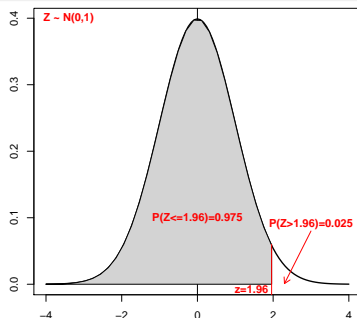
Código R:

```
> round(pnorm(1.96),3)
```

```
[1] 0.975
```

```
> round(qnorm(0.975),3)
```

```
[1] 1.96
```



- **Alguns teoremas relevantes:**

❶ Seja  $x \sim N(\mu, \sigma)$  e  $y = a \pm bx$ , então  $y \sim N(a \pm b\mu, |b|\sigma)$

❷ Sejam  $x_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$  e  $x_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$  independentes, então

$$(x_1 \pm x_2) \sim N(\mu_1 \pm \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$$

❸ Generalizando  $x_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$  ( $i = 1 \dots n$ ) independentes, então

$$\sum_i x_i \sim N\left(\sum_i \mu_i, \sqrt{\sum_i \sigma_i^2}\right)$$

❹ Sejam  $x_i \sim N(\mu, \sigma)$   $n$  v.a. iid, então  $S_n = \sum_i x_i \sim N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$

• **Teorema Limite Central:** Sejam  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com valor médio  $\mu$  e variância finita  $\sigma^2$  e  $S_n = \sum_{i=1}^n x_i$  então para  $n \rightarrow \infty$  tem-se

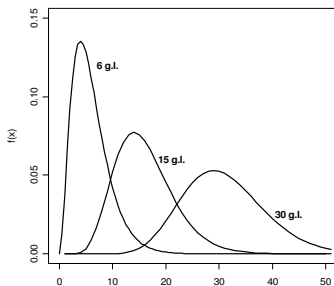
$$S_n \overset{a}{\sim} N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$$

- Para  $n$  inteiro positivo a v.a.  $x$  ( $0 \leq x < +\infty$ ) com *fdp*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2} & x > 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

com  $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$ ,  $t > 0$ , diz-se ter distribuição qui-quadrado com  $n$  graus de liberdade, i.e.,  $x \sim \chi_n^2$

- Função densidade de probabilidade:



- Tabela da função de distribuição da variável  $x \sim \chi_n^2$ 
  - Função de distribuição (Função cumulativa)  $\rightarrow P(x \leq \chi_n^2)$
  - Inversa da função de distribuição (Função inversa)  $\rightarrow \chi_{n,p}^2$  (quantil de probabilidade  $p$  da distribuição  $\chi_n^2$ )

## Exemplo

Considere-se a v.a.  $x \sim \chi_{10}^2$

$$P(x \leq 5) = 0.109$$

$\chi_{10,0.90}^2 = 15.987$ , denota o quantil de probabilidade 0.90 da distribuição  $\chi_{10}^2$

## Código R:

```
> round(pchisq(5,10),3)
```

```
[1] 0.109
```

```
> round(qchisq(0.90,10),3)
```

```
[1] 15.987
```

- **Alguns teoremas relevantes:**

- ❶ Sejam  $x_i \sim \chi_{(n_i)}$  ( $i = 1 \dots p$ ) independentes, então

$$\sum_{i=1}^p x_i \sim \chi_{(\sum n_i)}^2$$

- ❷ Seja  $z \sim N(0, 1)$  então  $z^2 \sim \chi_1^2$

- ❸ Generalizando,  $z_i \sim N(0, 1)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) então

$$\sum_{i=1}^n z_i^2 \sim \chi_n^2$$

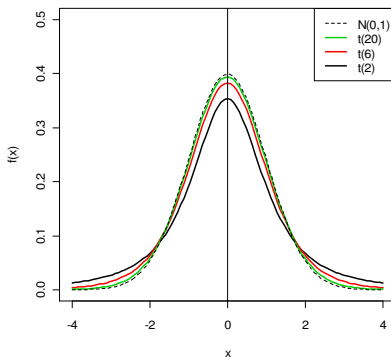


# Distribuição t-Student

- Sejam  $z \sim N(0, 1)$  e  $y \sim \chi_n^2$ , então

$$x = \frac{z}{\sqrt{y/n}} \sim t_n$$

- Uma variável aleatória  $x$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) cuja distribuição é bem modelada por uma distribuição t-Student, representa-se por  $x \sim t_n$  onde  $n$  é o número de graus de liberdade (g.l.).
- Função densidade de probabilidade:



- Tabela da função de distribuição da variável  $X \sim t_n$ 
  - Função de distribuição (Função cumulativa)  $\rightarrow P(x \leq t_n)$
  - Inversa da função de distribuição (Função inversa)  $\rightarrow t_{n,p}$  (quantil de probabilidade  $p$  da distribuição  $t_n$ )

## Exemplo

Considere-se a v.a.  $x \sim t_5$

$$P(x \leq 1) = 0.818$$

$t_{5,0.90} = 1.476$ , denota o quantil de probabilidade 0.90 da distribuição  $t_5$

## Código R:

```
> round(pt(1,5),3)
```

```
[1] 0.818
```

```
> round(qt(0.90,5),3)
```

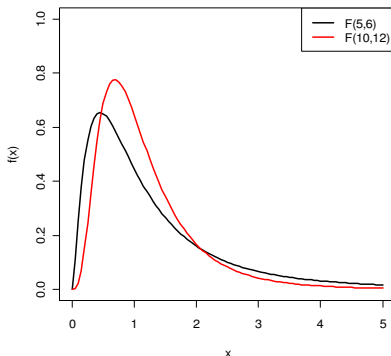
```
[1] 1.476
```

- Uma variável aleatória  $x$  ( $0 \leq x < +\infty$ ) tem distribuição F-Snedecor com  $n$  (numerador) e  $d$  (denominador) graus de liberdade, e representa-se por  $x \sim F(n, d)$ , se a variável aleatória for tal que

$$x = \frac{y/n}{w/d}$$

onde  $y \sim \chi_n^2$  e  $w \sim \chi_d^2$  são v.a. independentes.

- Função densidade de probabilidade:



- Tabela da função de distribuição da variável  $x \sim F_{n,d}$ 
  - Função de distribuição (Função cumulativa)  $\rightarrow P(x \leq F_{(n,d)})$
  - Inversa da função de distribuição (Função inversa)  $\rightarrow F_{(n,d),p}$  (quantil de probabilidade  $p$  da distribuição  $F_{(n,d)}$ )

## Exemplo

Considere-se a v.a.  $x \sim F_{(5,8)}$

$$P(x \leq 1) = 0.525$$

$f_{(5,8),0.90} = 2.726$ , denota o quantil de probabilidade 0.90 da distribuição  $F_{(5,8)}$

Código R:

```
> round(pf(1,5,8),3)
```

```
[1] 0.525
```

```
> round(qf(0.90,5,8),3)
```

```
[1] 2.726
```

- $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  diz-se uma *amostra aleatória* de dimensão  $n$  se as variáveis são mutuamente independentes e têm a mesma função de distribuição  $F(x)$  (cada  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) tem a mesma fdp/fmp  $f(x)$ )
- $x_1, x_2, \dots, x_n$  dizem-se variáveis independentes e identicamente distribuídas, abreviadamente, variáveis *iid*
- Note-se que uma a.a., tal como definida, não é mais que o *vetor aleatório*  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
- Atendendo à independência entre as variáveis numa amostra aleatória, a *distribuição de probabilidade conjunta* do vetor  $(x_1, \dots, x_n)$  pode ser definida como

$$f_{x_1, \dots, x_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$$

onde  $f(x_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) representa a função densidade de probabilidade (fdp) da população quando esta é contínua e a função massa de probabilidade (fmp) quando é discreta.

- Na maioria das situações a fdp/fmp da população é membro de uma *família paramétrica*, isto é, a forma funcional da função depende de um parâmetro ou de um vetor de parâmetros  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)$ , tal que

$$f_{x_1, \dots, x_n}(x_1, \dots, x_n | \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta)$$

- A Estatística analisa os resultados de uma amostra aleatória procurando explicar os valores observados em função dos parâmetros que definem a população
- Assim, para um dado ponto amostral fixo, observado, define-se a *função verosimilhança de uma amostra*,  $L(\theta)$ , como

$$L(\theta | x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta)$$

## Exemplo

Seja  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  uma a.a. da população *Exponencial* $(\beta)$  ( $\beta > 0$ ) com fdp

$$f(x) = \frac{1}{\beta} \exp\{-x/\beta\} \quad (x \geq 0)$$

A fdp conjunta é dada por

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\beta} \exp(-x_i/\beta) = \beta^{-n} \exp\left\{-\sum_{i=1}^n x_i/\beta\right\}$$

que fixando  $\beta$ , depende apenas de  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

A função verosimilhança é portanto dada por

$$L(\beta) = \beta^{-n} \exp\left\{-\sum_{i=1}^n x_i/\beta\right\}$$

que fixando  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  depende apenas de  $\beta$ .

## Revisões - Inferência estatística



- Em regra o objetivo último da análise estatística é inferir sobre a população de estudo com base numa amostra aleatória
- O desconhecimento sobre a população pode ser total, i.e., nada se sabe sobre a sua distribuição de probabilidade
- O desconhecimento sobre a população pode ser apenas parcial, i.e., é conhecida a forma funcional da função de distribuição da população mas não se conhecem os valores do(s) parâmetro(s) que caracterizam a distribuição
- Supondo conhecida a forma geral da distribuição de probabilidade da população, a sua completa especificação implica a *estimação* do(s) parâmetro(s),  $\theta \in \Theta$  (sendo  $\Theta$  o espaço dos parâmetros), que lhe estão associados

- A estimação de parâmetros diz-se *pontual*, quando se obtém um só valor para representar  $\theta$  e *intervalar* quando se pretende encontrar um intervalo de valores para representar  $\theta$
- A *estimação pontual* é um procedimento estatístico que utiliza a informação contida numa amostra para obter um número, ou ponto, que representa o valor do(s) parâmetro(s) que se pretende estimar
- O objetivo principal é portanto o de encontrar uma *estimativa* (função de uma amostra observada) para  $\theta$
- A estimativa de  $\theta$  não é mais do que a realização de uma *estatística* (função de uma amostra aleatória) a que chamamos *estimador* (contradomínio definido pelo espaço de parâmetros)

## Exemplo

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  é uma realização da a.a.  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  onde  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) são v.a. iid.

$\bar{x}$  (função da amostra observada) é uma estimativa para  $\mu$ , i.e., é uma realização da estatística  $\bar{x} = \sum_i x_i / n$  (função de uma amostra aleatória)

$s^2$  (função da amostra observada) é uma realização da estatística  $s^2 = \sum_i (x_i - \bar{x})^2 / (n - 1)$  (função de uma amostra aleatória)

$\bar{x}$  e  $s^2$  são estimadores de  $\mu$  e  $\sigma^2$  respetivamente.

- Variáveis aleatórias definidas em função de um estimador e do parâmetro, cuja distribuição não depende de nenhum parâmetro desconhecido designam-se por variáveis *fulcrais* (ou *pivot*)

## Exemplo

Seja  $(x_1, \dots, x_n)$  v.a. iid da população  $N(\mu, \sigma)$ . Então

$$\frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \curvearrowright t_{(n-1)}$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \curvearrowright \chi_{n-1}^2$$

- As variáveis fulcrais são usadas para construir *estimadores intervalares*
- Um estimador intervalar de um parâmetro  $\theta$  desconhecido é im intervalo aleatório que, com uma certa probabilidade de cobertura  $1 - \alpha$ , contem/captura o parâmetro  $\theta$

## Exemplo

$$\left( \bar{x} - t_{(n-1);1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_{(n-1);1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

- Genericamente, um **testes de hipóteses** é um conjunto de procedimentos estatísticos que visam determinar se certas afirmações (hipóteses), feitas sobre uma população (ou mais do que uma) são ou não suportadas pelos dados de uma amostra concreta.
- Elementos de um teste de hipóteses:
  - 1 Hipóteses: Hipótese nula ( $H_0$ ) e Hipótese alternativa ( $H_1$ )
  - 2 Estatística do teste
  - 3 Definição da região de rejeição (ou região crítica) e decisão sobre  $H_0$

- Hipótese estatística é toda a proposição feita acerca da(s) população(ções) em estudo.
- Num teste de hipóteses têm-se 2 hipóteses: uma que acreditamos ser verdadeira — **Hipótese Nula** — e a sua contrária — **Hipótese Alternativa**.
- O objectivo final dum teste estatístico é decidir acerca da plausibilidade das hipóteses formuladas.
- Na formulação das hipóteses, deve ter-se em conta que:
  - ❶ O teste é constituído por duas hipóteses complementares, a hipótese nula,  $H_0$  e a hipótese alternativa,  $H_1$ ;
  - ❷  $H_0$  é admitida como verdadeira ao longo do procedimento (sob  $H_0$ );
  - ❸ Existindo evidências contra  $H_0$  diz-se que se rejeita a favor de  $H_1$ ;
  - ❹ As hipóteses nula e alternativa são sempre complementares e no seu conjunto estabelecem o universo de possibilidades.

- Depois de formuladas as hipóteses, coloca-se a questão "*Como decidir acerca da plausibilidade da hipótese colocada?*"
- O processo de decisão vai basear-se numa estatística — *estatística do teste* (genericamente  $T \equiv T(\mathbf{x})$ ) — para a qual se conhece a respectiva distribuição amostral, função dos dados e que sob  $H_0$  não depende de parâmetros desconhecidos.
- Esta estatística, que é calculada admitindo que  $H_0$  é verdadeira e tendo por os valores observados, vai permitir testar a plausibilidade das hipótese.

## Exemplo

Suponha-se um teste ao valor médio — Hipóteses:  $H_0 : \mu = \mu_0$  vs.  $H_1 : \mu \neq \mu_0$

Neste caso, o parâmetro em análise é o valor médio. Recorde que, numa população onde  $x \sim N(\mu, \sigma)$  ( $\sigma$  desconhecido), a estatística  $\bar{x}$  (estimador de  $\mu$ ) tem distribuição  $t_{n-1}$ :

$$\frac{\bar{x} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Logo, atendendo ao valor médio fixado em  $H_0$ , i.e. para  $\mu = \mu_0$ , e para uma amostra concreta é possível calcular a estatística  $\frac{\bar{x} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ .

- A decisão sobre a plausibilidade das hipóteses formuladas vai basear-se no conhecimento da distribuição de probabilidade da estatística de teste, sob  $H_0$ .
- Os valores mais extremos da estatística são aqueles cuja probabilidade de ocorrência é menor e, portanto, correspondem aos valores para os quais se considera improvável a validade da hipótese nula. Constituem por isso a **região crítica** ou região de rejeição
- Considere-se  $H_0 : \theta \leq \theta_0$  vs.  $H_1 : \theta > \theta_0$ . A hipótese  $H_0$  é rejeitada sse  $T > c_\alpha$ , sendo este um teste de nível  $\alpha$ , com  $P(T > c_\alpha) = \alpha$  sob  $H_0$
- Considere-se  $H_0 : \theta \geq \theta_0$  vs.  $H_1 : \theta < \theta_0$ . A hipótese  $H_0$  é rejeitada sse  $T < c_\alpha$ , sendo este um teste de nível  $\alpha$ , com  $P(T < c_\alpha) = \alpha$  sob  $H_0$
- Considere-se  $H_0 : \theta = \theta_0$  vs.  $H_1 : \theta \neq \theta_0$ . A hipótese  $H_0$  é rejeitada sse  $|T| > c_{\alpha/2}$ , sendo este um teste de nível  $\alpha$ , com  $P(|T| > c_{\alpha/2}) = \alpha/2$  sob  $H_0$

## Exemplo

Nma amostra de 16 indivíduos com glaucoma de ângulo aberto registaram-se as idades dos pacientes:

62 62 68 48 51 60 51 57 57 41 62 50 53 34 62 61

- a) Podemos concluir que a idade média da população a partir da qual a amostra é 60 anos? ( $\alpha = 0.01$ ).
- b) Calcule o IC da idade média desta população a 95%.

## Código R:

```
> idade<-c(62, 62, 68, 48, 51, 60, 51, 57, 57, 41, 62, 50, 53, 34, 62, 61)
> t.test(x = idade,mu = 60)
```

One Sample t-test

```
data:  idade
t = -2.2822, df = 15, p-value = 0.03749
alternative hypothesis: true mean is not equal to 60
95 percent confidence interval:
 50.20944 59.66556
sample estimates:
mean of x
 54.9375
```