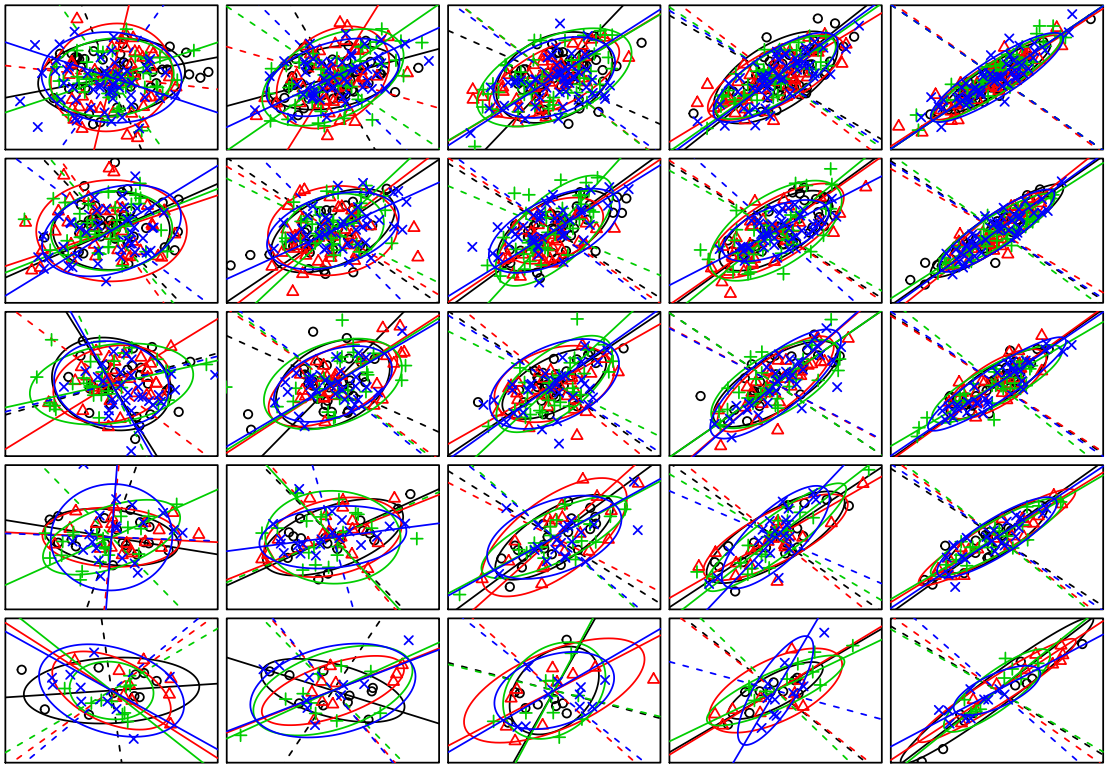
Estatística Multivariada

Slides de apoio às aulas



Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade Nova de Lisboa
2018/19

Aula 2

Introdução à Estatística Multivariada

Notação

1. Constantes/valores observados: Letras minúsculas a itálico

   Exemplos: a, c, ℓ, x, y, z

2. Variáveis: Letras minúsculas

   Exemplos: x, y, z

3. Parâmetros (população): Letras gregas minúsculas

   Exemplos: λ, μ, ρ, σ

4. Vetores (de números, variáveis ou parâmetros): Letras minúsculas a negrito

   Exemplos:
   $\boldsymbol{a}$ $(\boldsymbol{a}'=(a_1,...,a_n))$, $\boldsymbol{c}$ $(\boldsymbol{c}'=(c_1,...,c_n))$, $\boldsymbol{\ell}$ $(\boldsymbol{\ell}'=(\ell_1,...,\ell_n))$
   $\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x}'=(x_1,...,x_n))$, $\boldsymbol{y}$ $(\boldsymbol{y}'=(y_1,...,y_n))$, $\boldsymbol{z}$ $(\boldsymbol{z}'=(z_1,...,z_n))$
   $\mathbf{x}$ $(\mathbf{x}'=(x_1,...,x_n))$, $\mathbf{y}$ $(\mathbf{y}'=(y_1,...,y_n))$, $\mathbf{z}$ $(\mathbf{z}'=(z_1,...,z_n))$
   $\boldsymbol{\lambda}$ $(\boldsymbol{\lambda}'=(\lambda_1,...,\lambda_n))$, $\boldsymbol{\mu}$ $(\boldsymbol{\mu}'=(\mu_1,...,\mu_n))$
   Caso particular: $\mathbf{0}$ $(\mathbf{0}'=(0,...,0))$ e $\mathbf{1}$ $(\mathbf{1}'=(1,...,1))$

1. Matrizes (de números, variáveis ou parâmetros): Letras maiúsculas a negrito
   Exemplos: $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{X}$ (matriz observada), $\mathbf{X}$ (matriz aleatória), $\boldsymbol{\Sigma}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{np} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & \dots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & \dots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & s_{n3} & \dots & s_{np} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \dots & x_{np} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & \dots & X_{1p} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & \dots & X_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & X_{n3} & \dots & X_{np} \end{bmatrix}$$

O que são dados multivariados?

- Dados multivariados são observações relativas a um conjunto de p variáveis aleatórias $x_1, ..., x_p$, i.e, resultam da realização de um vetor aleatório ($\mathbf{x}' = (x_1, ..., x_p)$) sobre n unidades estatísticas (*amostra*):

	variável 1	$\cdots$	variável j	$\cdots$	variável p
elemento 1	x_{11}	$\cdots$	x_{1j}	$\cdots$	x_{1p}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
elemento i	x_{i1}	$\cdots$	x_{ij}	$\cdots$	x_{ip}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
elemento n	x_{n1}	$\cdots$	x_{nj}	$\cdots$	x_{np}

onde x_{ij} representa o valor concreto/observado para o elemento i ($i = 1...n$) da j-ésima v.a.

Representação matricial

- Esta base de dados pode representar-se pela matriz $\boldsymbol{X}$ contendo os n valores observados das p variáveis ($1 \leq n \leq p$):

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \dots & x_{np} \end{bmatrix}$$

onde x_{ij} representa a i-ésima **observação** da j-ésima variável.

- Ou seja $\boldsymbol{X}$ não é mais do que uma realização da matriz aleatória $\mathbf{X}$ que representa uma população multivariada (p-variada)

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & \dots & X_{1p} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & \dots & X_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & X_{n3} & \dots & X_{np} \end{bmatrix}$$

Vetor aleatório

- Representamos p variáveis aleatórias através do **vetor aleatório x** de dimensão p

$$\mathbf{x}' = (x_1, ..., x_p)$$

onde x_j $(j = 1, .., p)$ denota a j-ésima variável aleatória

- $(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$ (sendo $\mathbf{x}_i$, $i = 1, ..., n$, a j-ésima realização do vetor aleatório) representa a **amostra aleatória** p-variada de dimensão n (n realizações do vetor **x** de dimensão p independentes e identicamente distribuídos)
- Em resumo:

	Univariada	Multivariada
variável/vetor aleatório	x	$\mathbf{x}$
valor/vetor observado	x	$\boldsymbol{x}$
amostra aleatória	$(x_1, ..., x_n)$ (n variáveis aleatórias x)	$(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$ (n vetores aleatorios $\mathbf{x}$)
amostra observada	$(x_1, ..., x_n)$ ou x_i $(i = 1, ..., n)$ (n valores observados x)	$(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n)$ ou $\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1, ..., n)$ (n vetores observados $\boldsymbol{x}$)
matriz aleatória	–	$\mathbf{X}$
matriz observada	–	$\boldsymbol{X}$

Vetores médios, matrizes de covariância e de correlação

- Considere-se o vetor aleatório $\mathbf{x}_{p\times 1}$. Cada elemento do vetor tem valor médio $\mu_j = E(x_j)$ e variância $\sigma_j^2 = E(x_j - \mu_j)^2$ $(j = 1, ..., p)$
- O valor médio e variância do vetor $\mathbf{x}$ podem representar-se matricialmente:
  1. Valor médio $\boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{x})$

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix}$$

     onde μ_j, $(j = 1, ..., p)$ representa o valor médio da variável j;
  2. As p variâncias e as $p(p-1)/2$ covariâncias podem organizar-se numa matriz de dimensão $p \times p$ simétrica, designada por matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma} = E(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})'$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \dots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \sigma_{p3} & \dots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

     onde σ_{jk}, $(j, k = 1, ..., p)$ representa a covariância entre as variáveis j e k e $\sigma_{jj} = \sigma_j^2$ a variância da variável j

- $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\Sigma}$ são designados respetivamente por *média populacional* (vetor) e *variância-covariância populacional* (matriz)

Vetores médios, matrizes de covariância e de correlação

- Chama-se matriz desvio-padrão populacional à matriz

$$\mathbf{V}^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_{11}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\sigma_{22}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{\sigma_{pp}} \end{bmatrix}$$

- Frequentemente é útil e necessário descrever o grau de associação (linear) entre as p variáveis, sendo este representado pela matriz (simétrica) de correlações (bivariadas) $\rho_{jk} = \sigma_{jk}/(\sqrt{\sigma_{jj}}\sqrt{\sigma_{kk}})$

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \dots & \rho_{1p} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \dots & \rho_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p1} & \rho_{p2} & \rho_{p3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

  onde ρ_{jk}, $(j, k = 1, ..., p)$ a correlação entre as variáveis j e k.
- A matriz $\boldsymbol{\Sigma}$ por ser obtida através das matrizes $\mathbf{V}^{1/2}$ e $\boldsymbol{\rho}$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{V}^{1/2}\boldsymbol{\rho}\mathbf{V}^{1/2}$$

  e

$$\boldsymbol{\rho} = (\mathbf{V}^{1/2})^{-1}\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{V}^{1/2})^{-1}$$

Exemplo 1

Considerando a matriz de covariâncias $\mathbf{\Sigma}$:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 25 \end{bmatrix}$$

Determine a matriz de correlações.

$$\mathbf{V}^{1/2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{V}^{-1/2} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} 1 & 1/6 & 1/5 \\ 1/6 & 1 & -1/5 \\ 1/5 & -1/5 & 1 \end{bmatrix}$$

Subconjuntos de variáveis

- Frequentemente, as características em estudo (variáveis) são organizadas em 2 ou mais grupos $\Rightarrow$ subconjuntos de variáveis
- Considerando o vector aleatório $\mathbf{x}' = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ e a partição com dois conjuntos com q e $p - q$ variáveis, tem-se

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \\ \hdashline x_{q+1} \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)} \\ \hdashline \mathbf{x}^{(2)} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_q \\ \hdashline \mu_{q+1} \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^{(1)} \\ \hdashline \boldsymbol{\mu}^{(2)} \end{bmatrix}$$

- $\boldsymbol{\Sigma}$ representa-se por

$$\boldsymbol{\Sigma} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1q} & \sigma_{1,q+1} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{q1} & \cdots & \sigma_{qq} & \sigma_{q,q+1} & \cdots & \sigma_{qp} \\ \hdashline \sigma_{q+1,1} & \cdots & \sigma_{q+1,q} & \sigma_{q+1,q+1} & \cdots & \sigma_{q+1,p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{p1} & \cdots & \sigma_{pq} & \sigma_{p,q+1} & \cdots & \sigma_{pp} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \hdashline \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{array}\right]$$

Subconjuntos de variáveis

- $\mathbf{\Sigma_{12}} = \mathbf{\Sigma_{21}}'$
- A matriz de covariância de $\mathbf{x}^{(1)}$ é a matriz $\mathbf{\Sigma_{11}}$ de ordem q
- A matriz de covariância de $\mathbf{x}^{(2)}$ é a matriz $\mathbf{\Sigma_{22}}$ de ordem $p - q$
- $\mathbf{\Sigma_{12}}$ não tem que ser simétrica ou quadrada.
- $\mathbf{\Sigma_{12}}$ contém a covariância de cada variável de $\mathbf{x}^{(1)}$ com cada variável de $\mathbf{x}^{(2)}$.
- É também usual utilizar a notação $Cov(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}) = \mathbf{\Sigma_{12}}$

Valor médio e covariância de combinações lineares

- Seja $\mathbf{x}' = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ o vector aleatório com valor médio $\boldsymbol{\mu}$ e matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}$, então a combinação linear $\boldsymbol{c}'\mathbf{x} = c_1x_1 + \ldots + c_px_p$ tem valor médio e variância dados respetivamente por

$$E(\boldsymbol{c}'\mathbf{x}) = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu} \text{ e } Cov(\boldsymbol{c}'\mathbf{x}) = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{c}$$

- Genericamente, considerando q combinações lineares de p variáveis aleatórias $x_1, \ldots, x_p$

$$\begin{aligned} y_1 &= c_{11}x_1 + \cdots + c_{1p}x_p \\ y_2 &= c_{21}x_1 + \cdots + c_{2p}x_p \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ y_q &= c_{q1}x_1 + \cdots + c_{qp}x_p \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots & c_{qp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

então

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}}\mathbf{C}'$$

Exemplo 2

Seja $\mathbf{x}' = (x_1, x_2, x_3)$ o vector aleatório com valor médio $\boldsymbol{\mu}' = (2, 1, 2)$ e matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}$:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 25 \end{bmatrix}$$

Determine o valor médio e matriz de covariância de $\mathbf{y}' = (y_1, y_2, y_3)$

$$y_1 = x_1 - x_2 + x_3$$

$$y_2 = x_1 + x_2 - 2x_3$$

$$y_3 = x_1 + 2x_2 + 2x_3$$

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}}\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 & -66 & 43 \\ -66 & 119 & -69 \\ 43 & -69 & 128 \end{bmatrix}$$

- Considerando agora uma amostra aleatória de uma população p-variada $(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$ (n realizações independentes do vetor $\mathbf{x}$) definem-se as seguintes estatísticas

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \end{bmatrix} \qquad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & \dots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & \dots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & s_{p3} & \dots & s_{pp} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1p} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & \dots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & r_{p3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

onde

- $\bar{\mathbf{x}}$ representa o vetor de médias amostrais, sendo $\bar{x}_j$, $(j = 1, ..., p)$ a média relativa à variável j;
- $\mathbf{S}$ representa a matriz de variâncias-covariâncias amostrais, sendo s_{jk}, $(j, k = 1, ..., p)$ a covariância entre as variáveis j e k e s_{jj} a variância da variável j;
- $\mathbf{R}$ representa a matriz de correlações (simétrica), sendo r_{jk}, $(j, k = 1, ..., p)$ a correlação entre as variáveis j e k.

- Recorde que

$$\bar{x_j} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ji} \; (j = 1, ..., p)$$

$$s_{jk} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{ji} - \bar{x_j})(x_{ki} - \bar{x_k}) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ji}x_{ki} - n\bar{x}_j\bar{x}_k\right) \; (j, k = 1, ..., p;\; j \neq k)$$

$$s_j^2 = s_{jj} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{ji} - \bar{x_j})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ji}^2 - n\bar{x}_j^2\right) \; (j = 1, ..., p)$$

$$r_{jk} = \frac{s_{jk}}{\sqrt{s_{jj}}\sqrt{s_{kk}}} \; (j, k = 1, ..., p)$$

- Note que:
  - $r_{jj} = 1$ e $r_{jk} = r_{kj}$
  - $-1 \leq r \leq +1$
  - $|r|$ mede o grau de associação linear; o sinal informa sobre a direção da associação.

Exemplo 3

Considerando a matriz de observações $\mathbf{X}_{4\times 2}$:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 42 & 4 \\ 52 & 5 \\ 48 & 4 \\ 58 & 3 \end{bmatrix}$$

$\bar{x}_1 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_{i1} = 50$ e $\bar{x}_2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_{i2} = 4$
logo

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 50 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$s_{11} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4}(x_{i1} - \bar{x}_1)^2 = 45.333$
$s_{22} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4}(x_{i2} - \bar{x}_2)^2 = 0.667$
$s_{12} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4}(x_{i1} - \bar{x}_1)(x_{i2} - \bar{x}_2) = -2$
logo

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 45.333 & -2 \\ -2 & 0.667 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-2}{\sqrt{45.333\times 0.677}} = -0.364 \\ \frac{-2}{\sqrt{45.333\times 0.677}} = -0.364 & 1 \end{bmatrix}$$

(continuação do exemplo anterior)

Código R:

```
> x<-c(42,52,48,58)
> y<-c(4,5,4,3)
> X<-matrix(c(x,y),4,2)
> X
     [,1] [,2]
[1,]   42    4
[2,]   52    5
[3,]   48    4
[4,]   58    3

> colMeans(X)

[1] 50  4

> var(X)

         [,1]       [,2]
[1,] 45.33333 -2.0000000
[2,] -2.00000  0.6666667

> cor(X)

           [,1]       [,2]
[1,]  1.0000000 -0.3638034
[2,] -0.3638034  1.0000000
```

Estatísticas amostrais

Usando calculo matricial:

- $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n}\mathbf{X}'\mathbf{1}_{n\times 1}$, onde $\mathbf{1}_{n\times 1}$ é o vetor de 1's de dimensão n
- $\mathbf{S} = \frac{1}{n-1}\mathbf{X}'\left(\mathbf{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}_{n\times n}\right)\mathbf{X}$, onde $\mathbf{1}_{n\times n}$ é a matriz de 1's de dimensão $n \times n$
- $\mathbf{R} = \mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{S}\mathbf{D}^{-1/2}$, onde $\mathbf{D}^{1/2} = Diag(s_1, ..., s_n)$

Código R:

```
> t(X)%*%c(1,1,1,1)/4

     [,1]
[1,]   50
[2,]    4

> J<-matrix(1,4,4)
> I<-matrix(c(1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1),4,4)
> S<-(t(X)%*%(I-J/4)%*%X)/3
> S

         [,1]       [,2]
[1,] 45.33333 -2.0000000
[2,] -2.00000  0.6666667

> D<-matrix(c(sqrt(diag(S)[1]),0,0,sqrt(diag(S)[2])),2,2)
> solve(D)%*%S%*%solve(D)

           [,1]       [,2]
[1,]  1.0000000 -0.3638034
[2,] -0.3638034  1.0000000
```

- No caso univariado, a variância quantifica o grau de dispersão em torno da média. No caso multivariado, é por vezes conveniente resumir a matriz $\mathbf{S}$ num único valor

- Em regra, são usadas duas medidas:

  1. *Variância amostral generalizada*, $|\mathbf{S}| = \prod_{j=1}^{p} \ell_j$ onde ℓ_i representa os valores próprios de $\mathbf{S}$.

     Notas importantes:

     - É possível mostrar que o "volume" de dados centrado em $\bar{\mathbf{x}}$ necessário para incluir uma certa proporção de dados, definido por um *elipsoide*, é proporcional a $|\mathbf{S}|^{1/2}$
     - $|\mathbf{S}|$ não deteta diferentes estruturas de correlação (ver exemplo)
     - $|\mathbf{S}| = 0$ quando pelo menos uma das colunas da matriz dos desvios pode expressar-se como combinação linear das outras colunas $\Rightarrow$ as colunas da matriz dos desvios, $\mathbf{X}_{n\times p} - \mathbf{1}_{n\times 1}\bar{\mathbf{x}}'_{1\times p}$, são linearmente dependentes (indicativo de redundância entre variáveis)

     $$\mathbf{X} - \mathbf{1}\,\bar{\mathbf{x}}' = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1' - \bar{\mathbf{x}}' \\ \mathbf{x}_2' - \bar{\mathbf{x}}' \\ \cdots \\ \mathbf{x}_n' - \bar{\mathbf{x}}' \end{bmatrix}$$

  2. *Variância total*, $tr(\mathbf{S}) = \sum_{j=1}^{p} \ell_j$

Exemplo 4

Considere a matriz de observações

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Determine a matriz dos desvios e indique se os vetores formados pelas colunas da matriz são linearmente independentes. Apresente a resposta também baseada nos valores próprios.

$$\mathbf{X} - \mathbf{1}\,\bar{\mathbf{x}}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Os vetores $(-2, 1, 1)'$, $(1, 0, -1)'$ e $(0, 1, -1)'$ são linearmente dependentes (solução geral: $c_2 = 2c_1$ e $c_3 = -c_1$).

Por outro lado, têm-se os valores próprios $\ell_1 = 8.292$, $\ell_2 = -2.292$ e $\ell_3 = 0$, logo $|\boldsymbol{S}| = 0$.

Exemplo 5

Considere as matrizes de covariâncias respetivamente correspondentes às correlações bivariadas $r = 0.8$, $r = 0$ e $r = -0.8$

$$\boldsymbol{S}^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{S}^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{S}^{(3)} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Determine a variância generalizada nos 3 casos. Interprete os resultados.

Os valores-vetores próprios de $\boldsymbol{S}^{(1)}$ são $\ell_1 = 9$, $\mathbf{e}_1' = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e $\ell_2 = 1$, $\mathbf{e}_2' = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) \Rightarrow |\boldsymbol{S}^{(1)}| = 9$

Os valores-vetores próprios de $\boldsymbol{S}^{(2)}$ são $\ell_1 = 3$, $\mathbf{e}_1' = (1, 0)$ e $\ell_2 = 3$, $\mathbf{e}_2' = (0, 1) \Rightarrow |\boldsymbol{S}^{(2)}| = 9$

Os valores-vetores próprios de $\boldsymbol{S}^{(3)}$ são $\ell_1 = 9$, $\mathbf{e}_1' = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ e $\ell_2 = 1$, $\mathbf{e}_2' = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \Rightarrow |\boldsymbol{S}^{(3)}| = 9$

Subconjuntos de variáveis

- Quando as características em estudo (variáveis) estão organizadas em 2 ou mais grupos é comum considerar a partição das estatísticas amostrais (tal como vimos para a população)
- A partição em dois conjuntos com q e $p-q$ variáveis, resulta no vetor média $\bar{\mathbf{x}}_{p\times 1}$

$$\bar{\mathbf{x}} = \left[\begin{array}{c} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_q \\ \hdashline \bar{x}_{q+1} \\ \vdots \\ \bar{x}_p \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \bar{\mathbf{x}}^{(1)} \\ \hdashline \bar{\mathbf{x}}^{(2)} \end{array}\right]$$

- e na matriz de covariâncias

$$\mathbf{S} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} s_{11} & \cdots & s_{1q} & s_{1,q+1} & \cdots & s_{1p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{q1} & \cdots & s_{qq} & s_{q,q+1} & \cdots & s_{qp} \\ \hdashline s_{q+1,1} & \cdots & s_{q+1,q} & s_{q+1,q+1} & \cdots & s_{q+1,p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{p1} & \cdots & s_{pq} & s_{p,q+1} & \cdots & s_{pp} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \hdashline \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{array}\right]$$

Exemplo 6

Considerando os dados do ficheiro "data1.xlsx", contendo observações relativas a 5 variáveis divididas em 2 subconjuntos:

1. x_1 - intolerância à glucose; x_2 - níveis de insulina após toma de glucose oral; x_3 - resistência à insulina (colunas 1, 2 e 3)
2. y_1 - Peso relativo e y_2 - glicémia (colunas 4 e 5)

Represente o vetor média e matriz de covariâncias, considerando a referida partição.

Código R:

```
> dados<-as.data.frame(readxl::read_xlsx("./Datasets/data1.xlsx",
                                         col_names = F))
> round(colMeans(dados[,-6]),3)

   X__1    X__2    X__3    X__4    X__5
  0.977 121.986 543.614 186.117 184.207

> round(var(dados[,-6]),3)

       X__1      X__2       X__3       X__4      X__5
X__1  0.017    -0.073      0.982      3.473     5.266
X__2 -0.073  4087.097  19546.064  -3063.464  4849.906
X__3  0.982 19546.064 100457.850 -12918.163 25908.490
X__4  3.473 -3063.464 -12918.163  14625.313   101.483
X__5  5.266  4849.906  25908.490    101.483 11242.332
```

Média e covariância amostral de combinações lineares de variáveis

- Seja $\mathbf{x}' = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ um vector aleatório e $\boldsymbol{c}' = (c_1, \ldots, c_p)$ um vetor de constantes, então a combinação linear

$$\boldsymbol{c}'\mathbf{x} = c_1 x_1 + \ldots + c_p x_p$$

tem média $\boldsymbol{c}'\bar{\mathbf{x}}$ e variância $\boldsymbol{c}'\mathbf{S}\boldsymbol{c}$

- A correlação entre duas combinações lineares $y = \boldsymbol{a}'\mathbf{x}$ e $z = \boldsymbol{b}'\mathbf{x}$ é dada por

$$r_{yz} = \frac{\boldsymbol{a}'\mathbf{S}\boldsymbol{b}}{\sqrt{(\boldsymbol{a}'\mathbf{S}\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}'\mathbf{S}\boldsymbol{b})}}$$

- Genericamente, q combinações lineares de p variáveis aleatórias $x_1, \ldots, x_p$, $c_{i1}x_1 + \ldots + c_{ip}x_p$ $(i = 1, \ldots, q)$ ou seja,

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots & c_{qp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

têm média amostral $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}$ e covariância amostral $\mathbf{S}_\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{S}\mathbf{C}'$

- A matriz de correlações (bivariadas) entre q combinações lineares é dada por $\mathbf{R}_\mathbf{y} = \mathbf{D}_\mathbf{y}^{-1/2}\mathbf{S}_\mathbf{y}\mathbf{D}_\mathbf{y}^{-1/2}$, onde $\mathbf{D}^{1/2}$ é a matriz diagonal dos q desvios-padrão

Exemplo 7

Considere as seguintes observações relativas ao vector aleatório $\mathbf{y}' = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$:

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
51	36	50	35	42
27	20	26	17	27
37	22	41	37	30
42	36	32	34	27
27	18	33	14	29
43	32	43	35	40
41	22	36	25	38
38	21	31	20	16
36	23	27	25	28
26	31	31	32	36
29	20	25	26	25

a) Determine a média e matriz de covariância da variável $z = 3y_1 - 2y_2 + 4y_3 - y_4 + y_5$

b) Considere a combinação linear $w = y_1 - 3y_2 - y_3 + y_4 - 2y_5$. Determine a correlação entre z e w.

$$\bar{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} 36.09 \\ 25.55 \\ 34.09 \\ 27.27 \\ 30.73 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{S}_y = \begin{bmatrix} 65.09 & 33.65 & 47.59 & 36.77 & 25.43 \\ 33.65 & 46.07 & 28.95 & 40.34 & 28.36 \\ 47.59 & 28.95 & 60.69 & 37.37 & 41.13 \\ 36.77 & 40.34 & 37.37 & 62.82 & 31.68 \\ 25.43 & 28.36 & 41.13 & 31.68 & 58.22 \end{bmatrix}$$

logo,

$$\bar{z} = \boldsymbol{c}'\bar{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 36.09 \\ 25.55 \\ 34.09 \\ 27.27 \\ 30.73 \end{bmatrix} = 197.0 \quad s_z^2 = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{c} = 2084.0\,.$$

Considerando a v.a. w

$$\bar{w} = \boldsymbol{b}'\bar{\boldsymbol{y}} = -108.82 \quad s_w^2 = \boldsymbol{b}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{b} = 745.96$$

e a covariância amostral entre z e w é $s_{zw} = -635.4$, sendo $r_{zw} = -0.51$

c) Considere as combinações lineares:

$$z_1 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5$$

$$z_2 = 2y_1 - 3y_2 + y_3 - 2y_4 - y_5$$

$$z_3 = -y_1 - 2y_2 + y_3 - 2y_4 + 3y_5$$

Determine o vetor média e a matriz de covariância de $\mathbf{z}' = (z_1, z_2, z_3)$.

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} 153.73 \\ -55.64 \\ -15.45 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{S_z} = \begin{bmatrix} 995.42 & -502.09 & -211.04 \\ -502.09 & 811.45 & 268.08 \\ -211.04 & 268.08 & 702.87 \end{bmatrix}$$

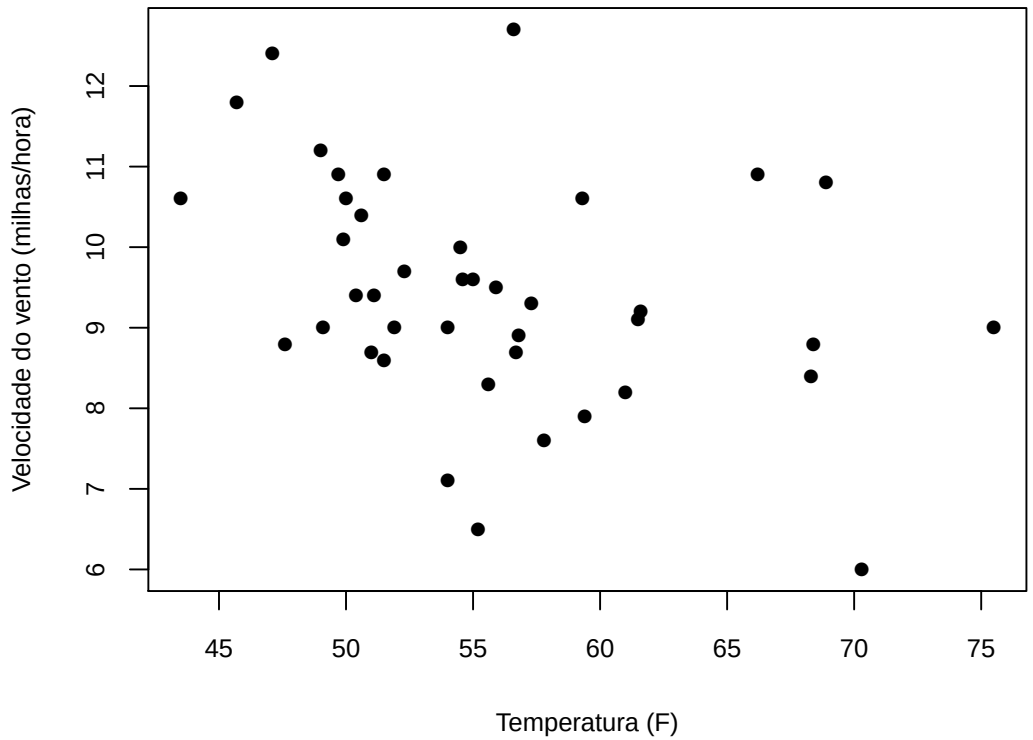
$$\boldsymbol{R_z} = \begin{bmatrix} 1.00 & -0.56 & -0.25 \\ -0.56 & 1.00 & 0.35 \\ -0.25 & 0.35 & 1.00 \end{bmatrix}$$

Representações gráficas

- A representação "tradicional" de $\mathbf{X}_{n\times p}$ corresponde à nuvem de n pontos em $\mathbb{R}^p$:

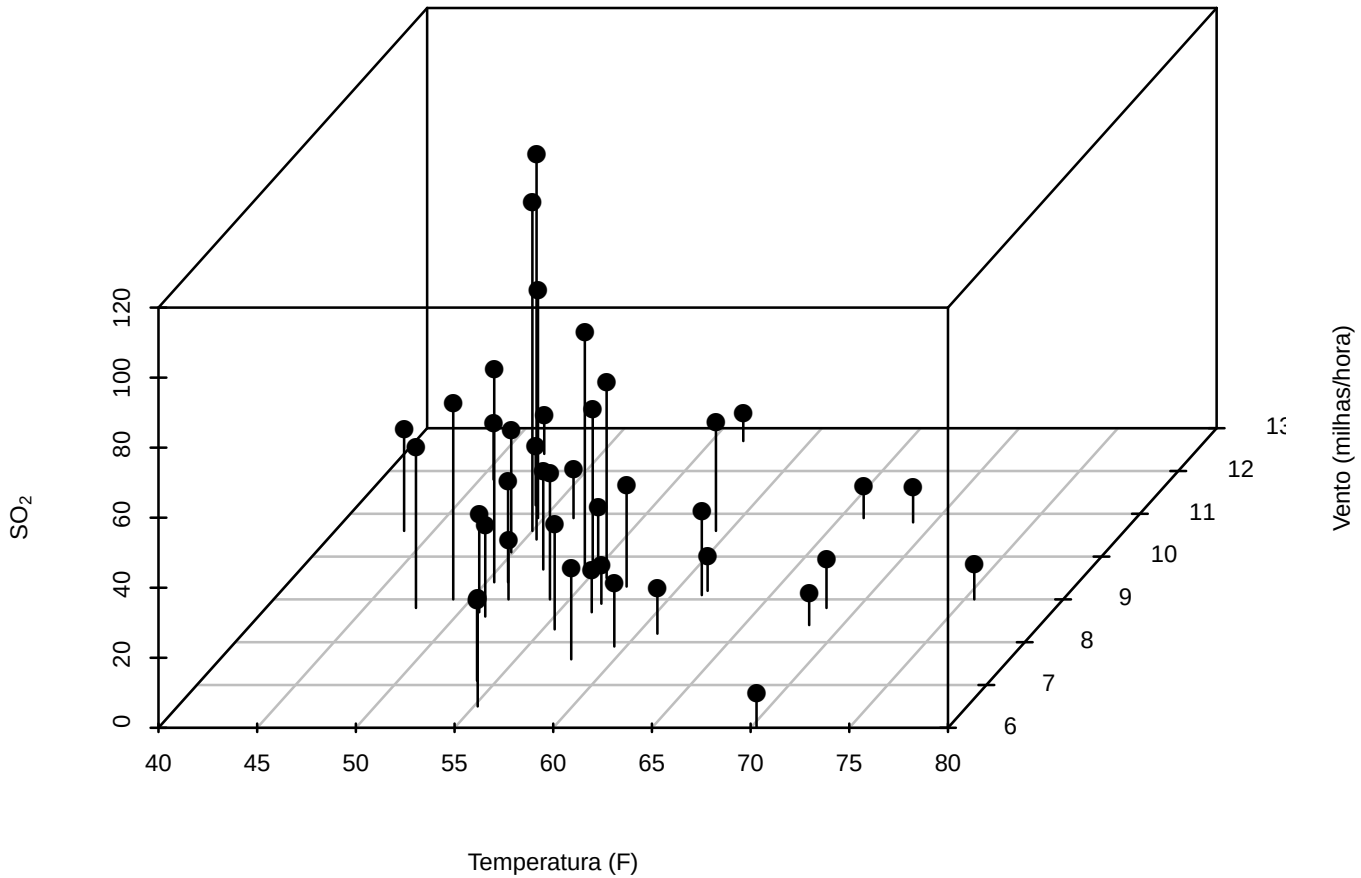
$$p \text{ variáveis} \rightarrow p \text{ eixos}$$
$$n \text{ observações} \rightarrow n \text{ pontos}$$

- Esta representação não é visualizável para $p > 3$
- Para $p = 2$



Representações gráficas

- Para $p = 3$



- Para $p = 2$

Código R:

```
> library(HSAUR3)
> with(USairpollution, plot(temp,wind,xlab="Temperatura (F)",
 ylab = "Velocidade do vento (milhas/hora)",
 cex.lab=0.8,pch=16,cex.axis=0.8,main="p = 2"))
```

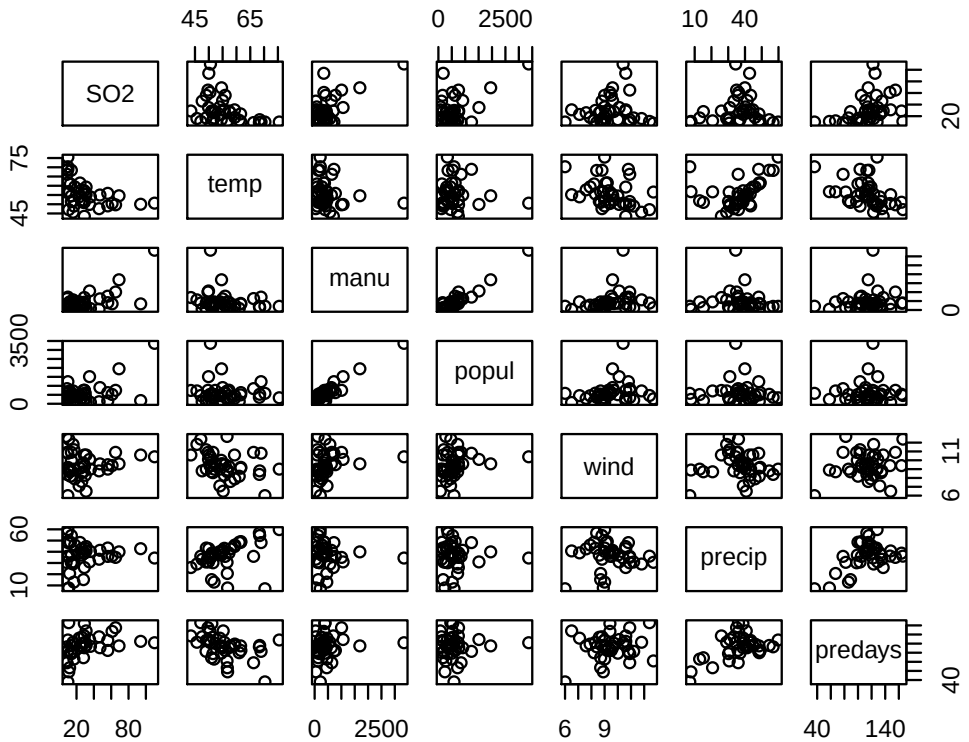
- Para $p = 3$

Código R:

```
> library(scatterplot3d)
> with(USairpollution, scatterplot3d(temp, wind, SO2, type = "h",angle = 55, pch = 16,
 xlab="Temperatura (F)", ylab = "Vento (milhas/hora)",
 zlab = expression(SO[2]), cex.axis = 0.6,cex.lab = 0.6))
```

Múltiplos diagramas de dispersão

- A representação mais comum é a de múltiplos diagramas de dispersão relacionando as variáveis 2 a 2:

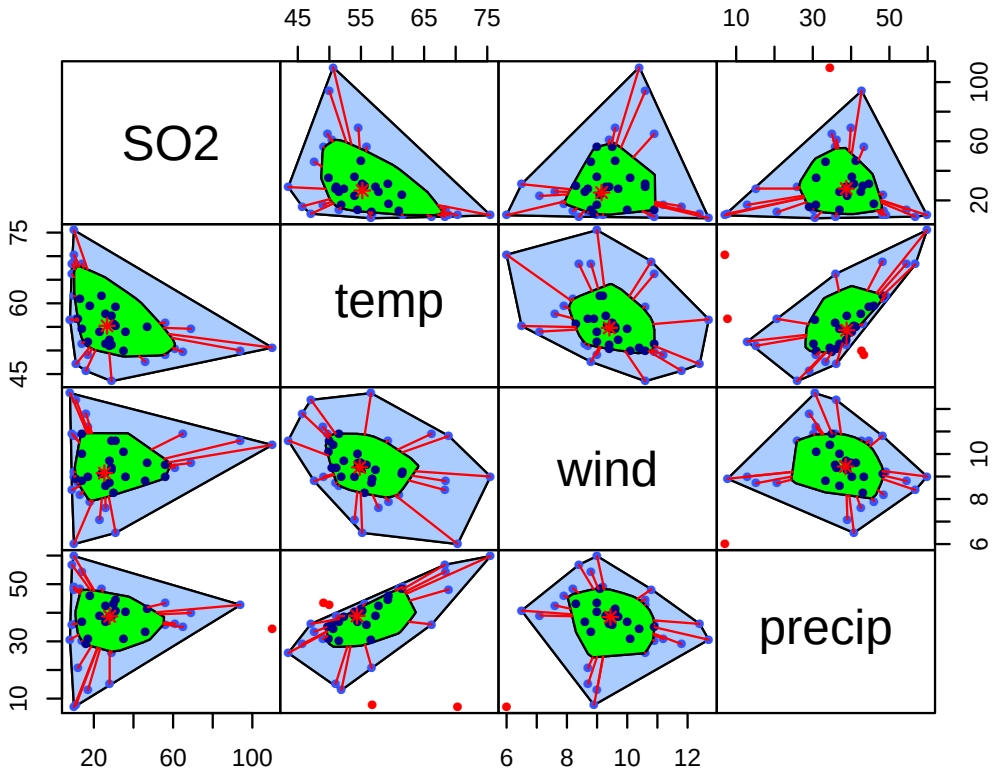


Código R:

```
> pairs(USairpollution)
```

Múltiplos diagramas de dispersão

- Ao gráfico anterior pode adicionar-se informação melhorando a interpretabilidade:

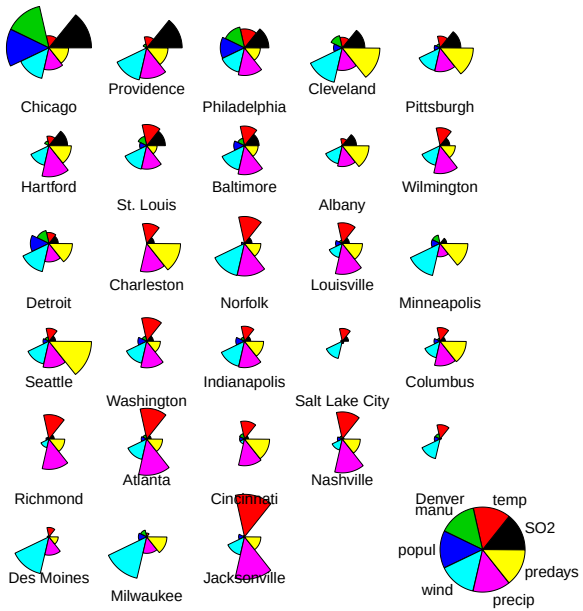


Código R:

```
> aplpack::bagplot.pairs(USairpollution[,c(1,2,5,6)], gap = 0,
        col.baghull = "green", main=" ")
```

Estrelas

- *Estrelas* - cada variável é representada por um setor circular com raio correspondente às observações. A posição dos setores identifica a variável e o seu comprimento a magnitude da observação nessa variável.

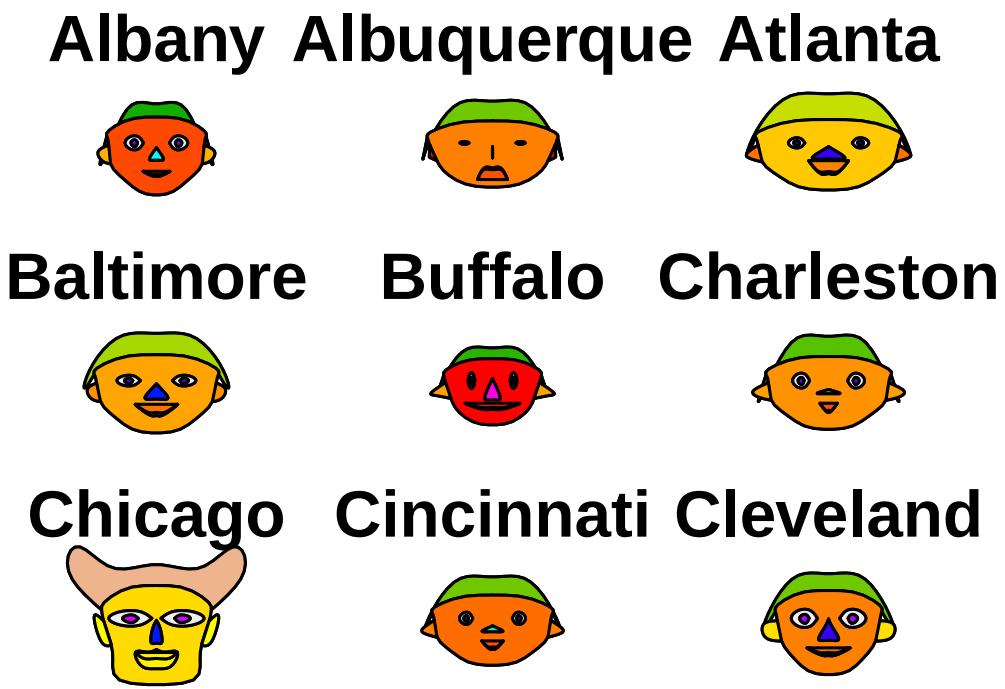


Código R:

```
> odata <- USairpollution[order(-USairpollution$SO2), ]
> graphics::stars(odata[1:28,], len=1, cex=0.5, key.loc=c(12.5, 2),
        labels=row.names(odata[1:28,]), draw.segments=TRUE)
```

Faces de Chernoff

- *Faces de Chernoff* - cada observação é representada por uma face com elementos cuja forma e/ou tamanho são determinados pelos valores de variável específicas



Código R:

```
> aplpack::faces(USairpollution[1:9,],print.info = F)
```

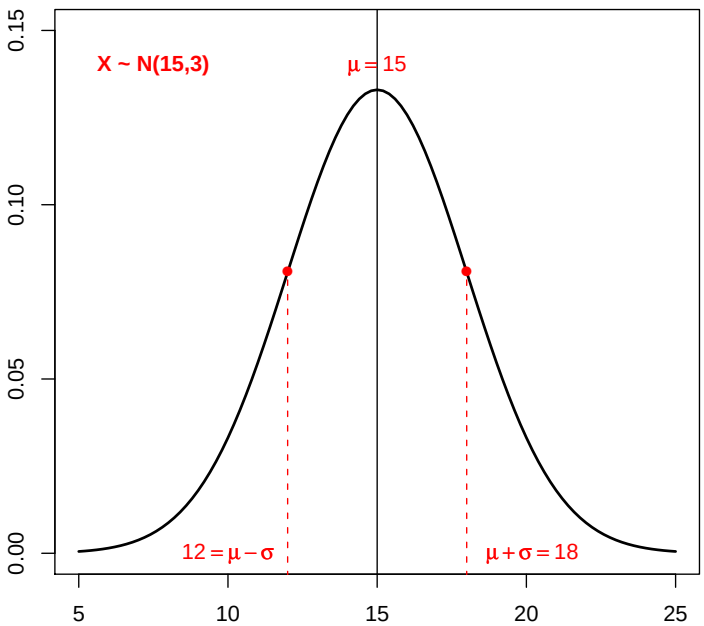
Distribuição normal multivariada

Distribuição normal univariada

- Uma variável aleatória contínua, x diz-se ter distribuição gaussiana ou normal com valor médio μ e variância σ, i.e., $x \frown N(\mu, \sigma^2)$, se a sua *fdp* corresponde a

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \ -\infty < x < +\infty, \ -\infty < \mu < +\infty, \ 0 < \sigma < +\infty$$

- Função densidade de probabilidade:



- Curva unimodal, sendo a moda $x = \mu$ (maximizante da fdp)
- Simétrica em relação ao eixo $x = \mu$
- Pontos de inflexão em $x = \mu \pm \sigma$
- Eixo das abcissas como assimptota

Distribuição normal multivariada

- Note-se que o termo

$$\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 = (x-\mu)(\sigma^2)^{-1}(x-\mu) \tag{1}$$

representa o quadrado da distância entre x e μ (padronizada pela variância)

- Da mesma forma, generalizando a um vetor $\boldsymbol{x}$

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}) \tag{2}$$

representa o quadrado da distância entre $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{x}$ (sendo $\boldsymbol{\Sigma}$ uma matriz definida positiva)

- A distribuição normal multivariada resulta de substituir o termo (1) pelo (2), sendo necessário substituir a constante $(2\pi)^{-1/2}(\sigma^2)^{-1/2}$ por uma mais geral válida para p variáveis $(2\pi)^{-p/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2}$

- Assim, $\mathbf{x}$ diz-se ter distribuição normal multivariada se a sua *fdp* corresponde a

$$f_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}}\, e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\mu)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\mu)}$$

i.e., $\mathbf{x}$ tem distribuição $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ onde p representa o número de variáveis

- Para $p = 2$ tem-se a distribuição normal bivariada com parâmetros μ_1, μ_2,

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

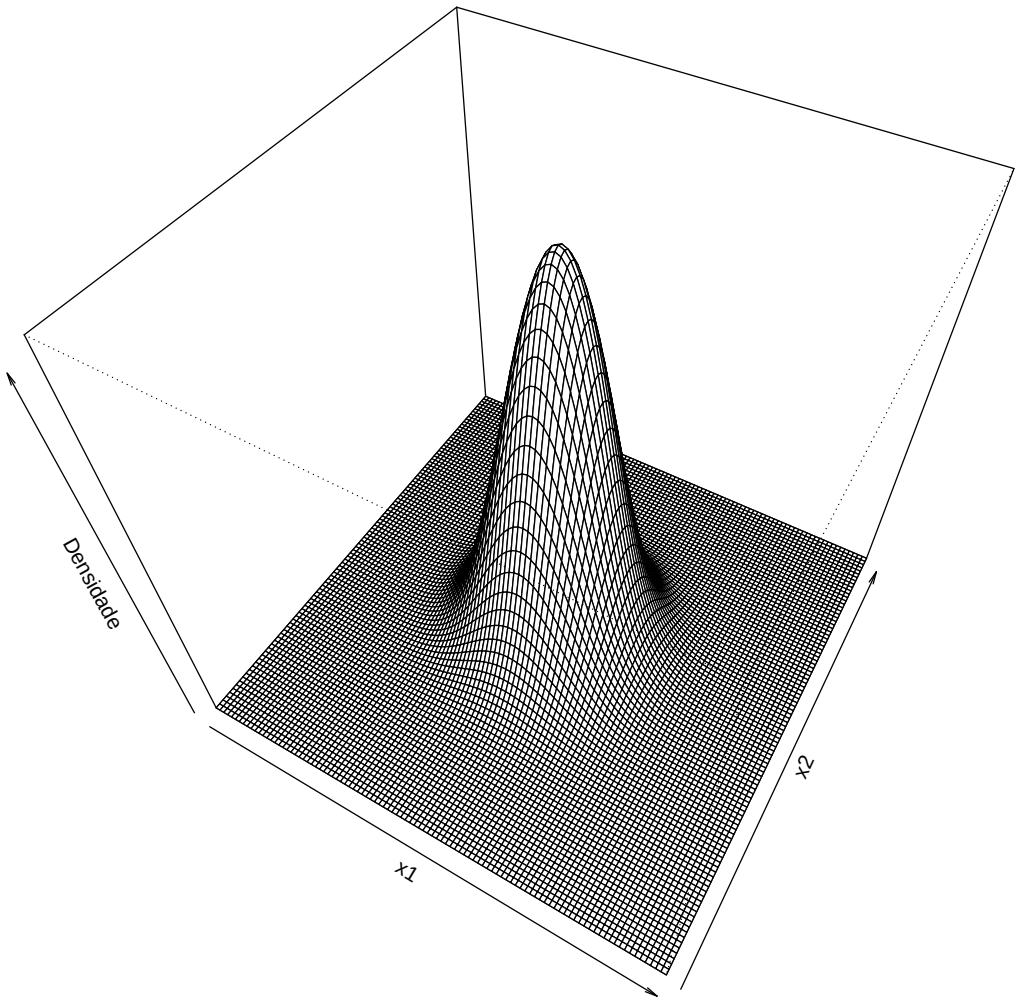
e $\rho_{12} = \rho_{21} = \sigma_{12}/\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}$, $(\sigma_{11} = var(x_1), \sigma_{22} = var(x_2))$, com fdp

$$f_{x_1,x_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}(1-\rho_{12}^2)}} \times$$

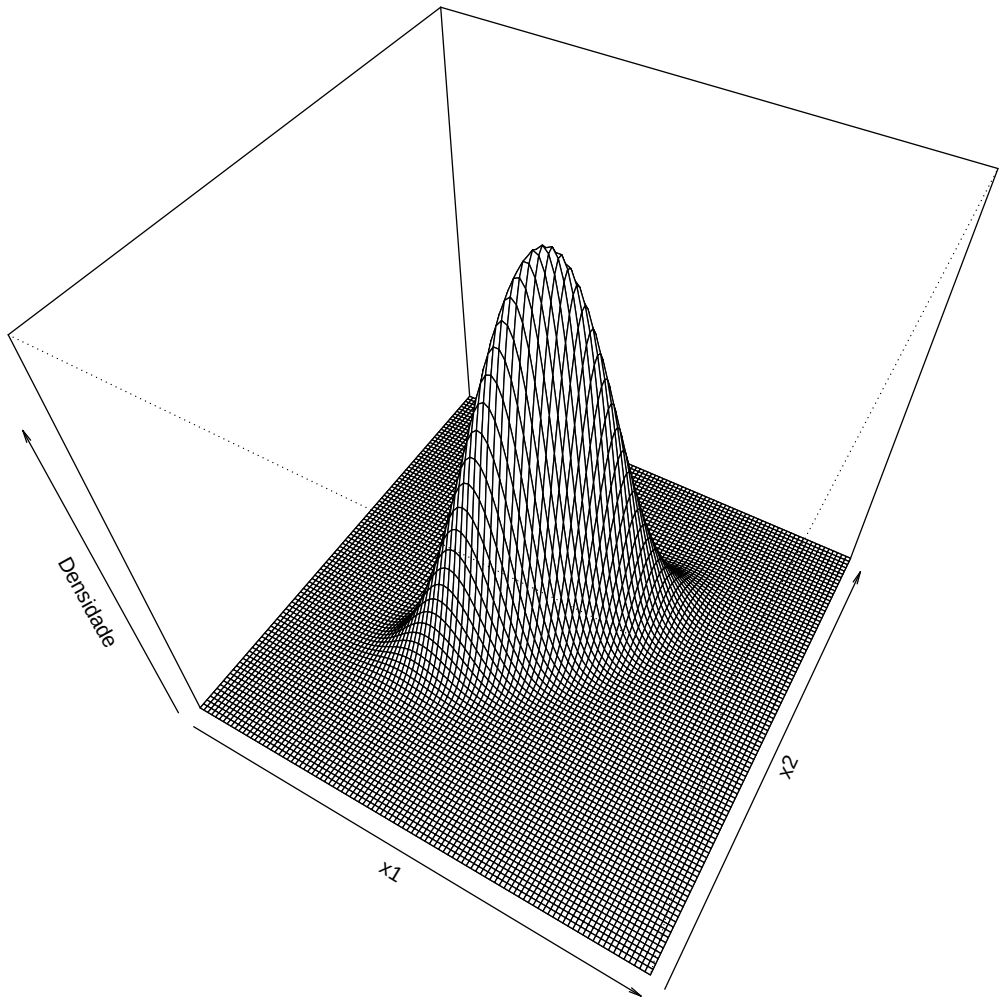
$$\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho_{12}^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\right)^2 + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\right)^2 - 2\rho_{12}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\right)\right]\right.$$

- No caso particular de $\rho_{12} = 0$, então $f(x_1, x_2) = f(x_1)f(x_2)$ e x_1 e x_2 dizem-se independentes

Distribuição normal multivariada ($\rho = 0$)



Distribuição normal multivariada ($\rho \neq 0$)



Distribuição normal multivariada

- Das figuras anteriores fica claro que densidades constantes correspondem a cortes transversais da normal bivariada ($p = 2$) desenhando **elipses de densidade constante**
- Essas elipses de densidade constante ($p = 2$) correspondem a distâncias constantes tal que

$$(x - \mu)'(\mathbf{\Sigma})^{-1}(x - \mu) = c^2$$

sendo c a distância conhecida por **Distância de Mahalanobis**

- Genericamente (i.e., para qualquer p)

$$\begin{aligned} \text{Densidade constantes} &= \{\text{valores de } \mathbf{x} \text{ tal que } (x - \boldsymbol{\mu})'(\mathbf{\Sigma})^{-1}(x - \boldsymbol{\mu}) = c^2\} \\ &= \text{ superfícies elipsoides centrada em } \boldsymbol{\mu} \end{aligned}$$

- Propriedades das **elipsoides de densidade constante**:
  1. Centradas em $\boldsymbol{\mu}$
  2. Os eixos têm a direção dos vetores próprios de $\mathbf{\Sigma}$
  3. Os comprimentos dos eixos são proporcionais à raiz quadrada dos valores próprios de $\mathbf{\Sigma}$
- Em resumo, os p eixos são definidos por

$$\boldsymbol{\mu} \pm c\sqrt{\lambda_i}e_i \, (i = 1, ..., p)$$

onde $\boldsymbol{\lambda}$ e $\mathbf{e}$ representam os valores e vetores próprios de $\mathbf{\Sigma}$, respetivamente

Distribuição normal multivariada

- Seja $\mathbf{z} = (\mathbf{\Sigma}^{1/2})^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$ tal que $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}^{1/2}\mathbf{\Sigma}^{1/2}$, então

$$\mathbf{x} \frown N_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma}) \Rightarrow \mathbf{z} \frown N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$$

- Atendendo à definição de $\mathbf{z}$ obtém-se que $\mathbf{z}'\mathbf{z} = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$, pelo que

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \frown \chi^2_p$$

- Logo, as superfícies elipsoides tais que

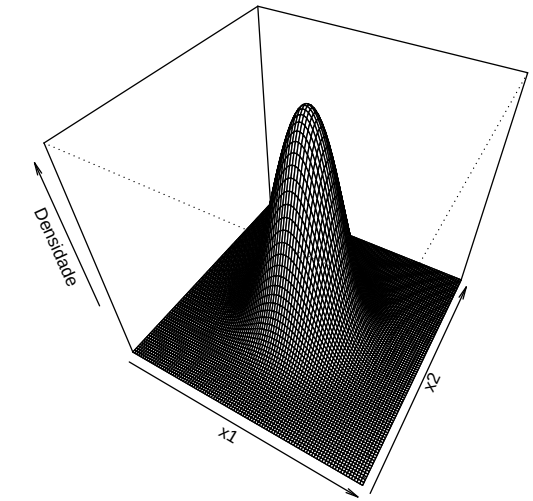
$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \leq \chi^2_{p,1-\alpha}$$

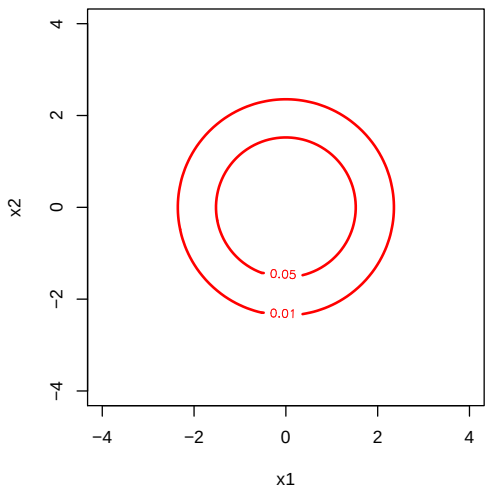
contêm $(1 - \alpha) \times 100\%$ dos valores de $\mathbf{x}$, tendo eixos definidos por

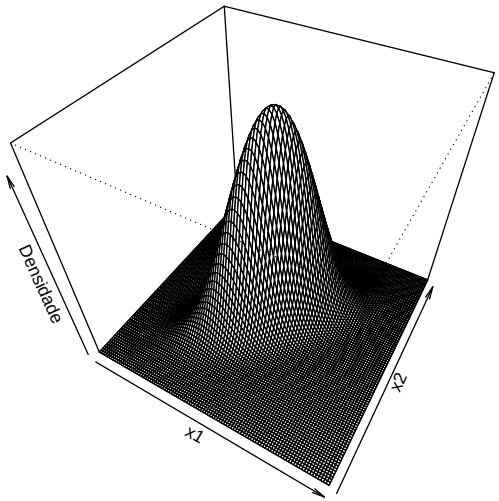
$$\boldsymbol{\mu} \pm c\sqrt{\lambda_i}\mathbf{e}_i \; (i = 1, ..., p)$$

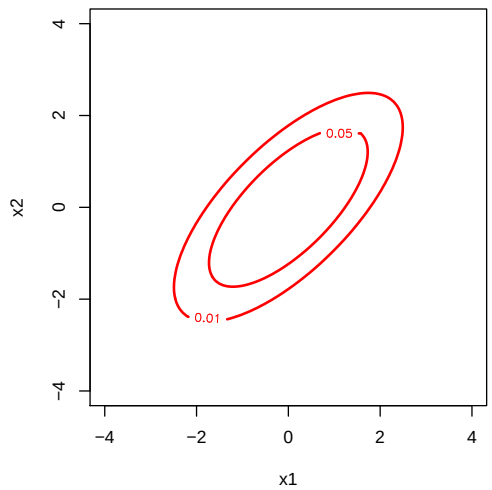
com $c = \sqrt{\chi^2_{p,1-\alpha}}$

Distribuição normal multivariada









Exemplo 8

Considere $\mathbf{x} \frown N_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, com $\boldsymbol{\mu}' = (5, 10)$ e

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 9 & 16 \\ 16 & 64 \end{bmatrix}$$

Defina a a superfície elíptica que contem aproximadamente 95% dos valores de $\mathbf{x}$.

Os valores próprios de $\boldsymbol{\Sigma}$ são os valores $\lambda_1 = 68.316$ e $\lambda_2 = 4.684$

Os vetores próprios normalizados da matriz $\boldsymbol{\Sigma}$ são $\mathbf{e}_1' = (0.2604, 0.9655)$ e $\mathbf{e}_2' = (0.9655, -0.2604)$

Código R:

```
> Sigma<-matrix(c(9,16,16,64),2,2)
> eigen(Sigma)

eigen() decomposition
$values
[1] 68.315877  4.684123

$vectors
          [,1]       [,2]
[1,] 0.2604339 -0.9654917
[2,] 0.9654917  0.2604339
```

A superfície definida por

$$(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}) \leq \chi^2_{(2),0.95}$$

contem 95% dos valores de $\mathbf{x}$.

Fixando $c = \sqrt{\chi^2_{(2),0.95}} = \sqrt{5.9915}$, a superfície elíptica que contem aproximadamente 95% tem eixos

$$\boldsymbol{\mu} \pm c\sqrt{\lambda_i}\mathbf{e}_i \; (i = 1, 2)$$

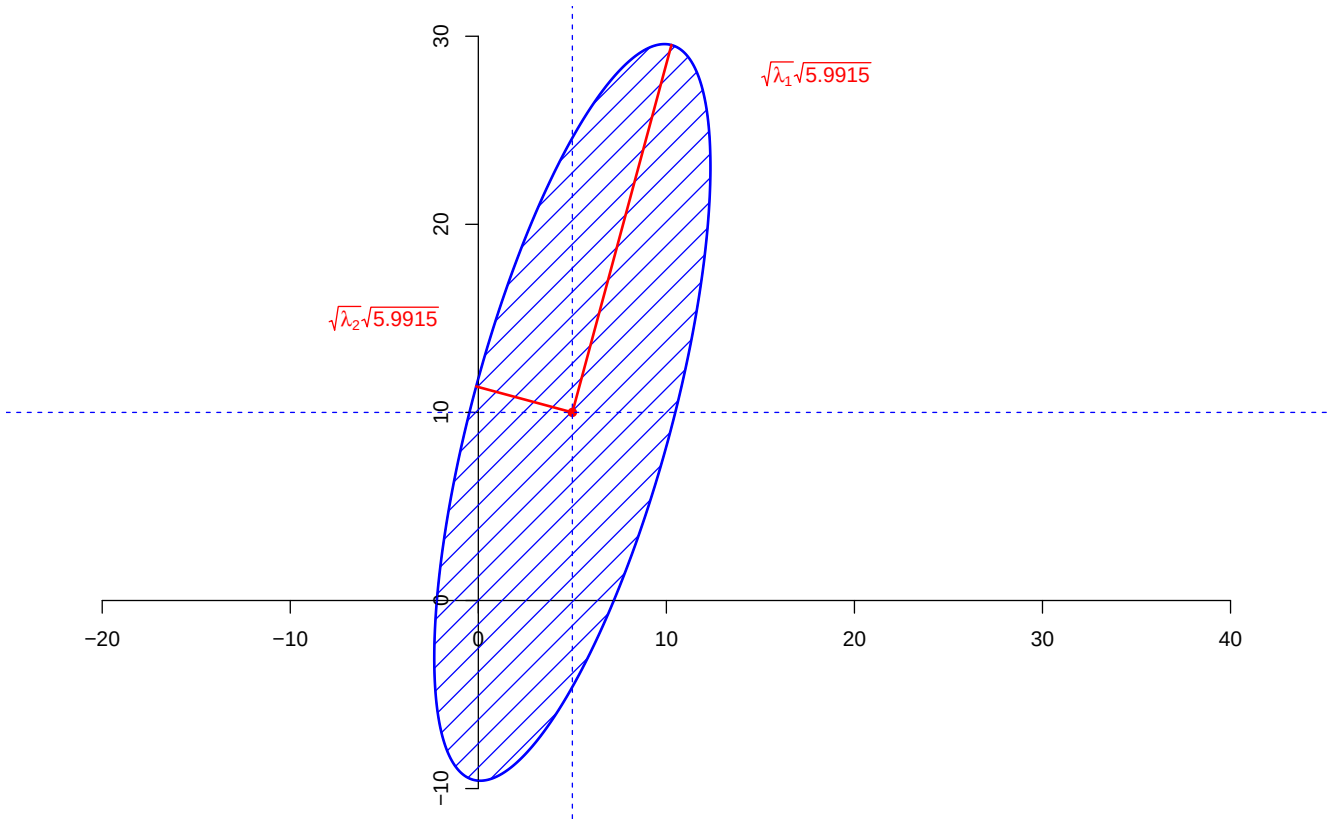
Maior eixo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\mu}} \pm \underbrace{\sqrt{5.9915}}_{\chi^2_{(2),0.95}} \underbrace{\sqrt{68.316}}_{\sqrt{\lambda_1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0.2604 \\ 0.9655 \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}_1} = \begin{bmatrix} -0.272 \\ -9.551 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10.273 \\ 29.551 \end{bmatrix}$$

Menor eixo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\mu}} \pm \underbrace{\sqrt{5.9915}}_{\chi^2_{(2),0.95}} \underbrace{\sqrt{4.684}}_{\sqrt{\lambda_2}} \underbrace{\begin{bmatrix} -0.9655 \\ 0.2604 \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}_2} = \begin{bmatrix} -0.0119 \\ 11.381 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10.119 \\ 8.619 \end{bmatrix}$$

(continuação)



Propriedades da distribuição normal multivariada

Seja $\mathbf{x}$ um vetor aleatório com distribuição $N_p(\mu, \mathbf{\Sigma})$:

- **Normalidade de combinações lineares**:
  - Se a' é um vetor de constantes então a combinação linear $a'\mathbf{x} = a_1x_1 + \ldots + a_px_p$ tem distribuição normal univariada

$$a'\mathbf{x} \frown N(a'\mu, a'\mathbf{\Sigma}a)$$

  - Se $\mathbf{A}$ é uma matriz de constantes $q \times p\,(q < p)$, as q combinações lineares $\mathbf{Ax}$ têm distribuição normal multivariada

$$\mathbf{Ax} \frown N_q(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{A\Sigma A}')$$

- **Distribuição normal padrão multivariada**: Seja $\mathbf{z} = (\mathbf{\Sigma})^{-1/2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$ então

$$\mathbf{z} \frown N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$$

Exemplo 9

Seja $\mathbf{y} \frown N_4(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, com $\boldsymbol{\mu}' = (-2, 3, -1, 5)$ e

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 11 & -8 & 3 & 9 \\ -8 & 9 & -3 & 6 \\ 3 & -3 & 2 & 3 \\ 9 & 6 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

a) Qual a distribuição de $z = 4y_1 - 2y_2 + y_3 - 3y_4$?

$$\mu_z = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu} = -30 \quad \sigma_z^2 = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{c} = 297$$

logo $z \frown N(-30, 297)$

b) Considere as combinações lineares:

$$z_1 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 2$$

$$z_2 = -2y_1 + 3y_2 + y_3 - 2y_4$$

Qual a distribuição conjunta de z_1 e z_2?

$$\mathbf{z} \frown N_2\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 51 & -67 \\ -67 & 217 \end{bmatrix} \right)$$

Propriedades da distribuição normal multivariada

- **Normalidade das margens**:
  - Todos os subconjuntos de uma normal multivariada são necessariamente normais $\Rightarrow$ um vetor multivariado só terá distribuição normail multivariada se todas as partições forem normais
  - Mais especificamente, qualquer partição com 2 subconjuntos com q e $p-q$ variáveis tem distribuição normal.
  - Seja $\mathbf{x}_1' = (x_1, \ldots, x_q)$ e $\mathbf{x}_2' = (x_{q+1}, \ldots, x_p)$ os dois subvetores formados pela partição, então

$$\mathbf{x}_1 \frown N_q(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{11})$$

$$\mathbf{x}_2 \frown N_{p-q}(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_{22})$$

  - Como caso particular, considerando p partições, tem-se

$$y_j \frown N(\mu_j, \sigma_j)\,(j = 1, \ldots, p)$$

  (Atenção: o contrário não é necessariamente verdadeiro!)

Exemplo (continuação)

c) Qual a distribuição de y_3?

$$y_3 \frown N(-1, 2)$$

d) Qual a distribuição conjunta de y_2 e y_4?

Note-se que

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_4 \\ \hdashline y_1 \\ y_3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_2 \\ \mu_4 \\ \hdashline \mu_1 \\ \mu_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \left[\begin{array}{cc:cc} \sigma_{22} & \sigma_{24} & \sigma_{21} & \sigma_{23} \\ \sigma_{42} & \sigma_{44} & \sigma_{41} & \sigma_{43} \\ \hdashline \sigma_{12} & \sigma_{14} & \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{32} & \sigma_{34} & \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{array}\right]$$

Logo, $\mathbf{y}^{(1)} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_4 \end{bmatrix} \frown N_2\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \right)$

Propriedades da distribuição normal multivariada

Seja $\mathbf{x}$ um vetor aleatório com distribuição $N_p(\mu, \mathbf{\Sigma})$ e $\mathbf{x}' = (x_1, ..., x_q)$ e $\mathbf{y}' = (y_1, ..., y_p)$ dois subvetores resultantes da partição em 2 conjuntos com q e p elementos:

- **Independência**:
  - Dois subvetores são independentes se $\mathbf{\Sigma_{xy}} = \mathbf{O}$ (apenas em populações normais)
  - Duas variáveis x_1 e x_2 são independentes se $\sigma_{12} = 0$ (apenas em populações normais)
- **Distribuição condicional**: Se 2 subvetores não são independentes então $\mathbf{\Sigma_{xy}} \neq \mathbf{O}$ e a distribuição condicional de $\mathbf{y}$ dado $\mathbf{x}$, $f(\mathbf{y}|\mathbf{x})$, é normal multivariada com parâmetros

$$E(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mu}_\mathbf{y} + \mathbf{\Sigma_{yx}}\mathbf{\Sigma_{xx}}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{x})$$

$$Cov(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \mathbf{\Sigma_{yy}} - \mathbf{\Sigma_{yx}}\mathbf{\Sigma_{xx}}^{-1}\mathbf{\Sigma_{xy}}$$

- **Distribuição da soma**: Seja $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ vetores independentes com o mesmo comprimento, então

$$\mathbf{x} \pm \mathbf{y} \frown N_p(\boldsymbol{\mu}_x \pm \boldsymbol{\mu}_y, \mathbf{\Sigma}_{xx} + \mathbf{\Sigma}_{yy})$$

Exemplo 10

Seja $\mathbf{x} \frown N_3(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, com

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Serão x_1 e x_2 v.a. independentes?
$\sigma_{12} = 1$, logo x_1 e x_2 não são independentes.

b) Será (x_1, x_2) independente de x_3?

$\mathbf{x}^{(1)} = (x_1, x_2)'$ e $\mathbf{x}^{(2)} = x_3$ são independentes se $\boldsymbol{\Sigma}_{12} = \mathbf{O}$

Note-se que

$$\mathbf{x} = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \hdashline x_3 \end{array}\right]$$

e

$$\boldsymbol{\Sigma} = \left[\begin{array}{cc:c} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \hdashline \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc:c} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Logo, (x_1, x_2) e x_3 são independentes.