

# Dinâmica e Controle de Veículos Espaciais

Prof. André Luís da Silva

## Aula 3

### CINEMÁTICA DE ATITUDE

- Parametrização de atitude: matriz de cossenos diretores (MCD), ângulos de Euler, eixo principal de rotação de Euler, quatérnios, parâmetros de Rodrigues, parâmetros de Rodrigues modificados.
- Equações de cinemática de rotação.

Referências:

[1] TEWARI, A., Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modeling and Simulation with Matlab and Simulink. Springer-Verlag, 2007.

[2] TRINDADE, M.A. and SAMPAIO, R. Uma revisão sobre a parametrização de rotações finitas na dinâmica de corpos rígidos. *J. Braz. Soc. Mech. Sci.* [online]. 2000, vol.22, n.2, pp.341-377. <[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0100-73862000000200015&lng=en&nrm=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0100-73862000000200015&lng=en&nrm=iso)>. ISSN 0100-7386. <http://dx.doi.org/10.1590/S0100-73862000000200015>.

### 1. Parametrização de Atitude

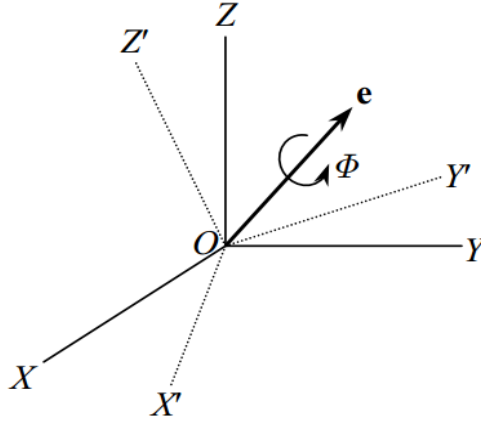
Como visto em disciplinas anteriores, tais como desempenho de aeronaves e mecânica de voo, existem várias maneiras de se representar a atitude. As mais comuns são os ângulos de Euler (usualmente a sequência 321) e a matriz de cossenos diretores (matriz de atitude ou de rotação). Ao se realizar a modelagem e controle de veículos espaciais, outras parametrizações além destas podem se fazer necessárias. Por isso, essa aula apresenta uma revisão das duas representações mais usuais (ângulos de Euler e matriz de cossenos diretores) e introduz outras: eixo de Euler e ângulo principal, quatérnios, parâmetros de Rodrigues, parâmetros de Rodrigues modificados.

#### 1.1. Matriz de Cossenos Diretores

Um vetor pode ser escrito em uma infinidade de sistemas de eixos de referência (SER), cada um representado por uma tríade de vetores unitários. A discussão será restrita a sistemas que seguem a regra da mão direita.

Qualquer orientação de um sistema de eixos de referência pode ser derivada pela rotação de eixos ortogonais em torno da origem,  $O$ . Às vezes, pode ser necessário usar um sistema de eixos com uma origem diferente  $O'$ . Então a transformação geral de um sistema de eixos de referência para outro consiste de uma translação da origem, e uma rotação de eixos em torno da origem. Enquanto a translação de sistemas de referência é trivial, a rotação é um pouco mais sofisticada, podendo ser

representada como segue na figura 1. Considere um sistema  $OXYZ$  com eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , aos quais estão associados os vetores diretores  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$ , respectivamente. O sistema é girado em torno da origem  $O$ , para produzir o sistema  $OX'Y'Z'$ , cujos vetores diretores são  $\mathbf{i}'$ ,  $\mathbf{j}'$  e  $\mathbf{k}'$ .



**Figura 1:** Rotação de um sistema de eixos de referência.

Assim, por definição, um dado vetor  $\mathbf{A}$  pode ser escrito em ambos os sistemas de eixo de referência como:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} = A'_x \mathbf{i}' + A'_y \mathbf{j}' + A'_z \mathbf{k}' \quad (1)$$

O mesmo vetor  $\mathbf{A}$  pode ser escrito em notação matricial nos dois sistemas de referência:

$$\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{A}' = \begin{Bmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Para obter uma relação entre as componentes  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$  e  $A'_x$ ,  $A'_y$ ,  $A'_z$ , toma-se os produtos escalares  $\mathbf{i}' \cdot \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{j}' \cdot \mathbf{A}$  e  $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{A}$  na equação (1), resultando, após algumas manipulações em:

$$\begin{Bmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}' \cdot \mathbf{i} & \mathbf{i}' \cdot \mathbf{j} & \mathbf{i}' \cdot \mathbf{k} \\ \mathbf{j}' \cdot \mathbf{i} & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{j} & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{k} \\ \mathbf{k}' \cdot \mathbf{i} & \mathbf{k}' \cdot \mathbf{j} & \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Também é possível realizar o produto escalar entre  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$ , resultando em:

$$\begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i}' & \mathbf{i} \cdot \mathbf{j}' & \mathbf{i} \cdot \mathbf{k}' \\ \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}' & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}' & \mathbf{j} \cdot \mathbf{k}' \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{i}' & \mathbf{k} \cdot \mathbf{j}' & \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{Bmatrix} \quad (4)$$

A equação 3 pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{Bmatrix} = \mathbf{C} \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Onde a matriz  $\mathbf{C}$  é definida como:

$$\mathbf{C} \doteq \begin{pmatrix} \mathbf{i}' \cdot \mathbf{i} & \mathbf{i}' \cdot \mathbf{j} & \mathbf{i}' \cdot \mathbf{k} \\ \mathbf{j}' \cdot \mathbf{i} & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{j} & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{k} \\ \mathbf{k}' \cdot \mathbf{i} & \mathbf{k}' \cdot \mathbf{j} & \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Claramente, a matriz  $\mathbf{C}$  é uma **matriz de mudança de coordenadas** entre os dois sistemas de referência, ou seja, ela permite converter um vetor com componentes no sistema  $i, j, k$ , para a sua representação no sistema  $i', j', k'$ .

A matriz  $\mathbf{C}$  é definida como **matriz de rotação**, ou **matriz de cossenos diretores (MCD)**. Em inglês: DCM (*direction cosine matrix*).

Na equação 4, por outro lado, consta a transformação de coordenadas no sentido inverso: converte um vetor com componentes no sistema  $i', j', k'$  para a sua representação no sistema  $i, j, k$ . Então, a matriz da equação 4 é a inversa  $\mathbf{C}^{-1}$ .

Pelas equações 3 e 4, é claro que as matrizes presentes são uma a transposta da outra. Assim, verifica-se a conhecida propriedade de **matriz ortogonal**:

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^T \quad (7)$$

Além da propriedade de inversão/transposição, uma matriz ortogonal também satisfaz  $\det \mathbf{C} = \pm 1$ . Se a matriz de rotação possui determinante +1, a rotação é dita **própria**.

## 1.2. Rotações Sucessivas

Algo muito importante em manobras de atitude são as rotações sucessivas. Pela definição de matriz de rotação, é fácil perceber que **duas rotações sucessivas têm sua matriz de rotação dada pelo produto das matrizes de rotação individuais**:

$$\mathbf{C}'' = \mathbf{C}'\mathbf{C} \quad (8)$$

Onde  $\mathbf{C}$  é a matriz da primeira rotação,  $\mathbf{C}'$  é a matriz da segunda rotação e  $\mathbf{C}''$  é a matriz que representa uma terceira rotação obtida pela combinação das duas primeiras.

## 1.3. Eixo de Euler e Ângulo Principal

A rotação de um sistema de referência também pode ser descrita por um **eixo de rotação** junto do **ângulo** a partir do qual o sistema é girado, como ilustrado da figura 1. Esta noção intuitiva é formalizada no **Teorema de Euler**.

**Teorema de Euler:** a orientação relativa de qualquer par de sistemas de eixos de referência é unicamente determinada por uma rotação por um ângulo  $\Phi$ , ao redor de um eixo que passa por uma origem comum, chamado de **eixo de Euler**. Esta rotação é chamada de **ângulo principal**.

O eixo e o ângulo possuem duas escolhas possíveis, a figura 1 ilustra o caso de uma rotação de mão direita, onde o sentido positivo do ângulo principal foi tomado pela regra da mão direita em relação ao eixo (sentido horário para quem olha o eixo de frente).

O par eixo de Euler e ângulo principal é **outra forma de parametrização de atitude**. Para fins práticos, é necessário verificar como o vetor unitário " $\mathbf{e}$ " e o ângulo principal " $\Phi$ " são determinados.

Em linhas gerais, isso é feito pelo cálculo dos autovalores e autovetores da matriz de rotação, como demonstrado abaixo.

Um autovetor  $\mathbf{c}_1$  de uma matriz de rotação, associado ao autovalor unitário, não é alterado pela rotação. Então, como o eixo de Euler é invariante perante a rotação de sistemas de referência, ele é representado pelo autovetor  $\mathbf{c}_1$ .

$$\mathbf{C}\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_1$$

O vetor  $\mathbf{c}_1$ , assim como qualquer, tem módulo indeterminado. Pode-se escolher um autovetor normalizado, ou seja, com norma unitária:  $\|\mathbf{c}_1\| = 1$ .

Em resumo, determina-se o eixo de Euler da seguinte maneira:

$$\mathbf{e} = \mathbf{c}_1 \quad (6)$$

onde  $\mathbf{c}_1$  é um autovetor normalizado associado ao autovalor unitário da matriz de rotação.

Os outros dois autovalores da matriz de rotação são complexos conjugados com magnitude unitária, sendo escritos como:  $\lambda_{2,3} = e^{\pm i\beta} = \cos\beta \pm i\sin\beta$ , com respectivos autovetores  $\mathbf{c}_2$  e  $\mathbf{c}_3$ . Então, pela definição de autovalor e autovetor:

$$\mathbf{C}\mathbf{c}_2 = e^{i\beta}\mathbf{c}_2, \quad \mathbf{C}\mathbf{c}_3 = e^{-i\beta}\mathbf{c}_3$$

Na representação no plano complexo de um vetor, o fator multiplicativo  $e^{i\beta}$  é análogo a uma rotação por um ângulo  $\beta$ . Logo, pode-se demonstrar que o ângulo principal é a própria fase dos autovalores complexos, ou seja:  $\Phi = \beta$ .

Um método simples de obter o ângulo principal é através do traço da matriz  $\mathbf{C}$ :

$$\begin{aligned} \text{trace}\mathbf{C} &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + e^{i\Phi} + e^{-i\Phi} = 1 + 2\cos\Phi \\ \cos\Phi &= \frac{1}{2}(\text{trace}\mathbf{C} - 1) \end{aligned} \quad (7)$$

No intervalo  $[0, 2\pi]$  existem dois resultados de  $\Phi$  na equação 7, diferindo somente por sinal. Cada um deles está associado a um eixo de Euler “ $\mathbf{e}$ ” em direções opostas. Isto não causa ambiguidade, pois, geometricamente, as rotações são as mesmas.

#### 1.4. Fórmula de Euler

Para uma orientação qualquer, dada em função de um eixo de Euler “ $\mathbf{e}$ ” e um ângulo principal  $\Phi$ , a respectiva matriz de rotação é dada por:

$$\mathbf{C} = \mathbf{I}\cos\Phi + (1 - \cos\Phi)\mathbf{e}\mathbf{e}^T - \sin\Phi\mathbf{S}(\mathbf{e}) \quad (8)$$

Onde:

$\mathbf{I}$  é a matriz identidade 3x3.

$\mathbf{S}(\mathbf{e})$  é a matriz antissimétrica do produto vetorial associada ao vetor  $\mathbf{e}$ .

$$S(e) = \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

### 1.5. Rotações Elementares

Rotações elementares são aquelas obtidas em torno dos eixos do sistema de referência.

Podem ser facilmente calculadas pela fórmula de Euler.

Rotação positiva em torno do eixo X, aplicando a fórmula de Euler para  $e = i$ :

$$C_1 \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi & \sin \Phi \\ 0 & -\sin \Phi & \cos \Phi \end{pmatrix} \quad (10)$$

Rotação positiva em torno do eixo Y, aplicando a fórmula de Euler para  $e = j$ :

$$C_2 \doteq \begin{pmatrix} \cos \Phi & 0 & -\sin \Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Phi & 0 & \cos \Phi \end{pmatrix} \quad (11)$$

Rotação positiva em torno do eixo Z, aplicando a fórmula de Euler para  $e = k$ :

$$C_3 \doteq \begin{pmatrix} \cos \Phi & \sin \Phi & 0 \\ -\sin \Phi & \cos \Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

### 1.6. Ângulos de Euler

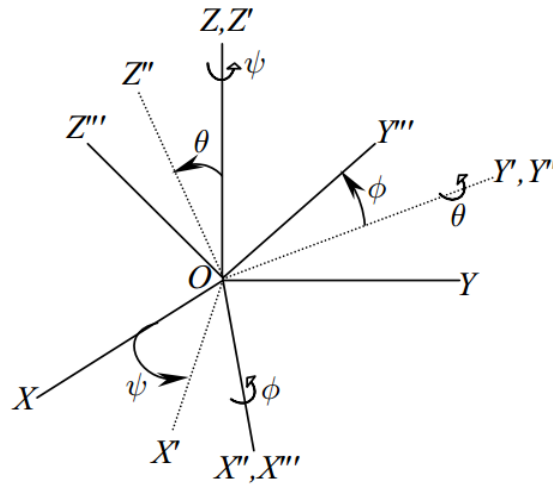
Uma das formas mais comuns de se representar a atitude de um sistema de eixos é pelos ângulos de Euler, obtidos pela realização de **rotações sucessivas em torno de eixos do sistema de referência inicial e intermediários**.

Tais rotações são chamadas de: **graus de liberdade de rotação**, sendo que o maior número possível é 3. Então, a atitude pode ser representada por **3 rotações sucessivas de eixos intermediários não colineares**, os **Ângulos de Euler**.

A sequência de rotações é de importância fundamental na representação por ângulos de Euler. Uma orientação qualquer pode ser obtida por diversas sequências de rotações. A figura 2 ilustra uma transformação de sistemas de coordenadas específica, que é obtida pela sequência de rotações:  $(\psi)_3, (\theta)_2, (\phi)_1$  que denota:

- Uma rotação de OXYZ por um ângulo  $\psi$  em torno de OZ;
- Resultando no sistema intermediário OX'Y'Z';
- Seguida de uma rotação de OX'Y'Z' por um ângulo  $\theta$  em torno de OY';
- Resultando no sistema intermediário OX''Y''Z'';
- Finalizando com uma rotação de ângulo  $\phi$  em torno de OX'';

- Resultando no sistema final  $OX'''Y'''Z'''$ .



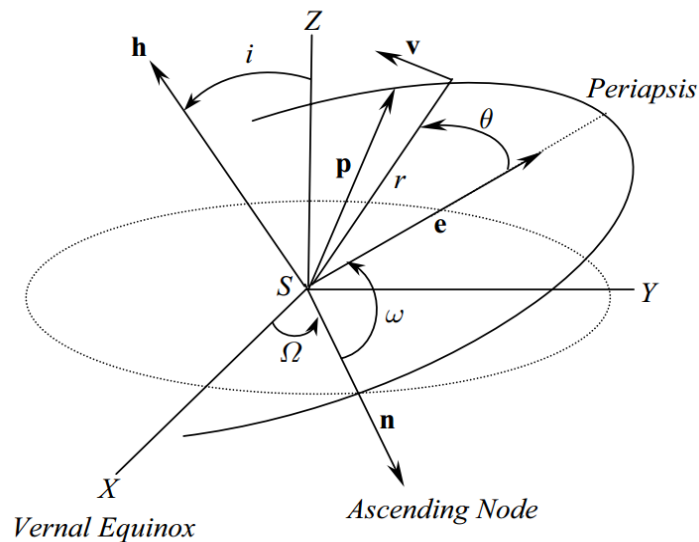
**Figura 2:** Ângulos de Euler para a sequência de rotação  $(\psi)_3, (\theta)_2, (\phi)_1$ .

A sequência esplanada acima é uma das mais comuns adotadas em representação de atitude de aeronaves. Ela é chamada sinteticamente, de **ordem 321**. Em tal situação, os ângulos recebem os seguintes nomes:  $\phi$ : rolamento (*roll*),  $\theta$ : arfagem (*pitch*);  $\psi$ : guinada (*yaw*).

A matriz de rotação obtida para esta sequência de rotações é dada por:

$$C = C_1(\phi)C_2(\theta)C_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ (\sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi) & (\sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi) & \sin \phi \cos \theta \\ (\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) & (\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \quad (13)$$

**Não é necessário que todas as 3 rotações estejam tomadas em eixos diferentes.** Por exemplo, em mecânica orbital são adotados os ângulos de Euler:  $(\Omega)_3, (i)_1, (\omega)_3$ . Eles representam a orientação do sistema orbital com respeito ao celeste, como mostra a figura 3.



**Figura 3:** Representação em ângulos de Euler do Plano Orbital.

Neste caso, a sintaxe resumida é **313** e os ângulos recebem os seguintes nomes:  $\Omega$ : longitude celeste do nodo ascendente;  $i$ : inclinação;  $\omega$ : argumento de periastro.

Um conjunto de ângulos de Euler que **começa e termina com o mesmo eixo**, tal como este do segundo exemplo, é dito **simétrico**.

Os conjuntos simétricos e assimétricos de ângulos de Euler são qualitativamente diferentes e possuem características computacionais também distintas, sendo os primeiros, geralmente, mais fáceis de manipular.

**A conversão de matriz de atitude para ângulos de Euler depende da sequência de rotações adotada.** Para a sequência de rotações 321, a partir dos elementos da matriz da equação 13, obtêm-se as seguintes relações de conversão:

$$\begin{aligned}\phi &= \tan^{-1} \frac{c_{23}}{c_{33}}, \\ \theta &= -\sin^{-1} c_{13}, \\ \psi &= \tan^{-1} \frac{c_{12}}{c_{11}},\end{aligned}\tag{14}$$

Pelas regras de conversão da equação (14), **os ângulos não são únicos**, em virtude das funções trigonométricas inversas e da duplicidade dos arcos. Além disso, existem condições nas quais os ângulos não podem ser determinados por completo (divisão por zero para  $c_{11} = 0$  ou  $c_{33} = 0$ ). Nestes casos, a representação por ângulos de Euler é dita **singular**.

Na sequência 321, a **orientação singular** é  $(\psi)_3, (\pm 90^\circ)_2, (\phi)_1$ , ou seja: ângulo de arfagem  $\theta = \pm 90^\circ$  para qualquer valor dos outros dois. Neste caso, pela equação 13,  $c_{11} = c_{33} = 0$  e ocorre as divisões por zero na equação 14, assim os ângulos  $\phi$  e  $\psi$  se tornam indeterminados na conversão.

Em aplicações práticas, a singularidade  $(\psi)_3, (\pm 90^\circ)_2, (\phi)_1$  pode não provocar qualquer efeito. Por exemplo, em um avião comercial, o ângulo de arfagem  $\pm 90^\circ$  é raramente atingido. No entanto, em um foguete, este ângulo é muito comum, visto que este decola na vertical. Em situações como esta, pode-se adotar outra representação de ângulos, tal como  $(\psi)_3, (\theta)_1, (\phi)_3$ , onde tal singularidade particular é evitada, mas outra é obtida em uma orientação diferente.

Uma sequência de **ângulos de Euler sempre terá uma singularidade**, por isso, em problemas onde qualquer orientação pode ser obtida, é necessário usar mais de uma sequência de rotações, onde cada uma apresenta singularidade em orientações diferentes.

**A singularidade é uma deficiência presente em qualquer representação de atitude com 3 parâmetros**, tais como ângulos de Euler ou eixo de Euler e ângulo principal. Assim, é importante buscar representações de atitude **não singulares**, as quais possuirão uma **quantidade maior de parâmetros**. Uma escolha óbvia para representação não singular é a matriz de atitude, a qual possui 9 parâmetros.

Mas, enquanto as representações **não singulares** tenham tal vantagem, seus **parâmetros não são mutuamente independentes**. Por exemplo, a matriz de atitude tem que satisfazer  $C^T C = I$ , o que acaba gerando acoplamento entre seus elementos.

### 1.7. Quatérnios

O **quatérnio** é um arranjo de 4 elementos. Ele fornece uma solução de compromisso entre singularidade e baixo número de parâmetros, pois **não possui singularidades** e constitui um conjunto de somente um parâmetro acima do mínimo.

Um quatérnio é obtido a partir do conjunto eixo de Euler/ângulo principal, sendo chamado de **parâmetros simétricos de Euler**. Ele é um conjunto especial composto por 4 parâmetros escalares mutuamente dependentes:  $q_1, q_2, q_3, q_4$  (algumas bibliografias usam  $q_0, q_1, q_2, q_3$ ). Os primeiros três parâmetros formam um vetor, chamado de **parte vetorial**. O quarto parâmetro,  $q_4$ , é chamado de **parte escalar**.

$$\mathbf{q} \equiv \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (15)$$

O conceito de quatérnio extrapola o contexto de parametrização de atitude. Na verdade, um quatérnio é um **número hiper complexo com 3 partes imaginárias**:

$$Q = q_4 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \quad (16)$$

onde  $i, j$  e  $k$  são unidades imaginárias.

O conceito foi desenvolvido pelo matemático irlandês Sir William Rowan Hamilton em 1843. Seu maior desejo era encontrar uma **forma de dividir vetores**. Andando pela cidade de Dublin, ele teve um **lampejo de genialidade sobre uma ponte**, onde **anotou em uma pedra** a relação fundamental:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \quad (17)$$

Para mais informações: <https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion>

A álgebra de quatérnios cria um ramo bastante vasto dentro da matemática, dentro do qual uma das aplicações é a mecânica de corpos rígidos e parametrização de atitude. Nesta disciplina, um quatérnio é limitado para os propósitos que interessam. Neste sentido, define-se um quatérnio a partir do eixo de Euler " $e$ " e ângulo principal  $\Phi$ :

$$\mathbf{q} \equiv \sin \frac{\Phi}{2} \mathbf{e} \quad \text{Parte vetorial} \quad (18-a)$$

$$q_4 \equiv \cos \frac{\Phi}{2} \quad \text{Parte escalar} \quad (18-b)$$

Pela definição (18), um **quatérnio de representação de atitude** satisfaz a seguinte propriedade, a qual é responsável por definir a **interdependência** entre os **parâmetros**:



$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1 \quad (19)$$

Os quatro elementos de um quatérnio podem ser agrupados na forma matricial:

$$\mathbf{Q} \equiv \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Ou na forma complexa:

$$\mathbf{Q} = q_4 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \quad (21)$$

Então, a propriedade (19) de um quatérnio de atitude pode ser representada a partir da notação de **módulo** de número complexo:

$$\|\mathbf{Q}\|^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1 \quad (22)$$

Como visto acima, os quatérnios de representação de atitude, definidos conforme a equação 18, possuem módulo unitário. No entanto, isto não é generalizado para quatérnios no sentido amplo, pois, na concepção geral de quatérnio da equação (16),  $q_1, q_2, q_3$  e  $q_4$  são números reais quaisquer.

O comentário acima é feito por questão de curiosidade, pois, como mencionado acima: **no curso**, atém-se **somente** a **quatérnios** que satisfazem a definição na equação (18), de modo que estejam **relacionados com a atitude** de um sistema de eixos de referência.

A equação (22) possui uma interpretação geométrica interessante: *o conjunto de todas as atitudes possíveis é uma hiper esfera quadridimensional de raio unitário e centro na origem.*

A principal vantagem do quatérnio em relação ao par eixo de Euler/ângulo principal é a maior simplicidade computacional associada com o primeiro. Por exemplo: um quatérnio não requer o cálculo intensivo de funções trigonométricas quando obtido de uma matriz de rotação.

A conversão de quatérnio para matriz de rotações pode ser feita substituindo a definição da equação (18) na fórmula de Euler (equação 8), resultando em:

$$\mathbf{C} = (q_4^2 - \mathbf{q}^T \mathbf{q}) \mathbf{I} + 2 \mathbf{q} \mathbf{q}^T - 2 q_4 \mathbf{S}(\mathbf{q}) \quad (23)$$

onde  $\mathbf{S}(\mathbf{q})$  é a matriz antissimétrica do produto vetorial aplicada à parte vetorial do quatérnio.

Matriz  $\mathbf{C}$  escrita explicitamente:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1 q_2 + q_3 q_4) & 2(q_1 q_3 - q_2 q_4) \\ 2(q_1 q_2 - q_3 q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2 q_3 + q_1 q_4) \\ 2(q_1 q_3 + q_2 q_4) & 2(q_2 q_3 - q_1 q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{pmatrix} \quad (24)$$

De modo análogo, é possível fazer o cálculo do quatérnio a partir da matriz de rotação:

$$\begin{aligned}
q_1 &= \frac{c_{23} - c_{32}}{4q_4}, \\
q_2 &= \frac{c_{31} - c_{13}}{4q_4}, \\
q_3 &= \frac{c_{12} - c_{21}}{4q_4}, \\
q_4 &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + c_{11} + c_{22} + c_{33}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + \text{trace} \mathbf{C}}.
\end{aligned}
\tag{25-a}$$

Parte vetorial

$$\tag{25-b}$$

Parte escalar

Na equação 25-b, a duplicidade de sinal na parte real do quatérnio não gera ambiguidade, pois, da mesma forma que no par eixo de Euler/ângulo principal, uma rotação de  $\Phi$  em torno de  $\mathbf{e}$  é o mesmo que uma rotação de  $-\Phi$  em torno de  $-\mathbf{e}$ . Logo, não há perda de generalidade em assumir o sinal positivo na equação 25-b.

A equação 25-a vale se a parte escalar do quatérnio é não nula. Se isto não for válido, a conversão pode ser feita de outra forma:

$$\begin{aligned}
q_2 &= \frac{c_{12} + c_{21}}{4q_1}, \\
q_3 &= \frac{c_{31} + c_{13}}{4q_1}, \\
q_4 &= \frac{c_{23} - c_{32}}{4q_1}, \\
q_1 &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + c_{11} - c_{22} - c_{33}}
\end{aligned}
\tag{26}$$

Outras duas possibilidades existem, as quais envolvem a divisão por  $q_2$  ou  $q_3$ . Um programa pode ser feito para realizar a conversão de matriz de atitude para quatérnio levando em conta qualquer possibilidade.

### 1.8. Rotações Sucessivas

A notação de quatérnio é compacta e não singular, que resulta em expressões algébricas em vez de trigonométricas para os elementos da matriz de rotação. Outro benefício de usar o quatérnio está na fácil representação de rotações sucessivas.

Quando uma orientação  $\mathbf{Q}''$  é obtida por duas rotações sucessivas, a primeira representada por  $\mathbf{Q}$  e a segunda por  $\mathbf{Q}'$ , pode-se escrever duas matrizes de rotação, de acordo com a equação (24), relacionadas a ambos quatérnios:  $\mathbf{C}(\mathbf{Q})$  e  $\mathbf{C}'(\mathbf{Q}')$ . Tais matrizes de rotação intermediárias geram a matriz de rotação da atitude final:

$$\mathbf{C}''(\mathbf{Q}'') = \mathbf{C}'(\mathbf{Q}')\mathbf{C}(\mathbf{Q})
\tag{27}$$

A matriz de rotação  $\mathbf{C}''(\mathbf{Q}'')$  pode ser obtida diretamente pelo quatérnio  $\mathbf{Q}''$  de acordo com a equação (24). Pode-se demonstrar que este quatérnio é dado pelo seguinte produto matricial:

$$\begin{bmatrix} q_1'' \\ q_2'' \\ q_3'' \\ q_4'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_4' & q_3' & -q_2' & q_1' \\ -q_3' & q_4' & q_1' & q_2' \\ q_2' & -q_1' & q_4' & q_3' \\ -q_1' & -q_2' & -q_3' & q_4' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Então, existem duas formas de se obter a matriz da rotação combinada: multiplicação matricial da equação (27), ou determinação do quatérnio pela (28) e geração da matriz pela equação 24.

Por outro lado, obter o quatérnio  $Q''$  a partir da equação 28 é computacionalmente mais simples (e mais leve em termos da quantidade de operações), do que calcular o produto matricial da equação 27 e depois determinar o quatérnio a partir das relações de conversão a partir de matriz. Uma redução drástica no número de operações, o que é muito desejável para processamentos computacionais intensivos.

A discussão acima mostra que, embora o quatérnio seja mais abstrato que a matriz de rotação, sob o ponto de vista de eficiência computacional, a notação de quatérnio é muito mais eficiente.

A equação (28) também pode ser escrita na forma compacta:

$$Q'' = M(Q')Q \quad (29)$$

Onde  $M(\cdot)$  é um operador matricial dado por:

$$M(Q) = \begin{bmatrix} q_4 & q_3 & -q_2 & q_1 \\ -q_3 & q_4 & q_1 & q_2 \\ q_2 & -q_1 & q_4 & q_3 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_4 \end{bmatrix} \quad (30)$$

onde  $Q$  é um quatérnio qualquer.

Este operador também pode ser escrito como:

$$M(Q) = \begin{bmatrix} q_4 I - S(q) & Q \\ -q^T & \end{bmatrix} \quad (31)$$

A operação na equação (29) é chamada de **produto de quatérnio**, pode-se demonstrar que esta mesma relação seria obtida a partir do produto complexo:

$$q_4'' + iq_1'' + jq_2'' + kq_3'' = (q_4' + iq_1' + jq_2' + kq_3')(q_4 + iq_1 + jq_2 + kq_3) \quad (32)$$

Onde a operação é distributiva e as unidades complexas têm seus produtos oriundos da equação 17, sendo dados por:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad (33-a)$$

$$\begin{aligned} ij &= k, & ji &= -k \\ jk &= i, & kj &= -i \\ ki &= j, & ik &= -j \end{aligned} \quad (33-b)$$

Devido à equação 33-b, o produto de quatérnios é não comutativo, assim como a troca na ordem das rotações sucessivas não é comutativa.

O conteúdo acima pode ser resumido pelo seguinte resultado: **Propriedade fundamental do produto de quatérnios de rotação**. Se uma atitude  $Q''$  é obtida por duas rotações sucessivas, a primeira representada por  $Q$  e a segunda por  $Q'$ , a rotação  $Q''$  é dada pelo produto de quatérnios:

$$Q'' = Q' \otimes Q \quad (34)$$

Onde  $\otimes$  é o operador de produto de quatérnios, escrito desta forma para evitar ambiguidade com a multiplicação usual. Esta operação é obtida na forma matricial pela equação (29), ou complexa pela equação (32). Em situações em que a ambiguidade com a multiplicação usual não é preocupante, o produto de quatérnios pode ser representado de maneira simples, omitindo o operador  $\otimes$ :

$$Q'' = Q' Q \quad (35)$$

O quatérnio possui uma diferença muito importante com respeito aos ângulos de Euler: nestes ângulos, não existe uma forma direta de representar rotações sucessivas; ao usá-los, a matriz de rotação precisa ser adotada em cálculos intermediários. Essa operação é bastante pesada computacionalmente, pois envolve, além de multiplicações de matrizes 3x3, um extensivo cálculo com funções trigonométricas.

### 1.9. Parâmetros de Rodrigues (Vetor de Gibbs)

Um conjunto de 3 parâmetros de atitude,  $\rho = [\rho_1, \rho_2, \rho_3]^T$ , chamado de **Parâmetros de Rodrigues**, ou **vetor de Gibbs**, é obtido diretamente do quatérnio  $Q = [q^T q_4]^T$  conforme segue:

$$\rho \equiv \frac{q}{q_4} \quad (36)$$

Esta equação, quando substituída na definição de quatérnio (equação 18) resulta em:

$$\rho = e \tan \frac{\Phi}{2} \quad (37)$$

A composição de rotações sucessivas para os parâmetros de Rodrigues pode ser obtida a partir da multiplicação de quatérnio (equação 35) e da definição (36), obtendo-se:

$$\rho'' = \frac{\rho + \rho' - \rho' \times \rho}{1 - \rho \cdot \rho'} \quad (38)$$

Onde  $\rho''$  representa a orientação final obtida pela combinação das rotações sucessivas  $\rho$  e  $\rho'$ , sendo  $\rho$  a primeira delas.

Sob o ponto de vista de carga computacional a representação por parâmetros de Rodrigues apresenta uma redução na carga computacional no cálculo de rotações sucessivas, em relação aos quatérnios. Para isso, basta comparar as equações 38 e 29/30.

Usando a fórmula de Euler (equação 8) e a equação 37, pode-se determinar uma expressão para a **matriz de rotação em função dos parâmetros de Rodrigues**:

$$\mathbf{C} = (\mathbf{I} - \mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}))(\mathbf{I} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}))^{-1} \quad (39)$$

onde  $\mathbf{S}(\boldsymbol{\rho})$  é a matriz antissimétrica do produto vetorial associada ao vetor de Gibbs  $\boldsymbol{\rho}$ .

Já os parâmetros de Rodrigues são obtidos a partir dos elementos a matriz de rotação como:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{c_{23} - c_{32}}{1 + \text{traço}(\mathbf{C})} \\ \rho_2 &= \frac{c_{31} - c_{13}}{1 + \text{traço}(\mathbf{C})} \\ \rho_3 &= \frac{c_{12} - c_{21}}{1 + \text{traço}(\mathbf{C})} \end{aligned} \quad (40)$$

É evidente pelas equações 37 e 40 que os **parâmetros de Rodrigues possuem singularidade**.

Por exemplo, na equação 37, isto ocorre para  $\Phi = n\pi$  ( $n = 1, 3, 5 \dots$ ). Então, o uso desta notação está limitado para rotações principais com  $|\Phi| < 180^\circ$ .

Desta forma, este conjunto de 3 parâmetros é similar aos ângulos de Euler, sendo incapaz de representar uma rotação arbitrária. Mas possui muitas vantagens, tais como: representação direta de rotações sucessivas, maneira mais simples de obter a matriz de rotação.

#### 1.10. Parâmetros de Rodrigues Modificados

De modo a estender a aplicabilidade dos parâmetros de Rodrigues para rotações principais maiores que  $180^\circ$ , um conjunto modificado de parâmetros é definido como:

$$\mathbf{p} \equiv \frac{\mathbf{q}}{1 + q_4} \quad (41)$$

De onde se obtém a seguinte relação com eixo de Euler/ângulo principal (da equação 18):

$$\mathbf{p} = \mathbf{e} \tan \frac{\Phi}{4} \quad (42)$$

Este conjunto é chamado de **parâmetros de Rodrigues modificados** (PRM):  $\mathbf{p} = [p_1, p_2, p_3]^T$ .

Pela equação (42), é claro que os PRMs são singulares para  $\Phi = n\pi$  ( $n = 2, 4, 6 \dots$ ). Em outras palavras, a parametrização PRM é não singular para rotações principais onde  $|\Phi| < 360^\circ$ .

A matriz de rotação pode ser expressa em termos dos PRMs conforme a equação seguinte, a qual pode ser obtida da fórmula de Euler (equação 8) e da equação (42).

$$\mathbf{C} = \mathbf{I} + \frac{4(\mathbf{p}^T \mathbf{p} - 1)}{(1 + \mathbf{p}^T \mathbf{p})^2} \mathbf{S}(\mathbf{p}) + \frac{8}{(1 + \mathbf{p}^T \mathbf{p})^2} \mathbf{S}^2(\mathbf{p}) \quad (43)$$

Já a relação entre os parâmetros de Rodrigues e os parâmetros de Rodrigues modificados é:

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{2\mathbf{p}}{1 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}} \quad (44)$$

Substituindo a equação 44 na equação de rotações sucessivas dos parâmetros de Rodrigues (equação 38), obtém-se a relação de **rotações sucessivas em termos dos PRM**:

$$\mathbf{p}'' = \frac{(1 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p})\mathbf{p}' + (1 - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{p}')\mathbf{p} - 2\mathbf{p}' \times \mathbf{p}}{1 + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{p}' \cdot \mathbf{p}') - 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}'} \quad (45)$$

Onde  $\mathbf{p}''$  representa a orientação final obtida pela combinação das rotações sucessivas  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{p}'$ , sendo  $\mathbf{p}$  a primeira.

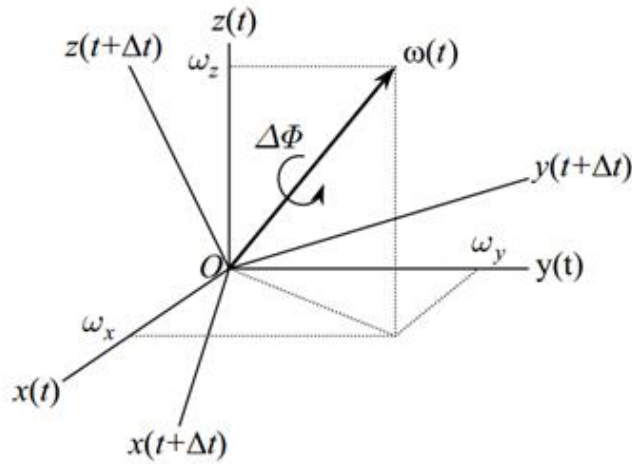
Como  $\mathbf{p}$  é um conjunto mínimo de parametrização de atitude, ele possui singularidade, assim como os outros conjuntos mínimos. A escolha a ser usada em cada aplicação deve ser estudada individualmente.

Os PRMs possuem menos equações de cinemática a serem resolvidas em relação ao quatérnio e matriz de rotação. Equações de cinemática de atitude são o objeto da próxima seção. Trata-se de equações diferenciais que relacionam os parâmetros de atitude com as velocidades angulares. O número de equações diferenciais sempre é igual ao de parâmetros de atitude.

## 2. Equações de cinemática de rotação

### 2.1. Cinemática da Matriz de Cossenos Diretores

Na figura 4, assume-se um sistema de eixos  $Oxyz$  que gira em função do tempo. Assume-se que  $\mathbf{C}(t)$  seja a matriz de rotação de  $Oxyz$  com respeito a algum referencial fixo que não é indicado na figura.



**Figura 4:** Sistema de coordenadas girante.

Assume-se que, em um intervalo de tempo  $\Delta t$ , ocorre uma rotação principal por um ângulo  $\Delta\Phi$ . Ela se dá em torno do eixo de Euler  $\mathbf{e}$ , escrito no sistema  $Oxyz$  no instante  $t$ . Como demonstrado a seguir, o eixo  $\mathbf{e}$  coincide em direção com o vetor velocidade angular no instante  $t$ :  $\boldsymbol{\omega}(t)$ . Estes vetores variam com o tempo, mas considerados imutáveis em um pequeno intervalo.

Usando a regra das rotações sucessivas, a matriz de atitude no instante  $t + \Delta t$  está relacionada com a matriz de atitude no instante  $t$  da seguinte maneira:

$$\mathbf{C}(t + \Delta t) = \Delta \mathbf{C} \mathbf{C}(t) \quad (46)$$

Onde  $\Delta \mathbf{C}$  é a matriz que representa a rotação ocorrida ao longo do intervalo de duração  $\Delta t$ . Pela fórmula de Euler, essa matriz é dada por:

$$\Delta \mathbf{C} = \mathbf{I} \cos(\Delta \Phi) + (1 - \cos(\Delta \Phi)) \mathbf{e}(t) \mathbf{e}^T(t) - \sin(\Delta \Phi) \mathbf{S}(\mathbf{e}(t)) \quad (47)$$

Assumindo que a rotação incremental  $\Delta \mathbf{C}$  ocorre em um intervalo de tempo muito curto, pode-se fazer  $\cos(\Delta \Phi) \approx 1$  e  $\sin(\Delta \Phi) \approx \Delta \Phi$  (com  $\Delta \Phi$  em radianos), então, a equação (46) pode ser aproximada como:

$$\Delta \mathbf{C} \approx \mathbf{I} - \Delta \Phi \mathbf{S}(\mathbf{e}) \quad (48)$$

Substituindo a equação 48 na 46:

$$\mathbf{C}(t + \Delta t) = \mathbf{C}(t) - \Delta \Phi \mathbf{S}(\mathbf{e}(t)) \mathbf{C}(t) \quad (49)$$

Agora, considera-se o cálculo da derivada da matriz  $\mathbf{C}(t)$ , ou seja, a taxa instantânea de variação da matriz de rotação do sistema girante:

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{C}(t + \Delta t) - \mathbf{C}(t)}{\Delta t}$$

Substituindo o resultado da equação (49) na derivada, obtém-se:

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-\Delta \Phi \mathbf{S}(\mathbf{e}(t)) \mathbf{C}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \mathbf{S}(\mathbf{e}(t)) \mathbf{C}(t) \quad (50)$$

Como  $\Delta \Phi / \Delta t$  é um escalar, a seguinte manipulação pode ser feita:

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \mathbf{S}(\mathbf{e}(t)) = \mathbf{S}\left(\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \mathbf{e}(t)\right)$$

Onde o escalar  $\Delta \Phi / \Delta t$  multiplica todos os elementos da matriz  $\mathbf{S}(\mathbf{e}(t))$ .

Então, a equação 50 pode ser escrita como:

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} -\mathbf{S}\left(\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \mathbf{e}(t)\right) \mathbf{C}(t) \quad (50)$$

Na equação 50, o limite é tomado somente sobre o argumento da matriz  $\mathbf{S}(\cdot)$ . Este limite é dá origem ao vetor  $\boldsymbol{\omega}$ :

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \mathbf{e}(t) \quad (51)$$

**O vetor  $\boldsymbol{\omega}(t)$  é a taxa instantânea de variação do ângulo principal  $\Phi$  em torno do eixo de Euler "e" escrito no sistema girante.** Ele é exatamente o **vetor velocidade angular**, o qual caracteriza a rotação tridimensional instantânea do sistema de referência girante.

Assim, a derivada da matriz de rotação na equação 50 é dada por:

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = -\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}(t)) \mathbf{C}(t) \quad (52)$$

Onde  $\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})$  é a matriz antissimétrica do vetor velocidade angular:

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (53)$$

Como o vetor “ $\mathbf{e}$ ” foi assumido no sistema de referência girante  $Oxyz$ , o vetor velocidade angular  $\boldsymbol{\omega}$  também é escrito no sistema de referência girante.

A equação 53 é a **cinemática de rotação da matriz de atitude**. Ela descreve a evolução temporal da atitude a partir do vetor velocidade angular  $\boldsymbol{\omega}(t)$ .

A equação 53 é uma equação diferencial matricial, a qual estabelece um conjunto de 9 equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem. Para resolvê-la em um intervalo de tempo  $[t_0, t]$ , é preciso conhecer a **condição inicial da matriz de atitude**  $\mathbf{C}(t_0)$  no instante  $t_0$ , bem como o comportamento do vetor velocidade angular  $\boldsymbol{\omega}(t)$  neste intervalo.

## 2.2. Cinemática dos Ângulos de Euler

A cinemática dos ângulos de Euler depende da sequência de rotações adotada. Por exemplo, na figura 2, foi ilustrada a sequência 321. Na situação de tal figura, em um intervalo de tempo  $\Delta t$ , o sistema girante altera sua atitude mediante 3 rotações sucessivas: a primeira de um ângulo  $\Delta\psi$  em torno do eixo  $z$ , a segunda de  $\Delta\theta$  em torno de  $y'$ , a terceira de  $\Delta\phi$  em torno de  $x''$ .

Tomando as razões entre os ângulos  $\Delta\psi$ ,  $\Delta\theta$  e  $\Delta\phi$  pelo tempo  $\Delta t$  e fazendo o limite com  $\Delta t \rightarrow 0$ , obtém-se as taxas instantâneas de variação dos ângulos de Euler, as quais ocorrem em torno dos eixos  $z$ ,  $y'$  e  $x''$ :

$$\dot{\psi} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\psi}{\Delta t}: \text{em torno de } z \text{ (coincidente com } z').$$

$$\dot{\theta} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}: \text{em torno de } y' \text{ (coincidente com } y'').$$

$$\dot{\phi} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t}: \text{em torno de } x'' \text{ (coincidente com } x''').$$

A velocidade angular  $\boldsymbol{\omega}$  é um vetor escrito no sistema de coordenadas girante  $Oxyz$ . No entanto, duas das três rotações intermediárias estão escritas em sistemas de referência diferentes. Neste sentido, a **relação entre as derivadas dos ângulos de Euler e o vetor velocidade angular** é determinada por meio de mudanças de coordenadas:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{C}_1(\phi)\mathbf{C}_2(\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \mathbf{C}_1(\phi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (54)$$

Onde:

- A matriz  $\mathbf{C}_1(\phi)\mathbf{C}_2(\theta)$  converte o vetor velocidade angular associado a  $\dot{\psi}$ , do primeiro sistema intermediário para o girante;



- A matriz  $\mathbf{C}_1(\phi)$  converte o vetor velocidade angular associado a  $\dot{\theta}$ , do segundo sistema intermediário para o girante;

- O vetor velocidade angular associado a  $\dot{\phi}$  já é expresso no sistema girante.

Substituindo as expressões das matrizes  $\mathbf{C}_1(\phi)$  e  $\mathbf{C}_2(\theta)$ , na equação (54) obtém-se:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Realizando as multiplicações matriciais, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\sin\phi\cos\theta \\ -\dot{\theta}\sin\phi + \dot{\psi}\cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\cos\theta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (56)$$

A equação 56, ou 55, escreve a velocidade angular em função das taxas de variação dos ângulos de Euler. No entanto, a cinemática de translação costuma ser escrita de maneira inversa, onde as taxas de variação dos ângulos são função das velocidades angulares. Para colocar desta forma, inverte-se a matriz da equação 56 e multiplica-se ambos os lados por ela, obtendo-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos\theta} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\phi\sin\theta & \cos\phi\sin\theta \\ 0 & \cos\phi\cos\theta & -\sin\phi\cos\theta \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (57)$$

A equação (57) é a **cinemática dos ângulos de Euler na sequência 321**. Uma vez conhecidas as três componentes do vetor velocidade angular (medido no sistema girante), em um intervalo  $[t_0, t]$ , bem como as condições iniciais  $\phi(t_0)$ ,  $\theta(t_0)$  e  $\psi(t_0)$ , é possível determinar os ângulos de Euler  $\phi(t)$ ,  $\theta(t)$  e  $\psi(t)$  no instante  $t$ .

A cinemática dos ângulos de Euler se trata de um sistema de **três equações diferenciais não lineares de primeira ordem acopladas**. Conforme já visto anteriormente, os ângulos de Euler possuem singularidades. No caso da sequência 321 a **singularidade** fica evidente na equação (57), ocorrendo para **qualquer múltiplo ímpar de  $\theta = \pi/2$** . Esse fenômeno é conhecido por **gimbal lock**, sendo bem comum em guimbais de 3 graus de liberdade.

Quando se usa outras sequências de ângulos de Euler, as respectivas equações de cinemática de rotação são alteradas. Por exemplo, para a **sequência 313**:  $(\alpha_1)_3, (\alpha_2)_1, (\alpha_3)_3$  (ilustrada na figura 3 com  $\alpha_1 = \Omega$ ,  $\alpha_2 = i$  e  $\alpha_3 = \omega$ ), a cinemática é dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \\ \dot{\alpha}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin\alpha_2} \begin{bmatrix} \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & 0 \\ \sin\alpha_2\cos\alpha_3 & -\sin\alpha_2\sin\alpha_3 & 0 \\ -\cos\alpha_2\sin\alpha_3 & -\cos\alpha_2\cos\alpha_3 & \sin\alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (58)$$

Neste caso, a **singularidade** ocorre para  $i = n\pi$ , qualquer  $n$  inteiro.

### 2.3. Cinemática do Quatérnio

Assuma a mesma ilustração da figura 4, onde um sistema de eixos  $Oxyz$  gira em função do tempo. Considere que  $\mathbf{Q}(t)$  seja o quatérnio de  $Oxyz$  com respeito a algum referencial fixo não indicado na figura. Assume-se que, em um intervalo de tempo  $\Delta t$ , ocorre uma rotação principal por um ângulo  $\Delta\Phi$ , a qual se dá em torno do eixo de Euler  $\mathbf{e}(t)$ , escrito no sistema  $Oxyz$  no instante  $t$ .

Usando a regra das rotações sucessivas (produto de quatérnios), o quatérnio no instante  $t + \Delta t$  está relacionado com o quatérnio em  $t$  da seguinte maneira:

$$\mathbf{Q}(t + \Delta t) = \Delta\mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q}(t) \quad (59)$$

Na forma matricial:

$$\mathbf{Q}(t + \Delta t) = \mathbf{M}(\Delta\mathbf{Q})\mathbf{Q}(t) \quad (60)$$

Onde a matriz de produto de quatérnios é dada por:

$$\mathbf{M}(\Delta\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} \Delta q_4 \mathbf{I} - \mathbf{S}(\Delta\mathbf{q}) & \Delta\mathbf{Q} \\ -\Delta\mathbf{q}^T & \end{bmatrix} \quad (61)$$

Sendo que o quatérnio de rotação incremental  $\Delta\mathbf{Q}$  é dado por:

$$\Delta\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \Delta q \\ \Delta q_4 \end{bmatrix}$$

Pela definição de quatérnio, o quatérnio de rotação incremental é dado por:

$$\Delta\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{e} \sin \frac{\Delta\Phi}{2} \\ \cos \frac{\Delta\Phi}{2} \end{bmatrix} \quad (62)$$

Considerando que a rotação incremental ocorre em um intervalo de tempo muito pequeno:  $\cos(\Delta\Phi) \approx 1$  e  $\sin(\Delta\Phi) \approx \Delta\Phi$ . Assim, o quatérnio da equação (62) pode ser aproximado como:

$$\Delta\mathbf{Q} \approx \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \Delta\Phi \mathbf{e} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (63)$$

Substituindo o quatérnio da equação 63 na 61, a matriz de produto de quatérnios é dada por:

$$\mathbf{M}(\Delta\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{S}\left(\frac{1}{2} \Delta\Phi \mathbf{e}\right) & \frac{1}{2} \Delta\Phi \mathbf{e} \\ -\frac{1}{2} \Delta\Phi \mathbf{e}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (64)$$

Que também pode ser escrita como:

$$\mathbf{M}(\Delta\mathbf{Q}) = \mathbf{I} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\mathbf{S}(\Delta\Phi \mathbf{e}) & \Delta\Phi \mathbf{e} \\ -\Delta\Phi \mathbf{e}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (65)$$

Substituindo  $\mathbf{M}(\Delta\mathbf{Q})$  dada pela equação (65) na equação (60), tem-se que o quatérnio no tempo  $t + \Delta t$  é dado por:

$$\mathbf{Q}(t + \Delta t) = \mathbf{Q}(t) + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\mathcal{S}(\Delta\Phi\mathbf{e}) & \Delta\Phi\mathbf{e} \\ -\Delta\Phi\mathbf{e}^T & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}(t) \quad (66)$$

Agora, realiza-se o cálculo da derivada do quatérnio  $\mathbf{Q}(t)$ , ou seja, a taxa instantânea de variação da atitude do sistema girante:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{Q}(t + \Delta t) - \mathbf{Q}(t)}{\Delta t}$$

Substituindo, no cálculo da derivada, o quatérnio “um passo à frente” dado pela equação 66 obtém-se:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\mathcal{S}(\Delta\Phi\mathbf{e}) & \Delta\Phi\mathbf{e} \\ -\Delta\Phi\mathbf{e}^T & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}(t)}{\Delta t} \quad (67)$$

Como  $\Delta t$  é um escalar, a equação (67) pode ser escrita como:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\mathcal{S}\left(\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\mathbf{e}\right) & \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\mathbf{e} \\ -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\mathbf{e}^T & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}(t) \quad (68)$$

Pela definição de vetor velocidade angular da equação 51, a equação 68 resulta em:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\mathcal{S}(\boldsymbol{\omega}) & \boldsymbol{\omega} \\ -\boldsymbol{\omega}^T & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}(t) \quad (69)$$

A equação 69 pode ser abreviada pela definição de uma matriz  $\boldsymbol{\Omega}$ :

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(t) \mathbf{Q}(t) \quad (70)$$

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \begin{bmatrix} -\mathcal{S}(\boldsymbol{\omega}(t)) & \boldsymbol{\omega}(t) \\ -\boldsymbol{\omega}^T(t) & 0 \end{bmatrix} \quad (71)$$

Ou:

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix} \quad (72)$$

A equação 70 é a **cinemática do quatérnio**. Esta equação diferencial envolve as 4 componentes do quatérnio, consistindo em um **sistema de 4 equações diferenciais ordinárias de primeira ordem acopladas**.

A cinemática do quatérnio, como evidenciado pela equação (70), é linear, tendo as velocidades angulares como as funções de entrada. Dado o vetor velocidade angular  $\boldsymbol{\omega}(t)$  em um

intervalo de tempo  $[t_0, t]$ , bem como a atitude inicial  $\mathbf{Q}(t_0)$  (condição inicial), é possível obter o quatérnio no instante  $t$ , ou seja, determina-se a atitude ao final do intervalo.

Comparando as parametrizações de matriz de atitude e quatérnio, nota-se que ambas resultam em equações diferenciais lineares de cinemática. No entanto, a cinemática da matriz de atitude tem 9 equações diferenciais de primeira ordem, ao passo que a cinemática do quatérnio tem apenas 4.

#### 2.4. Cinemática dos Parâmetros de Rodrigues Modificados

Agora, apresenta-se a cinemática dos PRMs:  $\mathbf{p} = [p_1, p_2, p_3]^T$ . Em se tratando de uma representação mínima baseada no quatérnio, os PRMs reduzem a quantidade de equações diferenciais. Entretanto, sua singularidade em  $\Phi = 2\pi$  limita sua aplicação para rotações principais onde  $|\Phi| < 2\pi$ . Este domínio é maior do que para outras representações mínimas (ângulos de Euler e parâmetros de Rodrigues).

A equação de cinemática dos PRMs pode ser obtida pela substituição da definição destes (equação 41) na cinemática do quatérnio (equação 70). A partir deste procedimento, pode-se demonstrar que:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{S}(\mathbf{p}) + \mathbf{p}\mathbf{p}^T + \left( \frac{1 - \mathbf{p}^T\mathbf{p}}{2} \right) \mathbf{I} \right] \boldsymbol{\omega} \quad (73)$$

Onde  $\mathbf{S}(\mathbf{p})$  é a matriz antissimétrica do vetor  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade 3x3.

A equação diferencial 73 é **não linear**, consistindo em um conjunto de 3 equações diferenciais ordinárias de primeira ordem acopladas. Assim como nas outras representações, o comportamento da atitude num intervalo  $[t_0, t]$  é determinado a partir de uma condição inicial  $\mathbf{p}(t_0)$ , e o comportamento do vetor velocidade angular  $\boldsymbol{\omega}(t)$  dentro do intervalo.

Assim como em outras representações mínimas, a equação diferencial não linear 73 apresenta singularidade, ocorrendo para  $\Phi = n\pi$  ( $n = 2, 4, 6 \dots$ ).