DEM1122 - DINÂMICA E CONTROLE DE VEÍCULOS ESPACIAIS
Aula 10

Prof. André Luís da Silva

1 Introdução

Tópicos da aula:

- Controle de veículo espacial com spin
  - Manobra de *spin* - up (aceleração);
  - Manobra de reorientação passiva, satélite com dissipação interna de energia;
  - Controle ativo de nutação (ANC).

Referência da aula [1]: **Wie, B**. Space Vehicle Dynamics and Control. 2 . ed., AIAA Education Series, Reston, VA: AIAA, 2008.

Nesta aula, serão vistas algumas estratégias de controle aplicadas a veículos espaciais com *spin*.

Mesmo que *spin* seja uma estratégia de estabilização natural (controle passivo), uma ação de controle é necessária para prover o *spin* ao corpo (manobra de *spin up*.

Veículos estabilizados inercialmente com *spin* podem apresentar nutação. Se isto provocar um erro intolerável ao apontamento, é necessário aplicar uma ação corretiva, chamada de controle ativo de nutação.

2 Manobra de *Spin-up* (aceleração)

A manobra de *spin-up* consiste em imprimir a rotação adequada em torno de um eixo principal de um satélite, de modo a propiciar a sua estabilização giroscópica natural.

Para esta manobra, será assumido um satélite axis simétrico rígido. Conforme ilustrado na figura 1, um sistema de referência do corpo (SRC) com eixos x, y, z é adotado, coincidente com os eixos principais de inércia, com origem no centro de massa (CM). O eixo z é o eixo de simetria, enquanto x e y são os eixos transversais.

O satélite axis simétrico é dotado de dois conjuntos de *thrusters* de controle de atitude:

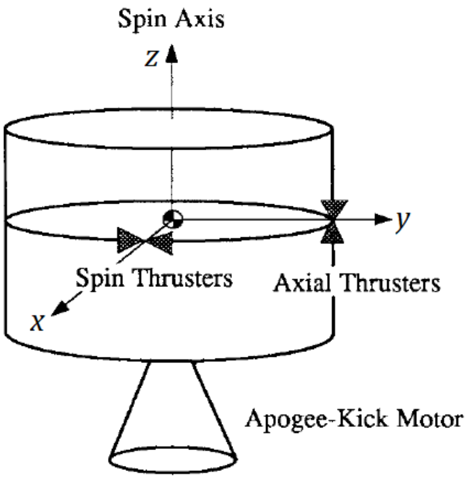

Figura 1: Satélite axis simétrico e disposição de *thrusters* de controle de atitude. Fonte: referência [1].

- *thrusters* de *spin*, que geram um momento em torno do eixo de simetria, o qual é responsável por imprimir a velocidade de *spin*;
- *thrusters* axiais, que são orientados na direção do eixo de *spin*, gerando momento transversal ao mesmo. São usados para orientar o eixo de *spin* ou realizar controle ativo de nutação.

2.1 Objetivo do Controle

A ação de controle consiste em imprimir uma aceleração angular em torno do eixo de simetria z, de modo a adquirir uma velocidade angular desejada: a velocidade de *spin* n.

A aquisição de *spin* sempre tem por objetivo **apontar o eixo de simetria em uma direção do *espaço inercial***. Ou seja: a estabilização do eixo de *spin* é com relação a alguma direção de interesse em um referencial inercial.

A manobra apresentada não é responsável por apontar o eixo de *spin* na direção desejada. A técnica somente promove a aceleração do corpo em torno do seu eixo de simetria. Na prática, antes de realizar esta ação, é necessário que uma manobra de orientação do eixo z tenha sido efetuada.

2.2 Hardware Utilizado

Para realizar uma manobra de *spin up*, o seguinte *hardware* é ncessário:

- Sensores: Na prática, um giroscópio é utilizado para medir a velocidade de rotação em torno do eixo z. Na modelagem matemática, no entanto, o controle é feito em malha aberta.
- Atuadores: Consistem no conjunto de *thrusters* de *spin* da figura 1, que geram um momento constante em torno do eixo z. Operam na condição liga-desliga, podendo imprimir

ação positiva ou negativa quando acionados. Para aplicar ações com ambos sinais e sem induzir translação, são necessários 2 pares, a 1 indica somente um desses pares.

- Controlador: Pode ser implementado das mais diversas maneiras, das mais simples, às mais sofisticadas.
  - A forma mais básica, analógica, é um relé temporizador que propicia o disparo dos *thrusters* de *spin* (par positivo ou par negativo), por determinado intervalo de tempo pré-programado. O comando de acionamento dos relés vem do computador de controle de atitude, o qual processa um telecomando recebido;
  - Uma forma mais flexível, com implementação mais sofisticada, consiste em usar um amplificador de potência para acionar os *thursters*, onde o seu tempo de acionamento é configurado pelo computador de controle de atitude, a partir de seu *timer* interno. O tempo de acionamento também é recebido pelo computador de bordo a partir de telecomando;
  - Uma forma mais precisa de realizar o processo consiste numa variação da segunda técnica acima, onde o tempo de acionamento é variável, por meio de modulação por largura de pulso, gerada pelo computador de controle de atitude. Neste caso, o controle é feito em malha fechada, onde a leitura do giroscópio referido acima é usada em uma lei de controle que modula o tempo de disparo do propulsor, possibilitando adquirir a velocidade de *spin* com precisão. Neste caso, o telecomando só fornece ao computador de controle de atitude o valor desejado da velocidade de *spin*.

2.3 Modelagem do Problema

Assume-se que ω_x, ω_y e ω_z são as velocidades angulares do satélite com respeito a um referencial inercial, escritas no SRC. I_{xx}, I_{yy} e I_{zz} são os momentos de inércia principais. O torque de gradiente gravitacional é desprezado bem como qualquer outro torque perturbativo. O veículo é perfeitamente rígido, sem qualquer dissipação interna de energia. Os *thrusters* estão perfeitamente alinhados e geram momento somente em torno do eixo z, com amplitude M_z constante. Assim, o modelo dinâmico do corpo é o seguinte:

$$J\dot{\omega}_x - (J - I_{zz})\omega_z\omega_y = 0 \tag{1}$$

$$J\dot{\omega}_y + (J - I_{zz})\omega_z\omega_x = 0 \tag{2}$$

$$I_{zz}\dot{\omega}_z = M_z \tag{3}$$

I_{zz} é o momento de inércia do eixo de simetria e $J = I_{xx} = I_{zz}$ é o momento de inércia dos eixos transversais.

É considerado apenas o **controle em malha aberta**. Ele é válido apenas para a situação ideal onde não existem momentos perturbativos, incertezas paramétricas e dinâmicas não modeladas. Se qualquer um desses fatores, que sempre existem na realidade, provoca erros não toleráveis, o controle em malha fechada é necessário, tal como comentado na seção 2.2.

A **variável de controle** é o momento M_z, que é constante, pois os *thrusters* só podem ser acionamentos no modo liga desliga.

2.4 Solução Analítica

O momento M_z é aplicado durante um intervalo de duração T, sendo modelado como um **pulso retangular**.

Se o pulso é aplicado em $t = 0$ e a condição inicial de ω_z é nula, da equação 3, a resposta de ω_z é:

$$\begin{aligned}
\omega_z &= \frac{M_z}{I_{zz}} t \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq T \\
\omega_z &= \frac{M_z}{I_{zz}} T \quad \text{para} \quad t > T
\end{aligned} \tag{4}$$

2.4.1 Precessão e Nutação

A equação 4 é suficiente para implementar a lei de controle em malha aberta.

Como o corpo é simétrico, a solução da velocidade de rotação de rotação ω_z não depende das velocidades transversais ω_x e ω_y. No entanto, caso as suas condições iniciais sejam não nulas ao iniciar a manobra, o veículo espacial vai apresentar nutação e precessão após adquirir o *spin*.

A precessão e nutação de um corpo rígido axis simétrico foi estudada nas aulas 4 e 5. Na aula 5, foi adotada a sequência de ângulos de Euler 1-2-3: $C_1(\theta_1) \to C_1(\theta_2) \to C_1(\theta_3)$. $\theta_2 = \theta$ é o ângulo de nutação e $\phi = \theta_1 + \frac{\pi}{2}$ é o ângulo de precessão.

Se $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0$, o eixo z do SRC é coincidente com o eixo inercial Z do sistema de referência inercial (SRI) no instante $t = 0$. Caso exista uma perturbação de velocidade transversal em $t = 0$ ($\omega_{xy}(0) \neq 0$), a resposta dos ângulos θ_1 e θ_2 não será identicamente nula, resultando na precessão e nutação do eixo de *spin*, implicando num desvio do mesmo com respeito à direção inercial desejada.

Na aula 4, determinou-se a resposta dos ângulos de precessão e nutação quando a velocidade de *spin* é constante, existe uma condição inicial não nula de ω_{xy} e não há momentos atuantes. Já na aula 5, essa resposta foi determinada quando a condição inicial de ω_{xy} é nula, mas há um momento transversal constante. O caso de agora não é nenhum dos dois, pois, embora o torque nos eixos transversais seja nulo, a velocidade de rotação em torno do eixo de simetria não é constante no intervalo $[0\,T]$.

Assim, é necessário calcular novamente a resposta da atitude do corpo. Para isso, inicia-se com as equações da cinemática dos ângulos de Euler 123:

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}_1 &= \omega_x \cos\theta_3 \sec\theta_2 - \omega_y \sec\theta_2 \sin\theta_3 \\
\dot{\theta}_2 &= \omega_x \sin\theta_3 + \omega_y \cos\theta_3 \\
\dot{\theta}_3 &= -\omega_x \cos\theta_3 \tan\theta_2 + \omega_y \sin\theta_3 \tan\theta_2 + \omega_z
\end{aligned} \tag{5}$$

Para descobrir θ_1 e θ_2 em função do tempo, é necessário resolver o sistema formado pelas equações 1, 2, 4 e 5. Este é um sistema de equações diferenciais não lineares onde a solução analítica é muito difícil.

De modo a buscar uma solução analítica aproximada, pode-se linearizar o sistema de equações 5, assumindo ângulos θ_1 e θ_2 pequenos (sendo esta a situação desejada durante a manobra).

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &\approx \omega_x \cos\theta_3 - \omega_y \sin\theta_3 \\ \dot{\theta}_2 &\approx \omega_x \sin\theta_3 + \omega_y \cos\theta_3 \\ \dot{\theta}_3 &\approx \omega_z \end{aligned} \tag{6}$$

A solução analítica de ω_z, no intervalo $[0,\ T]$, é dada pela equação 4. Sendo assim, a terceira equação do sistema 6 também possui solução analítica, sendo dada simplesmente por:

$$\theta_3 = \frac{M_z}{2I_{zz}} t^2 \tag{7}$$

Onde assumiu-se condição inicial nula $\theta_3(0) = 0$, sem perda de generalidade.

Assim, no intervalo $[0,\ T]$, a resposta dos ângulos θ_1 e θ_2 é dada pelo sistema:

$$J\dot{\omega}_x = (J - I_{zz}) \frac{M_z}{I_{zz}} t \omega_y \tag{8}$$

$$J\dot{\omega}_y = -(J - I_{zz}) \frac{M_z}{I_{zz}} t \omega_x \tag{9}$$

$$\dot{\theta}_1 = \omega_x \cos\left(\frac{M_z}{2I_{zz}} t^2\right) - \omega_y \sin\left(\frac{M_z}{2I_{zz}} t^2\right) \tag{10}$$

$$\dot{\theta}_2 = \omega_x \sin\left(\frac{M_z}{2I_{zz}} t^2\right) + \omega_y \cos\left(\frac{M_z}{2I_{zz}} t^2\right) \tag{11}$$

Este sistema de equações lineares variantes no tempo foi resolvido utilizando um software de matemática simbólica (Mathematica). A resposta das velocidades angulares é:

$$\omega_x = \omega_x(0) \cos\left(\frac{(J - I_{zz}) M_z t^2}{2J I_{zz}}\right) + \omega_y(0) \sin\left(\frac{(J - I_{zz}) M_z t^2}{2J I_{zz}}\right) \tag{12}$$

$$\omega_y = \omega_y(0) \cos\left(\frac{(J - I_{zz}) M_z t^2}{2J I_{zz}}\right) - \omega_x(0) \sin\left(\frac{(J - I_{zz}) M_z t^2}{2J I_{zz}}\right) \tag{13}$$

A resposta dos ângulos de atitude é:

$$\theta_1 = \sqrt{\frac{\pi J}{M_z}} \left(\omega_x(0) C\left(\sqrt{\frac{M_z}{J\pi}} t\right) - \omega_y(0) S\left(\sqrt{\frac{M_z}{J\pi}} t\right)\right) \tag{14}$$

$$\theta_2 = \sqrt{\frac{\pi J}{M_z}} \left(\omega_y(0) C\left(\sqrt{\frac{M_z}{J\pi}} t\right) + \omega_x(0) S\left(\sqrt{\frac{M_z}{J\pi}} t\right)\right) \tag{15}$$

onde $C(\cdot)$ e $S(\cdot)$ são as integrais de Fresnel:

$$C(x) = \int_0^x \cos(\tau^2)d\tau \tag{16}$$
$$S(x) = \int_0^x \sin(\tau^2)d\tau \tag{17}$$

Como as integrais de Fresnel são funções limitadas, os ângulos θ_1 e θ_2 também serão limitados. A amplitude dos mesmos depende da magnitude das condições iniciais de velocidade angular transversal ω_x e ω_y, do momento aplicado M_z, bem como do momento de inércia transversal J.

Naturalmente, quando a velocidade angular transversal inicial é zero $\omega_x(t) = \omega_y(t) = 0$ para qualquer tempo $t \geq 0$, e a resposta dos ângulos θ_1 e θ_2 também é identicamente nula, não havendo nutação e precessão do eixo de *spin*.

2.5 Lei de Controle

A lei de controle em malha aberta consiste em determinar o tempo T de acionamento do *thruster* de *spin*, de modo que a velocidade ω_z atinja o valor desejado de velocidade de *spin* n em regime permanente (assumindo $\omega_z(0) = 0$).

Da equação 4, o valor da velocidade angular ω_z ao cessar o pulso de torque é:

$$n = \frac{M_z}{I_{zz}} T \tag{18}$$

Assumindo que o valor de M_z é conhecido, o tempo de acionamento para se obter a velocidade de *spin* n, partindo de $\omega_z(0) = 0$, é simplesmente:

$$T = \frac{I_{zz}}{M_z} n \tag{19}$$

O valor de M_z é sabido pelo projeto e testes do *thruster*. Depende do tipo de tecnologia propulsiva adotada e do braço de alavanca em relação ao CM.

Nesta estratégia de malha aberta, a precisão do controle está relacionada com a exatidão dos valores de I_{zz} e M_z utilizados no cálculo de T.

3 Manobra de Reorientação Passiva

Este assunto trata da dissipação interna de energia e reorientação passiva de VE em torno de seu eixo maior de inércia.

Um VE rígido que executa *spin* em torno de seu eixo maior ou menor de inércia é estável no sentido do Lyapunov, como visto em outras aulas. No entanto, quando há dissipação interna de energia, um *spin* em torno do eixo menor de inércia é instável, tendendo-do a trocar sua orientação para o eixo maior de inércia. Esta manobra de reorientação passiva é chamada de manobra de transição de *flat spin*.

Na verdade, isto não se trata propriamente de uma manobra, mas um modo de movimento natural do satélite. No entanto, dispositivos internos podem ser incluídos para forçar este fenômeno e garantir que ele ocorra com certas características. Neste sentido, a aula anterior apresentou a modelagem de um satélite de duplo *spin* com tubo interno de amortecimento.

3.1 Objetivo do Controle

Quando um dispositivo é inserido com o propósito intencional de introduzir dissipação interna de energia, pode-se dizer que este implementa uma estratégia de controle, no caso, controle passivo.

O objetivo deste controle é alterar o eixo de *spin*. Caso o VE tenha *spin* inicial em torno do eixo menor, ou eixo intermediário de inércia, haverá uma transição natural para o *spin* em torno do eixo maior de inércia.

O conceito é simples, mas a modelagem e a avaliação das equações resultantes é difícil, como evidenciado na aula anterior, onde se modelou um satélite de duplo *spin* com um tubo de amortecimento. Essas equações são não lineares e manifestam o comportamento de **caos**, onde pequenas variações nas condições iniciais podem mudar radicalmente o estado final. No caso, isto torna a orientação final imprevisível.

3.2 Hardware Utilizado

Para implementar esta técnica de controle, utiliza-se o hardware descrito abaixo:

- Sensores: por se tratar de uma manobra passiva, no geral, não se usam sensores. Mas, como discutido em [1], a manobra pode ser executada em conjunto com disparos de *thrusters*, devidamente acionados a partir de medidas de velocidade feitas por giroscópios;

- Atuadores: O atuador passivo é um elemento de dissipação interna, por exemplo: o tubo de amortecimento da aula passada, ou um simples tanque de propelente com movimentação interna de fluido (neste segundo caso, o comportamento é ainda mais imprevisível);

- Controlador: Por se tratar de uma estratégia passiva, não é implementada nenhuma lei de controle, portanto, não há um controlador. Uma exceção é caso especial referido acima, onde disparos de *thrusters* são sincronizados através de um algoritmo com o movimento natural do satélite.

3.3 Modelagem do Problema

Na aula anterior, foi modelado um satélite de duplo *spin* com um tubo de amortecimento no corpo principal. Foram obtidas equações diferenciais altamente não lineares que acoplam a dinâmica de rotação do satélite com um sistema massa, mola amortecedor. Tal modelo será programado em MATLAB e avaliado do ponto de vista de simulação.

Por outro lado, nesta aula, para o fim de avaliação analítica, será considerada uma outra situação: um **satélite corpo rígido com um reservatório de propelente esférico**.

Assume-se que o volume esférico de propelente tem momento de inércia J (que por simetria é o mesmo em torno de qualquer eixo). Este fluído tem certa viscosidade e exerce um atrito viscoso sobre as paredes do reservatório.

Este caso é de mais fácil modelagem que o tubo de amortecimento da aula passada. Além disso, é coerente com a realidade de muitos satélites, os quais possuem tanque de propelente esféricos.

3.3.1 Modelo e Condições de Contorno

O corpo rígido possui velocidades de rotação inerciais ω_x, ω_y e ω_z em torno dos eixos principais de inércia maior, intermediário e menor, respectivamente. As velocidades angulares relativas entre o propelente e o corpo rígido são σ_x, σ_y e σ_z em torno dos eixos principais.

A magnitude da quantidade de movimento angular e a energia cinética de rotação totais são:

$$H^2 = (I_{xx}\omega_x + J\sigma_x)^2 + (I_{yy}\omega_y + J\sigma_x)^2 + (I_{zz}\omega_z + J\sigma_z)^2 \tag{20}$$

$$2T = (I_{xx} - J)\omega_x^2 + (I_{yy} - J)\omega_y^2 + (I_{zz} - J)\omega_z^2 + J\left((\omega_x + \sigma_x)^2 + (\omega_y + \sigma_y)^2 + (\omega_z + \sigma_z)^2\right) \tag{21}$$

onde os momentos de inércia (I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}) são os momentos principais de inércia do corpo rígido junto com o propelente.

As equações do movimento são:

$$(I_{xx} - J)\dot{\omega}_x = (I_{yy} - I_{zz})\omega_y\omega_z + \mu\sigma_x + M_x \tag{22}$$
$$(I_{yy} - J)\dot{\omega}_y = (I_{zz} - I_{xx})\omega_z\omega_x + \mu\sigma_y + M_y \tag{23}$$
$$(I_{zz} - J)\dot{\omega}_z = (I_{xx} - I_{yy})\omega_x\omega_y + \mu\sigma_z + M_z \tag{24}$$
$$\dot{\sigma}_x = -\dot{\omega}_x - (\mu/J)\sigma_x - \omega_y\sigma_z + \omega_z\sigma_y \tag{25}$$
$$\dot{\sigma}_y = -\dot{\omega}_y - (\mu/J)\sigma_y - \omega_z\sigma_x + \omega_x\sigma_z \tag{26}$$
$$\dot{\sigma}_z = -\dot{\omega}_z - (\mu/J)\sigma_z - \omega_x\sigma_y + \omega_y\sigma_x \tag{27}$$

onde μ é o coeficiente de amortecimento viscoso entre o fluido propelente e as paredes do tanque e (M_x, M_y, M_z) são os torques de controle em torno dos eixos principais.

Quando $(M_x, M_y, M_z) = (0, 0, 0)$, a referêcia [1] apresenta os seguintes resultados:

- Uma condição necessária para o equilíbrio é $\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 = 0$, ou seja: $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$;
- Um ponto de equilíbrio $(\omega_x, \omega_y, \omega_z, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) = (\Omega, 0, 0, 0, 0, 0)$ é assintoticamente estável, ou seja, um movimento de *spin* em torno do **eixo maior de inércia** é estável;

- Um ponto de equilíbrio $(0, 0, \Omega, 0, 0, 0)$ é instável, ou seja, um movimento de *spin* em torno do **eixo menor de inércia** é instável, embora ele seja estável no caso do corpo rígido;

- Um ponto de equilíbrio $(0, \Omega, 0, 0, 0, 0)$ também é instável, como já era no caso do corpo rígido.

3.3.2 Variáveis Medidas e Variáveis de Controle

No controle puramente passivo, não há medições, nem variáveis de controle para atuação. Trata-se de um movimento natural de deslocamento interno de fluido viscoso.

3.4 Lei de Controle

Não se pode falar em lei de controle neste caso, por ser um controle passivo. No entanto, abaixo é apresentada uma explicação de como o processo natural ocorre, com base nos conceitos de quantidade de movimento angular e energia cinética.

Como visto na aula 4, o vetor velocidade angular $\vec{\omega}$ repousa na superfície do elipsoide de quantidade de movimento angular e, ao mesmo tempo, do elipsoide de energia cinética. A curva de interseção desses dois elipsoides é a trajetória do vetor velocidade angular como vista do referencial fixo no corpo, sendo chamada de ***polhode***.

Se não existe dissipação de energia, H e T são constantes e a *polhode* é um caminho fechado. Caso contrário, T decresce e o elipsoide de energia diminui com o tempo, enquanto H é mantido constante. Isto resulta em uma *polhode* que espirala do eixo menor na direção do eixo maior de inércia, cruzando a separatriz. **O ponto exato em que a *polhode* cruza a separatriz é muito sensível às condições iniciais e a taxa de dissipação interna de energia** do VE.

Consequentemente, **ao final do movimento a orientação do VE relativa ao vetor quantidade de movimento angular inercialmente fixado é imprevisível** de um ponto de vista prático.

As questões enunciadas acima serão ilustradas por meio de um exemplo programado em MATLAB.

Segundo a referência [1], o movimento passivo, quando incrementado por alguns disparos de *thrusters* a partir de leituras de giroscópios, pode prover uma polaridade final pré determinada ao *spin*.

A referência [1] cita um trabalho onde a troca de sinal das velocidades angulares é usada para determinar quando a separatriz é cruzada, ditando o momento em que os *thrusters* devem ser disparados. O tempo de disparo destes, por outro lado, é baseado em estimativas.

4 Controle ativo de nutação (ANC)

Um controle ativo de nutação (*active nutation control* - ANC, em inglês) de um VE consiste na supressão do ângulo de nutação entre o eixo de *spin* e o vetor quantidade de movimento angular, propiciando maior precisão no apontamento inercial.

4.1 Objetivo do Controle

O objetivo do controle é reduzir a amplitude do ângulo de nutação induzido pela velocidade angular transversal do VE por meio da leitura de sensores e acionamento de atuadores.

4.2 Hardware Utilizado

O seguinte hardware costuma ser usado para promover o controle ativo de nutação:

- Sensores:
  - Podem ser usados acelerômetros para medir as acelerações induzidas pelo movimento de nutação;
  - Também podem ser empregados giroscópios para medir as componentes transversais da velocidade angular do corpo, comparando estas com a velocidade em torno do eixo de *spin*.
- Atuadores:
  - A solução mais simples é utilizar um par de *thrusters* axiais, como ilustrado na figura 1. Eles aplicam um momento em torno de algum dos eixos transversais;
  - Também podem ser usados dois pares de *thrusters*, em lados opostos do eixo y da figura 1, caso se deseje anular o efeito de translação impresso pelos *thrusters*;
- Controlador: Esta ação de controle ocorre em **malha fechada**. Assim, é necessário um dispositivo que realize a leitura dos sensores, as processe e aplique o comando nos *thrusters*.
  - Uma alternativa simples trata-se de controle analógico, onde portas lógicas podem comparar as leituras dos acelerômetros ou giroscópios. Se as leituras satisfazem uma lógica de disparo, um comando é enviado a um conjunto de relés temporizadores, responsáveis por ligar os *thrusters* no momento certo, bem como desligá-los após o término do tempo de duração do pulso;
  - Outra alternativa envolve utilizar um computador digital, o qual recebe a leitura dos sensores e implementa uma função com a lógica de acionamento. Este envia o comando de acionamento para um amplificador de potência, o qual aciona um relé que dispara os *thrusters*. O mesmo amplificador recebe o comando de desligamento enviado pelo computador, após este verificar a passagem do tempo de disparo a partir do seu *timer* interno.

Segundo [1], na implementação com acelerômetro, um sensor uniaxial é montado com eixo de sensitividade alinhado com o eixo de *spin*. Em caso de ocorrência de nutação, este sensor apresenta uma medida com variação senoidal, sendo sua amplitude proporcional ao ângulo de nutação. O controle ANC gera o disparo dos *thrusters*, com temporização adequada, quando ângulo de nutação atinge um certo limite.

No caso de implementação usando giroscópios, o disparo é efetuado quando as velocidades angulares transversais ω_x e ω_y apresentam certa relação entre si, como discutido a seguir. Em tal situação, sem o suporte do acelerômetro, não é possível avaliar quando o sistema precisa ser ligado ou não, ficando suscetível a disparos para ângulos de nutação muito pequenos. Por isso **é aconselhável que o uso dos giroscópios se dê junto dos acelerômetros**.

4.3 Modelagem do Problema

Neste problema, as perturbações externas e incertezas internas são ignoradas. É assumido um VE axis simétrico, com uma velocidade angular n, constante, ao redor de seu eixo de simetria, a velocidade de *spin*. Adota-se o mesmo SRC da figura 1 com origem no CM e orientações nos eixos principais de inércia.

Assume-se que o eixo de simetria é o **eixo menor de inércia**. Este é o caso instável em veículos práticos, no entanto, o controle tem a capacidade de estabilização.

A configuração de *thrusters* de supressão de nutação é aquela da figura 1. Eles são montados sobre o eixo y, com direção dos seus jatos paralela ao eixo de simetria z, de modo que o momento de controle ocorre em torno do eixo x.

Sejam J o momento de inércia comum aos eixos transversais x e y e I_{zz} o momento de inércia em torno do eixo de simetria, onde $I_{zz} < J$.

O corpo é rígido, ou seja, sem deslocamento interno de fluído. Por questão de generalidade, assuma momentos de controle M_x e M_y nos eixos transversais. O momento em torno do eixo de *spin* é nulo. Assim, as equações de dinâmica de rotação são:

$$J\dot{\omega}_x - (J - I_{zz})\omega_z\omega_y = M_x \tag{28}$$

$$J\dot{\omega}_y + (J - I_{zz})\omega_z\omega_x = M_y \tag{29}$$

$$I_{zz}\dot{\omega}_z = 0 \tag{30}$$

onde ω_x, ω_y e ω_z são as velocidades angulares inerciais escritas nos eixos do SRC.

Da equação 30, confirma-se que ω_z é constante, a velocidade de *spin*, n:

$$\omega_z = const = n \tag{31}$$

Substituindo $\omega_z = n$ e fazendo $M_y = 0$, as equações 28 e 29 são escritas como:

$$\dot{\omega}_x = \lambda\omega_y + \frac{M_x}{J} \tag{32}$$

$$\dot{\omega}_y = -\lambda\omega_x \tag{33}$$

Onde $\lambda = \frac{(J-I_{zz})n}{J} > 0$, pois o eixo de simetria é o eixo menor de inércia.

Pode-se assumir um dos momentos transversais nulo, sem perda de generalidade, pois somente um deles é capaz de realizar a supressão do ângulo de nutação.

O momento M_x é assumido, nesta estratégia de controle, como um pulso retangular de largura T e amplitude M aplicado em um instante $t = t_1$:

$$M_x(t) = M\mathrm{rect}_T(t - t_1) \tag{34}$$

Onde:

$$\mathrm{rect}_T(t - t_1) = u(t - t_1) - u(t - t_1 - T) \tag{35}$$

sendo que $u(\cdot)$ é a função degrau unitário.

Para determinar a resposta da velocidade angular transversal ao pulso de momento M_x, é considerada a condição inicial $\omega_y(0) = \omega_{y,0} > 0$ e $\omega_x(0) = 0$. Isso não significa perda de generalidade, pelo contrário é a condição de referência para disparo do pulso, dado que: para o movimento livre de torque[1] $\omega_x(t)^2 + \omega_y(t)^2 = \omega_{xy}^2 = \textit{constante}$ (aula 4). Assim quando $\omega_x(t) = 0$, $\omega_y(t)$ é máximo positivo ou mínimo negativo; então $\omega_x(0) = 0$ e $\omega_y(0) = \omega_{y,0} > 0$ implica que o instante $t = 0$ é aquele em que ω_y é máximo. **Esta será a condição de referência para contagem de tempo para o disparo do pulso pelo *thruster*.**

Utilizando um software de calculo simbólico (Mathematica), foi determinada a solução das equações de dinâmica 32 e 33, para o pulso de momento da equação 34, para a condição inicial dada. Ela consiste em 3 soluções distintas, uma para cada intervalo de tempo: antes do pulso, durante o pulso, após o pulso.

Para $0 \leq t < t_1$:

$$\omega_x(t) = \omega_{y,0} \sin \lambda t \tag{36}$$

$$\omega_y(t) = \omega_{y,0} \cos \lambda t \tag{37}$$

Para $t_1 \leq t \leq t_1 + T$:

$$\omega_x(t) = \left(\omega_{y,0} + \frac{M}{J\lambda} \cos \lambda t_1\right) \sin \lambda t - \frac{M}{J\lambda} \sin \lambda t_1 \cos \lambda t \tag{38}$$

$$\omega_y(t) = \left(\omega_{y,0} + \frac{M}{J\lambda} \cos \lambda t_1\right) \cos \lambda t + \frac{M}{J\lambda} \sin \lambda t_1 \sin \lambda t - \frac{M}{J\lambda} \tag{39}$$

Para $t > t_1 + T$:

$$\omega_x(t) = \left(\omega_{y,0} + \frac{M}{J\lambda} (\cos \lambda t_1 - \cos \lambda (t_1 + T))\right) \sin \lambda t + \frac{M}{J\lambda} (- \sin \lambda t_1 + \sin \lambda (t_1 + T)) \cos \lambda t \tag{40}$$

$$\omega_y(t) = \left(\omega_{y,0} + \frac{M}{J\lambda} (\cos \lambda t_1 - \cos \lambda (t_1 + T))\right) \cos \lambda t - \frac{M}{J\lambda} (- \sin \lambda t_1 + \sin \lambda (t_1 + T)) \sin \lambda t \tag{41}$$

[1]Para $t < t_1$, $M_x = 0$ e o movimento é livre de torque.

O objetivo do controle ANC é minimizar a velocidade angular transversal após a aplicação do pulso. Ao fazer isso, o ângulo de nutação é reduzido automaticamente.

Para verificar a eficácia do controle, calcula-se a magnitude da velocidade transversal após cessar o pulso: $\omega_{xy}^2(t) = \sqrt{\omega_x^2(t) + \omega_y^2(t)}$ para $t > t_1 + T$. Das equações 40 e 41 e da relação trigonométrica ($\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$), tem-se que:

$$\omega_{xy} = \sqrt{\left(\omega_{y,0} + \frac{M}{J\lambda}\left(\cos\lambda t_1 - \cos\lambda(t_1+T)\right)\right)^2 + \left(\frac{M}{J\lambda}\left(-\sin\lambda t_1 + \sin\lambda(t_1+T)\right)\right)^2} \quad (42)$$

Que é constante, pois ao cessar o pulso o movimento é livre de torque.

Simplificando a equação 42 obtém-se:

$$\omega_{xy} = \sqrt{\omega_{y,0}^2 + 2\left(\frac{M}{J\lambda}\right)^2 - 2\left(\frac{M}{J\lambda}\right)^2\cos\lambda T + 2\frac{M}{J\lambda}\left(\cos\lambda t_1 - \cos\lambda(t_1+T)\right)\omega_{y,0}} \quad (43)$$

Pela equação 43, ω_{xy} depende da velocidade transversal inicial $\omega_{y,0}$, do tempo t_1 de aplicação do pulso, da sua largura T e amplitude M, bem como do momento de inércia transversal J.

A partir de ω_{xy}, é possível obter o ângulo de nutação θ após a aplicação do pulso. Da aula 4 (movimento livre de torque), ele é dado por:

$$\tan\theta = \frac{J\omega_{xy}}{I_{zz}n} \quad (44)$$

Substituindo, na equação 44 ω_{xy} da equação 43, o ângulo de nutação após a aplicação do pulso é:

$$\tan\theta = \frac{J\sqrt{\omega_{y,0}^2 + 2\left(\frac{M}{J\lambda}\right)^2 - 2\left(\frac{M}{J\lambda}\right)^2\cos\lambda T + 2\frac{M}{J\lambda}\left(\cos\lambda t_1 - \cos\lambda(t_1+T)\right)\omega_{y,0}}}{I_{zz}n} \quad (45)$$

4.3.1 Variáveis Medidas e Variáveis de Controle

De acordo com o desenvolvimento acima, a variável de controle é o momento transversal $M_x(t)$ em torno do eixo x, aplicado por um conjunto de *thrusters* axiais.

As variáveis medidas são as velocidades angulares ω_x, ω_y e ω_z. Eventualmente mede-se a aceleração no eixo x.

As medidas de velocidade angular são usadas para definir a contagem de tempo a partir da qual o pulso de controle é aplicado.

A medida de aceleração tem relação com a amplitude da nutação, podendo ser empregada para habilitar o controle a partir de uma determinada amplitude de nutação, para **evitar disparos desnecessários** dos *thrusters*.

4.4 Lei de Controle

A lei de controle consiste num algoritmo com os seguintes passos:

- Medir a aceleração no eixo x do corpo a qual tem relação com a amplitude da nutação;
- Para um valor de referência da nutação, que ultrapassa um valor tolerável, o controle é ligado;
- O controle consiste na aplicação do pulso retangular de momento $M_x(t)$ dado pela equação 34;
- O instante t_1 de aplicação do pulso é contado a partir do instante $t = 0$, definido como aquele onde a velocidade transversal ω_y é máxima e a velocidade ω_x é nula (valores medidos pelos giroscópios). Para evitar ruídos e medidas espúrias, é preciso filtrar as velocidades e considerar um valor de tolerância ao encontrar o zero de ω_x;
- O pulso de momento é desligado após uma duração T.

Para dimensionar a lei de controle, é preciso encontrar o tempo de disparo t_1, a largura de pulso T e a amplitude do momento M.

Geralmente, a amplitude M é dada pelas características dos *thrusters* empregados e do braço de alavanca em relação ao CM. Resta, então, determinar T e t_1.

O valor de t_1 é determinado por otimização, a qual é feita de modo a minimizar a amplitude da nutação. Pela equação 44, nota-se que a tangente do ângulo de nutação é proporcional à velocidade angular transversal ω_{xy}. Logo, se ω_{xy} for minimizado, θ também será.

Assim, determina-se t_1 que minimiza ω_{xy} da equação 43. Uma condição necessária para isso consiste é o teste da derivada primeira.

No entanto, o teste da derivada primeiro é controverso, pois este não garante se o ponto calculado é um máximo ou um mínimo. De sorte que os máximos e mínimos na equação 43 podem ser estudados de maneira analítica. Em tal equação, a dependência com o tempo t_1 ocorre somente no termo envolvendo soma de cossenos dentro da raiz. Assim, basta avaliar a seguinte função:

$$f(t_1) = \cos\lambda t_1 - \cos\lambda(t_1 + T) \tag{46}$$

Essa expressão pode ser reescrita pela fórmula do cosseno da soma de arcos:

$$f(t_1) = \cos\lambda t_1 - (\cos\lambda t_1 \cos\lambda T - \sin\lambda t_1 \sin\lambda T) = (1 - \cos\lambda T)\cos\lambda t_1 + \sin\lambda T \sin\lambda t_1 \tag{47}$$

Usando a identidade abaixo, a equação 47 pode ser escrita conforme segue:

$$a\cos x + b\sin x = A\cos(x - \phi), \quad A = \mathrm{sinal}(a)\sqrt{a^2 + b^2}, \quad \phi = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

$$f(t_1) = A\cos(\lambda t_1 - \phi) \tag{48}$$

$$A = \sqrt{2(1 - \cos\lambda T)} \tag{49}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\sin\lambda T}{1 - \cos\lambda T} \tag{50}$$

O ângulo de fase ϕ na equação 50 pode ser reescrito utilizando a fórmula da tangente de meio arco:

$$\tan\frac{\pi - x}{2} = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$$
$$\phi = \frac{\pi - \lambda T}{2} \qquad (51)$$

A figura 2 mostra o gráfico da função $f(t_1)$ da equação 48 em função de λt_1, para valores representativos de amplitude e fase. Em $\lambda t_1 = \phi$ ocorre o máximo da função; enquanto que, para $\lambda t_1 = \phi + \pi$ o valor mínimo.

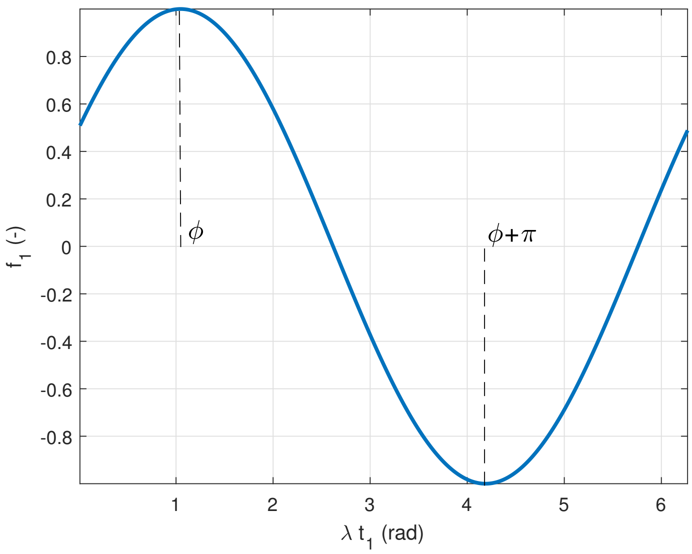

Figura 2: Gráfico da função da equação 48 em função de λt_1.

Assim, de modo a minimizar a velocidade angular transversal (a partir da minimização de $f(t_1)$), o tempo t_1 deve ser escolhido como:

$$\lambda t_1 = \pi + \phi \qquad (52)$$

Substituindo ϕ dado pela equação 50:

$$\lambda t_1 = \pi + \frac{\pi - \lambda T}{2}$$

Ou seja:

$$t_1 = \frac{3\pi}{2\lambda} - \frac{T}{2} \qquad (53)$$

Ao disparar os *thrusters* no tempo t_1 dado pela equação 53, obtém-se o valor mínimo da velocidade angular transversal para uma dada largura de pulso T e amplitude de controle. Este valor mínimo é dado pelas equações 43 e 48 como segue:

$$\omega_{xy_{min}} = \sqrt{\omega_{y,0}^2 + 2\left(\frac{M}{J\lambda}\right)^2 - 2\left(\frac{M}{J\lambda}\right)^2 \cos\lambda T - 2\frac{M}{J\lambda}\sqrt{2(1-\cos\lambda T)}\omega_{y,0}}$$

$$\omega_{xy_{min}} = \sqrt{\omega_{y,0}^2 + \left(\frac{M}{J\lambda}\right)^2 2(1-\cos\lambda T) - 2\omega_{y,0}\frac{M}{J\lambda}\sqrt{2(1-\cos\lambda T)}}$$

$$\omega_{12_{min}} = \sqrt{\left(\omega_{y,0} - \frac{M}{J\lambda}\sqrt{2(1-\cos\lambda T)}\right)^2}$$

$$\omega_{xy_{min}} = \omega_{y,0} - \frac{M}{J\lambda}\sqrt{2(1-\cos\lambda T)}$$

Usando a fórmula do seno de meio ângulo, $\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$, chega-se no resultado final:

$$\omega_{xy_{min}} = \omega_{y,0} - \frac{2M}{J\lambda}\sin\frac{\lambda T}{2} \tag{54}$$

Assim, a aplicação do pulso de controle no tempo t_1 ótimo provoca a seguinte redução de velocidade transversal em relação ao seu valor inicial:

$$\Delta\omega_{xy} = \frac{2M}{J\lambda}\sin\frac{\lambda T}{2} \tag{55}$$

Supondo que o valor de M seja conhecido (pela modelagem ou testes dos *thrusters* e dimensões físicas do VE), o tempo T de duração do pulso pode ser escolhido para zerar a velocidade transversal ω_{xy}, ou pelo menos obter o menor valor possível dadas as limitações físicas.

Se o tempo T for fixo durante toda a operação do VE, ele deve ser escolhido com base em previsões dos valores médios de velocidade transversal aos quais o VE estará submetido. Outra maneira é configurar o algoritmo de controle para disparar os *thrusters* quando a velocidade transversal assume o valor de referência usado no projeto para determinação de T.

No caso do valor de T ser ajustado ao longo da operação do VE, ele precisa ser calculado em função da velocidade transversal medida pelos giroscópios.

Referências

[1] Bong Wie. *Space Vehicle Dynamics and Control.* AIAA Education Series. AIAA, Reston, VA, 2 edition, 2008.