# MECÂNICA DE VOO ESPACIAL - DEM 1119
# Aula 8

Prof. André Luís da Silva

## 1 Introdução

Tópicos da aula:

- Determinação de órbita: cálculo dos parâmetros orbitais clássicos a partir de observação de posição e velocidade celestes.

Referência da aula [1]: TEWARI, A. Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modelling and simulation with MATLAB and Simulink. Boston: Birkhauser, 2007. **Seção 5.2.1**.

## 2 Método para Determinação de Órbita

Esta aula consiste em apresentar um método para determinar os parâmetros de uma órbita em um **problema de dois corpos** a partir de uma única observação de posição e velocidade. Sabe-se que a quantidade de elementos orbitais neste caso é 6, os quais podem ser expressos das mais diversas formas, sendo 3 parâmetros representando a progressão da órbita no plano da mesma e outros 3 definindo a orientação da órbita com respeito a um referencial inercial.

Na aula anterior, foi visto que um conjunto bem comum de elementos orbitais é dado pela excentricidade $e$, semi eixo maior $a$, tempo de periastro $\tau$, longitude celeste do nodo ascendente $\Omega$, inclinação $i$ e argumento de periastro $\omega$, sendo os três primeiros relacionados à progressão da órbita no plano orbital e os outros à sua orientação com respeito ao referencial inercial celeste.

Na aula anterior, discutiu-se que o conjunto de elementos orbitais acima referido é bastante utilizado devido a sua interpretação física e aplicação rotineira em astronomia. No entanto, existem várias outras escolhas, uma delas é dada pela observação de posição e velocidade na órbita medidas no referencial inercial. Neste cenário, o seguinte problema é abordado:

- Dados $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{v}_0$ medidos no referencial celeste, determinar: $e, a, \tau, \Omega, i$ e $\omega$.

O método de solução deste problema consiste em coletar definições e relações vistas em aulas anteriores, organizando-as em uma ordem em que os parâmetros fornecidos determinem os parâmetros pedidos. É possível montar um sistema de equações com solução única e esforço computacional mínimo.

## 2.1 Elementos Orbitais no Plano Orbital

Como primeiro passo, determina-se o vetor quantidade de movimento angular específica:

$$\mathbf{h} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0 \tag{1}$$

Como $\mathbf{h}$ é constante, ele possui o mesmo valor para quaisquer posição e velocidade medidas, desde que sejam no mesmo instante. O vetor $\mathbf{h}$ está escrito no referencial celeste quando $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{v}_0$ tem coordenadas neste referencial, este será o caso assumido.

A seguir, considere a definição de vetor excentricidade (equação 29 da aula 4):

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\mu}\mathbf{v}_0 \times \mathbf{h} - \frac{\mathbf{r}_0}{r_0} \tag{2}$$

Onde:

- $r_0 = ||\mathbf{r}_0||$ é a magnitude do vetor $\mathbf{r}_0$;
- $\mu = Gm_1$ é a constante gravitacional relacionada ao problema de dois corpos centrado no astro $m_1$;
- $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{v}_0$ escritos no referencial celeste implicam que $\mathbf{e}$ também está neste referencial.

Uma vez determinado o vetor excentricidade pela equação 2, a excentricidade $e$ é simplesmente o seu módulo:

$$e = ||\mathbf{e}|| \tag{3}$$

A partir da excentricidade, o semieixo maior $a$ é determinado pela equação 36 da aula 4:

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \tag{4}$$

Onde: $p = h^2/\mu$ é o parâmetro (equação 34 da aula 4), $\mathbf{h}$ é simplesmente $h = ||\mathbf{h}||$.

O tempo de periastro $\tau$ depende do tipo de trajetória: elíptica, parabólica ou hiperbólica. Mas, independentemente disso, é preciso calcular primeiro a anomalia verdadeira $\theta_0$ no ponto da órbita observado. Ela é obtida pela equação de órbita:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \quad \rightarrow \quad r_0 + r_0 e\cos\theta_0 = p$$

$$\cos\theta_0 = \frac{p - r_0}{e r_0} \tag{5}$$

Onde $r_0 = ||\mathbf{r}_0||$.

Para evitar a ambiguidade de quadrante, também avalia-se $\sin\theta_0$. Isto pode ser feito a partir de uma relação entre $\mathbf{r}$ e $\mathbf{p}$, como ilustrado na figura 1. Embora nela seja representada uma órbita elíptica, a relação entre $\mathbf{r}$ e $\mathbf{p}$ não se altera para os outros tipos de órbita.

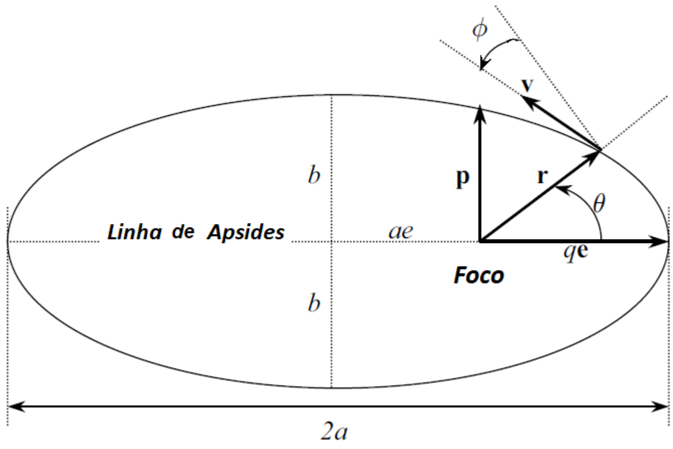


Figura 1: Geometria de uma órbita. Fonte: adaptado da referência [1].

Da figura 1, o produto escalar entre os vetores $\mathbf{r}$ e $\mathbf{p}$ é dado por:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} = ||\mathbf{r}||\,||\mathbf{p}||\cos(\pi/2 - \theta) = rp\sin\theta \tag{6}$$

Então, para o ponto observado:

$$\sin\theta_0 = \frac{\mathbf{r_0} \cdot \mathbf{p}}{r_0 p} \tag{7}$$

O vetor parâmetro $\mathbf{p}$ é dado pela equação 12 da aula 5:

$$\mathbf{p} = p\frac{\mathbf{h} \times \mathbf{e}}{he} \tag{8}$$

Como todos os termos das equações 7 e 8 são determinados por relações anteriores, $\sin\theta_0$ pode ser avaliado. Assim, as equações 5 e 7 podem ser usadas para determinar a anomalia verdadeira $\theta_0$ sem ambiguidade de quadrante.

Conhecendo-se a anomalia verdadeira, a equação de propagação de órbita pode ser usada para determinar o tempo de periastro $\tau$. Como a propagação temporal depende do tipo de órbita, apresenta-se a seguir o processo para cada uma delas.

### 2.1.1 Órbita Elíptica

Para a órbita elíptica, a equação de Kepler é usada para determinar o tempo de periastro:

$$E - e\sin E = M$$
$$M = n(t - \tau)$$

De onde se obtém:

$$\tau = t_0 - \frac{E_0 - e\sin E_0}{n} \tag{9}$$

Onde:

- $t_0$ é o tempo d observação, medido em algum **padrão de referência de tempo**;
- $E_0$ é a anomalia excêntrica no ponto observado;
- $n$ é o movimento médio da órbita elíptica.

A anomalia excêntrica pode ser obtida sem ambiguidade pela relação de tangente de meio ângulo (equação 67 da aula 6):

$$\tan\left(\frac{E_0}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \tag{10}$$

Já o movimento médio de órbita elíptica é (equação 32 da aula 6):

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \tag{11}$$

### 2.1.2 Órbita Parabólica

O tempo de periastro da órbita parabólica é obtido pela equação de Barker:

$$\frac{1}{6}\tan^3\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}}(t-\tau)$$

De onde se obtém:

$$\tau = t_0 - \frac{\frac{1}{6}\tan^3\frac{\theta_0}{2} + \frac{1}{2}\tan\frac{\theta_0}{2}}{\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}} \tag{12}$$

### 2.1.3 Órbita Hiperbólica

O tempo de periastro para a órbita hiperbólica é dado pela equação de Kepler hiperbólica:

$$\begin{aligned} &e\sinh H - H = M_h \\ &M_h = (e^2-1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}(t-\tau) \end{aligned}$$

De onde se obtém:

$$\tau = t_0 - \frac{e\sinh H_0 - H_0}{(e^2-1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}} \tag{13}$$

Onde $H_0$ é a anomalia hiperbólica no ponto observado. Ela é obtida sem ambiguidade pela relação da tangente hiperbólica de meio ângulo (equação 101 da aula 7):

$$\tanh\frac{H_0}{2} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\tan\frac{\theta_0}{2} \tag{14}$$

## 2.2 Parâmetros de Orientação da Órbita com Respeito ao Referencial Celeste

A figura 2 mostra o referencial celeste visto na aula anterior.

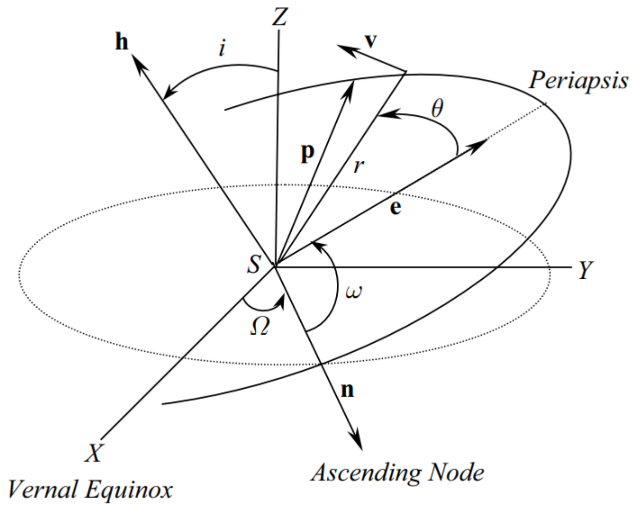


Figura 2: Orientação do referencial perifocal com respeito ao celeste. Fonte: referência [1].

Para se obter a longitude celeste do nodo ascendente $\Omega$, deve-se determinar o vetor $\mathbf{n}$, que define a linha dos nodos. Esse vetor é perpendicular aos vetores $\mathbf{h}$ e $\mathbf{K}$, onde $\mathbf{K}$ é o vetor diretor do eixo $Z$ do referencial celeste. Assim, segundo a figura 2, o vetor $\mathbf{n}$ pode ser escrito como:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{K} \times \mathbf{h}}{||\mathbf{K} \times \mathbf{h}||} \tag{15}$$

A equação 15 escreve o vetor $\mathbf{n}$ no referencial celeste, pois $\mathbf{h}$ (equação 1) está escrito nele.

A rotação elementar em torno do eixo $Z$ segundo o ângulo $\Omega$ orienta o vetor $\mathbf{n}$ com respeito aos vetores diretores $\mathbf{I}$ e $\mathbf{J}$ do referencial celeste. Para obter uma relação que faça uso dessa propriedade, nota-se que o vetor $\mathbf{n}$ aponta na direção do eixo $X'$ do sistema intermediário gerado por esta rotação elementar. Assim:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_X \\ n_Y \\ n_Z \end{bmatrix} = \mathbf{C}_3(\Omega)^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Onde $n_X$, $n_Y$ e $n_Z$ são as componentes do vetor $\mathbf{n}$ no referencial celeste, determinadas pela equação 15.

Assim:

$$\begin{bmatrix} n_X \\ n_Y \\ n_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega & 0 \\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n_X \\ n_Y \\ n_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Omega \\ \sin\Omega \\ 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

Esta relação serve para determinar $\Omega$ sem ambiguidade de quadrante:

$$\tan\Omega = \frac{n_Y}{n_X} \tag{18}$$

Para determinar a inclinação $i$, realiza-se a transformação do vetor $\mathbf{h}$ do segundo sistema intermediário para o celeste. Como $\mathbf{h}$ aponta, por definição, na direção $Z''$ do segundo sistema intermediário:

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_X \\ h_Y \\ h_Z \end{bmatrix} = \left[\mathbf{C}_1(i)\mathbf{C}_3(\Omega)\right]^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{bmatrix} \tag{19}$$

Onde: $\left[\mathbf{C}_1(i)\mathbf{C}_3(\Omega)\right]^T$ é a matriz de rotação do segundo referencial intermediário para o celeste; $h_X$, $h_Y$ e $h_Z$ são as componentes de $\mathbf{h}$ no referencial celeste, determinadas pela equação 1.

Substituindo as matrizes e realizando os cálculos:

$$\begin{bmatrix} h_X \\ h_Y \\ h_Z \end{bmatrix} = \mathbf{C}_3^T(\Omega)\mathbf{C}_1^T(i) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} h_X \\ h_Y \\ h_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega & 0 \\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} h_X \\ h_Y \\ h_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega & 0 \\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -h\sin i \\ h\cos i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} h_X \\ h_Y \\ h_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h\sin\Omega\sin i \\ -h\cos\Omega\sin i \\ h\cos i \end{bmatrix} \tag{20}$$

Esta relação serve para determinar $i$ sem ambiguidade de quadrante:

$$\tan i = \frac{h_X/\sin\Omega}{h_Z} \quad \text{ou} \quad \tan i = \frac{-h_Y/\cos\Omega}{h_Z} \tag{21}$$

Para determinar argumento de periastro sem ambiguidade de quadrante, também são necessárias duas relações, uma envolvendo seno e outra cosseno. Da figura 2, a primeira relação é bem simples:

$$\cos\omega = \mathbf{i}_e \cdot \mathbf{n} \tag{22}$$

Onde $\mathbf{i}_e$ é um vetor diretor associado ao vetor $\mathbf{e}$: $\mathbf{i}_e = \mathbf{e}/e$. $\mathbf{n}$ e $\mathbf{e}$ são determinados anteriormente.

A relação envolvendo $\sin\omega$ é análoga, obtida pelo produto vetorial do vetores unitários: $||\mathbf{n} \times \mathbf{i}_e|| = |\sin\omega|$. A ambiguidade do sinal de $\sin\omega$ é removida ao verificar que $\mathbf{n} \times \mathbf{i}_e$ é um vetor que aponta na mesma direção de $\mathbf{h}$, portanto $\sin\omega$ é a projeção de $\mathbf{n} \times \mathbf{i}_e$ sobre $\mathbf{i}_h$:

$$\sin\omega = \mathbf{i}_h \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{i}_e) \tag{23}$$

Onde $\mathbf{i}_h = \mathbf{h}/h$.

Das equações 22 e 23, o argumento de periastro pode ser calculado sem ambiguidade como:

$$\tan\omega = \frac{\mathbf{i}_h \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{i}_e)}{\mathbf{i}_e \cdot \mathbf{n}} \tag{24}$$

# 3 Resumo

Foram obtidas as equações para determinação dos 6 parâmetros orbitais clássicos sem ambiguidade.

As equações 4 e 3 determinam o semi eixo maior $a$ e a excentricidade $e$, respectivamente, para qualquer tipo de órbita do problema de dois corpos.

O tempo de periastro $\tau$ depende do tipo de órbita, sendo dado pelas equações 9, 12 e 13 para as órbitas elíptica, parabólica e hiperbólica, respectivamente.

A longitude do nodo ascendente $\Omega$, a inclinação $i$ e o argumento de periastro $\omega$ são dados pelas equações 18, 21 e 24, respectivamente.

# Referências

[1] A. TEWARI. *Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modelling and simulation with MATLAB and Simulink.* Birkhauser, Boston, 2007.