

MECÂNICA DE VOO ESPACIAL - DEM 1119

Aula 7

Prof. André Luís da Silva

1 Introdução

Órbitas em 3 Dimensões:

- Elementos orbitais clássicos. Referencial celeste;
- Coordenadas celestes esféricas e horizonte local;
- Referencial fixo no planeta.

Referência da aula [4]: TEWARI, A. Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modelling and simulation with MATLAB and Simulink. Boston: Birkhauser, 2007.

2 Referencial Celeste e Elementos Orbitais

Nas aulas anteriores, estudou-se a posição e velocidade de uma massa m_2 , enquanto a mesma orbita uma massa m_1 em um problema de dois corpos. Esta órbita é plana, sendo caracterizada, no plano orbital, por um conjunto de três parâmetros, os quais podem ser escolhidos dentre diversas opções. Alguns dos conjuntos de três parâmetros que caracterizam completamente uma trajetória no plano orbital são:

- a, e, τ : semi eixo maior, excentricidade e tempo de periastro;
- r, θ, τ : distância radial, anomalia verdadeira e tempo de periastro;
- v, ϕ, τ : magnitude da velocidade, ângulo de trajetória e tempo de periastro;
- $r_0, \theta - \theta_0, t - t_0$: distância radial no tempo de referência t_0 , variação da anomalia verdadeira, intervalo de tempo de referência.

Apesar de três parâmetros serem suficientes para caracterizar uma órbita no plano orbital, a solução do movimento relativo no problema de dois corpos depende de 6 integrais do movimento, resultando em 6 parâmetros que caracterizam a trajetória para um observador fora do plano orbital.

Assim, ao se restringir o estudo da trajetória ao plano orbital, absteve-se da avaliação de três parâmetros, os quais precisam ser resgatados.

Anteriormente, na aula acerca de coeficientes de Lagrange, a solução do problema de dois corpos havia sido estudada a partir das condições iniciais \mathbf{r}_0 e \mathbf{v}_0 , ou seja, os vetores posição e velocidade em um tempo inicial de referência. Tal estudo foi conduzido no referencial perifocal, o qual é definido no plano da órbita, com o eixo x apontando na direção do vetor excentricidade \mathbf{e} , y na direção do vetor parâmetro \mathbf{p} e z na direção do vetor quantidade de movimento angular específica \mathbf{h} .

Os próprios vetores \mathbf{r}_0 e \mathbf{v}_0 consistem num conjunto de 6 parâmetros. Logo, podem ser vistos como um conjunto de **elementos orbitais**, os quais caracterizam completamente uma órbita no espaço tridimensional.

Apesar do conjunto formado por \mathbf{r}_0 e \mathbf{v}_0 ser útil do ponto de vista analítico, ele não é muito prático e intuitivo, sendo possível definir outros conjuntos mais elucidativos. Além disso, a própria definição de \mathbf{r}_0 e \mathbf{v}_0 no espaço tridimensional carece da existência de um referencial mais geral, onde um observador externo ao plano orbital possa descrever a trajetória de m_2 com respeito a m_1 .

Para determinar uma órbita para um observador genérico fora do plano orbital, define-se um referencial com respeito ao qual qualquer órbita ao redor do corpo m_1 possa ser descrita. Tal referencial precisa ser inercial e possuir eixos com direções bem definidas, para não gerar ambiguidades.

A figura 1 mostra a definição do **referencial celeste** terrestre, o qual é chamado, em inglês, de ECI (Earth Centered Inertial).

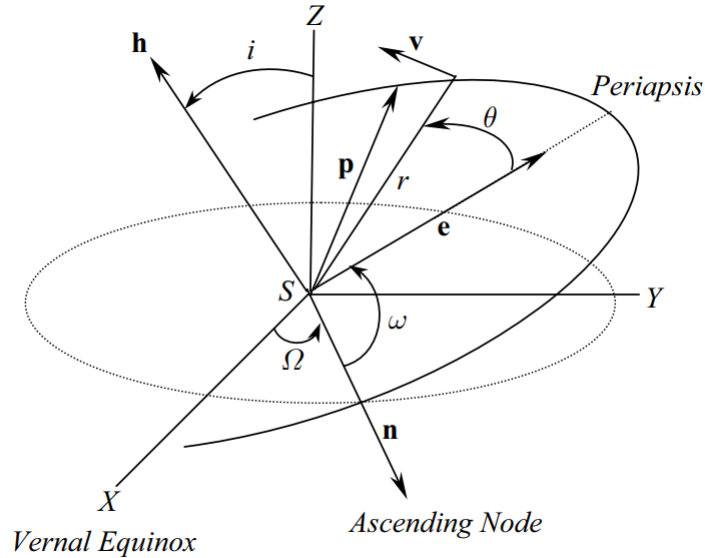


Figura 1: Referencial celeste e ângulos de Euler do plano orbital. Fonte: referência [4].

O referencial celeste possui origem no centro de massa da Terra e eixos orientados conforme detalhamento a seguir. Na verdade, este referencial não é rigorosamente inercial, devido ao fato do centro de massa da Terra possuir aceleração proveniente de seu movimento orbital ao redor do Sol. Por isso, muitos dizem que este referencial possui “direções inerciais”. Mas,

para a maioria das aplicações envolvendo mecânica orbital com órbitas ao redor da Terra, tal referencial pode ser considerado inercial.

O referencial celeste terrestre tem sua principal orientação dada pelo respectivo eixo X , o qual aponta na direção do **equinócio vernal**.

O equinócio vernal representa o primeiro dia da primavera no hemisfério norte, ou outono no hemisfério sul, conforme ilustrado na figura 2, sendo aproximadamente o dia 21 de março. Ele ocorre ao meio dia e está orientado ao longo da intersecção dos planos “equador celeste” e “eclíptica”. O equador celeste é o prolongamento do plano equatorial terrestre. A eclíptica é o plano da órbita da Terra ao redor do Sol.

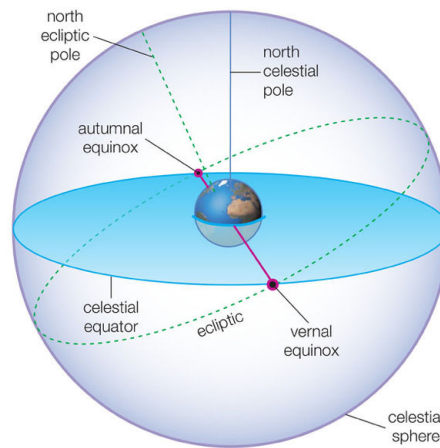


Figura 2: Posição do equinócio vernal e intersecção dos planos equatorial celeste e da eclíptica. Fonte: www.express.co.uk [1]

A figura 3 mostra outra ilustração do equinócio vernal. Ele é coincidente com o **primeiro ponto de Áries**, sendo comumente representado pelo símbolo Υ . A figura também mostra a órbita do Sol vista por um observador na Terra, o equinócio vernal ocorre quando o Sol cruza o equador celeste do sul para o norte.

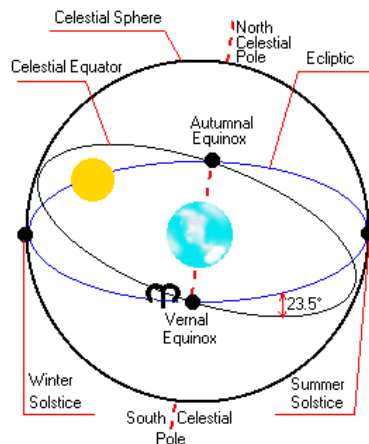


Figura 3: Primeiro ponto de Áries e trajetória do Sol vista da Terra. Fonte: [/socratic.org](http://socratic.org) [2]

O eixo Z do referencial celeste depende do tipo de órbita avaliada. Quando se trata de uma órbita próxima da Terra, tal como do satélite natural Lua, ou de um satélite artificial de

serviços terrestres, a escolha mais comum aponta o eixo Z no sentido do polo norte celeste, que nada mais é do que o prolongamento do polo norte da Terra, conforme ilustrado na figura 2. Por outro lado, quando se avalia uma órbita de transferência interplanetária, a escolha mais coerente para o eixo Z consiste em apontá-lo para o polo norte da eclíptica, também mostrado na figura 2.

O eixo Y completa o sistema cartesiano de mão direita. Quando o eixo Z aponta na direção do polo norte celeste, o eixo Y é definido tal que o plano XY seja o equador celeste. Quando o eixo Z aponta na direção do polo norte da eclíptica, o eixo Y é definido tal que o plano XY seja o plano da eclíptica.

Neste curso, a definição usada é aquela onde o eixo Z aponta na direção do polo norte celeste, sendo XY o equador celeste. Se for necessária a outra escolha, isso será avisado antes.

Uma vez definido o referencial celeste, é possível referenciar uma órbita qualquer em relação a ele ¹. Uma das maneiras mais intuitivas de se fazer isso é usando **ângulos de Euler**. A figura 1 representa a definição mais comum destes ângulos em mecânica orbital, consistindo numa sequência de rotações 313.

Na figura 1, considere uma órbita genérica em torno do astro, foi desenhado um segmento de elipse por questão de ilustração, mas as definições são válidas para qualquer outra cônica. O vetor \mathbf{n} é unitário e está alinhado com a **linha dos nodos**. Esta linha é a interseção do plano orbital com o plano XY do referencial celeste. A direção de \mathbf{n} aponta para o local onde a órbita cruza o plano celeste vindo do polo sul em direção ao norte.

O primeiro ângulo de Euler é denotado por Ω , sendo a rotação no sentido da mão direita, em torno do eixo Z do referencial celeste, que faz com que o eixo X gire até encontrar o vetor \mathbf{n} , figura 1. O ângulo Ω é chamado de **longitude do nodo ascendente**. Quando astro é a Terra e o eixo X inercial aponta para o equinócio vernal, Ω recebe o nome de **ascensão reta do nodo ascendente** (ARNA).

O segundo ângulo de Euler é denotado por i , sendo chamado de **inclinação da órbita**. Ele é a rotação, no sentido positivo da mão direita, em torno do vetor \mathbf{n} , tal que o plano XY do referencial celeste gire até encontrar o plano da órbita, figura 1. Intuitivamente, este é o ângulo entre o plano orbital e o plano equatorial celeste. Na notação de ângulos de Euler, o ângulo i é uma rotação em torno do primeiro eixo x intermediário alinhado com \mathbf{n} . Ao realizar essa rotação pelo ângulo i , o eixo Z do sistema celeste gira até encontrar o vetor quantidade de movimento angular específica \mathbf{h} da órbita (figura 1), que é o eixo z do sistema perifocal.

A última rotação é feita por meio de um ângulo ω , chamado de argumento de periastro², cujo sentido positivo é tomado pela regra da mão direita. Esta rotação é feita em torno do vetor \mathbf{h} da órbita. A magnitude do ângulo ω é tal que o vetor \mathbf{n} seja rotacionado até encontrar o vetor excentricidade da órbita \mathbf{e} , como mostra a figura 1.

Ao final das três rotações, o sistema de referência resultante é o perifocal, que tem os eixos x e y alinhados aos vetores excentricidade \mathbf{e} e parâmetro \mathbf{p} , respectivamente, e z dirigido ao

¹O termo “qualquer” usado aqui se refere a qualquer órbita de dois corpos em relação à Terra ou outro astro análogo.

²O nome perigeu é usado para se referir a órbitas com respeito à Terra.

longo do vetor quantidade de movimento angular específica \mathbf{h} .

Usando a notação de matrizes de rotação elementares, a sequência de rotações é: $\mathbf{C}_3(\Omega)$, $\mathbf{C}_1(i)$, $\mathbf{C}_3(\omega)$, resultando na transformação do sistema de referência celeste para o perifocal:

$$\mathbf{C}_p^c = \mathbf{C}_3(\omega)\mathbf{C}_1(i)\mathbf{C}_3(\Omega) \quad (1)$$

A transformação de eixos no sentido oposto é dada pela transposta: $\mathbf{C}_c^p = \mathbf{C}_p^{cT}$.

Pela definição de matrizes elementares, \mathbf{C}_p^c é dada por:

$$\mathbf{C}_p^c = \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_p^c = \begin{bmatrix} \cos \omega \cos \Omega - \cos i \sin \omega \sin \Omega & \cos i \cos \Omega \sin \omega + \cos \omega \sin \Omega & \sin i \sin \omega \\ -\cos \Omega \sin \omega - \cos i \cos \omega \sin \Omega & \cos i \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega & \cos \omega \sin i \\ \sin i \sin \Omega & -\cos \Omega \sin i & \cos i \end{bmatrix} \quad (2)$$

Os ângulos de Euler possuem **singularidade** na segunda rotação. No caso tratado, ela ocorre para o **ângulo de inclinação** i : valores de zero ou π rad. Em tal situação, a primeira e terceira rotações são feitas ao redor do mesmo eixo, o que é inválido na definição de ângulos de Euler. Essa limitação faz com que *órbitas equatoriais não possam ser descritas usando os parâmetros* Ω , i e ω .

Outra limitação dos elementos Ω , i e ω diz respeito a órbitas circulares, situação em que a excentricidade é nula e, conseqüentemente, o periastro é indeterminado, não sendo possível obter ω .

Quando os parâmetros Ω , i e ω existem, eles constituem 3 elementos orbitais. Então, juntos de 3 parâmetros no plano orbital, eles formam um conjunto de 6 elementos orbitais que caracterizam completamente uma órbita no espaço tridimensional.

Uma escolha comum para o conjunto de **elementos orbitais** é: $(\Omega, i, \omega, a, e, \tau)$. Isto significa que, uma vez fornecidos estes parâmetros para uma órbita relativa em um sistema de dois corpos, a órbita estará completamente especificada.

3 Coordenadas Esféricas Celestes e Horizonte Local

Para descrever uma órbita no referencial celeste, pode-se usar coordenadas esféricas, visto que são propícias a problemas com simetria esférica. Neste sentido, a figura 4 apresenta um conjunto de coordenadas esféricas no referencial celeste.

Na figura 4, suponha uma órbita genérica do problema de dois corpos, sendo o ponto O a posição da massa m_2 em dado instante. A origem S do referencial celeste está no centro de massa do corpo m_1 . A primeira coordenada esférica é a distância radial r entre S e O . O ângulo entre o segmento SO e o plano XY do referencial celeste é denominado *latitude celeste*

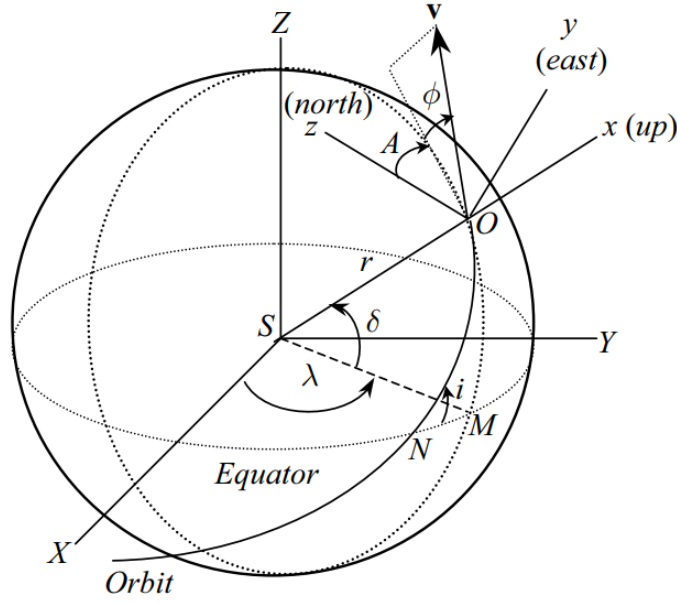


Figura 4: Coordenadas celestes esféricas e horizonte local. Fonte: referência [4].

ou *declinação*, sendo positiva quando medida acima deste plano (Com coordenada Z positiva), consistindo em outra coordenada esférica.

A terceira coordenada esférica celeste é o ângulo λ formado entre a projeção do segmento SO sobre o plano XY e o eixo X , sendo positivo na direção leste, ou seja, no sentido positivo da mão direita quando se faz uma rotação em torno do eixo Z . O Ângulo λ é denominado *longitude celeste*. Quando o astro é a Terra e o eixo X de referência aponta para o equinócio vernal, o ângulo λ é chamado de *ascensão reta*.

A figura 4 também apresenta um referencial com origem no ponto O , o qual é bastante relevante para a escrita da velocidade da massa m_2 . Este referencial tem por objetivo definir um **horizonte local** ao longo da órbita. As possibilidades de escolha dos seus eixos são inúmeras, sendo uma delas apresentada na figura. Nesta convenção, o eixo x está alinhado com o radial SO , com direção positiva afastando-se de O . O eixo z é normal a x e aponta para o norte. O eixo y completa o sistema de referência de mão direita, o qual aponta para o leste. Os eixos y e z formam o plano horizontal local, enquanto x aponta para cima em relação à superfície do astro.

Pela sequência de eixos x (*up*), y (*east*) e z (*north*), o sistema da figura 4 é chamado de **UEN**. Outras formas de definir o referencial horizontal local, que são de vasta aplicação em navegação, são: **NED** (north, east down), onde o eixo x aponta para o norte, y para o leste e z para baixo; **ENU** (east, north, up), onde x aponta para o leste, y para o norte e z para cima.

Observando a figura 4, a orientação do referencial horizontal local é obtida a partir de duas rotações elementares com respeito ao celeste. A primeira rotação pelo ângulo λ em torno do eixo Z do sistema celeste, no sentido positivo da mão direita, com matriz elementar $\mathbf{C}_3(\lambda)$; ao final desta, o eixo y resultante já aponta na direção leste. A segunda rotação é dada pelo ângulo δ em torno do eixo y (leste) no *sentido negativo* da mão direita, com matriz elementar

$\mathbf{C}_2(-\delta)$. Assim, a matriz de rotação do referencial celeste para o horizontal local é:

$$\mathbf{C}_{hl}^c = \mathbf{C}_2(-\delta)\mathbf{C}_3(\lambda) \quad (3)$$

Abaixo, é escrita a expressão de \mathbf{C}_{hl}^c :

$$\mathbf{C}_{hl}^c = \begin{bmatrix} \cos(-\delta) & 0 & -\sin(-\delta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(-\delta) & 0 & \cos(-\delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda & 0 \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{hl}^c = \begin{bmatrix} \cos \delta \cos \lambda & \cos \delta \sin \lambda & \sin \delta \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\cos \lambda \sin \delta & -\sin \delta \sin \lambda & \cos \delta \end{bmatrix} \quad (4)$$

Naturalmente, a transformação do referencial horizontal local para o celeste é: $\mathbf{C}_c^{hl} = \mathbf{C}_{hl}^c{}^T$.

3.1 Equações de Navegação: velocidade e posição

Uma das utilidades mais relevantes do referencial horizontal local é escrever o vetor velocidade. Na figura 4, é ilustrado um vetor velocidade inercial \mathbf{v} , dado em termos de:

- v : magnitude;
- ϕ : ângulo de trajetória ou elevação, formado pelo vetor velocidade e o plano horizontal local, é positivo quando a velocidade está acima do horizonte;
- A : azimuth de velocidade, ângulo formado entre a projeção da velocidade sobre o plano horizontal local e a direção norte, com sentido positivo aponta para o leste.

Em função de v , A e ϕ , o vetor velocidade é escrito no referencial horizontal local:

$$\mathbf{v}_{hl} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \sin \phi \\ v \cos \phi \sin A \\ v \cos \phi \cos A \end{bmatrix} \quad (5)$$

Pela matriz de transformação \mathbf{C}_c^{hl} (transposta de \mathbf{C}_{hl}^c da equação 4) e expressões da equação 5, a relação entre a velocidade inercial escrita nos referenciais horizontal local e celeste é dada por:

$$\mathbf{v}_c = \begin{bmatrix} v_X \\ v_Y \\ v_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta \cos \lambda & -\sin \lambda & -\cos \lambda \sin \delta \\ \cos \delta \sin \lambda & \cos \lambda & -\sin \delta \sin \lambda \\ \sin \delta & 0 & \cos \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \sin \phi \\ v \cos \phi \sin A \\ v \cos \phi \cos A \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_X \\ v_Y \\ v_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(\sin \phi \cos \delta \cos \lambda - \cos \phi \sin A \sin \lambda - \cos \phi \cos A \sin \delta \cos \lambda) \\ v(\sin \phi \cos \delta \sin \lambda + \cos \phi \sin A \cos \lambda - \cos \phi \cos A \sin \delta \sin \lambda) \\ v(\sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos A \cos \delta) \end{bmatrix} \quad (6)$$

Também pode-se converter o vetor posição. No horizontal local, ele é dado pela equação 7. Para obtê-lo no referencial celeste, basta multiplicar pela matriz \mathbf{C}_c^{hl} , como segue.

$$\mathbf{r}_{hl} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{r}_c = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta \cos \lambda & -\sin \lambda & -\cos \lambda \sin \delta \\ \cos \delta \sin \lambda & \cos \lambda & -\sin \delta \sin \lambda \\ \sin \delta & 0 & \cos \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \delta \cos \lambda \\ r \cos \delta \sin \lambda \\ r \sin \delta \end{bmatrix} \quad (8)$$

3.2 Relações Angulares

A seguir, são apresentadas algumas relações importantes envolvendo ângulos caracterizados nos diferentes referenciais. A primeira é expressa em termos do ângulo “ i ” entre o vetor \mathbf{h} e o eixo Z da figura 1. Se \mathbf{K} e \mathbf{i}_h são os vetores unitários associados ao eixo Z e vetor \mathbf{h} , respectivamente, tem-se que:

$$\mathbf{i}_h \cdot \mathbf{K} = \|\mathbf{i}_h\| \|\mathbf{K}\| \cos i$$

$$\mathbf{i}_h \cdot \mathbf{K} = \cos i \quad (9)$$

Calculando-se o produto vetorial de \mathbf{r}_c dado pela equação 8 e \mathbf{v}_c dado pela equação 6, tem-se a quantidade de movimento angular específica no referencial celeste:

$$\mathbf{h}_c = \mathbf{r}_c \times \mathbf{v}_c = \begin{bmatrix} rv \cos \phi (\cos A \sin \lambda - \sin A \sin \delta \cos \lambda) \\ -rv \cos \phi (\sin A \sin \delta \sin \lambda + \cos A \cos \lambda) \\ rv \cos \phi \sin A \cos \delta \end{bmatrix} \quad (10)$$

Para determinar \mathbf{i}_h , é preciso calcular o módulo de \mathbf{h} . Como o módulo não depende do referencial, ele pode ser calculado a partir do vetor \mathbf{h} escrito no referencial horizontal local, onde

sua expressão é mais simples. A partir de \mathbf{r}_{hl} e \mathbf{v}_{hl} dados pelas equações 7 e 5, respectivamente:

$$\mathbf{h}_{hl} = \mathbf{r}_{hl} \times \mathbf{v}_{hl} = \begin{bmatrix} 0 \\ -rv \cos \phi \cos A \\ rv \cos \phi \sin A \end{bmatrix} \quad (11)$$

Da equação acima, é fácil verificar que $h = ||\mathbf{h}_{hl}|| = rv \cos \phi$. Então, dividindo \mathbf{h}_c da equação 10 por h , tem-se que o vetor unitário \mathbf{i}_h escrito no referencial celeste é:

$$\mathbf{i}_{h_c} = \begin{bmatrix} \cos A \sin \lambda - \sin A \sin \delta \cos \lambda \\ -\sin A \sin \delta \sin \lambda - \cos A \cos \lambda \\ \sin A \cos \delta \end{bmatrix} \quad (12)$$

Substituindo, na equação 9 o vetor \mathbf{i}_h dado acima, chega-se na relação procurada:

$$\cos i = \cos \delta \sin A \quad (13)$$

A equação 13 é muito importante para o lançamento de foguetes: possibilita escolher o azimute de velocidade para obter certa inclinação de órbita, para lançamento realizado com latitude δ , supondo voo puramente balístico, sem a realização de manobras orbitais. Como será aprofundado mais adiante no curso, procura-se evitar manobras orbitais, principalmente as associadas à mudança de inclinação, pois implicam em alto consumo de propelente.

Pela equação 13, o maior valor de inclinação atingível sem manobras orbitais ocorre para apontamento norte, sendo este igual ao valor da latitude δ ($\cos i = \cos \delta$ para $A = 0$ ou $A = \pi$ rad). Isto significa que, na ausência de manobras orbitais, uma órbita polar só pode ser obtida por um lançamento partindo de um polo, enquanto que, de um local de lançamento no equador, somente órbitas equatoriais poderiam ser alcançadas.

Segundo a referência [4], a relação da equação 13 também pode ser obtida por trigonometria esférica a partir do triângulo formado pelos arcos MO , ON e NM na figura 4. Por tal método, a referência afirma que a relação abaixo também pode ser determinada:

$$\tan i \sin(\lambda - \Omega) = \tan \delta \quad (14)$$

A relação 14 pode ser usada para escolher a longitude celeste λ que propicia a longitude de nodo ascendente Ω da órbita, a partir de um local de lançamento com latitude δ , uma vez que a inclinação i já tenha sido escolhida. Como a latitude celeste varia com o tempo no planeta girante, isso quer dizer que tal equação é útil para escolher o *horário do lançamento*.

4 Referencial Fixo ao Planeta

O referencial celeste é necessário e muito útil, no entanto, ele é uma figura abstrata, pois seus eixos X e Y são referenciados a estrelas. O referencial local horizontal também é muito útil,

mas move-se junto do corpo que realiza a órbita. Neste sentido, é muito interessante ter um referencial que possa ter como referência o planeta, o qual é girante.

Para tanto, se define o referencial centrado no planeta e fixo ao mesmo, como ilustrado na figura 5. No caso da Terra, ele é chamado *earth centered, earth fixed* (ECEF), o qual possui a mesma origem do referencial celeste: o centro de massa do planeta. O eixo Z' é alinhado ao eixo polar celeste, ou seja, um eixo que passa pelo polo norte do planeta, assim, ele é coincidente com o eixo Z do referencial inercial celeste. Os eixos X' e Y' completam o sistema cartesiano ortogonal de mão direita, estando contidos no plano equatorial do planeta e fixos ao mesmo.

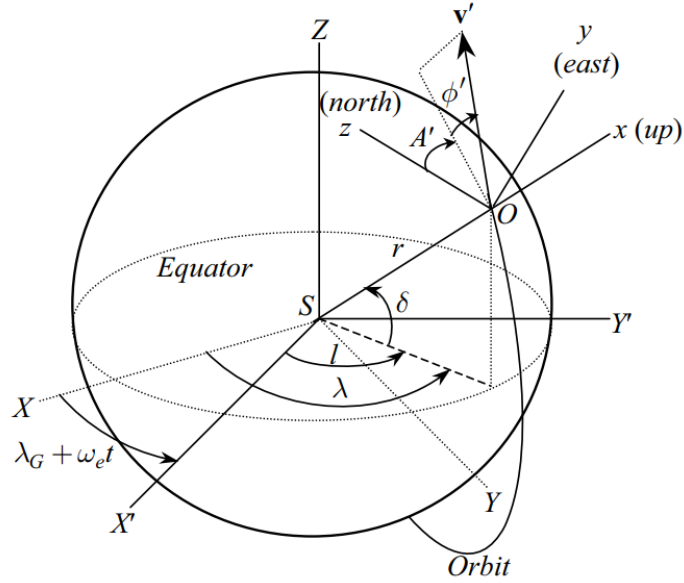


Figura 5: Referencial girante fixo ao planeta e horizonte local. Fonte: referência [4].

A direção do eixo X' depende de uma convenção, onde um ponto de referência do planeta é escolhido. Antes de falar sobre isso, é necessário apresentar as novas coordenadas esféricas associadas ao referencial fixo ao planeta.

A distância radial r no referencial fixo ao planeta é a mesma do caso do referencial celeste. Quanto à latitude, δ , ela pode ser a mesma do referencial celeste ou diferir. Quando a latitude é medida em relação ao centro do planeta, ela é a mesma do referencial celeste, sendo este o caso adotado neste curso. No entanto, existem outras situações onde a latitude é definida com respeito à *vertical local*, a qual depende da gravidade de um planeta não esférico. Tal caso é sugerido como estudo complementar.

A principal diferença entre o referencial fixo ao planeta e o celeste é a longitude, a qual, no caso do primeiro é denotada por l . As linhas de longitude constante são chamadas de **meridianos** do planeta, como ilustrado na figura 6.

Dentre os meridianos, é declarada uma referência $l = 0$, que recebe o nome de **meridiano primário**. No caso da Terra, o meridiano de Greenwich.

Se o planeta possui uma velocidade de rotação constante ω_e , no mesmo horário do dia cada meridiano vai alinhar-se com a direção de uma certa estrela, identificada por uma longitude celeste λ (exemplo: na Terra $\lambda = 0$ está associado ao primeiro ponto de Áries).

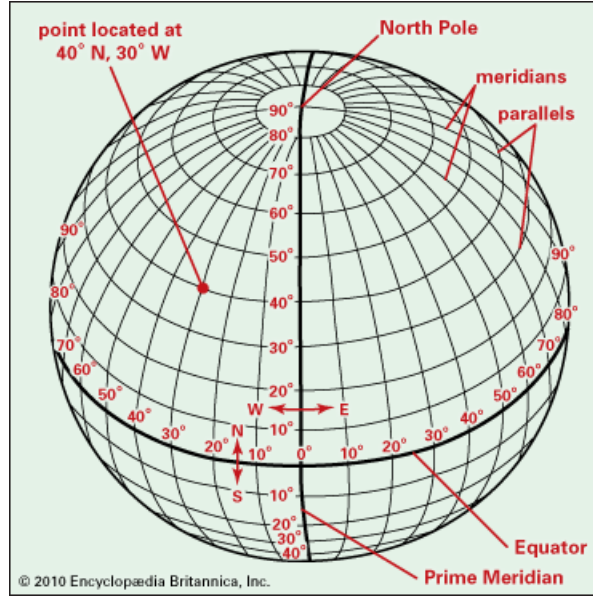


Figura 6: Ilustração dos meridianos. Fonte: learngis.org [3]

A noção acima pode parecer difícil de assimilar, mas se refere a algo antigo na prática da navegação. Navegantes usam os seguintes equipamentos e informações: relógio que mede o **tempo padrão** (por exemplo UTC e GMT); instrumento de observação de estrelas; carta de identificação de estrelas; planilha com os tempos padrão de passagem de cada meridiano pelas estrelas catalogadas. Com base nisso, o navegador consegue realizar uma análise reversa e, a partir do horário medido e da estrela observada, definir em qual meridiano se encontra.

Para realizar a conversão da longitude l para longitude celeste λ , felizmente, não é necessário realizar todo o procedimento acima, basta saber o horário em que o meridiano primário cruza o eixo X do referencial celeste, ou seja, quando o ele alinha-se com o primeiro ponto de Áries. Ou o reverso: a *longitude celeste do meridiano primário em um dado tempo* de referência.

Para o caso da Terra, como ilustrado na figura 5, assuma que λ_G é a longitude celeste do meridiano de Greenwich em $t = 0$. No tempo t , a longitude celeste deste meridiano é $\lambda_G + \omega_e t$. Então, a longitude celeste do meridiano de longitude l , no tempo t , é:

$$\lambda = \lambda_G + \omega_e t + l \quad (15)$$

A longitude λ_G em função do tempo está disponível em cartas astronômicas (efemérides), publicadas periodicamente, tais como o *American Ephemeris and Nautical Almanac*.

Da figura 5, a transformação de coordenadas do referencial celeste para o fixo ao planeta é dada por uma rotação elementar em torno do eixo $Z \equiv Z'$ por um ângulo $\lambda - l$:

$$\mathbf{C}_{fp}^c = \mathbf{C}_3(\lambda - l) = \begin{bmatrix} \cos(\lambda - l) & \sin(\lambda - l) & 0 \\ -\sin(\lambda - l) & \cos(\lambda - l) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

onde $\lambda - l = \lambda_G + \omega_e t$ é dado pela equação 15.

A matriz de transformação da equação 16 transforma qualquer vetor do referencial celeste para o fixo ao planeta, enquanto que a sua transposta realiza a transformação no sentido oposto: $\mathbf{C}_c^{fp} = \mathbf{C}_{fp}^c{}^T$. Mas, além desta transformação, outra conversão é necessária quando se trabalha com o referencial fixo ao planeta: velocidade inercial e **velocidade relativa**.

4.1 Velocidade Relativa

Na figura 5, o vetor \mathbf{v}' é a velocidade na órbita relativa ao referencial girante, com coordenadas polares v' , A' e ϕ' escritas no referencial horizontal local, os respectivos nomes dessas novas coordenadas são magnitude da velocidade relativa, azimuth da velocidade relativa e ângulo de trajetória relativo.

Da transformada de um vetor em relação a um referencial girante, a relação entre a velocidade vista no referencial celeste e no fixo ao planeta é:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (17)$$

A equação 17 será desenvolvida para vetores escritos no referencial horizontal local, onde a velocidade é comumente expressa.

A velocidade $\boldsymbol{\omega}$ é a velocidade de rotação do planeta com respeito ao referencial celeste. Ela é expressa no referencial horizontal local da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{C}_{hl}^c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta \cos \lambda & \cos \delta \sin \lambda & \sin \delta \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\cos \lambda \sin \delta & -\sin \delta \sin \lambda & \cos \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_e \sin \delta \\ 0 \\ \omega_e \cos \delta \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_e \sin \delta \mathbf{i} + \omega_e \cos \delta \mathbf{k} \quad (18)$$

onde \mathbf{i} e \mathbf{k} são vetores diretores do sistema horizontal local.

Assim, o produto vetorial no referencial horizontal local é:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = (\omega_e \sin \delta \mathbf{i} + \omega_e \cos \delta \mathbf{k}) \times r \mathbf{i} = r \omega_e \cos \delta \mathbf{j} \quad (19)$$

Assim, a equação 17 é escrita da seguinte forma no referencial horizontal local:

$$\begin{bmatrix} v \sin \phi \\ v \cos \phi \sin A \\ v \cos \phi \cos A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v' \sin \phi' \\ v' \cos \phi' \sin A' \\ v' \cos \phi' \cos A' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ r \omega_e \cos \delta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v' \sin \phi' = v \sin \phi \quad (20)$$

$$v' \cos \phi' \sin A' = v \cos \phi \sin A - r\omega_e \cos \delta \quad (21)$$

$$v' \cos \phi' \cos A' = v \cos \phi \cos A \quad (22)$$

Dividindo-se a equação 21 pela equação 22:

$$\tan A' = \tan A - \frac{r\omega_e \cos \delta}{v \cos \phi \cos A} \quad (23)$$

Dividindo-se a equação 20 pela equação 22:

$$\tan \phi' = \tan \phi \frac{\cos A'}{\cos A} \quad (24)$$

Da equação 20:

$$v' = v \frac{\sin \phi}{\sin \phi'} \quad (25)$$

As equações 23, 24 e 25, nesta ordem, podem ser usadas para determinar A' , ϕ' e v' em função de A , ϕ , v , ω_e , r e δ . Assim, a velocidade relativa depende, além da velocidade de rotação do planeta, da posição com respeito ao mesmo em que a partícula se encontra, dada pela distância radial e latitude.

O procedimento inverso pode ser realizado para determinar v , A e ϕ em função de A' , ϕ' e v' . Isto é particularmente importante durante o lançamento de um foguete, quando as variáveis de lançamento precisam ser determinadas com respeito à base de lançamento: A' , ϕ' e v' ; enquanto que o objetivo é obter uma órbita com parâmetros inerciais A , ϕ e v .

Referências

- [1] url: <https://www.express.co.uk/news/uk/781402/spring-equinox-what-is-vernal-equinox-first-day-of-spring-March>.
- [2] url: <https://socratic.org/questions/at-what-point-does-the-ecliptic-cut-the-celestial-equator>.
- [3] url: <https://learngis.org/textbook/section-four-latitude-and-longitude-one-example-geographic-grid>.
- [4] A. TEWARI. *Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modelling and simulation with MATLAB and Simulink*. Birkhauser, Boston, 2007.