

# MECÂNICA DE VOO ESPACIAL - DEM 1119

## Aula 12

Prof. André Luís da Silva

### 1 Introdução

#### Órbitas Perturbadas:

- Efeito de terceiro corpo;
- Esfera de influência;
- Voo interplanetário.

#### Referências da aula:

[2]: TEWARI, A. Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modelling and simulation with MATLAB and Simulink. Boston: Birkhauser, 2007.

#### Seção 6.5

[1]: CURTIS, H.D. Orbital Mechanics for Engineering Students. 3ª ed., Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013.

#### Seção 8.4

### 2 Perturbação de 3º Corpo

A perturbação gravitacional de terceiro corpo sobre uma órbita de dois corpos é modelada de maneira similar à perturbação gravitacional de um corpo primário não esférico.

Considere a órbita gerada pela atração gravitacional mútua de dois corpos  $m_1$  e  $m_2$ , perturbados pela presença de um terceiro corpo  $m_3$ , como mostrado na figura 1.

Assume-se que os corpos sejam esféricos ou pequenos o suficiente para que sejam tratados como partículas. Adotam-se as definições presentes no problema de  $N$  corpos:

- Posição da  $i$ -ésima partícula em um referencial inercial:  $\mathbf{R}_i$ ;
- Posição da partícula  $i$  com respeito à partícula  $j$ :  $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ ;
- Distância entre as partículas  $i$  e  $j$ :  $r_{ij} = \|\mathbf{r}_{ij}\|$ .

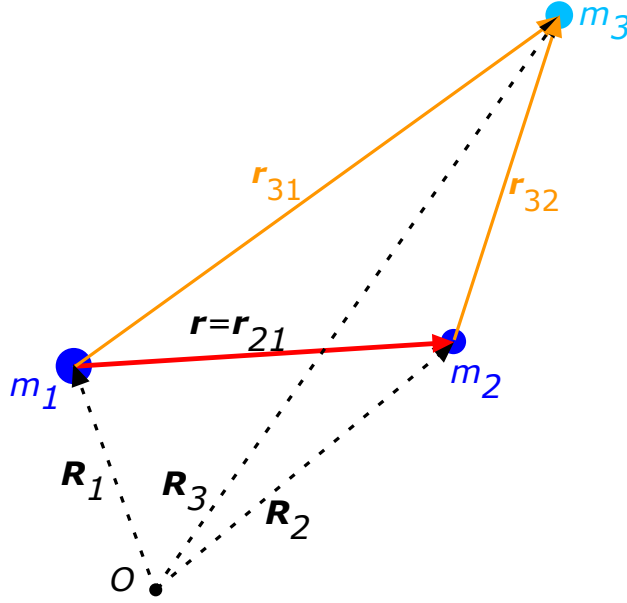


Figura 1: Diagrama da atração gravitacional entre 3 corpos.

As equações do movimento para os corpos de massa  $m_1$  e  $m_2$  são:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = -\frac{Gm_2}{r_{21}^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \frac{Gm_3}{r_{31}^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \quad (1)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = -\frac{Gm_1}{r_{21}^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - \frac{Gm_3}{r_{32}^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \quad (2)$$

Subtraindo a equação 1 da equação 2, obtém-se a equação do movimento relativo, que diz respeito ao movimento de  $m_2$  com respeito a  $m_1$ , na presença da perturbação de  $m_3$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{dt^2} &= -\frac{G(m_1 + m_2)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{r_{21}^3} - \frac{Gm_3}{r_{32}^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) + \frac{Gm_3}{r_{31}^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \\ \frac{d^2 \mathbf{r}_{21}}{dt^2} &= -\frac{G(m_1 + m_2)\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3} + \frac{Gm_3}{r_{32}^3} \mathbf{r}_{32} - \frac{Gm_3}{r_{31}^3} \mathbf{r}_{31} \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = Gm_3 \left( \frac{\mathbf{r}_{32}}{r_{32}^3} - \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} \right) \quad (3)$$

Na equação 3, o lado esquerdo é o mesmo do problema de dois corpos, que descreve a posição relativa  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{21}$  do corpo  $m_2$  com respeito ao primário  $m_1$ , com  $\mu = G(m_1 + m_2)$ . O lado direito é a aceleração perturbativa sobre o sistema de dois corpos. Ela depende da distância do terceiro corpo até cada um dos primários, bem como da constante gravitacional de  $m_3$ :  $\mu_3 = Gm_3$ .

A aceleração perturbativa da equação 3 é gerada por uma força conservativa, tendo um potencial gravitacional associado:

$$\mathbf{a}_d = Gm_3 \left( \frac{\mathbf{r}_{32}}{r_{32}^3} - \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} \right) = \nabla \Phi \quad (4)$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\mu\mathbf{r}}{r^3} = \nabla\Phi \quad (5)$$

Na equação 4,  $\Phi$  é o potencial gravitacional da perturbação de terceiro corpo. Ele é definido de modo que a aceleração perturbativa seja o gradiente com respeito ao vetor  $\mathbf{r}$ :

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{r}} = \mathbf{a}_d \quad (6)$$

A relação 6 pode parecer desnecessária, visto que a aplicação do conceito de gradiente já foi discutida neste curso. No entanto, ela é relevante por evidenciar com respeito a qual vetor a derivada parcial deve ser calculada, no caso, o vetor posição relativa  $\mathbf{r}$  do corpo  $m_2$  com respeito ao primário  $m_1$ .

Segundo a referência [2], o potencial perturbativo de terceiro corpo é dado por:

$$\Phi = Gm_3 \left( \frac{1}{r_{32}} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} \right) \quad (7)$$

Para quem tem interesse, o apêndice A contém a demonstração do potencial gravitacional acima.

A função potencial da equação 7 é genérica, no sentido em que ela pode ser aplicada a mais de um “terceiro corpo”. De fato, de modo geral, pode-se acrescentar  $N$  corpos externos aos dois primários, basta determinar o potencial perturbativo de cada um. Então, calculam-se os seus gradientes e somam-se os mesmos, obtendo-se a aceleração perturbativa resultante.

Deste modo, a **perturbação de terceiro corpo** pode ser estudada **sem perda de generalidade** para a ação de uma **quantidade maior de corpos perturbativos**.

Mas, mesmo com essa capacidade de generalização, é importante enfatizar que o **efeito de terceiro corpo é bastante satisfatório para a maioria das missões espaciais**, onde um veículo em certo intervalo de tempo dificilmente experimenta a atração gravitacional de mais do que 2 primários.

Assim como a perturbação gravitacional de um planeta não esférico, o potencial perturbativo de terceiro corpo pode ser expandido segundo uma série infinita de polinômios de Legendre:

$$\Phi = \frac{Gm_3}{r_{31}} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^n P_n(\cos \gamma) \right] \quad (8)$$

Onde  $\gamma$  é o ângulo entre os vetores  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}_{31}$ , como ilustrado na figura 2.

Um dos destaques da equação 8 é a independência do potencial perturbativo com o vetor  $\mathbf{r}_{32}$ , isso já havia ficado claro na demonstração da equação 7.

É importante que as equações não dependam de  $\mathbf{r}_{32}$ , pois este vetor varia continuamente, devido à órbita de  $m_2$  com respeito a  $m_1$ .

Por não depender de  $\mathbf{r}_{32}$ , o gradiente do potencial é calculado facilmente, sendo que a

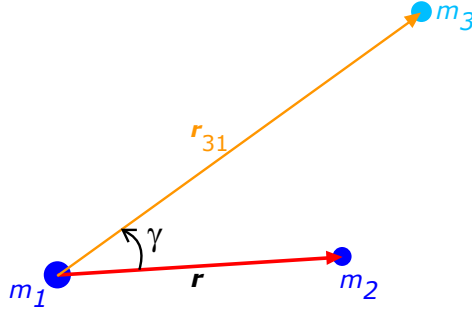


Figura 2: Ângulo  $\gamma$  da orientação do terceiro corpo com respeito ao vetor relativo entre os dois primários.

equação do movimento perturbado se torna:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} = \frac{Gm_3}{r_{31}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^n \left( P'_{n+1}(\cos \gamma) \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}} - P'_n(\cos \gamma) \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (9)$$

Onde  $P'_n$  é a derivada de um polinômio de Legendre com respeito ao seu argumento, sendo determinada a partir das propriedades vistas nas aulas 1 e 2, onde se apresentou a seguinte regra de recorrência:

$$P'_n(\nu) = \nu P'_{n-1}(\nu) + n P_{n-1}(\nu) \quad (10)$$

### 3 Esfera de Influência e Aproximação por Seções Cônicas

Ao contrário do problema de dois corpos ideal, ou mesmo do caso perturbado por gravidade de planeta não esférico, o **movimento perturbado por terceiro corpo** modelado pela equação 9 **não possui solução analítica**.

A carência de uma solução analítica incita a busca por **aproximações**, as quais são feitas a partir das soluções do problema de dois corpos.

Intuitivamente, quando a **distância do terceiro corpo** em relação aos dois primários **tende ao infinito**, a aceleração perturbativa associada a ele tende a zero e a **solução tende às órbitas keplerianas ideais**. Na medida que esta distância diminui, imagina-se que o impacto inicial seja muito pequeno, com órbitas próximas das keplerianas.

Uma das aproximações mais usadas em mecânica orbital está associada ao conceito de **esfera de influência**. Esta ideia foi desenvolvida por Laplace enquanto este estudava o movimento de um cometa passando perto de Júpiter.

O método da esfera de influência **associa uma região esférica a cada planeta**. No sistema solar, *dentro dela a gravidade de um planeta domina*, enquanto que **fora** a atração gravitacional do **Sol é predominante**.

Assumindo que o corpo  $m_2$  esteja sob a influência gravitacional de dois primários, as suas

equações do movimento podem ser expressas de duas maneiras:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + G(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}}{r^3} = Gm_3 \left( \frac{\mathbf{r}_{32}}{r_{32}^3} - \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} \right) \quad (11)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_{23}}{dt^2} + G(m_3 + m_2) \frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}^3} = Gm_1 \left( \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \quad (12)$$

A equação 11 trata do movimento relativo do corpo  $m_2$  com respeito a  $m_1$ , onde  $m_3$  gera a perturbação, ela é a equação 3 tratada anteriormente. Este modelo subentende uma órbita aproximadamente kepleriana de  $m_2$  com respeito ao primário  $m_1$ , sendo  $m_3$  o terceiro corpo impondo uma perturbação. Por exemplo, essa seria a situação do movimento de um veículo espacial com respeito à Terra, tendo o Sol como perturbação, como ilustrado na figura 3.

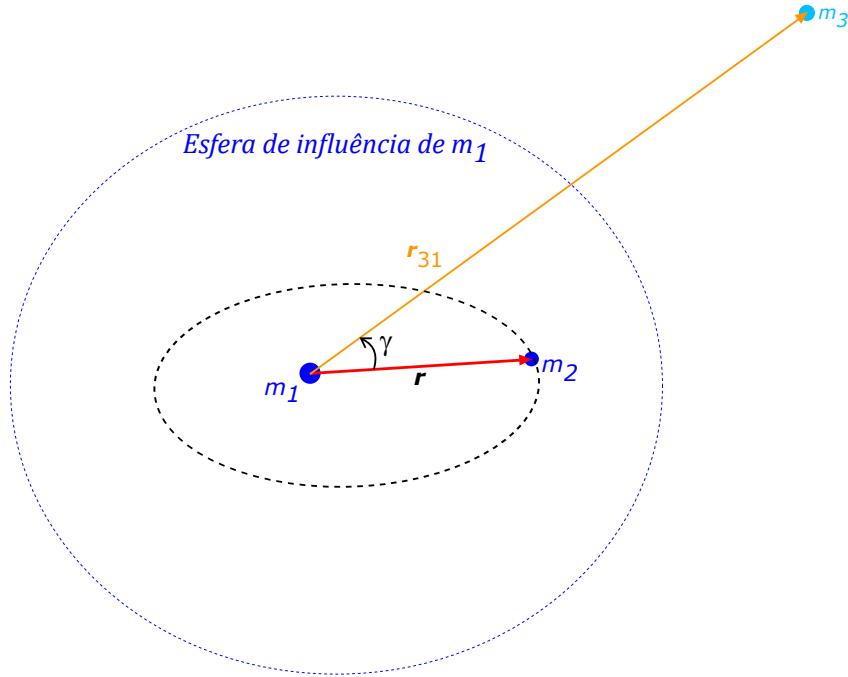


Figura 3: Ilustração da esfera de influência do primário  $m_1$ .

Já a equação 12 trata do movimento relativo do corpo  $m_2$  com respeito a  $m_3$ , ela é obtida por analogia à equação 11, trocando:  $m_1$  por  $m_3$  e vice versa,  $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}$  por  $\mathbf{r}_{23}$ ,  $\mathbf{r}_{32}$  por  $\mathbf{r}_{12} = -\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}_{31}$  por  $\mathbf{r}_{13} = -\mathbf{r}_{31}$ .

Na equação 12, o corpo  $m_3$  é o primário e  $m_1$  gera a perturbação. Ou seja, este modelo supõe uma órbita aproximadamente kepleriana de  $m_2$  com respeito a  $m_3$ , sendo  $m_1$  o terceiro corpo gerador da perturbação. Por exemplo, esse seria o caso do movimento de um veículo espacial com respeito ao Sol, tendo a Terra como perturbação, como ilustrado na figura 4.

Uma pergunta importante a ser feita é:

- Que equação do movimento fornece a melhor aproximação?
- Resposta: depende de qual delas apresenta a **menor razão entre a aceleração perturbativa e a aceleração do primário**.

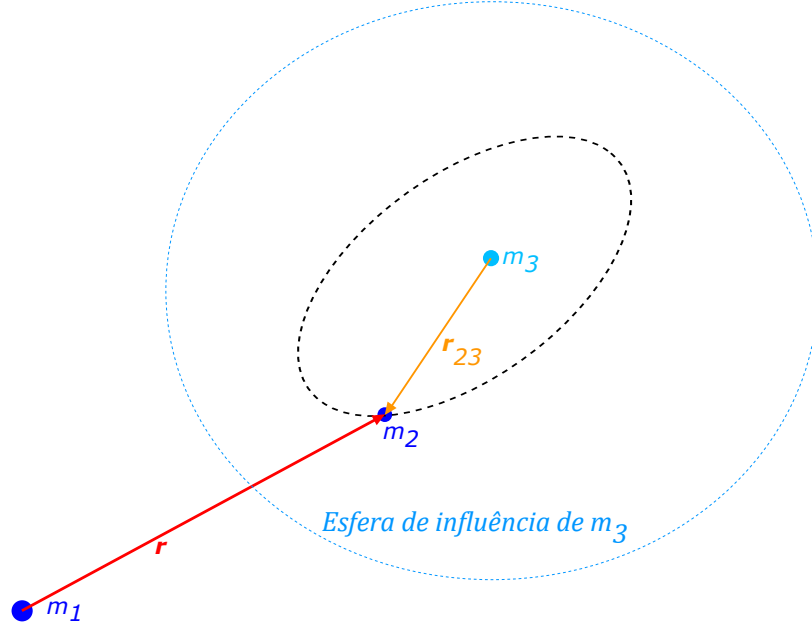


Figura 4: Ilustração da esfera de influência do terceiro corpo  $m_3$ .

Para aprofundar essa questão, serão avaliadas as **acelerações perturbativas em comparação** com as do **primário**.

Na equação 11, a aceleração do primário é o efeito de  $m_1$  sobre  $m_2$ , enquanto a perturbação é o efeito de  $m_3$  sobre  $m_2$ :

$$\mathbf{a}_{21} = -G(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \text{aceleração de } m_2 \text{ devido ao corpo } m_1 \quad (13)$$

$$\mathbf{a}_{d23} = Gm_3 \left( \frac{\mathbf{r}_{32}}{r_{32}^3} - \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} \right), \quad \text{aceleração perturbativa sobre } m_2 \text{ devido ao corpo } m_3 \quad (14)$$

Na equação 12, a aceleração do primário é o efeito de  $m_3$  sobre  $m_2$ , enquanto a perturbação é o efeito de  $m_1$  sobre  $m_2$ :

$$\mathbf{a}_{23} = -G(m_3 + m_2) \frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}^3}, \quad \text{aceleração de } m_2 \text{ devido ao corpo } m_3 \quad (15)$$

$$\mathbf{a}_{d21} = Gm_1 \left( \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right), \quad \text{aceleração perturbativa sobre } m_2 \text{ devido ao corpo } m_3 \quad (16)$$

A precisão da aproximação da órbita kepleriana de  $m_2$  com respeito a  $m_1$  é medida calculando-se a razão entre: a magnitude da perturbação de  $m_3$  sobre  $m_2$  e a magnitude da aceleração de  $m_2$  provocada por  $m_1$ :

$$\frac{a_{d23}}{a_{21}} = \frac{\|\mathbf{a}_{d23}\|}{\|\mathbf{a}_{21}\|} \quad (17)$$

Se  $\frac{a_{d23}}{a_{21}} \ll 1$ , a perturbação provocada pelo corpo  $m_3$  é pouco significativa quando comparada à aceleração imposta por  $m_1$ .

Por outro lado, a aproximação de órbita kepleriana de  $m_2$  com respeito a  $m_3$  é avaliada pela razão entre: a magnitude da perturbação de  $m_1$  sobre  $m_2$  e a magnitude da aceleração de  $m_2$

provocada por  $m_3$ :

$$\frac{a_{d21}}{a_{23}} = \frac{\|\mathbf{a}_{d21}\|}{\|\mathbf{a}_{23}\|} \quad (18)$$

Se  $\frac{a_{d21}}{a_{23}} \ll 1$ , a perturbação provocada pelo corpo  $m_1$  é pouco significativa quando comparada à aceleração imposta por  $m_3$ .

As observações acima fornecem uma noção intuitiva para avaliar a **magnitude da influência** de cada um dos corpos ( $m_1$  ou  $m_3$ ) sobre  $m_2$ . Para avaliar com um pouco mais de precisão, é preciso determinar expressões para  $\frac{a_{d23}}{a_{21}}$  e  $\frac{a_{d21}}{a_{23}}$  em função dos vetores relativos  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}_{31}$  e  $\mathbf{r}_{23}$  e das massas  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ .

O desenvolvimento detalhado está no apêndice B. Os resultados estão abaixo.

**Primeira razão de perturbação:**

$$\begin{aligned} \frac{a_{d23}}{a_{21}} = \frac{m_3}{m_1 + m_2} & \left( \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^4 + \left( \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^{-2} - 2 \cos \gamma \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^{-1} + 1 \right)^{-\frac{3}{2}} \left( \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^3 - \frac{r}{r_{31}} \right) + \right. \\ & \left. \left( \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^{-2} - 2 \cos \gamma \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^{-1} + 1 \right)^{-2} - \left( \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^{-2} - 2 \cos \gamma \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^{-1} + 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^3 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (19)$$

Da equação acima, o valor relativo da perturbação de  $m_3$  sobre  $m_2$  não está associada isoladamente à distância entre os dois primários  $m_3$  e  $m_1$  ( $r_{31}$ ), mas também com a distância de  $m_2$  com respeito a  $m_1$  ( $r_{21} = r$ ). Na verdade, esta perturbação relativa  $\frac{a_{d23}}{a_{21}}$  depende da razão entre as distâncias  $r$  e  $r_{31}$ :  $\frac{r}{r_{31}}$ .

Quanto mais próximo  $m_1$  estiver de  $m_2$ , ou quanto mais  $m_3$  estiver distante de  $m_1$ , menor será o valor da distância relativa  $\frac{a_{d23}}{a_{21}}$ . Assim, menor será a perturbação do terceiro corpo sobre  $m_2$ .

O distúrbio relativo  $\frac{a_{d23}}{a_{21}}$  também depende da razão entre as massas envolvidas:  $\frac{m_3}{m_1 + m_2}$ . Esta relação pode ser simplificada para  $\frac{m_3}{m_1}$ , uma vez que nos casos de interesse de engenharia  $m_2 \ll m_1$ . Assim, quanto maior for a razão entre a massa do terceiro corpo e do primário  $m_1$ , maior será a perturbação para as mesmas distâncias envolvidas.

**Segunda razão de perturbação:**

$$\begin{aligned} \frac{a_{d21}}{a_{23}} = \frac{m_1}{m_3 + m_2} & \left( \left( \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^2 - 2 \cos \gamma \frac{r}{r_{31}} + 1 \right)^2 + \left( \left( \frac{r_{31}}{r} \right)^2 - 2 \cos \gamma \frac{r_{31}}{r} + 1 \right)^2 + \right. \\ & \left. - 2 \cos \gamma \left( \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^2 - 2 \cos \gamma \frac{r}{r_{31}} + 1 \right) \left( \left( \frac{r_{31}}{r} \right)^2 - 2 \cos \gamma \frac{r_{31}}{r} + 1 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (20)$$

Pela equação acima, a perturbação relativa  $\frac{a_{d21}}{a_{23}}$  de  $m_1$  sobre  $m_2$  também não depende isoladamente de  $r$  ou  $r_{31}$ , mas da distância relativa  $\frac{r}{r_{31}}$ .

Em princípio, a perturbação relativa da equação 20 parece não fazer muito sentido, visto que pode aumentar ou diminuir na medida que a distância relativa  $\frac{r}{r_{31}}$  aumenta.

Esse comportamento estranho se deve ao fato destas relações também dependerem do ângulo  $\gamma$ . Isto é esclarecido com um exemplo: admita os casos em que  $\gamma = 0$  e  $\gamma = \pi$ , a equação 20 fornece (os cálculos estão no apêndice B):

$$\left. \frac{a_{d21}}{a_{23}} \right|_{\gamma=0} = \frac{m_1}{m_3 + m_2} \left| \left( \frac{r}{r_{31}} - 1 \right)^2 - \left( \frac{r_{31}}{r} - 1 \right)^2 \right| \quad (21)$$

$$\left. \frac{a_{d21}}{a_{23}} \right|_{\gamma=\pi} = \frac{m_1}{m_3 + m_2} \left| \left( \frac{r}{r_{31}} + 1 \right)^2 + \left( \frac{r_{31}}{r} + 1 \right)^2 \right| \quad (22)$$

Os casos representados pelas equações 21 e 22 estão ilustrados na figura 5.

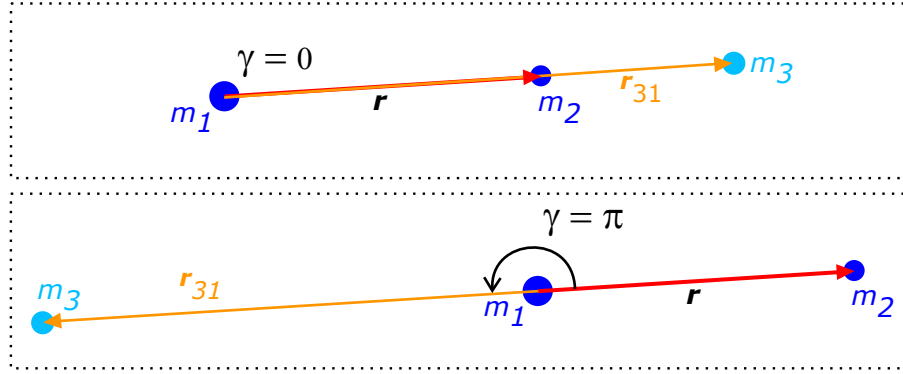


Figura 5: Ilustração da relação entre a magnitude da perturbação e o ângulo  $\gamma$ . Dois casos extremos.

Para  $\gamma = 0$ , a distância de  $m_2$  até o corpo  $m_3$  é mínima, assim o distúrbio provocado pelo corpo  $m_1$  é mínimo, como mostra a equação 21. Por outro lado, para  $\gamma = \pi$ , a distância de  $m_2$  até o corpo  $m_3$  é máxima e para  $m_1$  é mínima, assim a distúrbio provocado pelo corpo  $m_2$  é máximo, como mostra a equação 22.

Um estudo mais aprofundado sobre o impacto de  $\gamma$  é bem mais complexo, dando origem, inclusive ao conceito de **pontos lagrangeanos**, que são locais onde a gravidade dos dois primários se cancela. Isto é visto no conteúdo de **problema de 3 corpos restrito**, que não é tratado no curso.

Na seção seguinte, os resultados desenvolvidos acima são aplicados num contexto em que a distância entre o primário  $m_1$  e o terceiro corpo  $m_3$  é suficientemente longa de modo que o efeito de  $\gamma$  pode ser desprezado. Isto vai resultar no conceito clássico de *esfera de influência*.

### 3.1 Esfera de Influência

As expressões algébricas das perturbações relativas  $\frac{a_{d21}}{a_{23}}$  e  $\frac{a_{d23}}{a_{21}}$  são usadas para determinar a região onde a ação gravitacional de  $m_1$  predomina sobre a de  $m_3$ . Esta região é a *esfera de*



*influência* de  $m_1$  com respeito a  $m_3$ .

A **esfera de influência** de  $m_1$  com respeito a  $m_3$  é a região dentro da qual a perturbação relativa de  $m_3$  é menor que a perturbação de  $m_1$ :

$$\frac{a_{d23}}{a_{21}} < \frac{a_{d21}}{a_{23}} \quad (23)$$

A borda da esfera de influência (limite da atração gravitacional de  $m_1$  quando comparado com  $m_2$ ) é obtido quando ocorre a igualdade na equação 23. Deste modo, para além desta borda, a gravidade de  $m_3$  passa a dominar com respeito a de  $m_1$ .

Então a expressão para calcular o contorno da esfera de influência é:

$$\frac{a_{d23}}{a_{21}} = \frac{a_{d21}}{a_{23}} \quad (24)$$

Pelas equações 19 e 20, verifica-se que a esfera de influência depende das massas  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ , da distância  $r_{13}$  entre o primeiro e o terceiro corpo, bem como do ângulo  $\gamma$ . Rigorosamente falando, devido à dependência com  $\gamma$ , a distância  $r$  sobre a borda da esfera de influência depende da posição orbital de  $m_2$  com respeito ao corpo  $m_1$ .

A expressão de  $r$  sobre a borda da esfera de influência é obtida substituindo as equações 19 e 20 na equação 24:

$$\begin{aligned} & \frac{m_3}{m_1 + m_2} \left( \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^4 + \left( \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^{-2} - 2 \cos \gamma \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^{-1} + 1 \right)^{-\frac{3}{2}} \left( \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^3 - \frac{r}{r_{31}} \right) + \right. \\ & \left. \left( \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^{-2} - 2 \cos \gamma \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^{-1} + 1 \right)^{-2} - \left( \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^{-2} - 2 \cos \gamma \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^{-1} + 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^3 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ & \frac{m_1}{m_3 + m_2} \left( \left( \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^2 - 2 \cos \gamma \frac{r}{r_{31}} + 1 \right)^2 + \left( \left( \frac{r_{31}}{r} \right)^2 - 2 \cos \gamma \frac{r_{31}}{r} + 1 \right)^2 + \right. \\ & \left. - 2 \cos \gamma \left( \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^2 - 2 \cos \gamma \frac{r}{r_{31}} + 1 \right) \left( \left( \frac{r_{31}}{r} \right)^2 - 2 \cos \gamma \frac{r_{31}}{r} + 1 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Após uma extensão manipulação algébrica, obtém-se a relação abaixo, a qual representa a distância radial  $r$  da esfera de influência em função das massas envolvidas e do ângulo  $\gamma$ . Esta distância é dada em termos da razão com  $r_{13}$ :  $\bar{r} = \frac{r}{r_{13}}$

$$\begin{aligned} & \frac{m_1(m_1 + m_2)}{m_3(m_2 + m_3)} = \\ & \sqrt{\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\bar{r}^2} - \frac{2 \cos \gamma}{\bar{r}}\right)^2} - \frac{\bar{r} - \bar{r}^3}{\left(1 + \frac{1}{\bar{r}^2} - \frac{2 \cos \gamma}{\bar{r}}\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\bar{r}^3}{\sqrt{1 + \frac{1}{\bar{r}^2} - \frac{2 \cos \gamma}{\bar{r}}}} + \bar{r}^4} \quad (25) \\ & \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\bar{r}^2} - \frac{2 \cos \gamma}{\bar{r}}\right)^2 - 2 \cos \gamma \left(1 + \frac{1}{\bar{r}^2} - \frac{2 \cos \gamma}{\bar{r}}\right) (1 - 2\bar{r} \cos \gamma + \bar{r}^2) + (1 - 2\bar{r} \cos \gamma + \bar{r}^2)^2} \end{aligned}$$

A equação 25 determina implicitamente a distância normalizada  $\bar{r}$  sobre a esfera de in-

fluência. Em princípio, apesar de receber o nome de “esfera”, não é possível identificar um comportamento de esfera nesta expressão.

A equação 25 está demasiado genérica e precisa ser simplificada. A primeira manipulação a ser feita diz respeito à dependência com a massa  $m_2$ . Espera-se que a esfera de influência seja algo inerente ao efeito gravitacional de  $m_1$  e  $m_2$ , que isso independa da massa de prova  $m_2$ . De fato, em aplicações de engenharia aeroespacial, ou mesmo no estudo de asteroides em astronomia, a massa  $m_2$  é muito pequena quando comparada à  $m_1$  ou  $m_3$ . Assim, a razão de massas do lado direito da equação 25 pode ser escrita como:

$$\frac{m_1(m_1 + m_2)}{m_3(m_2 + m_3)} \approx \frac{m_1^2}{m_3^2} \quad (26)$$

A segunda hipótese para determinação da esfera de influência tem a ver com as distâncias envolvidas. Admite-se que a distância  $r$  sobre a borda da esfera de influência seja muito menor que a distância entre os primários, ou seja:

$$\frac{r}{r_{13}} \ll 1, \quad \text{para } r \text{ sobre a borda da esfera de influência} \quad (27)$$

A hipótese da equação 27 quer dizer que a **esfera de influência** de  $m_1$  é uma **pequena região centrada em  $m_1$**  quando **comparada à distância entre o primário  $m_1$  e o terceiro corpo  $m_3$** .

A hipótese da equação 27 simplifica sobremaneira o lado direito da equação 25:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\bar{r}^2} - \frac{2 \cos \gamma}{\bar{r}}\right)^2} - \frac{\bar{r} - \bar{r}^3}{\left(1 + \frac{1}{\bar{r}^2} - \frac{2 \cos \gamma}{\bar{r}}\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\bar{r}^3}{\sqrt{1 + \frac{1}{\bar{r}^2} - \frac{2 \cos \gamma}{\bar{r}}}} + \bar{r}^4} \\ & \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\bar{r}^2} - \frac{2 \cos \gamma}{\bar{r}}\right)^2 - 2 \cos \gamma \left(1 + \frac{1}{\bar{r}^2} - \frac{2 \cos \gamma}{\bar{r}}\right) (1 - 2\bar{r} \cos \gamma + \bar{r}^2) + (1 - 2\bar{r} \cos \gamma + \bar{r}^2)^2} \\ & \approx \frac{\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{\bar{r}^2}\right)^2} - \frac{\bar{r}}{\left(\frac{1}{\bar{r}^2}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\bar{r}^3}{\left(\frac{1}{\bar{r}^2}\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\bar{r}^3}{\sqrt{\frac{1}{\bar{r}^2}}} + \bar{r}^4}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\bar{r}^2}\right)^2 - 2 \cos \gamma \left(\frac{1}{\bar{r}^2}\right) + 1}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{\bar{r}^4} - \frac{\bar{r}}{\bar{r}^3} + \frac{\bar{r}^3}{\bar{r}^3} - \frac{\bar{r}^3}{\bar{r}} + \bar{r}^4}}{\sqrt{\frac{1}{\bar{r}^4} - 2 \cos \gamma \left(\frac{1}{\bar{r}^2}\right) + 1}} = \frac{\sqrt{\bar{r}^4 - \bar{r}^4 + \bar{r}^6 - \bar{r}^4 + \bar{r}^4}}{\sqrt{\frac{1}{\bar{r}^4}}} \\ & = \frac{\sqrt{\bar{r}^6}}{\frac{1}{\bar{r}^2}} = \frac{\bar{r}^3}{\frac{1}{\bar{r}^2}} = \bar{r}^5 \end{aligned} \quad (28)$$

Então, das equações 26 e 28, tem-se que a equação da esfera de influência, para  $r \ll r_{13}$  é:

$$\frac{m_1^2}{m_3^2} = \left( \frac{r}{r_{13}} \right)^5 \quad (29)$$

A equação 29 é a expressão clássica da esfera de influência, ela significa que: a quinta potência da razão entre o raio da esfera de influência e a distância entre o primário e o terceiro corpo é igual o quadrado da razão entre as massas do primário e do terceiro corpo.

Pela equação 29, quando  $m_3 \gg m_1$ , a hipótese de  $r \ll r_{13}$  é confirmada, sendo que, neste caso, a **solução é válida**. Quando isto não é verdade, a solução não se aplica.

Para se ter uma ideia da aplicação prática da equação 29, a tabela 29 apresenta as esferas de

influência dos planetas do sistema solar (plutão pseudo planeta) com respeito ao Sol. Também é mostrada da esfera de influência da Lua com respeito à Terra.

Tabela 1: Alguns valores de raio de esfera de influência no sistema solar.

	$10^6$ km	Raios do corpo
Mercúrio	0,112	46
Vênus	0,616	102
Terra	0,924	145
Lua*	0,0661	38
Marte	0,576	170
Júpiter	48,2	687
Saturno	54,6	1.025
Urano	51,8	2.040
Netuno	86,8	3.525
Plutão	3,13	2.720

### 3.2 Aproximação Cônica e Voo Interplanetário

O conceito de esfera de influência possibilita uma estimativa rápida de uma trajetória interplanetária, por meio da conexão de trajetórias de dois corpos.

A aproximação consiste em tomar como primário o planeta ( $m_1$ ) ou o Sol ( $m_3$ ), dependendo se o veículo espacial ( $m_2$ ) está dentro ou fora da esfera de influência de  $m_1$ . Esta abordagem é chamada de **aproximação por seções cônicas**.

Geralmente, o projeto de uma trajetória interplanetária requer: a guiagem do veículo espacial a partir de uma posição inicial heliocêntrica  $\mathbf{R}_i$  (geralmente na vizinhança de um planeta), até uma posição final  $\mathbf{R}_f$ , próxima de outro planeta, em um dado tempo  $t_f$ , como mostrado na figura 6.

Então, o veículo espacial transita da esfera de influência de um planeta para a de outro, sob a influência da gravidade do Sol fora das duas esferas.

Para projetar tal viagem com base na aproximação por seções cônicas, os seguintes passos são necessários:

- a : Dadas a velocidade e a posição iniciais relativas,  $\mathbf{v}_i$  e  $\mathbf{r}_i$ , estime a posição heliocêntrica  $\mathbf{R}_d$  e respectiva velocidade  $\mathbf{V}_d$ , em uma trajetória de escape hiperbólica na esfera de influência do planeta de partida. Este passo requer a solução do problema de dois corpos com o planeta tomado como massa primária;
- b : Selecione o ponto de chegada  $\mathbf{R}_a$  na esfera de influência do planeta alvo, resolvendo o **problema de Lambert** associado a  $\mathbf{R}_d$ ,  $\mathbf{R}_a$  e  $t_f$ , usando o Sol como corpo primário;
- c A partir do ponto  $\mathbf{R}_a$  e da velocidade de chegada, estime a trajetória hiperbólica relativa ao planeta alvo, verificando se ela passa através da posição final desejada  $\mathbf{r}_f$ ;
- d Faça iterações para  $\mathbf{R}_d$  e  $\mathbf{R}_a$  até que as velocidades nas hipérboles relativas coincidam com aquelas da elipse de transferência heliocêntrica.

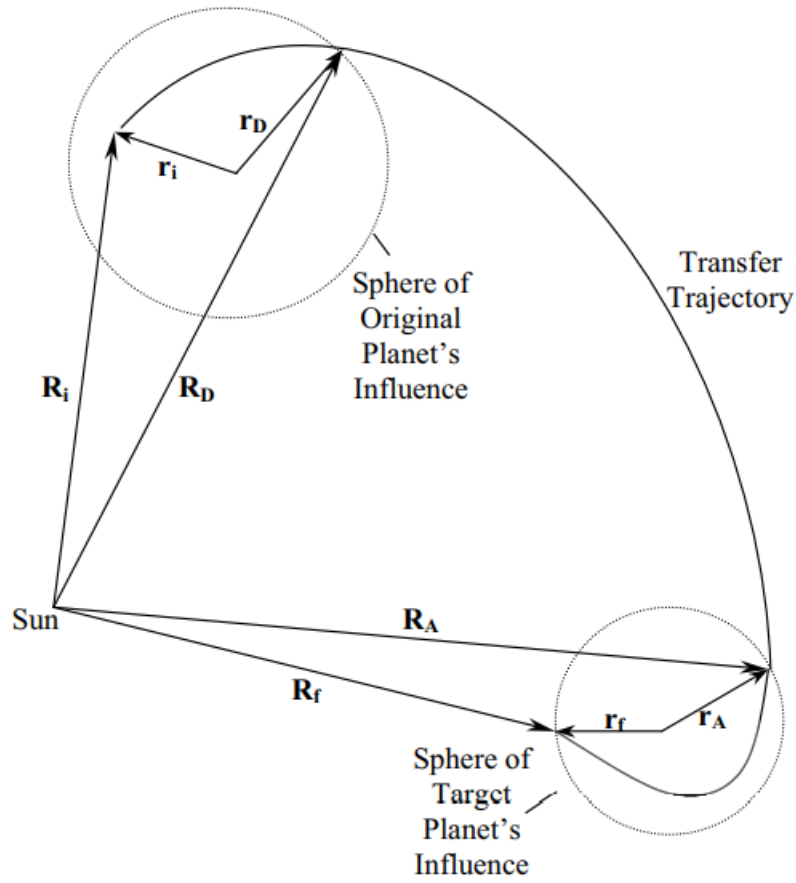


Figura 6: Transferência interplanetária a partir de aproximação por seções cônicas. Fonte: referência [2].

## Referências

- [1] H.D. CURTIS. *Orbital Mechanics for Engineering Students*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 3rd edition, 2013.
- [2] A. TEWARI. *Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modelling and simulation with MATLAB and Simulink*. Birkhauser, Boston, 2007.

## 4 Apêndice A

**Demonstração** do potencial gravitacional de terceiro corpo.

Sejam os vetores  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}_{32}$  e  $\mathbf{r}_{31}$  escritos em coordenadas cartesianas:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{31} = \begin{bmatrix} x_{31} \\ y_{31} \\ z_{31} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{32} = \begin{bmatrix} x_{32} \\ y_{32} \\ z_{32} \end{bmatrix}$$

Produto escalar  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{31}$ :

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{31} = xx_{31} + yy_{31} + zz_{31}$$

Cálculo do gradiente de  $\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3}$ . Como as derivadas parciais são com respeito a  $x$ ,  $y$  e  $z$  e a magnitude  $r_{31}$  é função de  $x_{31}$ ,  $y_{31}$  e  $z_{31}$ , a parcela  $\frac{1}{r_{31}^3}$  pode ser “tirada para fora” da derivada:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} = \frac{1}{r_{31}^3} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(xx_{31} + yy_{31} + zz_{31}) \\ \frac{\partial}{\partial y}(xx_{31} + yy_{31} + zz_{31}) \\ \frac{\partial}{\partial z}(xx_{31} + yy_{31} + zz_{31}) \end{bmatrix} = \frac{1}{r_{31}^3} \begin{bmatrix} x_{31} \\ y_{31} \\ z_{31} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} = \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} \quad (30)$$

O vetor  $\mathbf{r}_{32}$  é dado em termos de  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}_{31}$ , pela figura 1 tem-se que:

$$\mathbf{r}_{32} = \mathbf{r}_{31} - \mathbf{r} = \begin{bmatrix} x_{31} - x \\ y_{31} - y \\ z_{31} - z \end{bmatrix} \quad (31)$$

Magnitude:

$$r_{32} = \sqrt{(x_{31} - x)^2 + (y_{31} - y)^2 + (z_{31} - z)^2}$$

Gradiente de  $\frac{1}{r_{32}}$ :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{r_{32}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r_{32}} \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r_{32}} \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r_{32}} \end{bmatrix}$$

Abaixo, segue o cálculo da derivada  $\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r_{32}}$ . As demais serão omitidas, por serem análogas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r_{32}} &= \frac{\partial}{\partial r_{32}} \frac{1}{r_{32}} \frac{\partial r_{32}}{\partial x} = -\frac{1}{r_{32}^2} \frac{\partial}{\partial x} ((x_{31} - x)^2 + (y_{31} - y)^2 + (z_{31} - z)^2)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r_{32}} &= -\frac{1}{r_{32}^2} \frac{1}{2} ((x_{31} - x)^2 + (y_{31} - y)^2 + (z_{31} - z)^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x} ((x_{31} - x)^2 + (y_{31} - y)^2 + (z_{31} - z)^2) \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r_{32}} &= -\frac{1}{r_{32}^2} \frac{1}{2} \frac{1}{((x_{31} - x)^2 + (y_{31} - y)^2 + (z_{31} - z)^2)^{\frac{1}{2}}} 2(x_{31} - x) \frac{\partial(x_{31} - x)}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r_{32}} &= \frac{1}{r_{32}^3} (x_{31} - x) \end{aligned}$$

Como  $x_{32} = x_{31} - x$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r_{32}} = \frac{x_{32}}{r_{32}^3}$$

Em analogia, ao resultado acima, as três derivadas parciais são:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r_{32}} = \frac{x_{32}}{r_{32}^3}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r_{32}} = \frac{y_{32}}{r_{32}^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r_{32}} = \frac{z_{32}}{r_{32}^3}$$

Resultando no gradiente:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{r_{32}} = \frac{\mathbf{r}_{32}}{r_{32}^3} \quad (32)$$

Dos resultados das equações 30 e 32, o gradiente da função 7 é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left( Gm_3 \left( \frac{1}{r_{32}} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} \right) \right) = Gm_3 \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{r_{32}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi &= Gm_3 \left( \frac{\mathbf{r}_{32}}{r_{32}^3} - \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} \right) \end{aligned}$$

O resultado acima é igual à aceleração perturbativa da equação 4, que é o que se desejava demonstrar.

## 5 Apêndice B

Desenvolvimento das razões entre distúrbio e aceleração.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{21} &= \left\| -G(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right\| = G(m_1 + m_2) \frac{r}{r^3} \\ \mathbf{a}_{21} &= G(m_1 + m_2) \frac{1}{r^2} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{23} &= \left\| -G(m_3 + m_2) \frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}^3} \right\| = G(m_3 + m_2) \frac{r_{23}}{r_{23}^3} \\ \mathbf{a}_{23} &= G(m_3 + m_2) \frac{1}{r_{23}^2} \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned}
a_{d_{21}} &= \sqrt{\mathbf{a}_{d_{21}} \cdot \mathbf{a}_{d_{21}}} = \sqrt{\left(Gm_1 \left(\frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)\right) \cdot \left(Gm_1 \left(\frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)\right)} \\
a_{d_{21}} &= Gm_1 \sqrt{\frac{\mathbf{r}_{31} \cdot \mathbf{r}_{31}}{r_{31}^6} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r^6} - 2 \frac{\mathbf{r}_{31} \cdot \mathbf{r}}{r_{31}^3 r^3}} \\
a_{d_{21}} &= Gm_1 \sqrt{\frac{r_{31}^2}{r_{31}^6} + \frac{r^2}{r^6} - 2 \frac{r_{31} r \cos \gamma}{r_{31}^3 r^3}}, \text{ pois } \gamma \text{ é o ângulo entre } \mathbf{r}_{31} \text{ e } \mathbf{r} \\
a_{d_{21}} &= Gm_1 \sqrt{\frac{1}{r_{31}^4} + \frac{1}{r^4} - 2 \frac{\cos \gamma}{r_{31}^2 r^2}} \tag{35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{d_{23}} &= \sqrt{\mathbf{a}_{d_{23}} \cdot \mathbf{a}_{d_{23}}} = \sqrt{\left(Gm_3 \left(\frac{\mathbf{r}_{32}}{r_{32}^3} - \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3}\right)\right) \cdot \left(Gm_3 \left(\frac{\mathbf{r}_{32}}{r_{32}^3} - \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3}\right)\right)} \\
a_{d_{23}} &= Gm_3 \sqrt{\frac{\mathbf{r}_{32} \cdot \mathbf{r}_{32}}{r_{32}^6} + \frac{\mathbf{r}_{31} \cdot \mathbf{r}_{31}}{r_{31}^6} - 2 \frac{\mathbf{r}_{32} \cdot \mathbf{r}_{31}}{r_{32}^3 r_{31}^3}} \\
a_{d_{23}} &= Gm_3 \sqrt{\frac{r_{32}^2}{r_{32}^6} + \frac{r_{31}^2}{r_{31}^6} - 2 \frac{(\mathbf{r}_{31} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}_{31}}{r_{32}^3 r_{31}^3}}, \text{ pois } \mathbf{r}_{32} = \mathbf{r}_{31} - \mathbf{r} \\
a_{d_{23}} &= Gm_3 \sqrt{\frac{1}{r_{32}^4} + \frac{1}{r_{31}^4} - 2 \frac{r_{31}^2 - r_{31} r \cos \gamma}{r_{32}^3 r_{31}^3}} \tag{36}
\end{aligned}$$

Das equações 33 e 36, determina-se a razão  $\frac{a_{d_{23}}}{a_{21}}$  após extensa manipulação algébrica:

$$\begin{aligned}
\frac{a_{d_{23}}}{a_{21}} &= \frac{m_3}{m_1 + m_2} \left( \left(\frac{r}{r_{31}}\right)^4 + \left( \left(\frac{r}{r_{31}}\right)^{-2} - 2 \cos \gamma \left(\frac{r}{r_{31}}\right)^{-1} + 1 \right)^{-\frac{3}{2}} \left( \left(\frac{r}{r_{31}}\right)^3 - \frac{r}{r_{31}} \right) + \right. \\
&\quad \left. \left( \left(\frac{r}{r_{31}}\right)^{-2} - 2 \cos \gamma \left(\frac{r}{r_{31}}\right)^{-1} + 1 \right)^{-2} - \left( \left(\frac{r}{r_{31}}\right)^{-2} - 2 \cos \gamma \left(\frac{r}{r_{31}}\right)^{-1} + 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{r_{31}}\right)^3 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{37}
\end{aligned}$$

Das equações 34 e 35, determina-se a razão  $\frac{a_{d_{21}}}{a_{23}}$  após extensa manipulação algébrica:

$$\begin{aligned}
\frac{a_{d_{21}}}{a_{23}} &= \frac{m_1}{m_3 + m_2} \left( \left( \left(\frac{r}{r_{31}}\right)^2 - 2 \cos \gamma \frac{r}{r_{31}} + 1 \right)^2 + \left( \left(\frac{r_{31}}{r}\right)^2 - 2 \cos \gamma \frac{r_{31}}{r} + 1 \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. - 2 \cos \gamma \left( \left(\frac{r}{r_{31}}\right)^2 - 2 \cos \gamma \frac{r}{r_{31}} + 1 \right) \left( \left(\frac{r_{31}}{r}\right)^2 - 2 \cos \gamma \frac{r_{31}}{r} + 1 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \tag{38}
\end{aligned}$$

Cálculos da equação 38 para os casos específicos  $\gamma = 0$  e  $\gamma = \pi$ :

$$\begin{aligned}
\frac{a_{d_{21}}}{a_{23}} \Big|_{\gamma=0} &= \frac{m_1}{m_3 + m_2} \left( \left( \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^2 - 2 \frac{r}{r_{31}} + 1 \right)^2 + \left( \left( \frac{r_{31}}{r} \right)^2 - 2 \frac{r_{31}}{r} + 1 \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. - 2 \left( \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^2 - 2 \frac{r}{r_{31}} + 1 \right) \left( \left( \frac{r_{31}}{r} \right)^2 - 2 \frac{r_{31}}{r} + 1 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
\frac{a_{d_{21}}}{a_{23}} \Big|_{\gamma=0} &= \frac{m_1}{m_3 + m_2} \left( \left( \left( \frac{r}{r_{31}} - 1 \right)^2 \right)^2 + \left( \left( \frac{r_{31}}{r} - 1 \right)^2 \right)^2 - 2 \left( \frac{r}{r_{31}} - 1 \right)^2 \left( \frac{r_{31}}{r} - 1 \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
\frac{a_{d_{21}}}{a_{23}} \Big|_{\gamma=0} &= \frac{m_1}{m_3 + m_2} \left( \left( \left( \frac{r}{r_{31}} - 1 \right)^2 - \left( \frac{r_{31}}{r} - 1 \right)^2 \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
\frac{a_{d_{21}}}{a_{23}} \Big|_{\gamma=0} &= \frac{m_1}{m_3 + m_2} \left| \left( \frac{r}{r_{31}} - 1 \right)^2 - \left( \frac{r_{31}}{r} - 1 \right)^2 \right| \tag{39}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{a_{d_{21}}}{a_{23}} \Big|_{\gamma=\pi} &= \frac{m_1}{m_3 + m_2} \left( \left( \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^2 + 2 \frac{r}{r_{31}} + 1 \right)^2 + \left( \left( \frac{r_{31}}{r} \right)^2 + 2 \frac{r_{31}}{r} + 1 \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + 2 \left( \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^2 + 2 \frac{r}{r_{31}} + 1 \right) \left( \left( \frac{r_{31}}{r} \right)^2 + 2 \frac{r_{31}}{r} + 1 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
\frac{a_{d_{21}}}{a_{23}} \Big|_{\gamma=\pi} &= \frac{m_1}{m_3 + m_2} \left( \left( \left( \frac{r}{r_{31}} + 1 \right)^2 \right)^2 + \left( \left( \frac{r_{31}}{r} + 1 \right)^2 \right)^2 + 2 \left( \frac{r}{r_{31}} + 1 \right)^2 \left( \frac{r_{31}}{r} + 1 \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
\frac{a_{d_{21}}}{a_{23}} \Big|_{\gamma=\pi} &= \frac{m_1}{m_3 + m_2} \left( \left( \left( \frac{r}{r_{31}} + 1 \right)^2 + \left( \frac{r_{31}}{r} + 1 \right)^2 \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
\frac{a_{d_{21}}}{a_{23}} \Big|_{\gamma=\pi} &= \frac{m_1}{m_3 + m_2} \left| \left( \frac{r}{r_{31}} + 1 \right)^2 + \left( \frac{r_{31}}{r} + 1 \right)^2 \right| \tag{40}
\end{aligned}$$