

DEM1122 - DINÂMICA E CONTROLE DE VEÍCULOS ESPACIAIS

Aula 11

Prof. André Luís da Silva

1 Introdução

- Controle de veículo espacial em três eixos
 - Manobras de Orientação com realimentação de quatérnion;
 - Simulação de satélites com rodas de reação.

Referência da aula [1]: **Wie, B.** Space Vehicle Dynamics and Control. 2 . ed., AIAA Education Series, Reston, VA: AIAA, 2008. **Seção 7.3. 7.3.1**

Alguns satélites precisam ser apontados em 3 eixos com respeito ao espaço inercial, por motivo da sua missão, por exemplo o satélite “X-ray timing explorer” (RXTE) da figura 1. Este é um satélite de observação astrofísica que precisa apontar seus instrumentos precisamente para as estrelas de interesse.

Satélites controlados em 3 eixos precisam ter estabilização e controle em malha fechada. Para fazer isso, pode-se usar atuação com rodas de reação e medida de velocidade angular com giroscópios e atitude com sensor de estrelas.

A lei de controle precisa realimentar a atitude e isso pode ser feito pela representação de quatérnios, como estudado a seguir.



Figura 1: Representação artística do satélite RXTE. Fonte: Public Domain, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=85795>.

2 Manobras de Orientação Utilizando Quatérnio

2.1 Objetivo do Controle

O objetivo da estratégia do controle é apontar o satélite para alguma direção de referência no espaço inercial, a partir de uma atitude qualquer, provendo estabilidade com respeito a esta condição de equilíbrio.

Assume-se que o apontamento deve ser feito com respeito a um sistema de referência inercial (SRI).

2.2 Hardware Utilizado

O controle é de malha fechada e precisa de atuadores e sensores de três eixos, como descrito a seguir.

Os sensores empregados são giroscópios para mensurar a velocidade angular inercial decomposta nos eixos do sistema de referência do corpo (SRC). Para medir a atitude, são utilizados sensores de estrela. Estes podem ser combinados com sensores solares ou sistema de navegação inercial com integração de velocidade angular.

Os atuadores empregados são rodas de reação. Assume-se um conjunto de 3 rodas de reação com eixos de torque alinhados com os eixos do SRC. Mas, na prática, diversos arranjos podem existir com 3 rodas alinhadas em direções quaisquer (com eixos de torque não colineares), ou mesmo mais de 3 rodas, por motivos de redundância e capacidade de atuação.

O controlador é um computador que recebe os dados dos sensores, calcula o comando a partir de uma lei de controle e envia os mesmos para os atuadores. Como o computador não possui capacidade de corrente para alimentar os atuadores diretamente, seu sinal de saída é de baixa energia, sendo processador por um *driver* de controle das rodas de reação.

O *driver* de controle das rodas de reação, além de converter os sinais de baixa energia do computador, também implementa a lógica de controle das rodas de reação. Estas recebem do computador um comando de torque de referência, este precisa ser convertido pelo *driver* em aceleração das rodas de reação, o que ocorre por meio do comando de motores elétricos.

2.3 Modelagem do Problema

Considera-se que o satélite é um corpo rígido. Assume-se que ω_x , ω_y e ω_z são as velocidades angulares do satélite com respeito a um referencial inercial, escritas no SRC. I_{xx} , I_{yy} e I_{zz} são os momentos de inércia e I_{xy} , I_{xz} e I_{yz} seus produtos de inércia. O SRC do corpo não precisa coincidir com os eixos principais e o satélite não precisa ter simetria.

Para o projeto e análise do controlador, ignora-se os efeitos de acoplamento entre a dinâmica das rodas de reação e do corpo rígido, também ignora-se o tempo de resposta das mesmas. Ou seja, assume-se que as rodas de reação geram um torque ideal, tal como comandado pela lei de controle.

A aproximação acerca das rodas de reação faz sentido na seguinte situação:

- O tempo de resposta das rodas de reação é muito rápido quando comparado à dinâmica do corpo rígido;
- A quantidade de movimento angular do corpo rígido é muito superior a das rodas de reação.

Ao fazer isso, o modelo dinâmico do satélite torna-se simplesmente:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{I}^{-1} (\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}) \quad (1)$$

Onde \mathbf{I} é a matriz de inércia e \mathbf{u} é o vetor de controle:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \quad (2)$$

As ações de controle u_x , u_y e u_z são os torques aplicados pelas rodas de reação dos eixos x , y e z do SRC, respectivamente. Na modelagem idealizada adotada, eles são iguais aos respectivos comandos calculados pela lei de controle.

O objetivo de controle envolve adquirir uma atitude desejada, desta forma, é necessário modelar a cinemática de atitude. Isso é feito por quatérnio.

Os motivos de utilizar **quatérnio** são vários:

- Sua representação cinemática não possui singularidades, podem representar qualquer orientação sem incorrer em erros numéricos durante o cálculo da atitude ou do controle;
- É uma medida fornecida pelos computadores de cálculo de atitude modernos;
- Facilitam o desenvolvimento de leis de controle e a respectiva análise de estabilidade.

A cinemática de quatérnio foi vista na aula 3:

$$\dot{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) & \boldsymbol{\omega} \\ -\boldsymbol{\omega}^T & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}$$

Ou:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) & \boldsymbol{\omega} \\ -\boldsymbol{\omega}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

Que define as equações de cinemática da parte vetorial e real do quatérnio:

$$\dot{\mathbf{q}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} + q_4 \boldsymbol{\omega} \quad (3)$$

$$\dot{q}_4 = -\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{q} \quad (4)$$

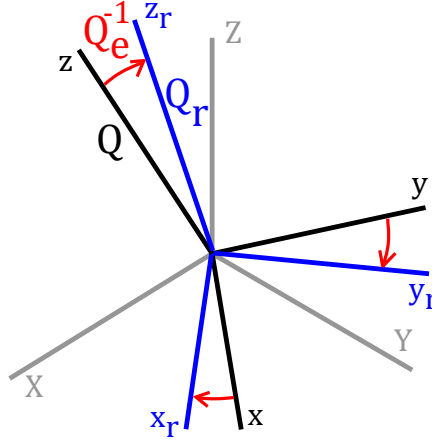


Figura 2: Quatérnio de erro.

Sendo \mathbf{q} a parte vetorial do quatérnio:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

2.4 Modelagem do objetivo de controle

Para facilitar o projeto e análise do controle, assume-se que o SRI é a atitude desejada. Em outras palavras: considera-se que, na condição desejada, os eixos do SRC estão alinhados com os do SRI. Desta forma, a lei de controle será um **regulador**, que deve levar o sistema dinâmico para origem.

Para introduzir o objetivo de controle com respeito ao quatérnio, primeiro faz a analogia com o sinal de erro de controle clássico:

$$e = r - y$$

o sinal de erro “ e ” é a diferença entre a referência “ r ” e a saída medida “ y ”. Isso é válido quando se trabalha com sinais escalares, como por exemplo o ângulo de arfagem de uma aeronave.

Quando se trabalha com realimentação de quatérnio, por outro lado, modela-se o erro como sendo a rotação que desalinha o quatérnio medido com respeito ao comandado, como indicado na figura 2.

Na figura 2, XYZ são os eixos com respeito ao qual a atitude é medida. xyz são os eixos do SRC em certo instante, aos quais está associado o quatérnio \mathbf{Q} que orienta estes eixos com respeito a XYZ . $x_r y_r z_r$ são os eixos que representam a atitude de referência, ou desejada, aos quais está associado o quatérnio \mathbf{Q}_r (referência) que orienta estes eixos com respeito a XYZ .

O quatérnio de erro \mathbf{Q}_e é o inverso da rotação que gera a referência a partir do

quatérnio medido, ou seja:

$$\mathbf{Q}_r = \mathbf{Q}_e^{-1} \mathbf{Q}$$

onde omitiu o símbolo de produto de quatérnios.

A equação 5 também pode ser escrita como:

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{Q}_r^{-1} \mathbf{Q} \quad (5)$$

O inverso de quatérnio não foi definido na aula 3, mas pode ser determinado facilmente a partir do conceito de produto de quatérnios. Analogamente aos números complexos, o inverso de quatérnio é definido a partir da divisão:

$$\mathbf{R}/\mathbf{S} = \mathbf{R}\mathbf{S}^{-1}$$

onde \mathbf{R} e \mathbf{S} são quatérnios.

O quociente é revolidado da seguinte maneira:

$$\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{S}} = \frac{\mathbf{R} \bar{\mathbf{S}}}{\mathbf{S} \bar{\mathbf{S}}} = \frac{\mathbf{R} \bar{\mathbf{S}}}{\mathbf{S} \bar{\mathbf{S}}}$$

$\bar{\mathbf{S}}$ é o conjugado do quatérnio \mathbf{S} :

$$\bar{\mathbf{S}} = s_4 - is_1 - js_2 - ks_3$$

A partir da propriedade fundamental de quatérnio ($ijk = -1$, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$) é fácil demonstrar que:

$$\mathbf{S} \bar{\mathbf{S}} = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2 = ||\mathbf{S}||^2$$

Então o inverso de um quatérnio é:

$$\mathbf{S}^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{S}}}{||\mathbf{S}||^2}$$

Como um quatérnio de atitude \mathbf{Q} tem módulo unitário, seu inverso é simplesmente seu conjugado:

$$\mathbf{Q}^{-1} = \bar{\mathbf{Q}} \quad (6)$$

2.5 Lei de controle

Pela própria definição, todo quatérnio tem um eixo e ângulo associado. Assim, um quatérnio de erro pode ser escrito como:

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{e}_e \sin \frac{\phi_e}{2} \quad (7)$$

$$q_{4e} = \cos \frac{\phi_e}{2} \quad (8)$$

Onde \mathbf{q}_e e q_{4e} são a parte vetorial e escalar do quatérnio de erro; \mathbf{e}_e é o vetor unitário do eixo de Euler do quatérnio de erro, ϕ_e é o ângulo principal do quatérnio de erro.

Fisicamente, para que o veículo espacial alinhe sua atitude com a referência, é necessário que ele realize uma rotação por um ângulo $-\phi_e$ ao redor do eixo \mathbf{e}_e .

A lei de controle de realimentação de quatérnio é análoga a um controle proporcional derivativo:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{q}_e - \mathbf{C}\boldsymbol{\omega} \quad (9)$$

Onde \mathbf{K} é a matriz de ganhos do erro e \mathbf{C} a matriz de ganhos da velocidade.

No controle clássico, a realimentação é da derivada de erro, no caso em questão, ela diz respeito à velocidade. Portanto, não se trata rigorosamente de um controle proporcional derivativo, mas de realimentação de velocidade.

Algo fundamental na lei de controle 9 diz respeito ao erro. A realimentação é do quatérnio em si \mathbf{Q}_e , mas da sua parte vetorial \mathbf{q}_e . É possível provar matematicamente que isto é suficiente para estabilizar a planta e garantir o rastreamento da referência. Mas, intuitivamente pode-se compreender isto pelo fato da parte vetorial “carregar” tanto a informação de vetor diretor \mathbf{e}_e quanto de ângulo principal ϕ_e (equação 7).

Para facilitar a lei de controle, assume-se que a atitude de referência são os eixos do próprio SRI, ou seja, o quatérnio de referência é:

$$\mathbf{Q}_r = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T \rightarrow \mathbf{Q}_r^{-1} = \mathbf{Q}_r$$

Assim o erro é o próprio quatérnio medido \mathbf{Q} e a lei de controle 9 se torna:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{C}\boldsymbol{\omega} \quad (10)$$

Assim, o problema de controle se torna uma regulação: quando $\mathbf{q} = \mathbf{0}$, o SRC está alinhado com o SRI e o apontamento desejado foi atingido.

A referência [1] afirma que as seguintes escolhas de ganho garantem que a lei de controle 10 torna o sistema de malha fechada globalmente estável em torno do ponto de equilíbrio: $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, $\mathbf{q} = \mathbf{0}$.

$$\mathbf{K} = k\mathbf{I}_3, \quad \mathbf{C} = \text{diag}(c_1, c_2, c_3) \quad (11)$$

$$\mathbf{K} = \frac{k}{q_4^3} \mathbf{I}_3, \quad \mathbf{C} = \text{diag}(c_1, c_2, c_3) \quad (12)$$

$$\mathbf{K} = k \text{sgn}(q_4) \mathbf{I}_3, \quad \mathbf{C} = \text{diag}(c_1, c_2, c_3) \quad (13)$$

$$\mathbf{K} = (\alpha \mathbf{I} + \beta \mathbf{I}_3)^{-1} \mathbf{I}_3, \quad \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C} > 0 \quad (14)$$

onde \mathbf{I}_3 é a matriz identidade 3×3 , $\text{sgn}(\cdot)$ é a função sinal, k , c_i são escalares positivos e α e β são números não negativos que não são simultaneamente nulos.

Os escalares acima podem ser determinados por alguma técnica de otimização, ou requisito sobre os parâmetros de desempenho de regime transitório ou permanente; ou podem simplesmente ser definidos por tentativa e erro.

2.6 Teste por simulação

A lei de controle da seção anterior garante estabilidade e o atendimento do objetivo de apontamento para ações de controle idealizadas, sem a dinâmica das rodas de reação.

Para testar o controle, primeiro, realiza-se a simulação do corpo rígido, com estas ações ideias de controle.

Após a lei de controle funcionar de modo satisfatório, deve-se fazer nova simulação com a planta completa, incluindo o modelo de satélite com rodas de reação da aula 9.

Referências

- [1] Bong Wie. *Space Vehicle Dynamics and Control*. AIAA Education Series. AIAA, Reston, VA, 2 edition, 2008.