

# DEM1122 - DINÂMICA E CONTROLE DE VEÍCULOS ESPACIAIS

## Aula 7

Prof. André Luís da Silva

### 1 Introdução

Tópicos da aula:

- Torque de gradiente gravitacional:
  - Equações gerais;
  - Cálculo para órbita circular;
  - Movimento com pequenas perturbações com respeito ao referencial LVLH;
  - Análise de estabilidade do modelo linear.

Referência da aula [1]: Wie, B. Space Vehicle Dynamics and Control. 2. ed., AIAA Education Series, Reston, VA: AIAA, 2008.

Seções usadas nesta aula:

- 6.10 Rigid body in a circular orbit.

### 2 Torque de Gradiente Gravitational

Nas aulas anteriores, foi estudada a dinâmica de rotação de 3 graus de liberdade de um corpo rígido sob condições idealizadas: livre de torque, ou com torque constante aplicado em torno de um eixo principal. Estes casos hipotéticos se materializam na prática em satélites, pois seu movimento em órbita, em algumas circunstâncias, pode ser assumido livre de torque; assim como o torque constante com respeito a um eixo pode representar o momento residual devido a um disparo de propulsor.

Seguindo esta linha de pensamento, a aula de hoje agrega mais elementos na representação do movimento de rotação de um satélite. Será modelado o **torque que atua sobre o corpo devido à força gravitacional**.

Quando um corpo está num campo gravitacional uniforme, o seu **centro de massa** (CM) é igual ao seu **centro de gravidade** (CG), sendo que o torque gravitacional com respeito ao

centro de massa é zero. Por outro lado, quando o campo gravitacional não é uniforme, o ponto de aplicação da força gravitacional resultante não é o centro de massa e existe um **torque gravitacional** com respeito ao centro de massa. Este efeito foi, inclusive, usado por Lagrange em 1780 para explicar porque sempre o mesmo lado da Lua fica virado para a Terra.

Como o torque gravitacional está associado à não uniformidade espacial do campo gravitacional, ele é chamado de **torque de gradiente gravitacional**.

Para modelar o torque de gradiente gravitacional que age sobre um corpo em órbita, considere a figura 1. Nela, apresenta-se um corpo genérico em uma órbita ao redor de um planeta.

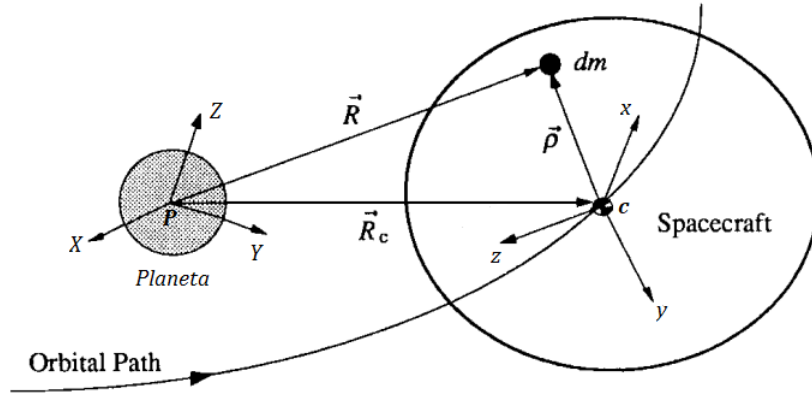


Figura 1: Cálculo do torque de gradiente gravitacional sobre um corpo em órbita. Fonte: adaptado da referência [1].

Inicialmente, dois sistemas de eixos de referência são considerados:

- $PXYZ$ : centrado no planeta em seu centro de massa  $P$  e com eixos inerciais  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ ;
- $cxzy$ : centrado no corpo em seu centro de massa  $c$  com eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  ao longo dos seus eixos principais de inércia.

A figura 1 evidencia os seguintes vetores:

- $\mathbf{R}_c$  é o vetor posição do centro de massa do corpo com respeito ao centro de massa do planeta, em suma, é o vetor radial da órbita;
- $\boldsymbol{\rho}$  é o vetor posição de um elemento de massa  $dm$  do corpo com respeito ao seu centro de massa;
- $\mathbf{R}$  é o vetor posição do elemento de massa  $dm$  com respeito ao centro de massa do planeta, onde  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_c + \boldsymbol{\rho}$ .

A força gravitacional do planeta sobre o elemento de massa  $dm$  é dada por:

$$d\mathbf{f} = -\frac{\mu dm \mathbf{R}}{R^3}$$

Onde:  $\mu = GM$  é o parâmetro gravitacional do planeta;  $R = ||\mathbf{R}||$  é a magnitude do vetor  $\mathbf{R}$ .

Então o torque de gradiente gravitacional sobre o elemento  $dm$  com respeito ao centro de massa do corpo é:

$$d\mathbf{M}_g = \boldsymbol{\rho} \times d\mathbf{f} = -\mu \frac{\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{R}}{R^3} dm$$

Integrando-se sobre toda a massa “ $m$ ” corpo, tem-se o torque de gradiente gravitacional resultante:

$$\mathbf{M}_g = \int_m -\mu \frac{\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{R}}{R^3} dm$$

A integral é escrita em função de  $\boldsymbol{\rho}$  a partir da relação  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_c + \boldsymbol{\rho}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_g &= -\mu \int_m \frac{\boldsymbol{\rho} \times (\mathbf{R}_c + \boldsymbol{\rho})}{\|\mathbf{R}_c + \boldsymbol{\rho}\|^3} dm = -\mu \int_m \frac{\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{R}_c + \boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\rho}}{\|\mathbf{R}_c + \boldsymbol{\rho}\|^3} dm \\ \mathbf{M}_g &= -\mu \int_m \frac{\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{R}_c}{\|\mathbf{R}_c + \boldsymbol{\rho}\|^3} dm - \mu \int_m \frac{\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\rho}}{\|\mathbf{R}_c + \boldsymbol{\rho}\|^3} dm = \mu \int_m \frac{\mathbf{R}_c \times \boldsymbol{\rho}}{\|\mathbf{R}_c + \boldsymbol{\rho}\|^3} dm \end{aligned}$$

pois  $\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\rho} = 0$  e  $\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{R}_c = -\mathbf{R}_c \times \boldsymbol{\rho}$ .

Como  $\mathbf{R}_c$  é uma constante na integração, ele pode ser removido da integral:

$$\mathbf{M}_g = \mu \mathbf{R}_c \times \int_m \frac{\boldsymbol{\rho}}{\|\mathbf{R}_c + \boldsymbol{\rho}\|^3} dm \quad (1)$$

O termo de mais difícil resolução na equação 1 é  $\frac{1}{\|\mathbf{R}_c + \boldsymbol{\rho}\|^3}$ , o qual pode ser escrito como:

$$\frac{1}{\|\mathbf{R}_c + \boldsymbol{\rho}\|^3} = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{R}_c + \boldsymbol{\rho}) \cdot (\mathbf{R}_c + \boldsymbol{\rho})}^3} = (R_c^2 + \rho^2 + 2\mathbf{R}_c \cdot \boldsymbol{\rho})^{-\frac{3}{2}} \quad (2)$$

Onde:  $R_c^2 = \|\mathbf{R}_c\|^2 = \mathbf{R}_c \cdot \mathbf{R}_c$  e  $\rho^2 = \|\boldsymbol{\rho}\|^2 = \boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}$ .

A equação 2 pode ser escrita inserindo-se  $R_c$  em evidência:

$$\frac{1}{\|\mathbf{R}_c + \boldsymbol{\rho}\|^3} = R_c^{-3} \left( 1 + \frac{\rho^2}{R_c^2} + 2\frac{\mathbf{R}_c \cdot \boldsymbol{\rho}}{R_c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \quad (3)$$

As dimensões de um veículo espacial são extremamente pequenas quando comparadas à distância radial  $R_c$  de sua órbita, assim  $1 + \left(\frac{\rho}{R_c}\right)^2 \approx 1$  e a equação 2 pode ser escrita como:

$$\frac{1}{\|\mathbf{R}_c + \boldsymbol{\rho}\|^3} = R_c^{-3} \left( 1 + 2\frac{\mathbf{R}_c \cdot \boldsymbol{\rho}}{R_c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \quad (4)$$

A potência na equação 4 pode ser expressa em termos da expansão da *série binomial*  $(1+x)^n$ , para  $x = 2\frac{\mathbf{R}_c \cdot \boldsymbol{\rho}}{R_c^2}$  e  $n = -\frac{3}{2}$ :

$$(1+x)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2}x + \text{termos de maior ordem}$$

A grandeza  $x = 2\frac{\mathbf{R}_c \cdot \boldsymbol{\rho}}{R_c^2}$  é muito pequena, de modo que os termos de ordem 2 ou superior podem ser ignorados na expansão em série, valendo a aproximação:

$$(1+x)^{-\frac{3}{2}} \approx -\frac{3}{2}x$$

Ou seja:

$$\left(1 + 2\frac{\mathbf{R}_c \cdot \boldsymbol{\rho}}{R_c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \approx 1 - \frac{3}{2}2\frac{\mathbf{R}_c \cdot \boldsymbol{\rho}}{R_c^2} = 1 - 3\frac{\mathbf{R}_c \cdot \boldsymbol{\rho}}{R_c^2}$$

Assim, a equação 4 pode ser escrita como:

$$\frac{1}{||\mathbf{R}_c + \boldsymbol{\rho}||^3} = R_c^{-3} \left(1 - 3\frac{\mathbf{R}_c \cdot \boldsymbol{\rho}}{R_c^2}\right) \quad (5)$$

Assim, a integral 1 é escrita como:

$$\mathbf{M}_g = \mu \mathbf{R}_c \times \int_m \boldsymbol{\rho} \left( \frac{1}{R_c^3} - 3\frac{\mathbf{R}_c \cdot \boldsymbol{\rho}}{R_c^5} \right) dm$$

Desmembrando os termos envolvidos na integração:

$$\mathbf{M}_g = \frac{\mu}{R_c^3} \mathbf{R}_c \times \int_m \boldsymbol{\rho} dm - \frac{3\mu}{R_c^5} \mathbf{R}_c \times \int_m \boldsymbol{\rho} \mathbf{R}_c \cdot \boldsymbol{\rho} dm$$

Como  $\boldsymbol{\rho}$  é medido com respeito ao centro de massa:  $\int_m \boldsymbol{\rho} dm = 0$ , assim a integral se torna:

$$\mathbf{M}_g = -\frac{3\mu}{R_c^5} \mathbf{R}_c \times \int_m \boldsymbol{\rho} \mathbf{R}_c \cdot \boldsymbol{\rho} dm \quad (6)$$

O integrando  $\boldsymbol{\rho} \mathbf{R}_c \cdot \boldsymbol{\rho}$  pode ser reescrito usando a identidade do triplo produto vetorial:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \\ \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) &= \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \\ \boldsymbol{\rho}(\mathbf{R}_c \cdot \boldsymbol{\rho}) &= \mathbf{R}_c(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}) - (\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{R}_c) \times \boldsymbol{\rho} \\ \boldsymbol{\rho}(\mathbf{R}_c \cdot \boldsymbol{\rho}) &= \mathbf{R}_c \rho^2 - (\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{R}_c) \times \boldsymbol{\rho} \end{aligned}$$

Substituindo este resultado na equação 6 e expandindo os termos:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_g &= -\frac{3\mu}{R_c^5} \mathbf{R}_c \times \int_m \mathbf{R}_c \rho^2 - (\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{R}_c) \times \boldsymbol{\rho} dm \\ \mathbf{M}_g &= -\frac{3\mu}{R_c^5} \mathbf{R}_c \times \int_m \mathbf{R}_c \rho^2 dm - \frac{3\mu}{R_c^5} \mathbf{R}_c \times \int_m -(\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{R}_c) \times \boldsymbol{\rho} dm \\ \mathbf{M}_g &= -\frac{3\mu}{R_c^5} \mathbf{R}_c \times \mathbf{R}_c \int_m \rho^2 dm + \frac{3\mu}{R_c^5} \mathbf{R}_c \times \int_m (\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{R}_c) \times \boldsymbol{\rho} dm \end{aligned}$$

Como  $\mathbf{R}_c \times \mathbf{R}_c = \mathbf{0}$ :

$$\mathbf{M}_g = \frac{3\mu}{R_c^5} \mathbf{R}_c \times \int_m (\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{R}_c) \times \boldsymbol{\rho} dm$$

O integrando pode ser manipulado para propiciar evidenciar  $\mathbf{R}_c$  na integral:

$$(\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{R}_c) \times \boldsymbol{\rho} = -\boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{R}_c) = -\mathbf{S}(\boldsymbol{\rho})\mathbf{S}(\boldsymbol{\rho})\mathbf{R}_c$$

onde  $\mathbf{S}(\cdot)$  é matriz anti simétrica do produto vetorial:

Substituindo o resultado na integral:

$$\mathbf{M}_g = \frac{3\mu}{R_c^5} \mathbf{R}_c \times \int_m -\mathbf{S}(\boldsymbol{\rho})\mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}) \times \mathbf{R}_c dm = \frac{3\mu}{R_c^5} \mathbf{R}_c \times \int_m -\mathbf{S}(\boldsymbol{\rho})\mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}) dm \mathbf{R}_c \quad (7)$$

A integral na equação acima é explicitada abaixo:

$$\begin{aligned} \int_m -\mathbf{S}(\boldsymbol{\rho})\mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}) dm &= \int_m - \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} dm = \\ &= \int_m - \begin{bmatrix} -z^2 - y^2 & yx & zx \\ xy & -z^2 - x^2 & zy \\ xz & yz & -y^2 - x^2 \end{bmatrix} dm = \int_m \begin{bmatrix} z^2 + y^2 & -yx & -zx \\ -xy & z^2 + x^2 & -zy \\ -xz & -yz & y^2 + x^2 \end{bmatrix} dm \end{aligned}$$

Este resultado é exatamente a matriz de inércia  $\mathbf{I}$  medida com respeito ao centro de massa do corpo. Assim, o torque de gradiente gravitacional da equação 7 é dado por:

$$\mathbf{M}_g = \frac{3\mu}{R_c^5} \mathbf{R}_c \times \mathbf{I} \mathbf{R}_c \quad (8)$$

O torque de gradiente gravitacional da equação 8 pode ser então aplicado para modelar a dinâmica de atitude de um veículo espacial em órbita. Assumindo que ele é o único torque atuante:

$$\mathbf{M}_g = \mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^c + \boldsymbol{\omega}_i^c \times \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}_i^c \quad (9)$$

Onde  $\boldsymbol{\omega}_i^c$  é a velocidade angular do SRC com respeito ao referencial inercial, neste caso, o inercial centrado no planeta (ICP).

Para desenvolver a equação 9, é necessário escolher um sistema de eixos de referência para expressar o torque de gradiente gravitacional da equação 9. Como ilustrado na figura 2, escolhe-se o sistema local vertical local horizontal (LVLH), com eixo  $z_L$  apontando para o centro do planeta (direção nadir, contrária ao vetor radial) definindo a vertical local; eixo  $x_L$  normal a  $z_L$  e contido no plano da órbita orientado na direção progressiva da mesma, definindo o horizonte local; eixo  $y_L$  completando o sistema cartesiano ortogonal de mão direita (normal ao plano orbital e orientado no sentido negativo do vetor velocidade angular da órbita).

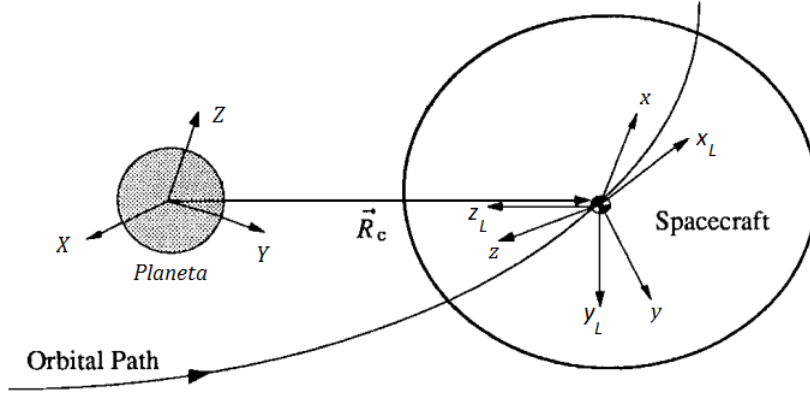


Figura 2: Sistemas de referência para modelar o torque de gradiente gravitacional. Fonte: adaptado da referência [1].

O vetor  $\mathbf{R}_c$  no sistema LVLH é:

$$\mathbf{R}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R_c \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{R}_c = -R_c \mathbf{k}_L$$

onde  $\mathbf{k}_L$  é o vetor diretor na direção do eixo  $z_L$ .

Assim o torque de gradiente gravitacional no referencial LVLH é:

$$\mathbf{M}_g = \frac{3\mu}{R_c^5} (-R_c \mathbf{k}_L) \times \mathbf{I} (-R_c \mathbf{k}_L) = \frac{3\mu}{R_c^5} R_c^2 \mathbf{k}_L \times \mathbf{I} \mathbf{k}_L$$

$$\mathbf{M}_g = \frac{3\mu}{R_c^3} \mathbf{k}_L \times \mathbf{I} \mathbf{k}_L \quad (10)$$

A relação acima pode ser simplificada a partir do movimento médio  $n$  de uma **órbita elíptica**:

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{R_c^3}} \quad \rightarrow \quad n^2 = \frac{\mu}{R_c^3}$$

Substituindo esta relação na equação 10:

$$\mathbf{M}_g = 3n^2 \mathbf{k}_L \times \mathbf{I} \mathbf{k}_L \quad (11)$$

Como a matriz de momento de inércia e o vetor velocidade angular  $\boldsymbol{\omega}$  são escritos no sistema de referência do corpo (SRC), o torque de gradiente gravitacional também precisa estar neste sistema. Para isso, converte-se o vetor diretor  $\mathbf{k}_L$  do LVLH para o SRC a partir da **matriz de**

atitude C do SRC com respeito ao LVLH:

$$\mathbf{k}_{L_c} = \mathbf{C}\mathbf{k}_L = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{L_c} = \begin{bmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Substituindo o vetor diretor  $\mathbf{k}_L$  da equação 12 na equação 11, obtém-se o torque de gradiente gravitacional expresso no SRC:

$$\mathbf{M}_g = 3n^2 \begin{bmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \end{bmatrix} \times \mathbf{I} \begin{bmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \end{bmatrix}$$

Para tornar o resultado final mais simples, assume-se que a matriz de inércia está escrita no **eixos principais de inércia**:

$$\mathbf{M}_g = 3n^2 \begin{bmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_g = -3n^2 \begin{bmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{xx}c_{13} \\ I_{yy}c_{23} \\ I_{zz}c_{33} \end{bmatrix} = -3n^2 \begin{bmatrix} c_{23}I_{zz}c_{33} - c_{33}I_{yy}c_{23} \\ c_{33}I_{xx}c_{13} - c_{13}I_{zz}c_{33} \\ c_{13}I_{yy}c_{23} - c_{23}I_{xx}c_{13} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_g = 3n^2 \begin{bmatrix} (I_{zz} - I_{yy})c_{23}c_{33} \\ (I_{xx} - I_{zz})c_{13}c_{33} \\ (I_{yy} - I_{xx})c_{13}c_{23} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Na equação 13, o torque de gradiente gravitacional depende da parametrização de atitude usada entre o corpo e o sistema LVLH. Não é usual utilizar a representação por matriz de atitude, o mais comum é ângulos de Euler ou quatérnions.

Supondo que a atitude do corpo com respeito ao referencial LVLH não sofra alterações muito amplas, uma alternativa é utilizar ângulos de Euler. De fato, as referências que tratam o assunto costumam parametrizar a atitude usando esta opção. A escolha diz respeito aos ângulos de Euler da sequência 321, assim como em aeronáutica:

- Primeira rotação  $\psi$  em torno do eixo  $z_L$ ;
- Segunda rotação  $\theta$  ao redor do eixo  $y'$  do primeiro sistema intermediário;

- Terceira rotação  $\phi$  em torno do eixo  $x$  do corpo.

Os ângulos  $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$  recebem os nomes usuais adotados em aeronáutica: rolamento, arfagem e guinada, respectivamente.  $\psi$  é a guinada em relação ao plano orbital, vista ao redor da vertical local;  $\theta$  é a elevação com respeito ao horizonte local;  $\phi$  é o rolamento com respeito ao horizonte local.

A matriz de atitude da sequência 321 é:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_1(\phi)\mathbf{C}_2(\theta)\mathbf{C}_3(\psi)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (14)$$

Pela equação 14, o torque de gradiente gravitacional é escrito em termos dos ângulos de Euler 321:

$$\mathbf{M}_g = 3n^2 \begin{bmatrix} (I_{zz} - I_{yy}) \sin \phi \cos \theta \cos \phi \cos \theta \\ -(I_{xx} - I_{zz}) \sin \theta \cos \phi \cos \theta \\ -(I_{yy} - I_{xx}) \sin \theta \sin \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (15)$$

### 3 Equações do Movimento com Torque de Gradiente Gravitacional em Órbita Circular

Como o torque depende dos ângulos de Euler, é necessário escrever a cinemática de rotação, para a sequência 321 ela é dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \csc \theta & \cos \phi \csc \theta \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_L^c \quad (16)$$

Na equação 16,  $\boldsymbol{\omega}_L^c$  é a velocidade angular do SRC com respeito ao LVLH, escrita no SRC. Já na dinâmica de rotação 9, a velocidade angular está escrita com respeito ao referencial inercial. A relação entre estas velocidades é:

$$\boldsymbol{\omega}_i^c = \boldsymbol{\omega}_i^L + \boldsymbol{\omega}_L^c \quad (17)$$

Onde  $\boldsymbol{\omega}_i^L$  é velocidade angular do referencial LVLH com respeito ao ICP.

A velocidade angular do referencial LVLH com respeito ao inercial, escrita no próprio LVLH



é:

$${}_L\boldsymbol{\omega}_i^L = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

onde  $\theta$  é a anomalia verdadeira da órbita elíptica.

A equação 18 provoca o acoplamento entre a dinâmica de translação e a de rotação do corpo, pois a anomalia verdadeira é uma variável de translação. Para promover o desacoplamento e obter uma solução de mais fácil interpretação e aplicação, o estudo do efeito do torque de gradiente gravitacional assume uma **órbita circular**, onde a taxa de variação da anomalia verdadeira é constante e igual ao movimento médio  $n$ :

$$\dot{\theta} = n \quad \text{órbita circular} \quad (19)$$

Então, em uma órbita circular, a velocidade angular  ${}_L\boldsymbol{\omega}_i^L$  é constante e dada por:

$${}_L\boldsymbol{\omega}_i^L = - \begin{bmatrix} 0 \\ n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Se  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  e  $\omega_z$  são as componentes da velocidade inercial  $\boldsymbol{\omega}_i^c$  do corpo com respeito ao ICP, das equações 17 e 20 a velocidade relativa do SRC com respeito ao LVLH em uma órbita circular, escrita no próprio SRC, é dada por:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_L^c &= \boldsymbol{\omega}_i^c - \boldsymbol{\omega}_i^L = \boldsymbol{\omega}_i^c - \mathbf{C}_L \boldsymbol{\omega}_i^L = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + \mathbf{C} \begin{bmatrix} 0 \\ n \\ 0 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\omega}_L^c &= \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} \cos \theta \sin \psi \\ \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi \\ \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

Assumindo que  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  e  $\omega_z$  são as variáveis de estado da dinâmica de rotação, da equação

9, sua equação diferencial é:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\omega}}_i^c &= \mathbf{I}^{-1} (\mathbf{M}_g - \boldsymbol{\omega}_i^c \times \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}_i^c) \\ \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix} \left( \mathbf{M}_g - \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \right) \\ \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix} \mathbf{M}_g - \begin{bmatrix} \frac{I_{zz}-I_{yy}}{I_{xx}} \omega_y \omega_z \\ \frac{I_{xx}-I_{zz}}{I_{yy}} \omega_x \omega_z \\ \frac{I_{yy}-I_{xx}}{I_{zz}} \omega_x \omega_y \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Substituindo a expressão do torque de gradiente gravitacional da equação 15, obtém-se:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_x &= 3n^2 \frac{I_{zz} - I_{yy}}{I_{xx}} \sin \phi \cos \theta \cos \phi \cos \theta - \frac{I_{zz} - I_{yy}}{I_{xx}} \omega_y \omega_z \\ \dot{\omega}_y &= -3n^2 \frac{I_{xx} - I_{zz}}{I_{yy}} \sin \theta \cos \phi \cos \theta - \frac{I_{xx} - I_{zz}}{I_{yy}} \omega_x \omega_z \\ \dot{\omega}_z &= -3n^2 \frac{I_{yy} - I_{xx}}{I_{zz}} \sin \theta \sin \phi \cos \theta - \frac{I_{yy} - I_{xx}}{I_{zz}} \omega_x \omega_y\end{aligned}$$

Ou:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_x &= \frac{I_{zz} - I_{yy}}{I_{xx}} (3n^2 \sin \phi \cos \theta \cos \phi \cos \theta - \omega_y \omega_z) \\ \dot{\omega}_y &= \frac{I_{xx} - I_{zz}}{I_{yy}} (-3n^2 \sin \theta \cos \phi \cos \theta - \omega_x \omega_z) \\ \dot{\omega}_z &= \frac{I_{yy} - I_{xx}}{I_{zz}} (-3n^2 \sin \theta \sin \phi \cos \theta - \omega_x \omega_y)\end{aligned} \tag{22}$$

Estas relações de dinâmica, junto da cinemática da equação 16 (copiada abaixo), constituem as **equações de estado do corpo rígido em órbita circular com gradiente gravitacional**.

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \csc \theta & \cos \phi \csc \theta \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_L^c \tag{23}$$

Como a propagação de atitude se dá com respeito ao referencial LVLH, é necessário calcular a velocidade angular relativa  $\boldsymbol{\omega}_L^c$ , em função das variáveis de estado  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  e  $\omega_z$ ,  $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$ , a partir da equação 21.

## 4 Dinâmica Linearizada em Órbita Circular com Torque de Gradiente Gravitacional

As equações de dinâmica e cinemática das equações 22 e 23 são não lineares. Para realizar um estudo analítico do impacto do torque de gradiente gravitacional, estas são linearizadas.

A linearização assume um movimento com pequenas perturbações com respeito a um estado de equilíbrio:

- Assume-se o equilíbrio da dinâmica de atitude do corpo rígido em órbita circular tomando como referência o referencial LVLH;
- No equilíbrio, os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  do corpo estão alinhados com  $x_L$ ,  $y_L$  e  $z_L$  do referencial LVLH, respectivamente. Ou seja, os ângulos de equilíbrio são  $\phi_e = \theta_e = \psi_e = 0$ ;
- Fisicamente, isso significa que, na condição de equilíbrio, o veículo espacial é “nadir apontado” e estabilizado em três eixos, onde seu eixo  $z$  sempre aponta para o centro do planeta, o eixo  $x$  é tangente à órbita circular e  $y$  é perpendicular ao plano da órbita.

O estado de equilíbrio acima é importante para diversas aplicações, por exemplo: satélites geoestacionários ou de sensoriamento remoto.

Para verificar se este estado realmente satisfaz o equilíbrio, faz-se  $\phi = \theta = \psi = 0$  nas equações 21, 22, 23:

$$\boldsymbol{\omega}_L^c = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} \cos 0 \sin 0 \\ \sin 0 \sin 0 \sin 0 + \cos 0 \cos 0 \\ \cos 0 \sin 0 \sin 0 - \sin 0 \cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_x &= \frac{I_{zz} - I_{yy}}{I_{xx}} (3n^2 \sin 0 \cos 0 \cos 0 \cos 0 - \omega_y \omega_z) = -\frac{I_{zz} - I_{yy}}{I_{xx}} \omega_y \omega_z \\ \dot{\omega}_y &= \frac{I_{xx} - I_{zz}}{I_{yy}} (-3n^2 \sin 0 \cos 0 \cos 0 - \omega_x \omega_z) = -\frac{I_{xx} - I_{zz}}{I_{yy}} \omega_x \omega_z \\ \dot{\omega}_z &= \frac{I_{yy} - I_{xx}}{I_{zz}} (-3n^2 \sin 0 \sin 0 \cos 0 - \omega_x \omega_y) = -\frac{I_{yy} - I_{xx}}{I_{zz}} \omega_x \omega_y \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin 0 \tan 0 & \cos 0 \tan 0 \\ 0 & \cos 0 & -\sin 0 \\ 0 & \sin 0 \csc 0 & \cos 0 \csc 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_L^c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_L^c = \boldsymbol{\omega}_L^c \quad (26)$$

No equilíbrio, as derivadas dos ângulos de Euler devem ser nulas, então, da equação 26,

tem-se que, nestas circunstâncias, a velocidade angular relativa deve ser zero:

$$\boldsymbol{\omega}_{Le}^c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Substituindo este resultado na equação 24, tem-se que a velocidade inercial é:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ n \\ 0 \end{bmatrix}$$

que é igual à velocidade de rotação do referencial LVLH com respeito ao inercial.

Substituindo  $\omega_x = 0$ ,  $\omega_y = -n$  e  $\omega_z = 0$  na equação 25, obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_x &= -\frac{I_{zz} - I_{yy}}{I_{xx}}(-n) \times 0 = 0 \\ \dot{\omega}_y &= -\frac{I_{xx} - I_{zz}}{I_{yy}}0 \times 0 = 0 \\ \dot{\omega}_z &= -\frac{I_{yy} - I_{xx}}{I_{zz}}0 \times (-n) = 0 \end{aligned}$$

Como  $\dot{\omega}_x = \dot{\omega}_y = \dot{\omega}_z = 0$ , prova-se que  $\phi_e = \theta_e = \psi_e = 0$  e  $\omega_{x_e} = \omega_{z_e} = 0$ ,  $\omega_{y_e} = -n$  é um ponto de equilíbrio.

Uma questão interessante é a seguinte: qual o impacto do torque de gradiente gravitacional neste estado de equilíbrio? Ele age de forma estabilizadora ou desestabilizadora?

Esta pergunta é respondida pela análise de estabilidade do modelo linear obtido para pequenas perturbações com respeito ao equilíbrio.

A linearização pode ser feita por truncamento de série de Taylor, ou mesmo de modo algébrico, pelas aproximações das funções trigonométricas para pequenos ângulos:  $\cos x \approx 1$ ,  $\csc x \approx 1$ ,  $\sin x \approx x$ ,  $\tan x \approx x$  para  $|x| \approx 0$ . Fazendo isso nas equações 21, 22 e 23 e eliminando os termos de segunda ordem obtém-se:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_L^c &= \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} \cos \theta \sin \psi \\ \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi \\ \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} \psi \\ \phi \theta \psi + 1 \\ \theta \psi - \phi \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\omega}_L^c &\approx \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} \psi \\ 1 \\ -\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x + n\psi \\ \omega_y + n \\ \omega_z - n\phi \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_x &= \frac{I_{zz} - I_{yy}}{I_{xx}} (3n^2 \sin \phi \cos \theta \cos \phi \cos \theta - \omega_y \omega_z) \approx \frac{I_{zz} - I_{yy}}{I_{xx}} (3n^2 \phi - \omega_y \omega_z) \\
\dot{\omega}_y &= \frac{I_{xx} - I_{zz}}{I_{yy}} (-3n^2 \sin \theta \cos \phi \cos \theta - \omega_x \omega_z) \approx \frac{I_{xx} - I_{zz}}{I_{yy}} (-3n^2 \theta - \omega_x \omega_z) \\
\dot{\omega}_z &= \frac{I_{yy} - I_{xx}}{I_{zz}} (-3n^2 \sin \theta \sin \phi \cos \theta - \omega_x \omega_y) \approx \frac{I_{yy} - I_{xx}}{I_{zz}} (-3n^2 \theta \phi - \omega_x \omega_y) \approx -\frac{I_{yy} - I_{xx}}{I_{zz}} \omega_x \omega_y
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \csc \theta & \cos \phi \csc \theta \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_L^c \approx \begin{bmatrix} 1 & \phi \theta & \theta \\ 0 & 1 & -\phi \\ 0 & \phi & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_L^c \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & \theta \\ 0 & 1 & -\phi \\ 0 & \phi & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_L^c \tag{29}$$

Substituindo a velocidade relativa da equação 27 em 29:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \theta \\ 0 & 1 & -\phi \\ 0 & \phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x + n\psi \\ \omega_y + n \\ \omega_z - n\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x + n\psi + \theta(\omega_z - n\phi) \\ \omega_y + n - \phi(\omega_z - n\phi) \\ \omega_z - n\phi + \phi(\omega_y + n) \end{bmatrix}$$

Na linearização por pequenas perturbações, assume-se que as velocidades angulares também possuem pequenos incrementos com respeito aos seus valores de equilíbrio:  $\omega_x - \omega_{x_e} = \omega_x$ ,  $\omega_y - \omega_{y_e} = \omega_y + n$ ,  $\omega_z - \omega_{z_e} = \omega_z$ . Assim, elimina-se os termos de segunda ordem do resultado acima:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x + n\psi \\ \omega_y + n \\ \omega_z - n\phi \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - n\psi \\ \dot{\theta} - n \\ \dot{\psi} + n\phi \end{bmatrix}$$

Agora, substitui-se o resultado acima na equação de dinâmica linearizada 28, desenvolve-se algebricamente e eliminando os termos não lineares:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\dot{\phi} - n\psi) &= \frac{I_{zz} - I_{yy}}{I_{xx}} (3n^2 \phi - (\dot{\theta} - n)(\dot{\psi} + n\phi)) \\
\frac{d}{dt}(\dot{\theta} - n) &= \frac{I_{xx} - I_{zz}}{I_{yy}} (-3n^2 \theta - (\dot{\phi} - n\psi)(\dot{\psi} + n\phi)z) \\
\frac{d}{dt}(\dot{\psi} + n\phi) &= \frac{I_{yy} - I_{xx}}{I_{zz}} (-(\dot{\phi} - n\psi)(\dot{\theta} - n))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\phi} - n\dot{\psi} &= \frac{I_{zz} - I_{yy}}{I_{xx}} (3n^2 \phi - \dot{\theta}\dot{\psi} - \dot{\theta}n\phi + n\dot{\psi} + n^2\phi) \approx \frac{I_{zz} - I_{yy}}{I_{xx}} (3n^2 \phi + n\dot{\psi} + n^2\phi) \\
\ddot{\theta} &= \frac{I_{xx} - I_{zz}}{I_{yy}} (-3n^2 \theta - \dot{\phi}\dot{\psi} - \dot{\phi}n\phi + n\psi\dot{\psi} + n^2\psi\phi) \approx \frac{I_{xx} - I_{zz}}{I_{yy}} (-3n^2 \theta) \\
\ddot{\psi} + n\dot{\phi} &= \frac{I_{yy} - I_{xx}}{I_{zz}} (-\dot{\phi}\dot{\theta} + \dot{\phi}n + n\psi\dot{\theta} - n^2\psi) \approx \frac{I_{yy} - I_{xx}}{I_{zz}} (\dot{\phi}n - n^2\psi)
\end{aligned}$$

$$\ddot{\phi} - \frac{I_{zz} - I_{yy}}{I_{xx}} 4n^2 \phi - \left(1 + \frac{I_{zz} - I_{yy}}{I_{xx}}\right) n\dot{\psi} = 0 \quad (30)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{I_{xx} - I_{zz}}{I_{yy}} 3n^2 \theta = 0 \quad (31)$$

$$\ddot{\psi} + \frac{I_{yy} - I_{xx}}{I_{zz}} n^2 \psi + \left(1 - \frac{I_{yy} - I_{xx}}{I_{zz}}\right) n\dot{\phi} = 0 \quad (32)$$

As equações 30 a 32 representam, então, a dinâmica linearizada do veículo espacial em órbita circular com gradiente gravitacional.

## 4.1 Estabilidade

A dinâmica linearizada pode ser escrita de outra forma, definindo os coeficientes adimensionais:

$$k_1 = \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}}, \quad k_2 = \frac{I_{xx} - I_{zz}}{I_{yy}}, \quad k_3 = \frac{I_{yy} - I_{xx}}{I_{zz}} \quad (33)$$

$$\ddot{\phi} + k_1 4n^2 \phi + (k_1 - 1) n\dot{\psi} = 0 \quad (34)$$

$$\ddot{\theta} + k_2 3n^2 \theta = 0 \quad (35)$$

$$\ddot{\psi} + k_3 n^2 \psi + (1 - k_3) n\dot{\phi} = 0 \quad (36)$$

A dinâmica de arfagem de pequenas perturbações da equação 35 é desacoplada do rolamento e guinada, de modo análogo ao que ocorre em aeronaves em voo reto e nivelado. A equação característica desta dinâmica é:

$$s^2 + k_2 3n^2 = 0$$

As suas raízes (autovalores) são:

$$s_{1,2} = \pm \sqrt{-k_2 3n^2}$$

- Se  $k_2 < 0$  existe uma raiz positiva e outra negativa, resultando numa dinâmica de arfagem instável;
- Se  $k_2 > 0$  as raízes são puramente imaginárias, implicando que a dinâmica de arfagem é marginalmente estável.

Assim, para se obter estabilidade da dinâmica de arfagem do satélite com gradiente gravitacional, os momentos de inércia principais devem atender à seguinte condição:

$$k_2 > 0 \rightarrow \frac{I_{xx} - I_{zz}}{I_{yy}} > 0 \rightarrow I_{xx} > I_{zz} \quad (37)$$

Ou seja, na presença do gradiente gravitacional em órbita circular, o momento de inércia

em torno do eixo que aponta tangente à órbita (momento de inércia de rolamento  $I_{xx}$ ) deve ser maior que o momento de inércia do eixo que aponta para o nadir (momento de inércia de guinada  $I_{zz}$ ).

A dinâmica acoplada de rolamento/arfagem pode ser representada pela equação de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_1 4n^2 & 0 & 0 & -(k_1 - 1)n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -(1 - k_3)n & -k_3 4n^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \\ \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

A equação característica associado a este modelo de variáveis de estado é:

$$s^4 + n^2(k_1 k_3 + 3k_1 + 1)s^2 + 4k_1 k_3 n^4 = 0$$

A estabilidade será analisada pelo critério de Routh-Hurwitz, cujo arranjo é montado na tabela 1.

Tabela 1: Arranjo de Routh-Hurwitz.

$s^4$	1	$n^2(k_1 k_3 + 3k_1 + 1)$	$4k_1 k_3 n^4$
$s^3$	4	$2n^2(k_1 k_3 + 3k_1 + 1)$	
$s^2$	$\frac{n^2}{2}(1 + 3k_1 + k_1 k_3)$	$4k_1 k_3 n^4$	
$s^1$	$2n^2(1 + 3k_1 + k_1 k_3) - 32n^2 \frac{k_1 k_3}{1 + 3k_1 + k_1 k_3}$		
$s^0$	$4k_1 k_3 n^4$		

- A primeira linha do arranjo são os coeficientes dos termos de ordem par do polinômio característico;
- A segunda linha são os coeficientes dos termos de ordem ímpar, os quais são nulos. Desta forma, deriva-se o polônio característico e insere-se nesta linha seus coeficientes:  $4s^3 + 2n^2(k_1 k_3 + 3k_1 + 1)s = 0$ ;
- As demais linhas são montadas de acordo com o algoritmo do critério.

Para que a dinâmica dos ângulos de rolamento e guinada seja estável, os termos da primeira coluna no arranjo de Routh-Hurwitz não podem trocar de sinal, isso implica as condições abaixo:

$$\frac{n^2}{2}(1 + 3k_1 + k_1 k_3) > 0 \rightarrow 1 + 3k_1 + k_1 k_3 > 0$$

$$2n^2(1 + 3k_1 + k_1 k_3) - 32n^2 \frac{k_1 k_3}{1 + 3k_1 + k_1 k_3} > 0 \rightarrow (1 + 3k_1 + k_1 k_3) - 16 \frac{k_1 k_3}{1 + 3k_1 + k_1 k_3} > 0$$

$$4k_1 k_3 n^4 > 0 \rightarrow k_1 k_3 > 0$$

Em resumo, a estabilidade da dinâmica de rolamento e guinada é obtida quando os parâmetros adimensionais satisfazem:

$$k_1 k_3 > 0 \quad (38)$$

$$1 + 3k_1 + k_1 k_3 > 0 \quad (39)$$

$$(1 + 3k_1 + k_1 k_3)^2 - 16k_1 k_3 > 0 \quad (40)$$

A relação 38 é muito simples e importante. Ela significa que  $k_1$  e  $k_3$  devem ser ambos positivos ou ambos negativos. Das definições na equação 33, deve-se ter:

- $I_{yy} > I_{zz}$  e  $I_{yy} > I_{xx}$ ;
- ou:
- $I_{yy} < I_{zz}$  e  $I_{yy} < I_{xx}$ ;

Ou seja, o eixo  $y$ , que é o **eixo de arfagem** (orientado perpendicular ao plano da órbita e em torno do qual a rotação do satélite ocorre), **deve ser o eixo maior ou o eixo menor de inércia**. Caso contrário, a dinâmica de rolamento/arfagem será instável.

A constatação acima é somente um requisito mínimo para a estabilidade do satélite quando submetido ao gradiente gravitacional em órbita circular. Além disso, as relações 39 e 40 também devem ser satisfeitas, as quais determinam limites numéricos sobre as combinações dos valores de momentos de inércia principais.

Para expressar estas combinações que garantem a estabilidade, pode-se representar as desigualdades envolvidas na forma de um diagrama, cujas equações são desenvolvidas abaixo.

As curvas relacionadas com o lado direito das desigualdades das equações 39 e 40, ou seja:

$$1 + 3k_1 + k_1 k_3 = 0 \rightarrow k_3 = -\frac{1}{k_1} - 3 \quad (41)$$

$$(1 + 3k_1 + k_1 k_3)^2 - 16k_1 k_3 \rightarrow k_3^2 k_1^2 + k_3 2k_1(-7 + 3k_1) + 1 + 6k_1 + 9k_1^2 = 0 \quad (42)$$

Para  $k_1$  dado, os valores de  $k_3$  que satisfazem a equação 42 são:

$$\begin{aligned} k_{31,2} &= \frac{-2k_1(-7 + 3k_1) \pm \sqrt{(2k_1(-7 + 3k_1))^2 - 4k_1^2(1 + 6k_1 + 9k_1^2)}}{2k_1^2} \\ k_{31,2} &= \frac{-2k_1(-7 + 3k_1) \pm \sqrt{4k_1^2(49 - 42k_1 + 9k_1^2) - 4k_1^2(1 + 6k_1 + 9k_1^2)}}{2k_1^2} \\ k_{31,2} &= \frac{-2k_1(-7 + 3k_1) \pm 2k_1\sqrt{48 - 48k_1}}{2k_1^2} \\ k_{31,2} &= \frac{-2k_1(-7 + 3k_1) \pm 2k_1\sqrt{48(1 - k_1)}}{2k_1^2} \end{aligned} \quad (43)$$

O resultado 43 mostra que a igualdade 42 só é satisfeita para  $k_1 < 0$ .



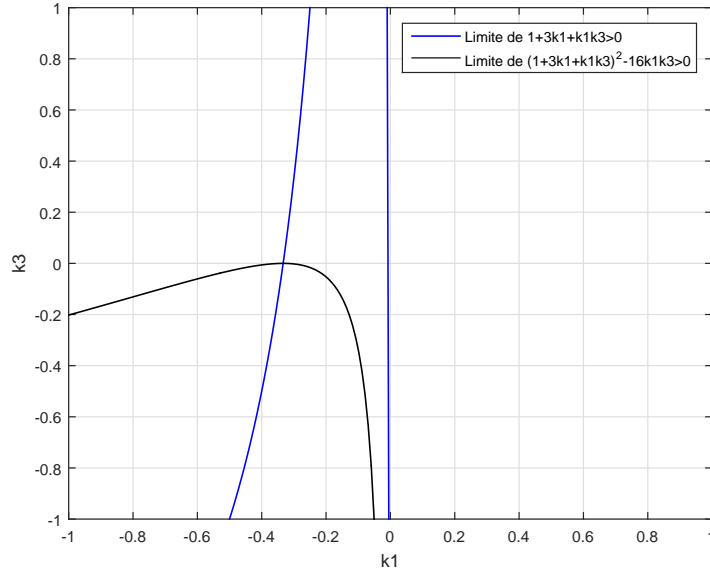


Figura 3: Limites das regiões de estabilidade relacionadas aos parâmetros  $k_1$  e  $k_2$ .

O diagrama foi gerado com o MATLAB, sendo mostrado na figura 3.

A figura 4 mostra um diagrama mais completo onde foi ilustrada a desigualdade 38, que implica que as regiões de estabilidade de  $k_1$  e  $k_2$  só podem estar no primeiro ou terceiro quadrante.

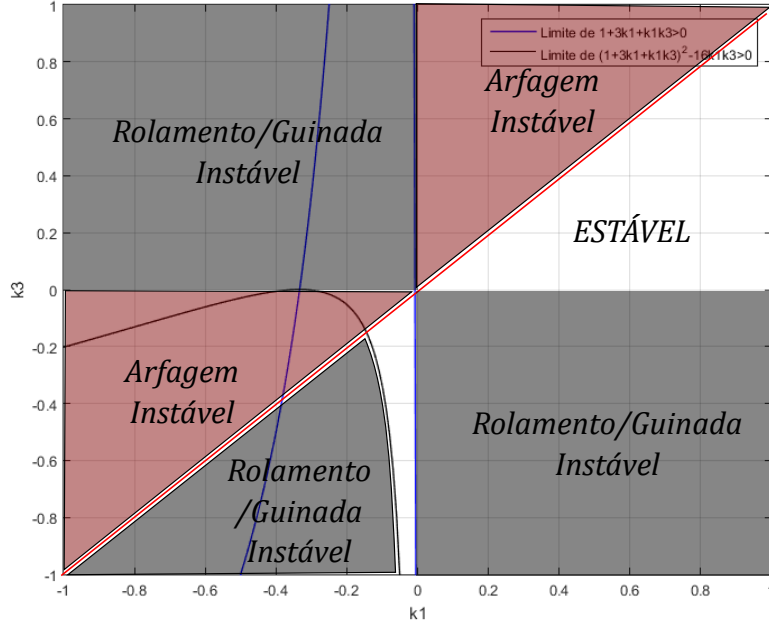


Figura 4: Limites das regiões de estabilidade relacionadas aos parâmetros  $k_1$  e  $k_2$ .

O diagrama da figura 4 também ilustra a desigualdade associada à estabilidade do eixo de arfagem. Da equação 37, a borda da desigualdade corresponde a  $k_2 = 0$ , que está associada a  $I_{xx} = I_{zz}$ . Quando isso ocorre, da equação 33:  $k_1 = k_3$ . Então, a região associada à estabilidade de arfagem é limitada pela reta com inclinação  $45^\circ$ .

A figura 4 mostra as únicas regiões possíveis de estabilidade, que estão em branco. Verifica-

se que a região associada a  $k_1$  negativo, que corresponde ao eixo principal  $y$  de menor de inércia, é muito estreita.

A região mais larga de estabilidade, que corresponde a uma maior liberdade para escolher os momentos de inércia, é aquela onde  $y$  é o eixo de maior inércia.

## Referências

- [1] B. Wie. *Space Vehicle Dynamics and Control*. AIAA Education Series. AIAA, Reston, VA, 2008.