

# MECÂNICA DE VOO ESPACIAL - DEM 1119

## Aula 5

Prof. André Luís da Silva

### 1 Introdução

Tópicos da aula:

- Coeficientes de Lagrange;
- Matriz de transição de estado;
- Equação diferencial da anomalia verdadeira;
- Propagação de órbita elíptica: equação de Kepler.

**Referência:** [1]: TEWARI, A. Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modelling and simulation with MATLAB and Simulink. Boston: Birkhauser, 2007. **Seções** 4.5.2 a 4.5.5.

### 2 Coeficientes de Lagrange

Os coeficientes de Lagrange servem para determinar posição e velocidade, em qualquer órbita do problema de dois corpos, a partir de uma condição inicial de posição e velocidade no referencial perifocal, ilustrado na figura 1.

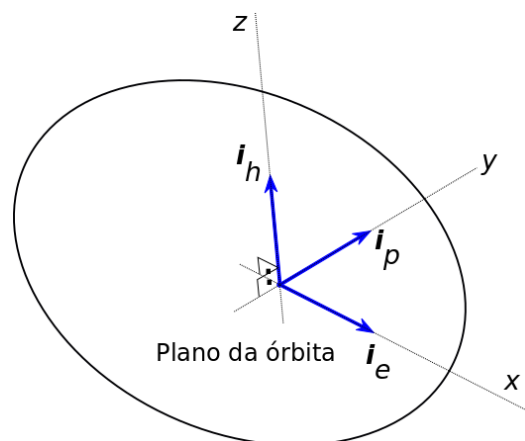


Figura 1: Referencial Perifocal e seus vetores unitários.

O referencial perifocal é definido ao longo dos eixos gerados pelos vetores unitários  $\mathbf{i}_e$ ,  $\mathbf{i}_p$  e  $\mathbf{i}_h$ , sendo que o plano definido pelos eixos  $\mathbf{i}_e$  e  $\mathbf{i}_p$  é o plano orbital; enquanto que  $\mathbf{i}_h$  é normal à órbita.

A figura 2 mostra o referencial perifocal no plano orbital, assim como o referencial horizontal local, que possui os vetores diretores  $\mathbf{i}_r$  e  $\mathbf{i}_\theta$ . Na ilustração,  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{v}$  são os vetores posição e velocidade, respectivamente, de uma massa  $m_2$  que orbita  $m_1$  (que é a origem do sistema perifocal). A distância radial  $r$  e a anomalia verdadeira  $\theta$  são coordenadas polares, expressando o vetor posição como na equação 1.

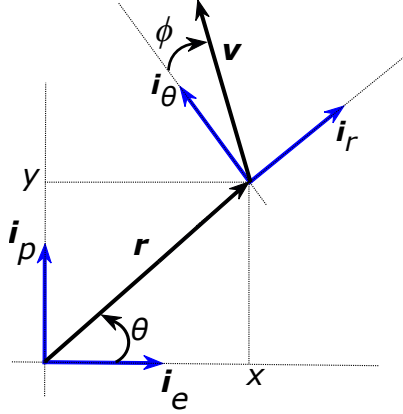


Figura 2: Referencial Perifocal no plano orbital e horizonte local.

$$\mathbf{r} = r \cos \theta \mathbf{i}_e + r \sin \theta \mathbf{i}_p \quad (1)$$

Por sua vez, o vetor velocidade no sistema horizontal local é dada por:

$$\mathbf{v} = v \sin \phi \mathbf{i}_r + v \cos \phi \mathbf{i}_\theta \quad (2)$$

Onde  $v$  é o módulo do vetor velocidade e  $\phi$  o ângulo de trajetória.

A matriz de transformação do referencial horizontal local para o perifocal é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{i}_e \\ \mathbf{i}_p \end{Bmatrix} = \mathbf{C}_{per}^{hl} \begin{Bmatrix} \mathbf{i}_r \\ \mathbf{i}_\theta \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Onde a notação de chaves  $\{\}$  é usada para formar um vetor generalizado cujos elementos são outros vetores. Na multiplicação entre a matriz e o vetor generalizado, cada vetor é tratado como se fosse um escalar na multiplicação matricial usual.

A partir da figura 2, escrevendo-se  $\mathbf{i}_e$  e  $\mathbf{i}_p$  em função de  $\mathbf{i}_r$  e  $\mathbf{i}_\theta$ , obtém-se a matriz  $\mathbf{C}_{per}^{hl}$

$$\mathbf{C}_{per}^{hl} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4)$$

A matriz de transformação no sentido inverso é dada pela transposta de  $\mathbf{C}_{per}^{hl}$ :

$$\mathbf{C}_{hl}^{per} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (5)$$

Com a matriz da equação 4, transforma-se a velocidade da equação 2 do sistema horizontal local para o perifocal:

$$\mathbf{v}_{per} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \sin \phi \\ v \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = v(\sin \phi \cos \theta - \cos \phi \sin \theta)\mathbf{i}_e + v(\sin \phi \sin \theta + \cos \phi \cos \theta)\mathbf{i}_p \quad (6)$$

Na aula anterior, foram determinados  $\cos \phi$  e  $\sin \phi$ :

$$\cos(\phi) = \frac{\mu(1 + e \cos \theta)}{hv} \quad (7)$$

$$\sin \phi = \frac{\mu e \sin \theta}{hv} \quad (8)$$

Substituindo esses resultados na equação 6 obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v \left( \frac{\mu e \sin \theta}{hv} \cos \theta - \frac{\mu(1 + e \cos \theta)}{hv} \sin \theta \right) \mathbf{i}_e + v \left( \frac{\mu e \sin \theta}{hv} \sin \theta + \frac{\mu(1 + e \cos \theta)}{hv} \cos \theta \right) \mathbf{i}_p \\ \mathbf{v} &= v \left( \frac{\mu e \sin \theta}{hv} \cos \theta - \frac{\mu}{hv} \sin \theta - \frac{\mu e \cos \theta}{hv} \sin \theta \right) \mathbf{i}_e + v \left( \frac{\mu e \sin^2 \theta}{hv} + \frac{\mu}{hv} \cos \theta + \frac{\mu e \cos^2 \theta}{hv} \right) \mathbf{i}_p \\ \mathbf{v} &= -\frac{\mu}{h} \sin \theta \mathbf{i}_e + \frac{\mu}{h} (e + \cos \theta) \mathbf{i}_p \end{aligned} \quad (9)$$

Então, posição e velocidade estão escritas no sistema perifocal, por meio das equações 1 e 9. A velocidade, tal como apresentada na equação 9, depende somente das constantes  $e$ ,  $\mu$ ,  $h$  e anomalia verdadeira  $\theta$ .

A ideia dos **coeficientes de Lagrange** consiste em obter uma transformação da *posição e velocidade no sistema perifocal, a partir de condições iniciais conhecidas*, determinando os seus valores para uma anomalia verdadeira  $\theta$  genérica.

As condições iniciais de posição e velocidade no sistema perifocal, para uma anomalia verdadeira inicial  $\theta_0$ , são escritas a partir das equações 1 e 9:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= r_0 \cos \theta_0 \mathbf{i}_e + r_0 \sin \theta_0 \mathbf{i}_p \\ \mathbf{v}_0 &= -\frac{\mu}{h} \sin \theta_0 \mathbf{i}_e + \frac{\mu}{h} (e + \cos \theta_0) \mathbf{i}_p \end{aligned} \quad (10)$$

Onde  $r_0$  é a condição inicial de distância radial.

A partir da equação acima, pode-se escrever os vetores  $\mathbf{i}_e$  e  $\mathbf{i}_p$  em função das condições iniciais  $\mathbf{r}_0$  e  $\mathbf{v}_0$ . Usando a notação de vetor generalizado introduzida anteriormente:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{v}_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 \cos \theta_0 & r_0 \sin \theta_0 \\ -\frac{\mu}{h} \sin \theta_0 & \frac{\mu}{h}(e + \cos \theta_0) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{i}_e \\ \mathbf{i}_p \end{Bmatrix} \quad (11)$$

A matriz na equação 11 é formada somente por constantes associadas à órbita. Ela pode ser invertida para obter os vetores diretores  $\mathbf{i}_e$  e  $\mathbf{i}_p$  em função das condições iniciais  $\mathbf{r}_0$  e  $\mathbf{v}_0$ :

$$\begin{bmatrix} r_0 \cos \theta_0 & r_0 \sin \theta_0 \\ -\frac{\mu}{h} \sin \theta_0 & \frac{\mu}{h}(e + \cos \theta_0) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{e + \cos \theta_0}{r_0 + e r_0 \cos \theta_0} & -\frac{h \sin \theta_0}{\mu + e \mu \cos \theta_0} \\ \frac{\sin \theta_0}{r_0 + e r_0 \cos \theta_0} & \frac{h \cos \theta_0}{\mu + e \mu \cos \theta_0} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Para verificar se a inversa existe, determina-se o determinante da matriz da equação 11:

$$\det \mathbf{M} = \begin{vmatrix} r_0 \cos \theta_0 & r_0 \sin \theta_0 \\ -\frac{\mu}{h} \sin \theta_0 & \frac{\mu}{h}(e + \cos \theta_0) \end{vmatrix} = \frac{r_0 \mu (1 + e \cos \theta_0)}{h} \quad (13)$$

O resultado da equação 13 não é muito elucidativo, mas pode ser manipulado usando a equação de órbita, a qual fornece  $r_0$  em função de  $\theta_0$ :  $r_0 = \frac{p}{1 + e \cos \theta_0}$ :

$$\det \mathbf{M} = \frac{p}{1 + e \cos \theta_0} \frac{\mu(1 + e \cos \theta_0)}{h} = \frac{p\mu}{h} \quad (14)$$

Como visto na aula 3, as constantes  $\mu$ ,  $p$  e  $h$  estão relacionados por:  $p = \frac{h^2}{\mu}$ . Então, o resultado da equação 14 é, simplesmente  $\det \mathbf{M} = h$ . Logo, a inversa da matriz  $\mathbf{M}$  sempre existe, a menos que a órbita seja uma reta (o que seria um absurdo).

O resultado da equação 12 pode ser simplificado usando a equação de órbita ( $1 + e \cos \theta_0 = \frac{p}{r_0}$ ) e a relação  $\mu p = h^2$ :

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{e + \cos \theta_0}{r_0(1 + e \cos \theta_0)} & -\frac{h \sin \theta_0}{\mu(1 + e \cos \theta_0)} \\ \frac{\sin \theta_0}{r_0(1 + e \cos \theta_0)} & \frac{h \cos \theta_0}{\mu(1 + e \cos \theta_0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e + \cos \theta_0}{r_0 \frac{p}{r_0}} & -\frac{h \sin \theta_0}{\mu \frac{p}{r_0}} \\ \frac{\sin \theta_0}{r_0 \frac{p}{r_0}} & \frac{h \cos \theta_0}{\mu \frac{p}{r_0}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e + \cos \theta_0}{p} & -\frac{r_0 \sin \theta_0}{h} \\ \frac{\sin \theta_0}{p} & \frac{r_0 \cos \theta_0}{h} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Assim, a transformação dos vetores  $\mathbf{r}_0$  e  $\mathbf{v}_0$  para  $\mathbf{i}_e$  e  $\mathbf{i}_p$  é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{i}_e \\ \mathbf{i}_p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p}(e + \cos \theta_0) & -\frac{r_0}{h} \sin \theta_0 \\ \frac{1}{p} \sin \theta_0 & \frac{r_0}{h} \cos \theta_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{v}_0 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

Usando a notação de vetor generalizado, os vetores velocidade e posição das equações 1 e 9 podem ser escritos como:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\frac{\mu}{h} \sin \theta & \frac{\mu}{h}(e + \cos \theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{i}_e \\ \mathbf{i}_p \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Substituindo, na equação 17, os vetores diretores  $\mathbf{i}_e$  e  $\mathbf{i}_p$  dados pela equação 16:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\frac{\mu}{h} \sin \theta & \frac{\mu}{h}(e + \cos \theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{p}(e + \cos \theta_0) & -\frac{r_0}{h} \sin \theta_0 \\ \frac{1}{p} \sin \theta_0 & \frac{r_0}{h} \cos \theta_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{v}_0 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

O produto matricial da equação 18 dá origem a uma nova matriz, a qual relaciona uma condição inicial de posição e velocidade com qualquer outra posição e velocidade na órbita, estando estes vetores escritos no sistema perifocal,. Esta matriz é bastante relevante. Os seus elementos são definidos como *coeficientes de Lagrange*  $f$ ,  $g$ ,  $\dot{f}$  e  $\dot{g}$ , sendo dados por:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f & g \\ \dot{f} & \dot{g} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{v}_0 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} f &\equiv 1 + \frac{r}{p}[\cos(\theta - \theta_0) - 1] \\ g &\equiv \frac{rr_0}{h} \sin(\theta - \theta_0) \\ \dot{f} &\equiv \frac{df}{dt} = -\frac{h}{p^2}[\sin(\theta - \theta_0) + e(\sin \theta - \sin \theta_0)] \\ \dot{g} &\equiv \frac{dg}{dt} = 1 + \frac{r_0}{p}[\cos(\theta - \theta_0) - 1] \end{aligned} \quad (20)$$

As expressões deste sistema de equações são determinadas por extensa manipulação algébrica, partindo-se da multiplicação de matrizes da equação 18.

**Resumindo:** a ideia dos coeficientes de Lagrange é encontrar a posição e velocidade, no referencial perifocal, associadas a uma dada anomalia verdadeira  $\theta$ , a partir de uma condição inicial  $\mathbf{r}_0$  e  $\mathbf{v}_0$ , associada a uma anomalia verdadeira inicial  $\theta_0$ .

Os coeficientes de Lagrange dependem das constantes  $e$ ,  $p$  e  $h$ , além dos valores iniciais da anomalia verdadeira  $\theta_0$  e distância radial  $r_0$ . Eles também dependem do valor de  $r$  no ponto de interesse. Em princípio, isso pode soar estranho, visto que o vetor  $\mathbf{r}$  é uma incógnita do problema. No entanto, não há nenhum problema, visto que  $r$  é dado pela equação de órbita, dependendo somente das constantes  $p$  e  $e$ , bem como da anomalia verdadeira  $\theta$ :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (21)$$

A matriz formada pelos coeficientes de Lagrange é chamada **matriz de transição de estado**, pois transforma as variáveis de estado posição e velocidade, partindo-se de uma condição inicial para outra qualquer associada a um  $\theta$  genérico:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \mathbf{\Phi}(\theta, \theta_0) \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{v}_0 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

### 3 Equação Diferencial para Propagação da Anomalia Verdadeira

Os coeficientes de Lagrange, vistos na seção anterior, são usados para propagar uma órbita genérica de um problema de dois corpos em função da anomalia verdadeira  $\theta$ . Isto é útil para a avaliação da geometria da órbita, no entanto, não fornece qualquer informação sobre suas características temporais.

Para propagar uma órbita em função do tempo, é necessário encontrar a variação temporal da anomalia verdadeira  $\theta$ . Para isso, já foi determinado um resultado, na aula 3, que relaciona a taxa de variação de  $\theta$  com a quantidade de movimento angular específica  $h$ :

$$h = r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (23)$$

A equação da órbita é usada para substituir  $r$  em função de  $\theta$  na equação 23:

$$h = \frac{p^2}{(1 + e \cos \theta)^2} \frac{d\theta}{dt} \quad (24)$$

Escrevendo esta equação de acordo com o método da separação de variáveis:

$$\frac{h}{p^2} dt = \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} \quad (25)$$

Substituindo  $h = \sqrt{p\mu}$ :

$$\frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = \frac{\sqrt{p\mu}}{p^2} dt \quad (26)$$

Ou:

$$\frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} dt \quad (27)$$

A equação diferencial não linear 27 foi um desafio encarado por grandes matemáticos ao longo de 3 séculos, dentre eles: Euler, Lagrange, Laplace, Bessel, Fourier, Gauss, Cauchy, Leibnitz, e Newton[1].

A solução dela pode ser obtida, hoje em dia, por métodos numéricos. Mas também existem soluções analíticas, que dependem do tipo de órbita: elíptica, parabólica ou hiperbólica. Assunto este que é visto a seguir.

## 4 Equação de Kepler - Propagação de Órbita Elíptica

Para uma órbita elíptica, que é caracterizada por  $e < 1$  e  $a > 0$ , a equação 27 pode ser reescrita de acordo com a relação:  $p = (1 - e^2)a$

$$\frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = \sqrt{\frac{\mu}{(1 - e^2)^3 a^3}} dt \quad (28)$$

Ou:

$$\frac{(1 - e^2)^{3/2} d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} dt \quad (29)$$

Se a órbita fosse circular, a equação 29 seria:

$$d\theta = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} dt \quad (30)$$

Ou:

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (31)$$

Essa equação corresponde a um movimento circular uniforme com velocidade angular:

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (32)$$

A equação 29 pode, então, ser reescrita inserindo-se  $n$ :

$$\frac{(1 - e^2)^{3/2} d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = n dt \quad (33)$$

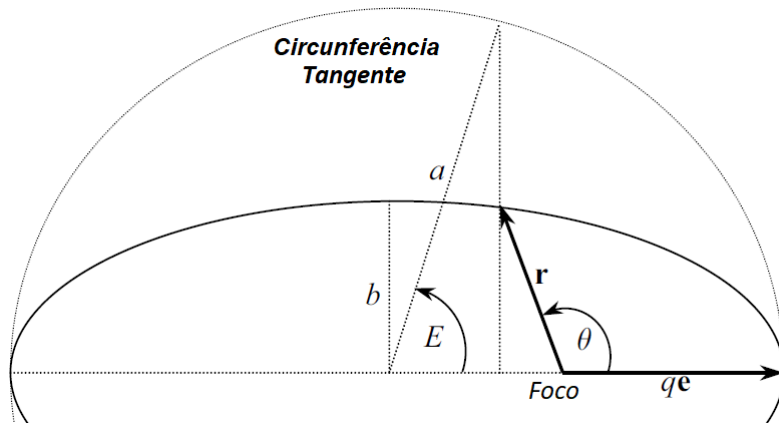


Figura 3: Movimento médio: circunferência sobrescrita e anomalia média. Adaptado de [1].

A velocidade angular  $n$  é chamada de **movimento médio**. Ela é a velocidade angular constante em uma órbita circular, de raio  $a$ , sobrescrita à trajetória elíptica de semi eixo maior

$a$ , como ilustrado na figura 3.

Como será demonstrado mais adiante: a velocidade angular  $n$ , ao longo da circunferência sobrescrita, é idêntica à velocidade angular média necessária para dar uma volta completa na elipse, pois a circunferência sobrescrita possui raio igual ao semi-eixo maior da elipse. Então, o tempo gasto para dar uma volta completa ao redor da circunferência é o mesmo para a elipse.

É importante notar que a propriedade de velocidade média  $n$  enunciada acima, no caso elíptico, só vale para uma órbita completa. O valor instantâneo de  $\dot{\theta}$  é variável.

Para o cálculo de  $\theta$  em qualquer instante de tempo, é utilizada a circunferência sobrescrita da figura 3. Nela, é definido o ângulo  $E$ , que é chamado de **anomalia excêntrica**.

Em uma órbita elíptica, a anomalia excêntrica é idêntica à anomalia verdadeira nos pontos em que  $\theta = n\pi$  ( $n$  inteiro). Tanto  $E$  quanto  $\theta$  são medidos com respeito à linha de apsides, no entanto,  $\theta$  é tomado em relação a uma linha que se inicia em um dos focos, enquanto que  $E$  é medido a partir do centro da elipse.

A resolução da propagação de órbita passa pela mudança da variável  $\theta$  por  $E$  na equação 33. Para obter uma relação entre  $\theta$  e  $E$ , a figura 4 é utilizada, da qual são extraídas equações envolvendo  $\cos E$  e  $\sin E$ .

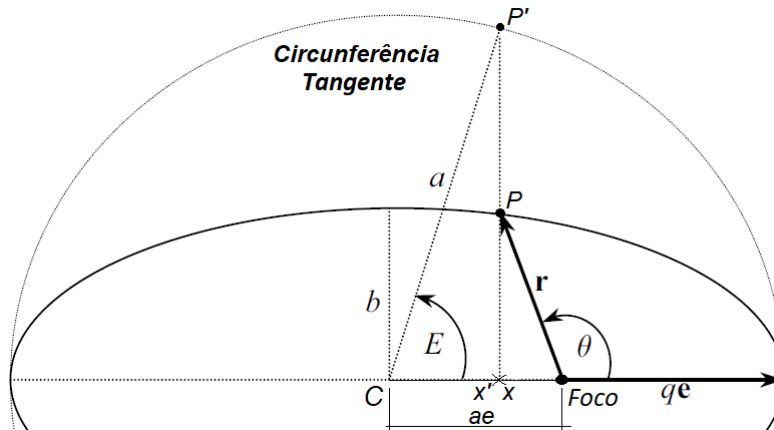


Figura 4: Relações geométricas entre a anomalia excêntrica  $E$  e a anomalia verdadeira  $\theta$ . Adaptado de [1].

Na figura 4, a distância entre o centro da elipse (que coincide com o centro da circunferência) e seu foco é:  $ae$ , conforme demonstrado na aula 4.

O referencial perifocal tem origem em um foco da elipse. Assim, na figura 4, apresenta-se a coordenada  $x$  associada a um ponto  $P$  sobre a elipse, ao qual está associada uma anomalia verdadeira  $\theta$ . A relação entre  $x$  e as coordenadas polares  $r$  e  $\theta$  é:  $x = r \cos \theta$ .

O ponto  $P'$  sobre a circunferência, associado a  $P$ , possui anomalia excêntrica  $E$ . A coordenada  $x'$  de  $P'$ , medida com respeito ao centro da circunferência, é:  $x' = a \cos E$ .

Para escrever a coordenada  $x'$  no referencial perifocal, é necessário subtrair a distância  $ae$ , que é o deslocamento entre a origem deste referencial e o centro da circunferência. Assim, a



relação entre as abscissas dos pontos  $P$  e  $P'$  no referencial perifocal, é:

$$a \cos E - ea = r \cos \theta \quad (34)$$

Substituindo, na equação 34,  $r$  dado pela equação de órbita:

$$a \cos E - ea = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \cos \theta \quad (35)$$

Substituindo, na equação 35,  $p = (1 - e^2)a$ :

$$a \cos E - ea = \frac{(1 - e^2)a}{1 + e \cos \theta} \cos \theta \quad (36)$$

Ou:

$$\cos E - e = \frac{(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \cos \theta \rightarrow \cos E = e + \frac{(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \cos \theta = \frac{e(1 + e \cos \theta) + (1 - e^2) \cos \theta}{1 + e \cos \theta} \quad (37)$$

Expandindo o numerador e simplificando, obtém-se a expressão procurada de  $\cos E$ :

$$\cos E = \frac{e + \cos \theta}{1 + e \cos \theta} \quad (38)$$

A relação entre o  $\sin E$  e ângulo  $\theta$  é obtida a partir do triângulo retângulo associado aos pontos  $C$ ,  $P'$  e  $x'$ , onde se tem:

$$a^2 = x'^2 + (a \sin E)^2 \quad (39)$$

Substituindo nesta equação  $x' = ae + r \cos \theta$ , tem-se:

$$a^2 = (ae + r \cos \theta)^2 + (a \sin E)^2$$

$$a \sin E = \sqrt{a^2 - (ae + r \cos \theta)^2} \quad (40)$$

Substituindo, na equação acima,  $r \cos \theta$  dado pelo lado direito da equação 36:

$$a \sin E = \sqrt{a^2 - \left( ae + \frac{(1 - e^2)a \cos \theta}{1 + e \cos \theta} \right)^2} \quad (41)$$

Expandindo e simplificando:

$$\begin{aligned}
 a \sin E &= \sqrt{a^2 - \left( \frac{ae(1 + e \cos \theta) + (1 - e^2)a \cos \theta}{1 + e \cos \theta} \right)^2} \\
 &= \sqrt{a^2 \left( 1 - \left( \frac{e + e^2 \cos \theta + \cos \theta - e^2 \cos \theta}{1 + e \cos \theta} \right)^2 \right)}
 \end{aligned} \tag{42}$$

Então:

$$\begin{aligned}
 \sin E &= \sqrt{1 - \left( \frac{e + \cos \theta}{1 + e \cos \theta} \right)^2} = \sqrt{\frac{(1 + e \cos \theta)^2 - (e + \cos \theta)^2}{(1 + e \cos \theta)^2}} \\
 &= \frac{\sqrt{1 + 2e \cos \theta + e^2 \cos^2 \theta - e^2 - 2e \cos \theta - \cos^2 \theta}}{1 + e \cos \theta} \\
 &= \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta - e^2(1 - \cos^2 \theta)}}{1 + e \cos \theta} = \frac{\sqrt{(1 - e^2) \sin^2 \theta}}{1 + e \cos \theta}
 \end{aligned} \tag{43}$$

Finalmente:

$$\sin E = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \tag{44}$$

Então, as equações 38 e 44 expressam o seno e o cosseno do ângulo  $E$ , a partir dos quais se pode determinar a anomalia excêntrica, a partir da anomalia verdadeira, sem ambiguidade de quadrante.

Agora, busca-se uma relação para a derivada temporal da anomalia excêntrica  $E$ , visto que **a equação diferencial será resolvida em termos dessa nova variável**. Diferenciando a equação 38 em relação ao tempo obtém-se:

$$-\sin E \frac{dE}{dt} = \frac{-\sin \theta(1 + e \cos \theta) - (-e \sin \theta)(e + \cos \theta)}{(1 + e \cos \theta)^2} \frac{d\theta}{dt} \tag{45}$$

Desenvolvendo os termos e simplificando:

$$-\sin E \frac{dE}{dt} = \frac{-\sin \theta + e^2 \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} \frac{d\theta}{dt} \tag{46}$$

Ou:

$$\sin E dE = \frac{(1 - e^2) \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} d\theta \tag{47}$$

Substituindo, na equação 47, o diferencial  $d\theta$  dado pela equação 33:

$$\sin E dE = \frac{(1 - e^2) \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} \frac{(1 + e \cos \theta)^2}{(1 - e^2)^{3/2}} n dt \tag{48}$$

Ou seja:

$$\sin E dE = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - e^2}} n dt \quad (49)$$

Na equação 49, é necessário substituir o ângulo  $\theta$ . Da equação 44,  $\sin \theta$  é dado por:

$$\sin \theta = \frac{\sin E(1 + e \cos \theta)}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (50)$$

Assim,  $\sin \theta / \sqrt{1 - e^2}$  é:

$$\frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{\sin E(1 + e \cos \theta)}{1 - e^2} \quad (51)$$

Substituindo  $\sin \theta / \sqrt{1 - e^2}$  dado pela equação 51 na equação 49 obtém-se:

$$\sin E dE = \frac{\sin E(1 + e \cos \theta)}{1 - e^2} n dt \quad (52)$$

Ou:

$$dE = \frac{(1 + e \cos \theta)}{1 - e^2} n dt \quad (53)$$

Novamente, obtém-se uma expressão envolvendo  $\theta$ , que precisa ser substituído. Pela equação 38,  $\cos \theta$  é dado por:

$$\cos E(1 + e \cos \theta) = e + \cos \theta, \rightarrow \cos \theta(e \cos E - 1) = e - \cos E$$

$$\cos \theta = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \quad (54)$$

De onde se obtém que  $1 + e \cos \theta$  é dado por:

$$1 + e \cos \theta = 1 + e \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} = \frac{1 - e \cos E + e(\cos E - e)}{1 - e \cos E}$$

$$1 + e \cos \theta = \frac{1 - e^2}{1 - e \cos E} \quad (55)$$

Substituindo-se  $1 + e \cos \theta$  dado pela equação 55 na equação 53, finalmente elimina-se  $\theta$ :

$$dE = \frac{1}{1 - e \cos E} n dt \quad (56)$$

De onde se obtém a *equação diferencial para propagação da anomalia excêntrica*:

$$(1 - e \cos E)dE = n dt \quad (57)$$

Para resolver a equação 57, é necessário integrá-la desde um tempo inicial até um tempo final. Este **tempo inicial** é muito importante, sendo, na verdade, uma das *integrais do movimento* no problema de dois corpos. Por convenção, integra-se a equação deste o tempo  $\tau$ , onde  $\tau$  é o **tempo de periastro** da órbita. Então, no instante inicial:  $\theta = E = 0$  (definição de periastro). Ou seja, para  $t = \tau$ , as anomalias excêntrica e verdadeira são iguais, sendo ambas nulas.

Fazendo a integração da equação 57 desde  $t' = \tau$  até um tempo  $t' = t$  qualquer, obtém-se a famosa *equação de Kepler* para órbitas elípticas:

$$\begin{aligned} \int_0^E (1 - e \cos E') dE' &= \int_\tau^t n dt' \\ [E' - e \sin E']_0^E &= [nt']_\tau^t \\ E - e \sin E &= n(t - \tau) \end{aligned} \quad (58)$$

Na equação 58, o termo do lado direito é chamado de *anomalia média*:

$$M = n(t - \tau) \quad (59)$$

Então, a equação de Kepler pode ser escrita de outra forma:

$$E - e \sin E = M \quad (60)$$

A equação de Kepler, embora pareça bem simples, não possui uma solução analítica acessível por matemática elementar. Sua resolução analítica é sofisticada e depende de métodos de variáveis complexas.

**Exercício:** insira a equação de Kepler no Mathematica e tente sua resolução, a seguir, procure artigos acadêmicos relacionados a sua solução analítica.

A forma mais usual de resolver a equação de Kepler é a numérica. Inclusive, cabe aqui uma curiosidade: o método de Newton-Rapson, para cálculo numérico de raízes de equações, foi desenvolvido tendo como motivação resolver a equação de Kepler.

Apesar de não possuir uma solução analítica usual, algumas propriedades importantes podem ser extraídas da equação de Kepler. Uma dessas propriedades é o período orbital.

Por definição, o **período orbital** é o tempo gasto para completar uma volta completa na órbita. Fazendo-se,  $E = 2\pi$  na equação 58 obtém-se o período orbital  $T$ :

$$2\pi - e \sin 2\pi = n(t - \tau) = nT$$

Ou seja:

$$T = \frac{2\pi}{n} \quad (61)$$

Ou:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad (62)$$

A equação 62 é muito importante, pois dita o período orbital em função do semi-eixo maior. A partir dela, verifica-se que órbitas baixas ( $a$  pequeno) possuem período curto, enquanto órbitas altas ( $a$  grande) possuem período maior.

A equação do período é muito usada para se estipular o semi-eixo maior da órbita de uma missão satelital, tendo como base uma taxa de varredura do território. Outro problema clássico são órbitas síncronas, onde se define o valor do período tendo como base a sincronia da órbita com algum astro (por exemplo, órbita geoestacionária), encontrando-se o semi-eixo maior associado.

A partir da equação de Kepler (58 ou 60), é possível propagar a anomalia excêntrica em função do tempo, utilizando algum método numérico<sup>1</sup>. Uma vez encontrada a anomalia excêntrica, a anomalia verdadeira pode ser determinada. Isto é feito pelas equações 54 ou 50. Mas, usando-as individualmente, ocorre o problema da ambiguidade do quadrante. Isso pode ser resolvido avaliando-se ambas equações simultaneamente e comparando seus sinais. Outra forma é encontrar uma relação envolvendo tangente.

Uma relação trigonométrica sem ambiguidade de quadrante é obtida pela fórmula da tangente de meio ângulo:

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{\sin A}{1 + \cos A} \quad (63)$$

Para se obter uma relação como a da equação acima, soma-se 1 de ambos os lados da equação 38:

$$1 + \cos E = 1 + \frac{e + \cos \theta}{1 + e \cos \theta} = \frac{1 + e \cos \theta + e + \cos \theta}{1 + e \cos \theta} = \frac{\cos \theta(1 + e) + 1 + e}{1 + e \cos \theta}$$

$$1 + \cos E = \frac{(1 + e)(1 + \cos \theta)}{1 + e \cos \theta} \quad (64)$$

Dividindo a equação 44 pela equação 64:

$$\frac{\sin E}{1 + \cos E} = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{(1 + e)(1 + \cos \theta)} \quad (65)$$

---

<sup>1</sup>Se é necessária a propagação por longos períodos de tempo, deve-se ter muita atenção com a precisão do método numérico, o qual pode gerar erros cumulativos.

Pela fórmula da tangente de meio ângulo:

$$\tan \frac{E}{2} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+e)} \tan \frac{\theta}{2} \quad (66)$$

Que ainda pode ser escrita de outra forma:

$$\tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2} \quad (67)$$

Ou:

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \quad (68)$$

Para finalizar a propagação da órbita elíptica no referencial perifocal, calculam-se os coeficientes de Lagrange associados à anomalia verdadeira  $\theta$ , a partir dos quais determinam-se os vetores posição e velocidade.

## Referências

- [1] A. TEWARI. *Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modelling and simulation with MATLAB and Simulink*. Birkhauser, Boston, 2007.