MECÂNICA DE VOO ESPACIAL - DEM 1119
Aula 11

Prof. André Luís da Silva

1 Introdução

Órbitas Perturbadas:

- Aceleração perturbativa;
- Equações planetárias de Lagrange;
- Efeito do achatamento do Planeta:
  - Regressão dos nodos e avanço de periastro;
  - Órbitas hélio síncrona e Molniya.

Referências da aula:

[1] TEWARI, A. Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modelling and simulation with MATLAB and Simulink. Boston: Birkhauser, 2007.

Seções 6.1 a 6.4.

[2] CURTIS, H.D. Orbital Mechanics for Engineering Students. 3ª ed., Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013.

Seção 4.7

[3] Derivation of Lagrange planetary equations: `https://farside.ph.utexas.edu/teaching/celestial/Celestial/node149.html`

As aulas anteriores estudaram as órbitas Keplerianas: soluções do problema de dois corpos, obtidas para o caso em que a única força atuante é a atração gravitacional mútua e ambos os corpos são esféricos ou partículas. Casos tais como os elencados abaixo não são cobertos:

- Existe atração gravitacional de um terceiro corpo (ou mais);
- Algum dos corpos não é esférico ou não pode ser considerado partícula;
- Existem outras forças atuantes, tais como arrasto atmosférico.

Neste sentido, o conteúdo da aula de hoje é apresentado, onde as órbitas keplerianas são assumidas como soluções ideais, e efeitos adicionais são considerados como perturbações.

2 Aceleração Perturbativa

O movimento no problema de dois corpos ideal consiste de órbitas Keplerianas: elipse, hipérbole, parábola, com coeficientes constantes no plano orbital. No espaço tridimensional, a orientação de tais órbitas também é constante.

Ao desenvolver a solução do problema de dois corpos, é assumido que a única força que age entre os dois é a gravitacional, proveniente da interação mútua entre eles. Em tal situação pôde-se encontrar uma solução analítica, a partir de seis integrais do movimento.

O problema de dois corpos ideal, embora muito útil, é somente uma aproximação. Na realidade, sempre haverão perturbações extras além da pura atração gravitacional mútua.

As perturbações podem consistir em forças conservativas ou não. Exemplos de perturbações conservativas são:

- Gravidade de terceiro corpo;
- Achatamento de um planeta, fazendo sua geometria diferir de uma esfera;
- Força magnética proveniente da interação de correntes elétricas internas do corpo com o campo magnético do planeta.

Alguns exemplos de perturbações não conservativas:

- Arrasto atmosférico;
- Pressão solar;
- Disparo de propulsor.

Resolver um problema com várias forças perturbativas agindo simultaneamente é muito difícil. Mas felizmente muitos casos de interesse prático têm perturbações que não se manifestam com a mesma intensidade, na mesma região, ao mesmo tempo.

Assim, em muitas situações é bem comum que **uma perturbação seja predominante com respeito as demais**, podendo ser feita uma análise para o efeito da perturbação principal ignorando as demais.

Por exemplo:

- em órbita baixa, a perturbação de maior intensidade costuma ser o arrasto atmosférico;
- Em uma órbita interplanetária, a perturbação mais relevante costuma ser a de terceiro corpo.

Em termos matemáticos, como visto na aula 3, o problema de dois corpos é escrito para o movimento relativo de uma partícula de massa m com respeito a outra de massa M, sendo a equação do movimento dada por:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \mu\frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0 \tag{1}$$

onde $\mathbf{r}$ é o vetor posição relativa da partícula m com respeito a M. $\mu = GM$ quando $m << M$.

Outra forma de ver este problema, sem afetar a solução kepleriana ideal, é supor que M é um planeta esférico e m é um corpo de dimensões insignificantes quando comparado a ele. Nesta situação o vetor posição é medido entre m e o centro de massa (CM) do planeta. Isto é válido, por exemplo: o movimento de satélites artificiais ao redor da Terra.

Neste contexto, a forma mais comum de avaliar uma perturbação é pela **inserção de uma aceleração perturbativa $\mathbf{a}_d$** no lado direito da equação 1:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \mu\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{a}_d \tag{2}$$

Quando a força perturbativa é conservativa, a aceleração perturbativa pode ser escrita como o gradiente de uma função potencial Φ:

$$\mathbf{a}_d = \nabla\Phi^T \tag{3}$$

Neste caso, ao invés de um problema vetorial de 3 componentes, o caso seria descrito por uma função escalar Φ, que seria o potencial perturbativo.

A aceleração perturbativa (ou potencial perturbativo) é estudada na sequência para casos específicos. O primeiro deles é o efeito do achatamento dos pólos do planeta.

3 Efeito do Achatamento dos Pólos

Como discutido acima, a equação de dinâmica do problema de dois corpos é válida quando o planeta possui massa esfericamente distribuída, de modo que seu modelo gravitacional é o mesmo de uma massa pontual:

$$\mathbf{g} = GM\frac{\mathbf{r}}{r^3} \tag{4}$$

Se um planeta possui achatamento nos pólos, o seu modelo gravitacional é determinado por uma expansão em série do potencial gravitacional. Quando o corpo possui massa distribuída de maneira axis simétrica, o potencial é determinado pelas constantes de Jeffery.

O primeiro termo da expansão em série é a gravidade do planeta esférico. Os demais representam o desvio de massa em relação à esfera. Nesta situação, o modelo ideal do problema de dois corpos não é mais válido. Assim, é necessário adicionar uma **aceleração perturbativa**, a qual é determinada pelas constantes de Jeffery.

Neste contexto, a dinâmica de órbita perturbada da equação 2 é utilizada, com a aceleração perturbativa dada pela equação 3:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \mu\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \nabla\Phi^T \tag{5}$$

Na aula 2, foi determinado o potencial gravitacional de um corpo axis simétrico:

$$\Phi = \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R_e}{r}\right)^n J_n P_n(\sin\delta) \tag{6}$$

Onde: R_e é o raio equatorial do planeta, δ é a latitude, P_n é o polinômio de Legendre de grau n, J_n é a n-ésima constante de Jeffery.

Na equação 6, o primeiro termo da soma ($\frac{\mu}{r}$) é o potencial gravitacional da massa pontual (igual ao de um planeta com massa esfericamente distribuída). Os demais estão relacionados com a **não esfericidade do planeta**. Sendo assim, o **potencial perturbativo** é:

$$\Phi = -\frac{\mu}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R_e}{r}\right)^n J_n P_n(\sin\delta) \tag{7}$$

Assim, o efeito do achatamento dos pólos é avaliado determinando-se a solução da equação diferencial abaixo:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \mu\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\frac{\mu}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R_e}{r}\right)^n J_n P_n(\sin\delta) \tag{8}$$

A ideia do processo de solução desta equação é a mesma dos cursos básicos de equações diferenciais:

- Primeiro, determina-se a solução da equação homogênea. No caso, a equação não perturbada 1;
- Depois, determina-se uma solução particular da equação não homogênea;
- A solução não homogênea é interpretada como um **desvio em relação à órbita kepleriana**.

3.1 Equações Planetárias de Lagrange

Na sequência, é apresentado um método para determinação da solução perturbada devido a um potencial perturbativo.

Para encontrar uma **solução perturbada**, supõe-se que ela seja uma **função dos 6 parâmetros das órbitas keplerinas e do tempo**. Os parâmetros orbitais serão agrupados em um vetor **c**. Por exemplo, adotando os parâmetros orbitais clássicos, o vetor é:

$$\mathbf{c} = [c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5,\ c_6]^T = [a,\ e,\ \tau,\ \Omega,\ i,\ \omega]^T \tag{9}$$

Considere que a solução é escrita a partir das funções genéricas **f** e **g**:

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(\mathbf{c}, t), \quad \mathbf{v} = \mathbf{g}(\mathbf{c}, t) \tag{10}$$

Onde:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \tag{11}$$

Quando $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ são a **solução do problema não perturbado**, os **parâmetros orbitais são constantes**.

O método de solução consiste em substituir na equação da aceleração perturbativa a solução da equação não perturbada. Para isso, calcula-se a derivada das funções na equação 10 pela regra da cadeia:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{f}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{c}}\frac{d\mathbf{c}}{dt}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \quad \text{(equação 11)}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{c}}\frac{d\mathbf{c}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\\ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{c}}\frac{d\mathbf{c}}{dt} &= 0\end{aligned} \tag{12}$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{c}}\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{c}}\frac{d\mathbf{c}}{dt}$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{c}}\frac{d\mathbf{c}}{dt} \tag{13}$$

Substituindo as equações 10 e 13 na equação 5:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{c}}\frac{d\mathbf{c}}{dt} + \mu\frac{\mathbf{f}}{r^3} &= \nabla\Phi^T\\ \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2} + \mu\frac{\mathbf{f}}{r^3} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{c}}\frac{d\mathbf{c}}{dt} &= \nabla\Phi^T\end{aligned}$$

Como assumiu-se que $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ satisfazem a equação de dinâmica do problema não perturbado, a soma dos dois primeiros termos na equação acima é zero, resultando na **equação diferencial perturbativa**:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{c}}\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \nabla\Phi^T \tag{14}$$

As equações 12 e 14 formam um conjunto de 6 equações diferenciais para determinar a

variação dos parâmetros orbitais em função da aceleração perturbativa:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{c}}\frac{d\mathbf{c}}{dt} = 0 \tag{15}$$
$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{c}}\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \nabla\Phi^T \tag{16}$$

Para seguir com a dedução, serão feitas as definições de notação:

- $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{f}$ e $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{g}$ são as soluções do problema não perturbado (kepleriano);
- $\tilde{\mathbf{r}}$ e $\tilde{\mathbf{v}}$ são as perturbações das soluções keplerianas, de modo que:
- Soluções perturbadas: $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}} + \tilde{\mathbf{r}}$ e $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{v}}$.

Com esta notação, as equações 15 e 16 podem ser escritas como:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{d\mathbf{c}}\frac{d\mathbf{c}}{dt} = 0 \tag{17}$$
$$\frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{c}}\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \nabla\Phi^T \tag{18}$$

O conjunto de equações diferenciais 17, 18 é reescrito usando álgebra matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{c}} \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{c}} \end{bmatrix} \frac{d\mathbf{c}}{dt} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3\times 1} \\ \nabla\Phi^T \end{bmatrix} \tag{19}$$

Ambos os lados da equação matricial 19 são multiplicados pela matriz:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{c}}\right)^T & \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{c}}\right)^T \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$\begin{bmatrix} -\left(\frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{c}}\right)^T & \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{c}}\right)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{c}} \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{c}} \end{bmatrix} \frac{d\mathbf{c}}{dt} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{c}}\right)^T & \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{c}}\right)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3\times 1} \\ \nabla\Phi^T \end{bmatrix}$$

$$\left(\left(\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{c}}\right)^T \frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{c}} - \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{c}}\right)^T \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{c}}\right) \frac{d\mathbf{c}}{dt} = \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{c}}\right)^T \nabla\Phi^T \tag{21}$$

O gradiente da função potencial é dado em função da distância radial $\mathbf{r}$:

$$\nabla\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}}$$

Usando-se a regra da cadeia, pode-se transformar da variável $\mathbf{r}$ (solução do problema perturbado) para $\hat{\mathbf{r}}$ (solução do problema não perturbado):

$$\nabla\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\mathbf{r}}}\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{r}}$$

Como $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}} + \tilde{\mathbf{r}}$, o resultado acima pode ser expresso como:

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\hat{\mathbf{r}}}\left(\mathbf{I}_{3\times3} - \frac{\partial\tilde{\mathbf{r}}}{\partial\mathbf{r}}\right)$$

Assumindo que o efeito de segunda ordem $\frac{\partial\tilde{\mathbf{r}}}{\partial\mathbf{r}}$ tem impacto pequeno no cálculo da aceleração perturbativa, ela é dada por:

$$\nabla\Phi \approx \frac{\partial\Phi}{\partial\hat{\mathbf{r}}} \tag{22}$$

Substituindo o resultado da equação 22 em 21:

$$\left(\left(\frac{\partial\hat{\mathbf{r}}}{\partial\mathbf{c}}\right)^T \frac{\partial\hat{\mathbf{v}}}{\partial\mathbf{c}} - \left(\frac{\partial\hat{\mathbf{v}}}{\partial\mathbf{c}}\right)^T \frac{\partial\hat{\mathbf{r}}}{\partial\mathbf{c}}\right)\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \left(\frac{\partial\hat{\mathbf{r}}}{\partial\mathbf{c}}\right)^T \frac{\partial\Phi}{\partial\hat{\mathbf{r}}}^T \tag{23}$$

O lado direito da equação acima é reescrito em termos da regra da cadeia:

$$\left(\frac{\partial\hat{\mathbf{r}}}{\partial\mathbf{c}}\right)^T \frac{\partial\Phi}{\partial\hat{\mathbf{r}}}^T = \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{c}}^T$$

Assim a equação 23 é escrita como:

$$\left(\left(\frac{\partial\hat{\mathbf{r}}}{\partial\mathbf{c}}\right)^T \frac{\partial\hat{\mathbf{v}}}{\partial\mathbf{c}} - \left(\frac{\partial\hat{\mathbf{v}}}{\partial\mathbf{c}}\right)^T \frac{\partial\hat{\mathbf{r}}}{\partial\mathbf{c}}\right)\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{c}}^T \tag{24}$$

A equação 24 pode ser reescrita definindo-se a **matriz de Lagrange**:

$$\mathbf{L} = \left(\frac{\partial\hat{\mathbf{r}}}{\partial\mathbf{c}}\right)^T \frac{\partial\hat{\mathbf{v}}}{\partial\mathbf{c}} - \left(\frac{\partial\hat{\mathbf{v}}}{\partial\mathbf{c}}\right)^T \frac{\partial\hat{\mathbf{r}}}{\partial\mathbf{c}} \tag{25}$$

$$\mathbf{L}\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{c}}^T \tag{26}$$

Pela definição na equação 25, verifica-se facilmente que a matriz de Lagrange é anti-simétrica:

$$\mathbf{L}^T = -\mathbf{L}$$

Segundo a referência [2], também pode-se demonstrar que a matriz de Lagrange não depende explicitamente do tempo:

$$\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial t} = \mathbf{0}$$

A equação 26 define 6 equações diferenciais de primeira ordem, uma para cada parâmetro orbital. Elas são equações diferenciais de primeira ordem que determinam a taxa de variação dos parâmetros orbitais em função do potencial perturbativo. Estas equações diferenciais são chamadas de **equações planetárias de Lagrange**.

3.2 Variações dos Elementos Orbitais com Achatamento dos Pólos

Abaixo, são apresentadas as equações planetárias de Lagrange para o caso que está sendo estudado:

- Os parâmetros orbitais são os clássicos: $\mathbf{c} = [a,\ e,\ \tau,\ \Omega,\ i,\ \omega]^T$;
- O potencial perturbativo está associado ao planeta com achatamento nos pólos;
- Ou seja, o potencial perturbativo é dado pela equação 7, sendo função das constantes dfe Jeffery.

As equações diferenciais que apresentam a taxa de variação dos elementos orbitais serão apresentadas sem demonstração.

De acordo com a referência [1] as taxas de variação de Ω e ω, levando em conta a primeira constante de Jeffery (J_2), são:

$$\dot{\Omega} = \frac{h}{\mu} \frac{\sin(\omega+\theta)}{\sin i(1+e\cos\theta)} \left(-\frac{3\mu}{2r^2} J_2 \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 \sin 2i \sin(\omega+\theta) \right) \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\dot{\omega} = &- \frac{r\cos\theta}{eh} \left(-\frac{3\mu}{2r^2} J_2 \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 (1 - 3\sin^2 i \sin^2(\omega+\theta)) \right) + \\ &\frac{(2+e\cos\theta)\sin\theta}{he} \left(-\frac{3\mu}{2r^2} J_2 \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 \sin^2 i \sin(2(\omega+\theta)) \right) \\ &- \frac{r\sin(\omega+\theta)}{h\tan i} \left(-\frac{3\mu}{2r^2} J_2 \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 \sin 2i \sin(\omega+\theta) \right)\end{aligned} \tag{28}$$

Nas equações diferenciais 27 e 28, as taxas de variação são função da anomalia verdadeira θ. Sendo assim, elas se alteram ao longo de uma órbita.

Mas, segundo as referências [2] e [1], os **efeitos instantâneos não são significativos**, eles geram **pouco impacto sobre uma única órbita**.

O maior **efeito é cumulativo**, ou seja: mudanças perceptíveis ocorrem somente depois de um número significativo de voltas. Neste sentido, algumas referências costumam escrever as equações diferenciais dos parâmetros orbitais em termos da **média relativa a uma órbita completa**.

Neste contexto, a referência [2] apresenta as derivadas médias dos parâmetros orbitais a, e, ω e Ω ao longo de uma órbita elíptica completa, levando em conta somente a primeira constante de Jeffery:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\bar{a}}{dt} &= 0 && (29)\\
\frac{d\bar{e}}{dt} &= 0 && (30)\\
\frac{d\bar{\omega}}{dt} &= \frac{3}{4} n J_2 \left(\frac{R_e}{p}\right)^2 (5\cos^2 i - 1) && (31)\\
\frac{d\bar{\Omega}}{dt} &= -\frac{3}{2} n J_2 \left(\frac{R_e}{p}\right)^2 \cos i && (32)
\end{aligned}
$$

Assim, o efeito da perturbação devido ao achatamento dos polos, quando somente a primeira constante de Jeffery (a mais significativa) é contabilizado, mantém o **formato da órbita inalterado**, pois ao longo de órbitas completas as variações médias do semi eixo maior e da excentricidade são nulas.

Por outro lado, esta perturbação provoca a **mudança de direção da órbita**:

- A variação da **longitude celeste do nodo ascendente** está relacionada à **mudança de direção da linha dos nodos**;
- A variação do **argumento de periastro** está associada à **mudança de direção da linha dos apsides**.

As derivadas médias $\dot{\bar{\Omega}}$ e $\dot{\bar{\omega}}$ são constantes. Assim, o movimento da **linha dos nodos** e da **linha dos apsides** é uma **rotação com velocidade angular média constante**.

Para uma órbita com inclinação $0 < i < 90°$ (chamada de **órbita direta**), $\dot{\bar{\Omega}} < 0$. Assim, a longitude celeste do nodo ascendente diminui a cada órbita, fazendo com que **linha dos nodos se mova em sentido oposto ao avanço da órbita**. Esse fenômeno é chamado de **regressão dos nodos**. O movimento ocorre no sentido **inverso** para uma **órbita retrógrada** (a qual é definida para $-90° < i < 0$), ou seja:

- Para órbitas diretas, há regressão da linha dos nodos;
- Para órbitas retrógradas, há progressão da linha dos nodos.

O efeito de regressão dos nodos está ilustrado na figura 1, que traz o gráfico da equação 32 em função da inclinação para alguns valores de semi eixo maior e excentricidade $e = 0,001$.

O comportamento de $\dot{\bar{\omega}}$ depende do sinal da expressão $5\cos^2 i - 1$, podendo ser negativo, positivo ou nulo. A inclinação para a qual $\dot{\bar{\omega}} = 0$ é chamada de **inclinação crítica**, sendo dada por:

$$
\begin{aligned}
&5\cos^2 i_c - 1 = 0, \quad \rightarrow \quad \cos^2 i_c = \frac{1}{5}, \quad \rightarrow \quad \cos i_c = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}\\
&i_c = \pm\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

Para inclinações na faixa $0 \leq i \leq 180°$, existem duas soluções de inclinação crítica:

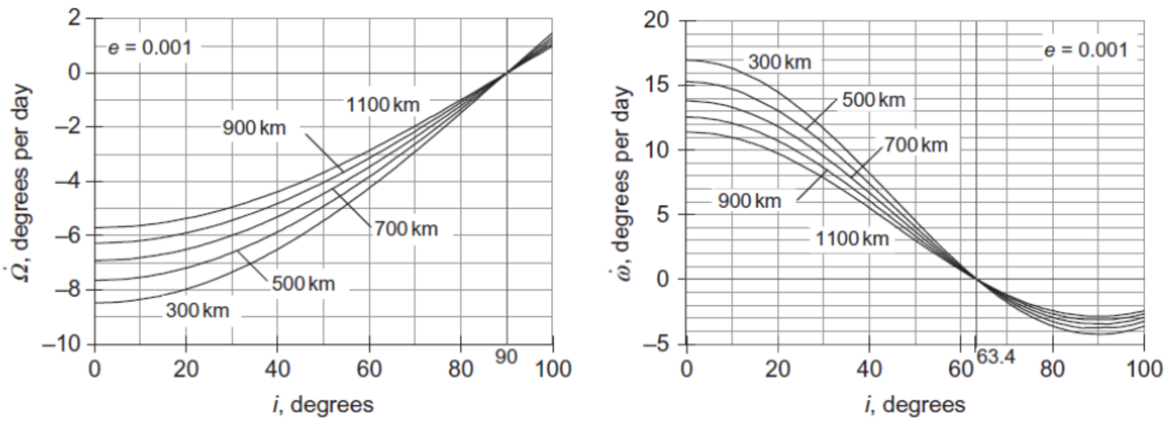

Figura 1: Regressão dos nodos e avanço de periastro para órbitas quase ciculares. Fonte: ref. [2]

- $i_c = 63,44°$
- $i_c = 116,57°$

Quando a inclinação é igual a um dos valores críticos, a **taxa média de variação do argumento de periastro é zero**. Assim, a **linha dos apsides não apresenta rotação**.

O sinal da derivada média $\dot{\bar{\omega}}$ é avaliado nos intervalos seguintes:

- Para $0 \leq i < 63,44°$ ou $116,57° < i \leq 180°$, $\dot{\bar{\omega}} > 0$, o que caracteriza uma **rotação da linha dos apsides na mesma direção do movimento orbital**, senho chamada de **avanço de periastro**;
- Para $63,44° < i < 116,57°$, $\dot{\bar{\omega}} < 0$, o que caracteriza uma **rotação da linha dos apsides na direção oposta do movimento orbital**, senho chamada de **regresso de periastro**.

O efeito de avanço de periastro também está ilustrado na figura 1, que trás o gráfico da equação 31 em função da inclinação para alguns valores de semi eixo maior e excentricidade $e = 0,001$.

3.3 Órbita Hélio Síncrona

Um efeito benéfico da regressão nodal é a **órbita hélio síncrona** ilustrada na figura 2, a qual é utilizada para **mapeamento fotográfico** e **satélites de observação**. Uma órbita hélio síncrona possibilita uma **elevação solar constante em um dado ponto**, o que é muito desejável para fotografias de superfície.

Em uma órbita hélio síncrona, o **plano orbital** forma um **ângulo constante com a radial do Sol até a Terra**. Para que isto ocorra, o plano orbital deve rodar no espaço inercial com uma **velocidade angular igual a da Terra ao redor do Sol**, que é 360° a cada 365,26 dias, ou **0,9856° por dia**.

Este tipo de órbita síncrona vai **cruzar uma dada latitude** em um **tempo solar fixo**. Na ilustração da figura 2, isto ocorre às 3 da tarde. Durante cada órbita, o satélite vê a **mesma**

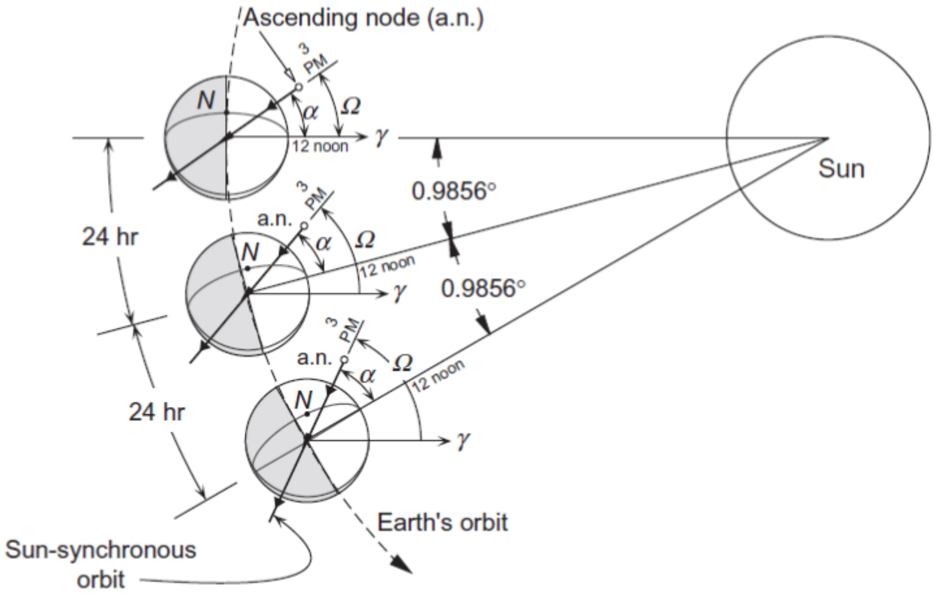

Figura 2: Órbita hélio síncrona. Fonte: ref. [2]

porção de solo sempre com aproximadamente a **mesma condição de luz ou escuridão**, dia após dia.

Exemplos de satélites que usam este recurso:

- NOAA Polar orbiting environmental satelite (NOAA/POES);
- Defense Meteorological Satellite Program (DMSP);
- Landsat, SPOT (observação da Terra em alta resolução).

Exercício: reproduza o exemplo 6.1 da referência [2].

3.4 Órbita Molniya

Outra aplicação especial desenvolvida com base nos resultados desta aula são as **órbitas Molniya**, que a Rússia usa para satélites de **comunicação em altas latitudes**, onde se situa a maior parte do país. Uma órbita Molniya é ilustrada na figura 3.

Para que as comunicações sejam efetivas, os satélites devem permanecer em altas latitudes por longos períodos. Isso resulta em órbitas altamente elípticas, sendo adotado o valor de excentricidade $e = 0,73$. O período destas órbitas é aproximadamente 12 horas. O **apogeu** se situa na direção do **polo norte**.

Para uma órbita Molniya, é crucial que a **latitude do periastro não mude devido à rotação dos apsides**, o que é provocado pelo achatamento da Terra. Então, **uma órbita Molniya sempre tem a inclinação crítica** $i_c = 63,44°$, para a qual $\dot{\bar{\omega}} = 0$.

A alta inclinação de uma órbita Molniya é obtida a partir de lançamentos do **centro de Plesetsk**, localizado em uma **latitude de 62,8º**. Como visto em outras aulas, lançar de uma latitude próxima da inclinação da órbita otimiza o lançamento, reduzindo o consumo de propelente, isso é muito desejado especialmente para inclinações altas.

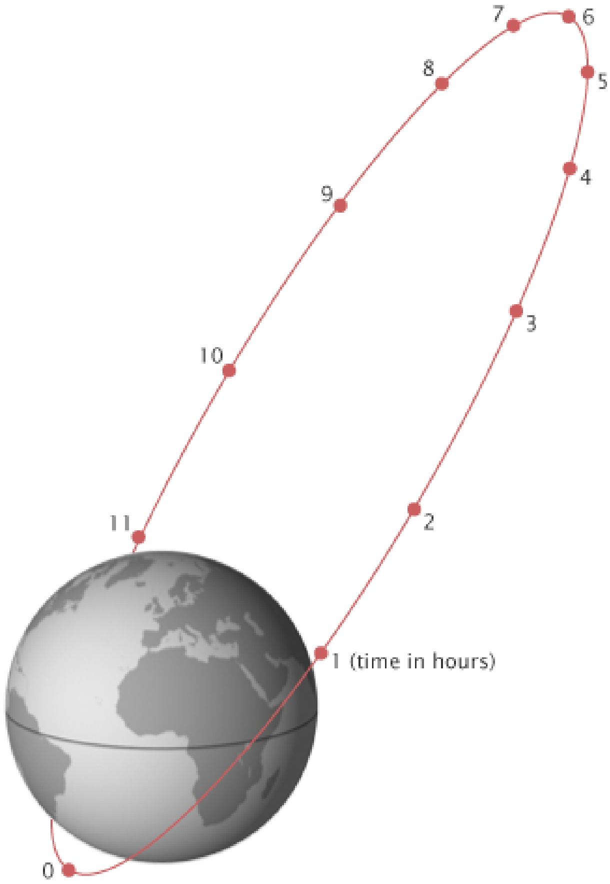

Figura 3: Órbita Molniya. Fonte: NASA `http://earthobservatory.nasa.gov/Features/OrbitsCatalog/page2.php`

A inclinação de uma órbita Molniya causa regressão nodal a uma taxa de $\dot{\bar{\Omega}} = -0,0024°/\text{dia}$ (Exercício: calcule este resultado), resultando em $\dot{\bar{\Omega}} = -0,8766°/\text{ano}$

Referências

[1] H.D. CURTIS. *Orbital Mechanics for Engineering Students*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 3rd edition, 2013.

[2] A. TEWARI. *Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modelling and simulation with MATLAB and Simulink*. Birkhauser, Boston, 2007.