MECÂNICA DE VOO ESPACIAL - DEM 1119
Aula 2

Prof. André Luís da Silva

1 Introdução

Tópicos da aula:

- Gravidade de um planeta axissimétrico;
- Raio de um planeta não esférico;
- Anomalias gravitacionais.

Referência da aula [1]: TEWARI, A. Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modelling and simulation with MATLAB and Simulink. Boston: Birkhauser, 2007. **Capítulo 3**.

2 Gravidade de um Corpo Axissimétrico

Para calcular o potencial gravitacional resultante, é necessário escrever a distância s com respeito ao sistema de coordenadas adotado. Pela lei dos cossenos:

$$s = \sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\gamma)} \tag{1}$$

onde γ é o ângulo entre os vetores $\mathbf{r}$ e $\boldsymbol{\rho}$.

Substituindo s dado acima na integral da equação 17 da aula 1:

$$\Phi = \int_M \frac{G}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\gamma)}} dm \tag{2}$$

Para calcular a integral de volume da equação 2 em coordenadas esféricas, é tomada a seguinte ***expansão em série de polinômios de Legendre***, a qual é convergente para $\rho < r$:

$$\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\gamma)}} = \frac{1}{r}\left\{1 + \frac{\rho}{r}\cos\gamma + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\left(3\cos^2\gamma - 1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^3\left(5\cos^3\gamma - 3\cos\gamma\right) + \ldots\right\} \tag{3}$$

Os polinômios de Legendre são definidos por:

$$P_0(\nu) = 1, \quad P_1(\nu) = \nu, \quad P_2(\nu) = \frac{1}{2}\left(3\nu^2 - 1\right), \quad P_3(\nu) = \frac{1}{2}\left(5\nu^3 - 3\nu\right),$$
$$P_4(\nu) = \frac{1}{8}\left(35\nu^4 - 30\nu^2 + 3\right), \quad P_5(\nu) = \frac{1}{8}\left(63\nu^5 - 70\nu^3 + 15\nu\right)$$

Os quais também podem ser dados de forma compacta pela relação recursiva:

$$P_n(\nu) = \frac{(2n-1)\nu P_{n-1}(\nu) - (n-1)P_{n-2}(\nu)}{n} \tag{4}$$

Ou na forma diferencial:

$$P_n(\nu) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\nu^n}(\nu^2 - 1) \tag{5}$$

Usando a notação dos polinômios de Legendre, a expansão em série da equação 3 é então escrita como:

$$\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos(\gamma)}} = \frac{1}{r}\left\{P_0(\cos\gamma) + \frac{\rho}{r}P_1(\cos\gamma) + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 P_2(\cos\gamma) + \ldots + \left(\frac{\rho}{r}\right)^n P_n(\cos\gamma) + \ldots\right\} \tag{6}$$

A integral 2 para cálculo do potencial gravitacional é então:

$$\Phi = \frac{G}{r}\int_M \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n P_n(\cos\gamma)dm = \frac{G}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\int_M \left(\frac{\rho}{r}\right)^n P_n(\cos\gamma)dm \tag{7}$$

A primeira integral ($n = 0$) é simplesmente a massa total, o que leva ao resultado do **potencial gravitacional de uma distribuição esférica de massa**:

$$\Phi_0 = \frac{GM}{r} \tag{8}$$

O segundo termo ($n = 1$), é:

$$\Phi_1 = \frac{G}{r}\int_M \left(\frac{\rho}{r}\right) P_1(\cos\gamma)dm = \frac{G}{r}\int_M \left(\frac{\rho}{r}\right)\cos\gamma dm \tag{9}$$

Para uma distribuição de massa axissimétrica, a integral acima é nula, por uma questão de simetria. Logo, para corpos axissimétricos, o termo de $n = 1$ da soma da equação 7 é nulo.

Para calcular os demais termos, o elemento de massa da integral deve ser escrito em coordenadas polares. Isso é feito a partir do elemento de volume neste sistema de coordenadas:

$$dm = D(\rho, \beta, \lambda)\rho^2 \sin\beta d\rho d\beta d\lambda \tag{10}$$

Onde $D(\rho, \beta, \lambda)$ é a densidade do corpo de massa M, que pode assumir diferentes valores ao longo de sua extensão. Mas, segundo a hipótese de corpo axissimétrico, não há dependência de $D(\rho, \beta, \lambda)$ com a longitude λ, então, esta função é tomada somente com respeito a ρ e β:

$$dm = D(\rho, \beta)\rho^2 \sin\beta d\rho d\beta d\lambda \tag{11}$$

Para completar o cálculo das integrais, também é necessário escrever o ângulo γ mediante as coordenadas de dm e m. Em [1], afirma-se que, usando geometria esférica, este ângulo é dado por:

$$\cos\gamma = \cos\beta\cos\phi + \sin\beta\sin\phi\cos(\theta - \lambda) \tag{12}$$

Além disso, para o caso axissimétrico, o ângulo γ não depende da longitude de dm e m, ou seja, não depende de θ e λ. A referência [1] argumenta que, nesta situação, o seguinte resultado é válido[1]:

$$P_n(\cos\gamma) = P_n(\cos\beta)P_n(\cos\phi) \tag{13}$$

Finalmente, o potencial gravitacional do corpo axissimétrico é determinado por:

$$\Phi = \frac{GM}{r} + \frac{G}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{P_n(\cos\phi)}{r^n}\int_{\rho=0,\beta=0,\lambda=0}^{\rho=R_e,\beta=\pi,\lambda=2\pi} \rho^n P_n(\cos\beta)D(\rho,\beta)\rho^2\sin\beta d\rho d\beta d\lambda \tag{14}$$

As integrais acima são tema de vasto estudo. Uma solução consolidada para o problema envolve escrever o somatório da seguinte maneira:

$$\Phi(r,\phi) = \frac{GM}{r} + \frac{1}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{A_n}{r^n}P_n(\cos\phi) \tag{15}$$

Onde os coeficientes A_n são dados por:

$$A_n = G\int_{\rho=0,\beta=0,\lambda=0}^{\rho=R_e,\beta=\pi,\lambda=2\pi} \rho^{n+2}P_n(\cos\beta)D(\rho,\beta)\sin\beta d\rho d\beta d\lambda \tag{16}$$

A expressão final do potencial gravitacional costuma, então, ser dada da forma presente na equação 17, onde os coeficientes A_n são trocados por J_n, os quais são chamados de ***constantes de Jeffery***, sendo parâmetros da expansão em **harmônicos esféricos** para o *caso de corpo axissimétrico*.

$$\Phi(r,\phi) = \frac{GM}{r}\left\{1 - \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R_e}{r}\right)^n J_n P_n(\cos\phi)\right\} \tag{17}$$

com:

$$J_n = -\frac{A_n}{GMR_e^n} \tag{18}$$

[1] Tente encontrar a demonstração deste resultado.

sendo R_e o raio equatorial do planeta.

Cada planeta possui valores intrínsecos das constantes de Jeffery. Segundo a referência [1], em geral, somente os 4 primeiros termos da soma são necessários ($n = 2, 3, 4, 5$), sendo que os mesmos diminuem na medida que o grau n aumenta. Essas constantes representam os desvios do campo gravitacional provocados pela alteração da distribuição de massa, quando comparada ao caso esférico. A figura 1 mostra uma representação gráfica intuitiva destes efeitos. O harmônico de amplitude J_2 representa a tendência de achatamento nos pólos, ou seja, o grau de geometria elipsoidal do planeta. O harmônico de amplitude J_3 representa a tendência da geometria alterar-se para o formato de uma pera, chamado de formato *peroidal*. O harmônico J_4 representa a tendência da geometria desviar para um quadrado. Já o harmônico J_5 representa o desvio para um pentágono.

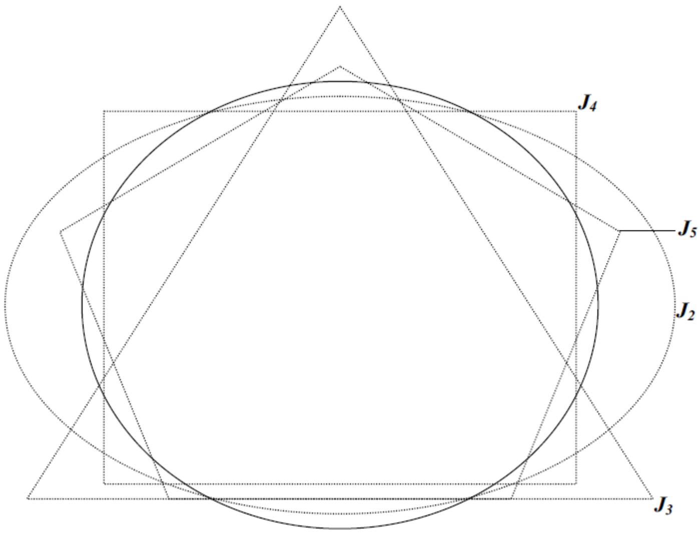

Figura 1: Ilustração intuitiva dos 4 primeiros harmônicos esféricos de um corpo axissimétrico. Referência: [1]

Os valores das constantes de Jeffery para a Terra são:

- $J_2 = 0,00108263$
- $J_3 = -0,00000254$
- $J_4 = -0,00000161$

2.1 Cálculo do Campo Gravitacional em Coordenadas Esféricas

A aceleração gravitacional é dada pelo gradiente da função potencial. Em coordenadas esféricas, o cálculo do gradiente é dado por:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\mathbf{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}\mathbf{i}_\phi + \frac{1}{r \sin \phi}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\mathbf{i}_\theta \tag{19}$$

Esse cálculo será assimilado por meio de dois exemplos.

Exemplo 1: Usando um software de cálculo simbólico, determine o campo gravitacional **g** de um corpo axissimétrico para os harmônicos até ordem 4.

Exemplo 2: Usando um software de cálculo numérico, reproduza o exemplo 3.1 da referência [1]: Construa um modelo da gravidade terrestre usando suas 4 primeiras constantes de Jeffery na expansão em série do potencial gravitacional. Compare esta aceleração da gravidade com aquela do modelo de Terra esférica ao longo de uma trajetória exemplo. Nesta trajetória, a latitude δ em graus varia com a altitude h, em km, como segue:

$$\delta = h - 100, \quad (0 \leq h \leq 200)\,\mathrm{km}$$

onde: $h = r - R_e$ e $\delta = \frac{\pi}{2} - \phi$. r e ϕ são a distância radial e a colatitude. Use $R_e = 6.378,14\,\mathrm{km}$.

3 Raio de um Planeta não Esférico

Quando um planeta possui achatamento nos pólos, o raio polar R_p é inferior ao equatorial R_e. Neste caso, é necessário encontrar uma representação fidedigna da **superfície média do nível do mar**, que serve como referência para determinar variações de altitude da superfície.

Locais com grande variação da altitude da superfície, tais como grandes cadeias montanhosas, podem levar a anomalias gravitacionais locais.

Como ilustrado na figura 2, o raio local é definido em função da latitude centrada no planeta (chamada de latitude geocêntrica no caso da Terra) $\delta = \pi/2 - \phi$. Este raio define a superfície de um **elipsoide de referência**. A figura 2 ilustra (exageradamente) uma comparação entre o elipsoide de referência e uma aproximação esférica para o caso da Terra.

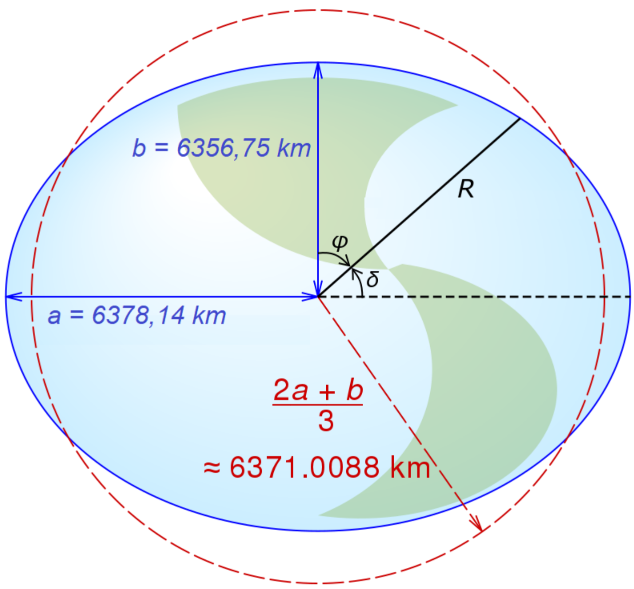

Figura 2: Ilustração do elipsoide de referência. Parâmetros representativos terrestres (não em escala) e comparação com aproximação esférica: raio equatorial (a), polar (b) e médio. Adaptado de: Cmglee, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=64829675

De acordo com a referência [1], a seguinte expansão em série é adotada para o cálculo do raio local em um elipsóide de referência:

$$R = R_e \left[1 - \frac{\epsilon}{2}(1 - \cos 2\delta) + \frac{5\epsilon^2}{16}(1 - \cos 4\delta) - \dots\right] \tag{20}$$

Onde ϵ é a *elipticidade* do planeta:

$$\epsilon = 1 - \frac{R_p}{R_e} \tag{21}$$

Geralmente, a elipticidade é um número muito pequeno. Para o caso da Terra: $\epsilon = \frac{1}{298{,}257}$ (Determine este valor a partir raios equatorial e polar da figura 2). Sendo assim, em muitos casos, é suficientemente preciso manter os primeiros dois termos da série:

$$R \approx R_e \left(1 - \frac{\epsilon}{2}(1 - \cos 2\delta)\right) \tag{22}$$

3.1 Vertical Local

O Elipsoide padrão aqui tratado é a referência para medir a **vertical local**, sendo esta definida como a **direção normal à superfície de referência** em um determinado ponto. Isto significa que, em um planeta não esférico, as direções radial e vertical possuem um pequeno desvio.

A figura 3 ilustra a vertical local de um planeta de formato elipsoidal e a comparação com a aproximação esférica.

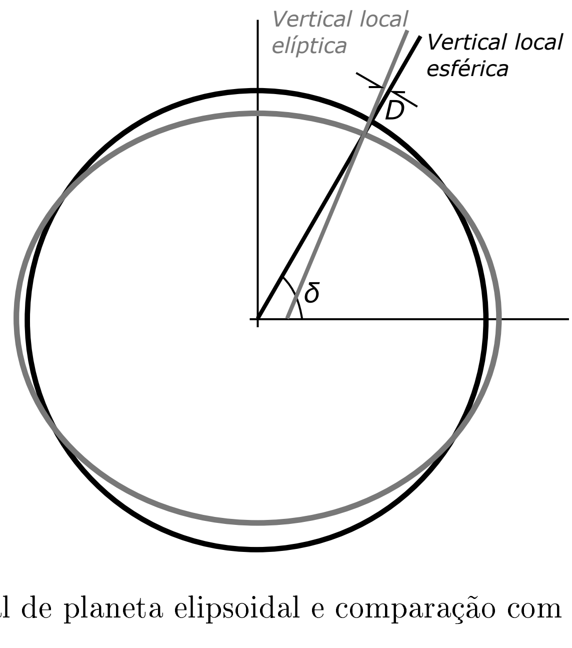

Figura 3: Vertical local de planeta elipsoidal e comparação com a aproximação esférica.

O desvio da vertical local é representado por D conforme ilustrado na figura 3. É a diferença angular entre a vertical local real e aquela de uma aproximação esférica.

Segundo a referência [1]. Para o caso elipsoidal, o desvio da vertical é dado pela expansão em série da equação 23. Geralmente, somente os dois primeiros termos são considerados.

$$D = \epsilon \sin 2\delta - \frac{\epsilon^2}{4} \sin 2\delta + 2\epsilon^2 \sin 2\delta \sin^2 \delta + \ldots \tag{23}$$

Pela equação 23, o desvio no equador ($\delta = 0$ ou $\delta = \pi$) e nos pólos ($\delta = \frac{\pi}{2}$ ou $\delta = \frac{3\pi}{2}$) é nulo: $D = 0$, o que está de acordo com a intuição (veja a figura 3).

Exemplo 3: Usando um software de cálculo numérico, reproduza o exemplo 3.2 da referência [1]: Plote o raio R e a deflexão da vertical D para a Terra no intervalo $0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$, usando os dois primeiros termos de cada série.

4 Anomalias Gravitacionais

O modelo gravitacional axissimétrico trata a superfície planetária como um sólido de revolução. Fisicamente, esta superfície é gerada pelo contorno de potencial gravitacional constante, ou seja **uma superfície equipotencial**. A distribuição de massa real do planeta, entretanto, difere ligeiramente deste modelo, resultando em *anomalias gravitacionais*.

Em determinadas situações que necessitam de maior precisão, devem ser consideradas variações longitudinais na distribuição de massa, as quais são chamadas de efeitos **setoriais** e **tesserais**.[2], que são conceitos geométricos que descrevem determinadas formas relacionadas com meridianos e paralelos.

Além dos efeitos setoriais e tesserais, que estão associados com deformações "uniformes" na geometria longitudinal, existem efeitos locais, resultantes da variação acentuada de massa devido a vales, montanhas, placas tectônicas, etc.

A *superfície equipotencial modificada*, que resulta da inclusão de *anomalias gravitacionais*, é chamada de **geóide**.

Ao invés de levantar teoricamente as variações de densidade que levam às anomalias gravitacionais, é mais simples realizar a medição da aceleração da gravidade ao longo de vários pontos da superfície planetária, construindo a geóide, ou um mapa gravitacional detalhado.

As medições da aceleração da gravidade, geralmente, são efetuadas por satélites especialmente instrumentados, ao longo de órbitas circulares. Alguns satélites de estudo da Terra são: *Lageos*, TOPEX/*Poseidon* e GRACE (NASA); SPOT-2/*Doris* (França).

Embora as anomalias gravitacionais longitudinais e locais sejam negligíveis na maioria das aplicações de mecânica de voo, existem certos casos, tais como de satélites geoestacionários, onde até pequenas variações em $\mathbf{g}$ podem causar uma mudança significativa de trajetória em um longo período de tempo (meses ou anos).

Para muitas aplicações especiais, a expansão em série do potencial gravitacional utiliza uma aproximação mais geral: os **harmônicos esféricos**. Os termos desta expansão são escritos a partir de **funções de Legendre** (também chamados de polinômios associados de Legendre): P_n^m, onde m é a ordem e n o grau. Sendo as funções de Legendre relacionadas com os polinômios

[2] Pesquise na internet pelos termos *sectorial* and *tesseral*

por:

$$P_n = P_n^0$$

Assim, os **polinômios de Legendre são funções de Legendre de ordem zero**.

Em um modelo gravitacional geral, os coeficientes da expansão em harmônicos esféricos são denotados por C_n^m. As constantes de Jeffery são o negativo dos coeficientes harmônicos de ordem zero do mesmo grau, ou seja:

$$J_n = -C_n^0$$

Os parâmetros C_n^0 são chamados de *coeficientes harmônicos zonais*.

Todos os coeficientes com ordem $m \neq 0$ são associados com a distribuição não axissimétrica de massa, determinando a variação longitudinal da gravidade. Nesta situação, os coeficientes com ordem m igual ao grau n, C_n^n, são chamados de *coeficientes harmônicos setoriais*. Já os parâmetros com $m \neq n$ são os *coeficientes harmônicos tesserais.*

Exemplo 4: Encontre na internet um programa de computador que contenha um modelo de harmônicos esféricos da Terra que considera anomalias gravitacionais longitudinais e locais.

Exemplo 5: Repita a pesquisa acima para o caso do Planeta Marte.

Referências

[1] A. TEWARI. *Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modelling and simulation with MATLAB and Simulink*. Birkhauser, Boston, 2007.