MECÂNICA DE VOO ESPACIAL - DEM 1119
Aula 6

Prof. André Luís da Silva

1 Introdução

Tópicos da aula:

- Propagação de órbita hiperbólica e parabólica.

Referência: [3]: TEWARI, A. Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modelling and simulation with MATLAB and Simulink. Boston: Birkhauser, 2007. **Seções** 4.5.2 a 4.5.5.

2 Propagação de Órbita Hiperbólica

Para a propagação da órbita hiperbólica, considere a equação diferencial da anomalia verdadeira para $e > 1$

$$\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}dt = \frac{d\theta}{(1 + e\cos\theta)^2} \tag{1}$$

A resolução da equação 1 pode ser feita por integração. Integrando o lado esquerdo desde o tempo de periastro τ, até um tempo qualquer $t' = t$, e o lado direito desde $\theta = 0$ (associado ao periastro), até uma anomalia verdadeira genérica $\theta' = \theta$ (associada a t), tem-se:

$$\int_\tau^t \sqrt{\frac{\mu}{p^3}}dt' = \int_0^\theta \frac{d\theta'}{(1 + e\cos\theta')^2}$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}(t - \tau) = \int_0^\theta \frac{d\theta'}{(1 + e\cos\theta')^2} \tag{2}$$

Segundo a referência [1], a integral no lado direito é dada por:

$$\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}(t - \tau) = \left[\frac{e\sin\theta}{(e^2 - 1)(1 + e\cos\theta)} - \frac{1}{e^2 - 1}\frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}}\ln\left(\frac{\sqrt{e + 1} + \sqrt{e - 1}\tan\frac{1}{2}\theta}{\sqrt{e + 1} - \sqrt{e - 1}\tan\frac{1}{2}\theta}\right)\right]_0^\theta$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}(t-\tau) = \frac{e\sin\theta}{(e^2-1)(1+e\cos\theta)} - \frac{1}{(e^2-1)^{\frac{3}{2}}}\ln\left(\frac{\sqrt{e+1}+\sqrt{e-1}\tan\frac{1}{2}\theta}{\sqrt{e+1}-\sqrt{e-1}\tan\frac{1}{2}\theta}\right) \tag{3}$$

Multiplicando ambos os lados da equação 3 por $(e^2-1)^{\frac{3}{2}}$:

$$(e^2-1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}(t-\tau) = \frac{e\sqrt{e^2-1}\sin\theta}{1+e\cos\theta} - \ln\left(\frac{\sqrt{e+1}+\sqrt{e-1}\tan\frac{1}{2}\theta}{\sqrt{e+1}-\sqrt{e-1}\tan\frac{1}{2}\theta}\right) \tag{4}$$

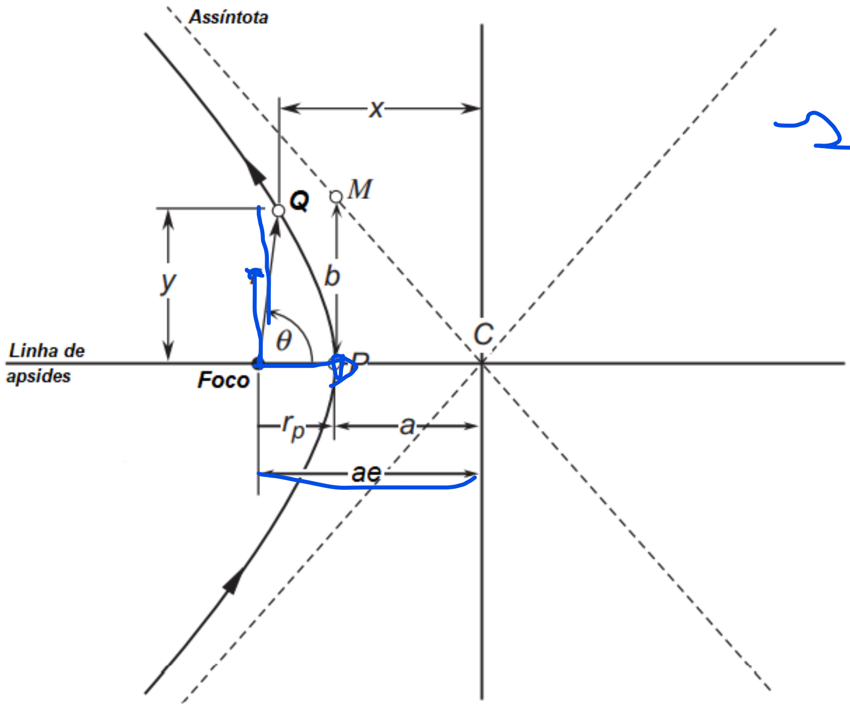
Ou:

$$M_h = \frac{e\sqrt{e^2-1}\sin\theta}{1+e\cos\theta} - \ln\left(\frac{\sqrt{e+1}+\sqrt{e-1}\tan\frac{1}{2}\theta}{\sqrt{e+1}-\sqrt{e-1}\tan\frac{1}{2}\theta}\right) \tag{5}$$

$$\boxed{M_h = (e^2-1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}(t-\tau)} \tag{6}$$

Onde M_h é definida como ***anomalia média hiperbólica***.

A equação 5 pode ser simplificada pela introdução de um ângulo auxiliar análogo à *anomalia excêntrica* E da elipse. Para isso, toma-se como referência a figura 1.



sen θ = $\frac{C}{H}$

Figura 1: Parâmetros de uma hipérbole. Adaptado de [1].

Na figura, apresenta-se uma hipérbole genérica com equação paramétrica em coordenadas retangulares dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{7}$$

Onde: a é o semieixo maior da hipérbole e b seu semieixo menor; x é a distância horizontal de um ponto Q até o centro C da hipérbole; y é a distância deste ponto acima da linha de apsides. Assume-se um sistema de coordenadas polares com origem no foco, sendo r a distância radial e θ o ângulo polar do ponto Q.

A partir das convenções feitas acima, define-se o *seno hiperbólico* de uma certa variável adimensional H, como a razão $\frac{y}{b}$. A variável H é chamada de ***anomalia hiperbólica***:

$$\sinh H = \frac{y}{b} \tag{8}$$

Analogamente, se define o cosseno hiperbólico:

$$\cosh H = \frac{x}{a} \tag{9}$$

Acima, o seno e o cosseno hiperbólico foram enunciados a partir de relações geométricas na hipérbole. No entanto, essas funções também são definidas em Cálculo, sendo dadas da seguinte maneira: $\sinh \alpha = (e^{\alpha} - e^{-\alpha})/2$ e $\cosh \alpha = (e^{\alpha} + e^{-\alpha})/2$, sendo válida a identidade: $\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$.

Da figura 1, as coordenadas retangulares x e y estão relacionadas com as polares r e θ da seguinte maneira:

$$y = r \sin \theta \tag{10}$$

$$x = ae + r \cos \theta \tag{11}$$

Na segunda equação $a < 0$, então x é negativo, pois o ponto está no ramo esquerdo da hipérbole.

A troca de variáveis na equação 5 consiste em substituir a anomalia verdadeira θ pela hiperbólica H, analogamente ao que foi feito no caso da órbita elíptica.

Para determinar uma relação entre θ e H, inicia-se substituindo y na equação 8 dado pela equação 10.

$$\sinh H = \frac{r \sin \theta}{b} \tag{12}$$

A distância radial r é substituída na equação 12 utilizando a equação de órbita:

$$\sinh H = \frac{p \sin \theta}{(1 + e \cos \theta) b} \tag{13}$$

Na equação 13, o semi eixo menor b da hipérbole precisa ser determinado, para isso, será demonstrado que a *equação de órbita se transforma na equação paramétrica da hipérbole* (equação 7). Então, b será extraído por inspeção.

A equação de órbita escrita trocando-se $p = (1 - e^2)a$ é:

$$r = \frac{(1-e^2)a}{1 + e\cos\theta} \tag{14}$$

Na equação 14, troca-se as coordenadas polares $(r,\ \theta)$ pelas retangulares $(x,\ y)$. Inicia-se explicitando-se $\cos\theta$ na equação 11 e substituindo em 14:

$$r = \frac{(1-e^2)a}{1 + e\frac{x-ae}{r}} = \frac{(1-e^2)a}{\frac{r+e(x-ae)}{r}} = \frac{(1-e^2)a}{r + e(x-ae)}r$$

$$1 = \frac{(1-e^2)a}{r + e(x-ae)} \quad \to \quad r + e(x-ae) = (1-e^2)a \quad \to \quad r = (1-e^2)a - e(x-ae) \tag{15}$$

Elevando ao quadrado ambos os lados do último resultado da equação 15:

$$r^2 = \big((1-e^2)a - e(x-ae)\big)^2 \tag{16}$$

Na equação 16, é preciso substituir r^2 em função de x e y. Das equações 10 e 11, é fácil verificar que: $r^2 = y^2 + (x-ae)^2$. Substituindo este resultado na equação 16 obtém-se:

$$y^2 + (x-ae)^2 = \big((1-e^2)a - e(x-ae)\big)^2 \tag{17}$$

Expandindo o lado direito da equação 16 e manipulando o resultado:

$$\begin{aligned}
y^2 + (x-ae)^2 &= (1-e^2)^2a^2 - 2(1-e^2)ae(x-ae) + e^2(x-ae)^2 \\
(x-ae)^2 - e^2(x-ae)^2 + 2(1-e^2)ae(x-ae) + y^2 &= (1-e^2)^2a^2 \\
(x-ae)^2(1-e^2) + 2(1-e^2)ae(x-ae) + y^2 &= (1-e^2)^2a^2 \\
(1-e^2)((x-ae)^2 + 2ae(x-ae)) + y^2 &= (1-e^2)^2a^2 \\
(1-e^2)(x^2 - 2xae + (ae)^2 + 2aex - 2(ae)^2) + y^2 &= (1-e^2)^2a^2
\end{aligned}$$

$$(1-e^2)(x^2 - (ae)^2) + y^2 = (1-e^2)^2a^2 \tag{18}$$

Escrever esse resultado no formato da equação paramétrica da hipérbole é bastante simples:

$$\begin{aligned}
&x^2 - (ae)^2 + \frac{y^2}{(1-e^2)} = (1-e^2)a^2 \\
&x^2 + \frac{y^2}{(1-e^2)} = (1-e^2)a^2 + (ae)^2 = a^2 - e^2a^2 + (ae)^2 = a^2 \\
&\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2-1)} = 1} \tag{19}$$

Então, verifica-se que a equação 19, resultante da **transformação de coordenadas na equação de órbita**, é realmente a **equação paramétrica de uma hipérbole**. Comparando as equações 7 e 19, verifica-se que o semi eixo menor b da hipérbole é dado em função do semi eixo maior a e da excentricidade:

$$b^2 = a^2(e^2-1) \tag{20}$$

Ou:

$$b = -a\sqrt{e^2-1} \tag{21}$$

O sinal é negativo pois $a < 0$.

Substituindo, na equação 13, b dado pela equação 21 e fazendo $p = (1-e^2)a$, obtém-se:

$$\sinh H = \frac{(1-e^2)a\sin\theta}{(1+e\cos\theta)(-a)\sqrt{e^2-1}} = \frac{(e^2-1)a\sin\theta}{(1+e\cos\theta)a\sqrt{e^2-1}}$$

$$\sinh H = \frac{\sqrt{e^2-1}\sin\theta}{1+e\cos\theta} \tag{22}$$

A anomalia hiperbólica H é dada pela função sinh inverso:

$$H = \sinh^{-1}\frac{\sqrt{e^2-1}\sin\theta}{1+e\cos\theta} \tag{23}$$

A função inversa do seno hiperbólico é dada por: $\sinh^{-1}\beta = \ln\left(\beta + \sqrt{\beta^2+1}\right)$. A partir disso, a anomalia hiperbólica da equação 23 é:

$$\boxed{H = \ln\left(\frac{\sqrt{e^2-1}\sin\theta}{1+e\cos\theta} + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{e^2-1}\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right)^2+1}\right)} \tag{24}$$

Simplificando:

$$H = \ln\left(\frac{\sqrt{e^2-1}\sin\theta}{1+e\cos\theta} + \sqrt{\frac{(\sqrt{e^2-1}\sin\theta)^2 + (1+e\cos\theta)^2}{(1+e\cos\theta)^2}}\right)$$
$$H = \ln\left(\frac{\sqrt{e^2-1}\sin\theta}{1+e\cos\theta} + \frac{\sqrt{(e^2-1)\sin^2\theta + 1 + 2e\cos\theta + e^2\cos^2\theta}}{1+e\cos\theta}\right)$$
$$H = \ln\left(\frac{\sqrt{e^2-1}\sin\theta}{1+e\cos\theta} + \frac{\sqrt{e^2+1-\sin^2\theta + 2e\cos\theta}}{1+e\cos\theta}\right)$$
$$H = \ln\left(\frac{\sqrt{e^2-1}\sin\theta}{1+e\cos\theta} + \frac{\sqrt{e^2+\cos^2\theta + 2e\cos\theta}}{1+e\cos\theta}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{e^2-1}\sin\theta}{1+e\cos\theta} + \frac{\sqrt{(e+\cos\theta)^2}}{1+e\cos\theta}\right)$$

$$\boxed{H = \ln\left(\frac{\sqrt{e^2-1}\sin\theta + e + \cos\theta}{1+e\cos\theta}\right)} \quad 28 \tag{25}$$

A anomalia hiperbólica tem um importante significado físico, que ainda não está explícito na equação 25. É necessário manipular este resultado para se chegar numa expressão mais conveniente. Para isso, o seno e o cosseno são substituídos a partir das identidades que os relacionam com a tangente de meio arco:

$$\sin\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}, \quad \cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} \tag{26}$$

Substituindo as relações da equação 26 em 25 e manipulando:

$$H = \ln\left(\frac{\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\sqrt{e^2-1} + e + \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}}{1+e\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}}\right) = \ln\left(\frac{\frac{2\tan\frac{\theta}{2}\sqrt{e^2-1}+e(1+\tan^2\frac{\theta}{2})+1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}}{\frac{1+\tan^2\frac{\theta}{2}+e(1-\tan^2\frac{\theta}{2})}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}}\right)$$

$$H = \ln\left(\frac{1+e+(e-1)\tan^2\frac{\theta}{2} + 2\sqrt{e^2-1}\tan\frac{\theta}{2}}{1+e+(1-e)\tan^2\frac{\theta}{2}}\right) \tag{27}$$

A equação 27 pode ser simplificada a partir da simples expressão: $(e^2-1) = (e+1)(e-1) \rightarrow \sqrt{e^2-1} = \sqrt{e+1}\sqrt{e-1}$. Fazendo essa substituição e notando que o numerador e o denominador podem ser reduzidos por fatoração:

$$H = \ln\left(\frac{1+e+(e-1)\tan^2\frac{\theta}{2} + 2\sqrt{e+1}\sqrt{e-1}\tan\frac{\theta}{2}}{1+e-(e-1)\tan^2\frac{\theta}{2}}\right)$$
$$H = \ln\left(\frac{\left(\sqrt{e+1}+\sqrt{e-1}\tan\frac{\theta}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{e+1}-\sqrt{e-1}\tan\frac{\theta}{2}\right)\left(\sqrt{e+1}+\sqrt{e-1}\tan\frac{\theta}{2}\right)}\right)$$

$$\boxed{H = \ln\left(\frac{\sqrt{e+1} + \sqrt{e-1}\tan\frac{\theta}{2}}{\sqrt{e+1} - \sqrt{e-1}\tan\frac{\theta}{2}}\right)} \tag{28}$$

A equação 28 é a relação de conversão procurada, sendo compatível com o segundo termo no lado direito da equação 5. Da mesma forma, o $\sinh H$ na equação 22 é compatível com o primeiro termo desta equação. Portanto, em termos da anomalia verdadeira, a equação 5 é escrita como:

$$M_h = e\sinh H - H \tag{29}$$

Esta é a ***equação de Kepler para a hipérbole***. Ela é análoga à equação de Kepler da elipse, onde a anomalia excêntrica é trocada pela hiperbólica, e a função seno é trocada pelo seno hiperbólico.

Assim como no caso da elipse, não existe solução analítica simples para a equação de Kepler da hipérbole, de modo que esta também precisa ser resolvida por métodos numéricos.

Com base nos resultados acima, a resolução da propagação temporal da órbita hiperbólica é similar à da elíptica:

1 : Calcula-se a anomalia média hiperbólica, a partir da equação 6, para o tempo t desejado, e tempo de periastro τ atrelado à órbita;

2 Resolve-se a equação de Kepler da hipérbole, equação 29, encontrando a anomalia hiperbólica H;

3 Calcula-se a anomalia verdadeira θ associada à anomalia hiperbólica H;

4 Calcula-se os coeficientes de Lagrange e monta-se a matriz de transição de estado;

5 Determina-se os vetores posição e velocidade, no referencial perifocal, a partir da condição inicial e da matriz de transição de estado.

Para efetuar o passo 3 do procedimento acima, a equação 12 pode ser utilizada, mas ela tem incerteza de quadrante. Para evitar isso, é possível determinar uma relação envolvendo tangente, analogamente ao caso da órbita elíptica. O processo é feito com a tangente de meio ângulo para o caso hiperbólico.

Se a expressão do sinh da equação 22 for substituída na identidade $\cosh^2 H - \sinh^2 H = 1$, obtém-se:

$$\cosh^2 H = 1 + \left(\frac{\sqrt{e^2-1}\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right)^2 = \frac{(e^2-1)\sin^2\theta + (1+e\cos\theta)^2}{(1+e\cos\theta)^2}$$

$$\cosh^2 H = \frac{e^2\sin^2\theta - \sin^2\theta + 1 + 2e\cos\theta + e^2\cos^2\theta}{(1+e\cos\theta)^2} = \frac{e^2 + \cos^2\theta + 2e\cos\theta}{(1+e\cos\theta)^2} = \left(\frac{e+\cos\theta}{1+e\cos\theta}\right)^2$$

$$\cosh H = \frac{e+\cos\theta}{1+e\cos\theta} \tag{30}$$

De uma tabela de identidades hiperbólicas, a tangente hiperbólica de meio ângulo é:

$$\tanh\frac{H}{2} = \frac{\sinh H}{1+\cosh H} \tag{31}$$

Substituindo, na equação 31, o sinh e cosh dados pelas equações 22 e 30 e simplificando:

$$\tanh\frac{H}{2} = \frac{\frac{\sqrt{e^2-1}\sin\theta}{1+e\cos\theta}}{1+\frac{e+\cos\theta}{1+e\cos\theta}} = \frac{\frac{\sqrt{e^2-1}\sin\theta}{1+e\cos\theta}}{\frac{1+e\cos\theta+e+\cos\theta}{1+e\cos\theta}} = \frac{\sqrt{e^2-1}\sin\theta}{1+e\cos\theta+e+\cos\theta}$$

$$\tanh\frac{H}{2} = \frac{\sqrt{e-1}\sqrt{e+1}\sin\theta}{1+e+(1+e)\cos\theta} = \frac{\sqrt{e-1}\sqrt{e+1}\sin\theta}{(1+e)(1+\cos\theta)}$$

$$\tanh\frac{H}{2} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \tag{32}$$

Como $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$, a equação 32 resulta em:

$$\tanh\frac{H}{2} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\tan\frac{\theta}{2} \tag{33}$$

Então, a equação 33 é uma fórmula de tangente de meio arco para converter, sem ambiguidade, de θ para H. A transformação inversa é simplesmente:

$$\boxed{\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\tanh\frac{H}{2}} \tag{34}$$

A equação 34 é aquela buscada para converter a anomalia hiperbólica em anomalia verdadeira, completando o equacionamento para a propagação temporal da órbita hiperbólica.

3 Propagação de Órbita Parabólica

Para a propagação da órbita parabólica, considere a equação diferencial da anomalia verdadeira para $e = 1$

$$\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}dt = \frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^2} \tag{35}$$

Na equação 35, integrando o lado esquerdo desde o tempo de periastro τ, até um tempo qualquer $t' = t$, e o lado direito desde $\theta = 0$ (associado ao periastro), até uma anomalia verdadeira genérica $\theta' = \theta$ (associada a t), tem-se:

$$\int_\tau^t \sqrt{\frac{\mu}{p^3}}dt' = \int_0^\theta \frac{d\theta'}{(1+\cos\theta')^2}$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}(t-\tau) = \int_0^\theta \frac{d\theta'}{(1+\cos\theta')^2} \tag{36}$$

Usando uma tabela de integrais, integral 17.18.21 da referência [2], o resultado no lado direito é dado por:

$$\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}(t-\tau) = \left[\frac{1}{2}\tan\frac{\theta'}{2} + \frac{1}{6}\tan^3\frac{\theta'}{2}\right]_0^\theta$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}(t-\tau) = \frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2} + \frac{1}{6}\tan^3\frac{\theta}{2} \tag{37}$$

A equação 37 é a forma parabólica da equação de Kepler, sendo chamada de ***equação de Barker***.

Não há um conceito equivalente de "anomalia excêntrica" para a parábola. Dada uma anomalia verdadeira θ, o tempo t é encontrado diretamente pela equação 37. Se o tempo é a variável fornecida, para encontrar θ é necessário resolver uma equação cúbica:

$$\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2} + \frac{1}{6}\tan^3\frac{\theta}{2} - \sqrt{\frac{\mu}{p^3}}(t-\tau) = 0$$

$$\tan^3\frac{\theta}{2} + 3\tan\frac{\theta}{2} - 6\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}(t-\tau) = 0 \tag{38}$$

Que trata-se simplesmente de uma equação polinomial a ser resolvida para a variável α:

$$\alpha^3 + 3\alpha - 6M_p = 0, \quad \tan\frac{\theta}{2} = \alpha \tag{39}$$

Onde M_p é a ***anomalia média parabólica***:

$$M_p = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}}(t-\tau) \tag{40}$$

Usando a solução geral da equação cúbica, referência [2], existe uma única solução real:

$$\tan\frac{\theta}{2} = \left(3M_p + \sqrt{1+9M_p^2}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(3M_p + \sqrt{1+9M_p^2}\right)^{-\frac{1}{3}} \tag{41}$$

Pela equação 41, a anomalia verdadeira pode ser encontrada sem ambiguidade de quadrante, visto que se trata da tangente de meio ângulo.

Enquanto uma órbita elíptica tem energia relativa negativa, significando que os dois primários estão "ligados" gravitacionalmente, uma órbita hiperbólica possui energia relativa positiva, consistindo numa trajetória de escape do campo gravitacional de um planeta. No meio do caminho entre esses dois casos está a órbita parabólica, que possui energia relativa nula.

Em aplicações práticas, a órbita parabólica não é implementada, pois a velocidade relativa tende a zero na medida que a distância entre os primários tende ao infinito. No entanto, por ter energia relativa nula, ela é um importante resultado matemático, pois determina a **mínima energia para escapar da ação gravitacional de um planeta**, aplicando-se para estimar rapidamente o requisito de **combustível mínimo de uma missão interplanetária**.

Referências

[1] Howard D. Curtis. *Orbital Mechanics for Engineering Students.* Butterworth-Heinemann, New York, 2ª edition, 2010.

[2] Murray R. Spiegel, Seymour Lipschutz, and John Liu. *Mathematical Handbook of Formulas and Tables.* Schaum's Outline Series. Mc Graw Hill, New York, 3ª edition, 2009.

[3] A. TEWARI. *Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modelling and simulation with MATLAB and Simulink.* Birkhauser, Boston, 2007.