MECÂNICA DE VOO ESPACIAL - DEM 1119
Aula 4

Prof. André Luís da Silva

1 Introdução

Tópicos da aula:

- Equação de Órbita: Geometria das trajetórias do problema de 2 corpos;
- Órbitas elíptica, parabólica e hiperbólica;
- Decomposição da velocidade nas direções horizontal e radial.

Referência da aula: [1]: TEWARI, A. Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modelling and simulation with MATLAB and Simulink. Boston: Birkhauser, 2007.

A aula anterior desenvolveu as 6 integrais do movimento relativo no problema de 2 corpos. Foram discutidas propriedades gerais de tais soluções, mas a sua forma matemática não foi apresentada. Esta aula trata da determinação da geometria destas trajetórias.

2 Equação de Órbita: Geometria das Soluções do Problema de Dois Corpos

Na aula anterior, definiu-se o vetor $\mu\mathbf{e}$, o qual é uma integral do movimento. Esse vetor é constante no espaço inercial e está contido no plano da órbita.

Para determinar a geometria das soluções, o primeiro passo é calcular o produto escalar entre o vetor $\mu\mathbf{e}$ e a posição $\mathbf{r}$. Isso vai fornecer a projeção do vetor posição sobre a direção inercial definida por $\mathbf{e}$:

$$\mu\mathbf{e}\cdot\mathbf{r} = \left(\mathbf{v}\times\mathbf{h} - \mu\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\cdot\mathbf{r} = \mathbf{v}\times\mathbf{h}\cdot\mathbf{r} - \mu\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{v}\times\mathbf{h}\cdot\mathbf{r} - \mu\frac{r^2}{r} \tag{1}$$

Pela propriedade de comutatividade do produto misto: $\mathbf{v}\times\mathbf{h}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{r}\times\mathbf{v}\cdot\mathbf{h} = \mathbf{h}\cdot\mathbf{h} = h^2$, então:

$$\mu\mathbf{e}\cdot\mathbf{r} = h^2 - \mu r \tag{2}$$

Ou:

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{r} + r = \frac{h^2}{\mu} \tag{3}$$

O lado direito da equação 3 é a constante "*parâmetro*" definida na aula anterior: $p = h^2/\mu$, assim:

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{r} + r = p \tag{4}$$

Como mencionado acima, o vetor $\mathbf{e}$ define uma direção de referência no plano orbital. Isto é ilustrado na figura 1, a qual também mostra os vetores velocidade e posição.

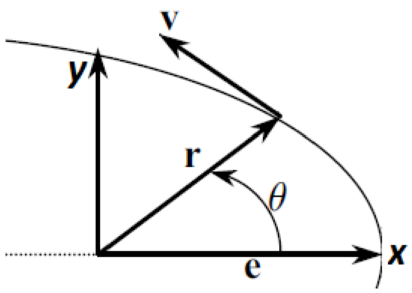

Figura 1: Sistema de referência no plano da órbita. Adaptado de [1].

Como a trajetória é plana, ela pode ser representada em um sistema de coordenadas polares, definido da seguinte maneira, segundo a representação da figura 1:

- A origem é a partícula de massa m_1, a partir da qual a posição da partícula m_2 é medida;
- O eixo das abcissas está alinhado com o vetor $\mathbf{e}$;
- O ângulo polar θ é aquele formado entre os vetores posição $\mathbf{r}$ e excentricidade $\mathbf{e}$;
- A distância radial r é a magnitude do vetor posição.

Pela definição das coordenadas polares, a equação 4 é escrita como:

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{r} + r = |\mathbf{e}||\mathbf{r}| \cos\theta + r = er\cos\theta + r = r(e\cos\theta + 1) = p$$

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \tag{5}$$

A equação 5 define a **geometria das trajetórias em coordenadas polares**, onde e e p são constantes associadas. Como visto na aula passada, o parâmetro p tem dimensão de comprimento e é sempre positivo. A excentricidade e é adimensional.

Como avaliado na aula anterior, a excentricidade tem relação com as trajetórias serem limitadas ($0 \leq e < 1$) ou de escape ($e \geq 1$). Assim, espera-se que a equação 5 expresse órbitas fechadas no primeiro caso e trajetórias "abertas" no segundo.

Devido ao seu significado e consequências, a equação 5 é muito importante, sendo chamada de **equação de órbita**. Qualquer trajetória do problema de dois corpos deve satisfazê-la. As variáveis que caracterizam a trajetória são a distância r entre os primários e o ângulo θ, o qual é definido como a **anomalia verdadeira**.

Para entender melhor a equação 5 e as trajetórias que ela especifica, pode-se fazer um programa que calcule r em função de θ, para $0 \geq \theta \geq \pi$. Para isso, é adotado um valor pré definido de p (que só afeta o "tamanho" da trajetória e não o seu formato) e alguns valores representativos da excentricidade e. Os pontos gerados são expressos em gráficos de coordenadas polares.

O procedimento acima foi feito utilizando o MATLAB, para $p = 1$ e: $e = 0$, $e = 0,5$, $e = 1$, $e = 1,2$. Isto resultou nos gráficos da figura 2.

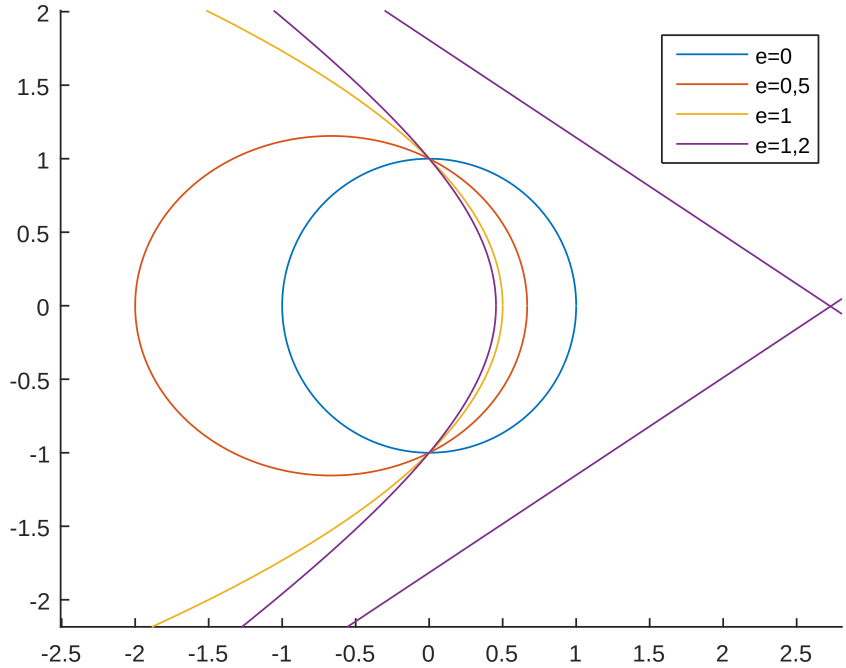

Figura 2: Quatro soluções da equação de órbita para $p = 1$ e $e = 0,\ 0,5,\ 1$ e $1,2$.

A inspeção visual e a mensuração dos parâmetros das curvas da figura 2 mostra que elas são figuras geométricas dos seguintes tipos: $e = 0$: **circunferência**; $e = 0,5$: **elipse**; $e = 1$: **parábola**; $e = 1,2$: **hipérbole**.

Os resultados das figura 2 não ocorreram à toa, pois a equação 5 é a forma polar da equação paramétrica das seções cônicas. Assim, verifica-se, que **as órbitas resultantes do problema de dois corpos são cônicas**:

- circunferência: $e = 0$;
- elipse: $0 < e < 1$;
- parábola: $e = 1$;

- hipérbole: $e > 1$.

A seguir, as geometrias de órbita apresentadas acima são aprofundadas. As figuras 3, 4 e 5 parametrizam as órbitas do tipo elíptica, parabólica e hiperbólica, respectivamente.

3 Órbita Elíptica

A figura 3 mostra uma órbita elíptica genérica. O eixo x do sistema de referência é alinhado com o vetor excentricidade $\mathbf{e}$. A origem é coincidente com um dos focos, que coincide com o corpo de massa m_1.

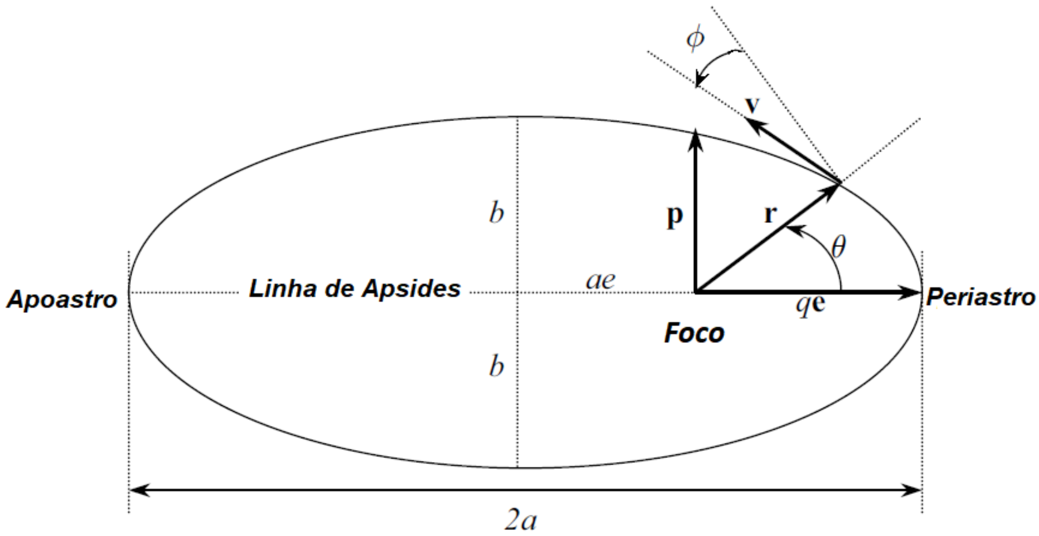

Figura 3: Geometria de órbita eliptica. Adaptado de [1].

Na órbita elíptica, a menor distância ao foco é chamada de ***periastro***[1], sendo medido ao longo do eixo x. A maior distância até o foco é chamada de ***apoastro***[2], também medida ao longo do eixo x. A linha que une estes dois extremos é chamada de ***linha de apsides***.

As distâncias de periastro r_p e apoastro r_a são calculadas pela equação de órbita quando $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, respectivamente, sendo válidas somente quando $e < 1$.

$$r_p = \frac{p}{1+e} \tag{6}$$

$$r_a = \frac{p}{1-e} \tag{7}$$

Conforme visto na aula anterior, o *parâmetro* p e a constante a estão relacionados por $p = (1-e^2)a$. Assim, o periastro e o apoastro também podem ser escritos como:

$$r_p = \frac{(1-e^2)a}{1+e} = \frac{(1-e)(1+e)}{1+e}a$$

[1]Perigeu para o caso de órbitas ao redor da Terra.
[2]Apogeu para o caso de órbitas ao redor da Terra.

$$r_p = (1-e)a \tag{8}$$

$$r_a = \frac{(1-e^2)a}{1-e} = \frac{(1-e)(1+e)}{1-e}a$$

$$r_a = (1+e)a \tag{9}$$

As equações 8 e 9 são válidas para $a > 0$, pois essa condição é necessária para obter-se uma órbita elíptica.

Somando-se as equações 8 e 9, verifica-se que a constante a é o ***semieixo maior da elipse***, o qual, por definição, é a metade da distância entre os apsides:

$$r_p + r_a = 2a \quad \text{ou} \quad a = \frac{r_p + r_a}{2} \tag{10}$$

Outra propriedade geométrica importante de uma órbita elíptica é obtida fazendo-se $\theta = \pi/2$ na equação de órbita. O resultado obtido é $r = p$. Então, como a figura 3 ilustra, o ***parâmetro*** p é a *distância normal da linha dos apsides até a trajetória medida a partir do foco.*

A interpretação geométrica do *parâmetro* pode ser descrita pela definição de um $\mathbf{p}$, que tem direção normal ao vetor $\mathbf{e}$, sentido positivo "para cima" (eixo y positivo) e módulo igual a p, como ilustrado na figura 3). Definindo $\mathbf{i}_p$ como um vetor unitário com essas características, tem-se:

$$\mathbf{p} = p\mathbf{i}_p \tag{11}$$

O vetor unitário $\mathbf{i}_p$ é normal a $\mathbf{e}$ e $\mathbf{h}$, podendo ser calculado pelo produto vetorial:

$$\mathbf{i}_p = \frac{\mathbf{h} \times \mathbf{e}}{||\mathbf{h} \times \mathbf{e}||} = \frac{\mathbf{h} \times \mathbf{e}}{||\mathbf{h}||.||\mathbf{e}||}$$

$$\mathbf{i}_p = \frac{\mathbf{h} \times \mathbf{e}}{he} \tag{12}$$

Assim, a tríade $\mathbf{e}$, $\mathbf{p}$ e $\mathbf{h}$ é mutuamente ortogonal e gera um sistema de eixos inerciais. Ele é chamado ***referencial perifocal*** e possui as seguintes características:

- A origem coincide com o corpo m_1;
- Os vetores $\mathbf{e}$ e $\mathbf{p}$ estão contidos no plano da órbita;
- O vetor $\mathbf{h}$ é normal ao plano orbital.

Da mesma forma que $\mathbf{p}$ é um vetor que aponta desde o foco até a órbita, em sentido normal à linha de apsides, é importante definir um vetor que aponta desde o foco até a órbita ao longo da linha de apsides, ou seja, um vetor desde o foco até o periastro. Como mostra a figura 3, ele é dado por $q\mathbf{e}$, de tal forma que $qe = r_p$. Assim, da equação 8, tem-se que:

$$qe = (1 - e)a$$

$$q = \left(\frac{1}{e} - 1\right) a \tag{13}$$

4 Órbita Parabólica

A figura 4 ilustra uma órbita parabólica ($e = 1$), cujas propriedades geométricas são detalhadas na sequência.

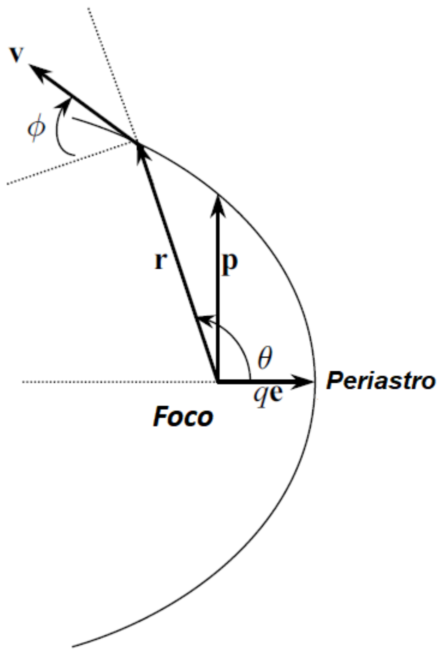

Figura 4: Geometria de trajetória Parabólica. Adaptado de [1].

O periastro da órbita parabólica é definido da mesma forma que no caso elíptico, ocorrendo para $\theta = 0$. Assim, da equação de órbita com $e = 1$:

$$r_p = \frac{p}{1 + 1\cos 0} = \frac{p}{1+1}$$

$$r_p = \frac{p}{2} \tag{14}$$

Como a órbita parabólica é de escape, o apoastro é indefinido.

A constante q associada ao apoastro da órbita parabólica é bastante simples: $qe = r_p \;\; \rightarrow$ $q = \frac{p}{2}$. A síntese dessa geometria simples é evidente na figura 4.

5 Órbita Hiperbólica

A figura 5 ilustra uma trajetória hiperbólica ($e > 1$), apontando seus parâmetros geométricos.

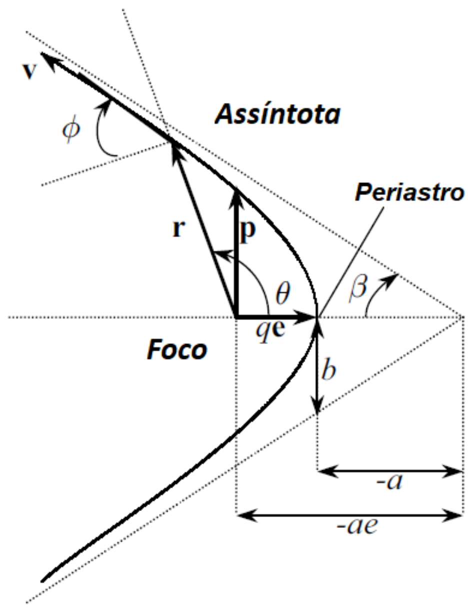

Figura 5: Geometria de trajetória hiperbólica. Adaptado de [1].

O periastro da órbita hiperbólica é definido da mesma forma que nos casos anteriores, ocorrendo para $\theta = 0$:

$$r_p = \frac{p}{1 + e\cos 0} = \frac{(1-e^2)a}{1+e} = \frac{(1-e)(1+e)a}{1+e} = (1-e)a$$

$$r_p = -a(e-1) \tag{15}$$

Na equação 15, o sinal negativo foi enfatizado porque o semieixo maior é negativo na órbita hiperbólica.

Como a órbita hiperbólica é de escape, o apoastro é indefinido.

A constante q é dada da mesma forma que no caso elíptico, 13, mas com $e > 1$ e $a < 0$, por isso o sinal negativo é enfatizado abaixo.

$$q = -a\left(1 - \frac{1}{e}\right) \tag{16}$$

6 Decomposição do Vetor Velocidade

Outra característica geométrica importante do problema de dois corpos é a decomposição do vetor velocidade. Como ilustrado na figura 6, a velocidade é escrita em um sistema de referência girante que se move junto com a órbita. A origem deste sistema móvel é a posição atual do corpo m_2, as direções são dadas pelos vetores unitários $\mathbf{i}_r$ e $\mathbf{i}_\theta$ contidos no plano da órbita.

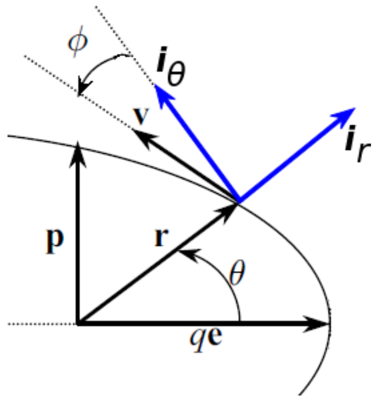

Figura 6: Referencial horizontal local e radial.

O vetor unitário $\mathbf{i}_r$ é a direção radial. O vetor unitário $\mathbf{i}_\theta$ aponta na direção progressiva da órbita, sendo normal a $\mathbf{i}_r$.

O sistema de referência definido na figura 6 está tracejado nas figuras 3, 4 e 5, evidenciando como tais definições se manifestam em cada tipo de órbita.

O eixo $\mathbf{i}_\theta$ representa o ***horizonte local***, pois este, por definição, é perpendicular ao vetor radial que aponta a partir do corpo m_1. Em função disso, o ângulo ϕ entre o vetor velocidade e o horizonte local é chamado de ***ângulo de trajetória***, como indicado na figura 6.

O ângulo de trajetória ϕ é positivo quando o vetor velocidade encontra-se "acima" do horizonte local, como ilustrado nas figuras 4 e 5.

Segundo a figura 6, a decomposição da velocidade sobre os eixos horizontal local e radial é:

$$\mathbf{v} = v\cos\phi\mathbf{i}_\theta + v\sin\phi\mathbf{i}_r \tag{17}$$

Para encontrar uma expressão para o ângulo ϕ, parte-se da definição de $\mathbf{h}$:

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = r\mathbf{i}_r \times (v\cos\phi\mathbf{i}_\theta + v\sin\phi\mathbf{i}_r)$$

$$\mathbf{h} = rv\cos\phi\mathbf{i}_h \quad \text{ou} \quad h = rv\cos\phi \tag{18}$$

Substituindo-se r dado pela equação de órbita na expressão de h dada em 18:

$$h = \frac{pv\cos(\phi)}{1 + e\cos\theta}$$

$$\cos(\phi) = \frac{h(1 + e\cos\theta)}{pv} \tag{19}$$

Substituindo a definição de $p = h^2/\mu$:

$$\cos(\phi) = \frac{\mu(1 + e\cos\theta)}{hv} \tag{20}$$

Além disso, por definição, a velocidade radial é dada por:

$$v \sin \phi = \dot{r} \tag{21}$$

Derivando r pela equação de órbita e substituindo na equação 21:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{p}{1 + e \cos \theta} = p \frac{d}{dt} \frac{1}{1 + e \cos \theta} = p \frac{-\left(-\dot{\theta} e \sin \theta\right)}{(1 + \cos \theta)^2}$$

$$v \sin \phi = \frac{pe \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} \dot{\theta} \tag{22}$$

Da aula anterior, $\dot{\theta}$ está relacionado com o módulo de $\mathbf{h}$: $h = r^2 \dot{\theta}$, ou seja: $\dot{\theta} = h/r^2$. Usando este resultado e substituindo r pela equação de órbita:

$$v \sin \phi = \frac{pe \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} \frac{h}{r^2} = \frac{pe \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} h \frac{(1 + e \cos \theta)^2}{p^2} = \frac{he \sin \theta}{p} \tag{23}$$

Substituindo $p = h^2/\mu$:

$$v \sin \phi = he \sin \theta \frac{\mu}{h^2} = \frac{\mu e \sin \theta}{h}$$

$$\sin \phi = \frac{\mu e \sin \theta}{hv} \tag{24}$$

As equações 20 e 24 fornecem o ângulo ϕ sem ambiguidade, pela consulta dos sinais do seno e do cosseno. Mas pode-se obter o mesmo resultado de modo mais simples. Dividindo-se a equação 24 pela 20:

$$\tan \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{\mu e \sin \theta}{hv} \frac{hv}{\mu(1 + e \cos \theta)}$$

$$\tan \phi = \frac{e \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \tag{25}$$

Não há ambiguidade no cálculo de ϕ pela tangente, pois $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$.

Referências

[1] A. TEWARI. *Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modelling and simulation with MATLAB and Simulink*. Birkhauser, Boston, 2007.