

MECÂNICA DE VOO ESPACIAL - DEM 1119

Aula 9

Prof. André Luís da Silva

1 Introdução

Manobras Orbitais:

- Manobra Mono-impulsiva;
- Manobra coplanar, manobra de mudança de Inclinação.

Referência da aula:

TEWARI, A. Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modelling and simulation with MATLAB and Simulink. Boston: Birkhauser, 2007.

Seção 5.5.

As aulas 4 a 7 trataram do problema de dois corpos, desde sua concepção teórica, a partir do problema de N-corpos, até as soluções do mesmo, consistindo de movimento elíptico, parabólico ou hiperbólico. Foram apresentados importantes resultados, tais como a equação de órbita e os métodos de propagação de órbita.

As aulas 8 e 9 trataram de aspectos gerais de mecânica orbital, onde foram introduzidos os parâmetros orbitais associados ao problema de dois corpos, mas também foram realizadas definições gerais de referenciais, válidas para qualquer estudo, seja de inserção em órbita, ou de problemas de órbitas perturbadas. Também foram apresentadas importantes parametrizações do voo orbital no problema de dois corpos, bem como um algoritmo de determinação de órbita, a partir da leitura de velocidade e posição inerciais.

Nesta aula, é iniciado o assunto de manobras orbitais, a partir das órbitas relativas de dois corpos. Será considerado um caso clássico relativamente simples: manobras mono-impulsivas, dentro das quais se enquadram a manobra de mudança de inclinação, ou de “levantamento” ou “abaixamento” da órbita.

2 Mecânica Orbital - Manobras

Manobras orbitais são eventos de transição de velocidade, e conseqüentemente trajetória, executados por um veículo espacial (VE).

Para o estudo de manobras orbitais, considera-se uma trajetória ideal do VE em torno de um primário idealmente esférico, ou seja, desprezam-se os efeitos de terceiro corpo ou superior, bem como de achatamento dos pólos, de modo que a órbita seja uma elipse, parábola ou hipérbole, como estudado em aulas anteriores. Também desprezam-se efeitos perturbativos tais como arrasto atmosférico ou vento solar.

Assume-se a realização de **manobras impulsivas**, que são obtidas por meio de um propulsor ideal, o qual consegue imprimir um pulso de tração em um tempo muito pequeno em relação ao período orbital, de modo que possa ser considerado instantâneo. Estas são as manobras mais simples do ponto de vista analítico.

Para órbitas elípticas, o período orbital é dado por $P = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$. Órbitas de escape (parábola ou hipérbole) não possuem período, mas o tempo de referência $T = 2\pi\sqrt{\frac{p^3}{\mu}}$.

A figura 1 ilustra o processo de uma manobra impulsiva. Em certo ponto da órbita, o propulsor é disparado num tempo muito pequeno, de modo que, após seu desligamento, a velocidade foi alterada por meio de um certo $\Delta\mathbf{v}$, que é chamado de **impulso de velocidade**. Como o tempo de disparo é muito curto, ignora-se a variação de anomalia verdadeira (posição) durante o processo, de modo que o ponto inicial e final da manobra sejam os mesmos.

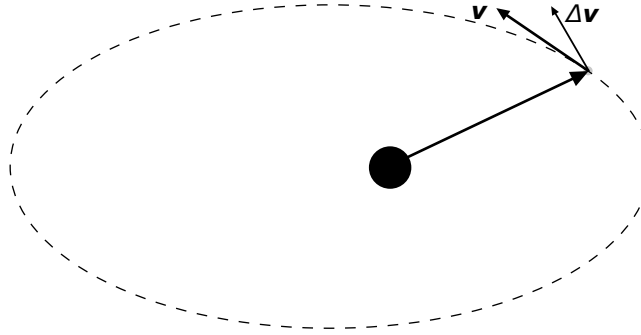


Figura 1: Ilustração de um impulso de velocidade $\Delta\mathbf{v}$.

Para se ter uma noção da ordem e grandeza de um tempo de disparo de propulsor em uma manobra impulsiva, considere uma órbita circular terrestre com altitude de $h = 300km$. O semi eixo maior é: $a = R_e + h = 6.378.137 + 300.000 = 6.678.137$ m. Então o período orbital é:

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} = 2\pi\sqrt{\frac{6.678.137^3}{3,986 \times 10^{14}}} = 5.341,18 \text{ s, ou } P = 90,52 \text{ min}$$

Supondo que um VE nesta órbita dispare um propulsor por $\Delta t = 30$ s, este tempo corresponde à seguinte fração do período orbital: $\frac{\Delta t}{P} = \frac{30}{5.341,18} = 0,005616$ ou $\Delta t = 0,5616\%P$. Intuitivamente, este parece um valor pequeno quando comparado ao período orbital. Para se ter mais uma base de comparação, calcula-se a variação de anomalia verdadeira durante o processo:

$$\Delta\theta = \Delta t n = \Delta t \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = 30 \sqrt{\frac{3,986 \times 10^{14}}{6.678.137^3}} = 0,03529 \text{ rad, ou } 1,011^\circ$$

Este valor de $\Delta\theta \approx 1^\circ$ pode ser visto como pequeno ou grande, dependendo da precisão almejada. Se os erros fossem intoleráveis, o propulsor poderia ser ajustado para realizar o disparo em um tempo menor. Por exemplo, se o tempo fosse $\Delta t = 3\text{ s}$, a variação de anomalia verdadeira já seria $\Delta\theta \approx 0,1^\circ$.

A fundamentação das manobras impulsivas se encontra no princípio do impulso-quantidade de movimento:

$$\int_{t_i}^{t_f} \sum \mathbf{f}(t) dt = m_f \mathbf{v}_f - m_i \mathbf{v}_i \quad (1)$$

Supondo que as forças atuantes durante o intervalo $\Delta t = t_f - t_i$ sejam a gravidade \mathbf{f}_g e a tração \mathbf{f}_T :

$$\int_{t_i}^{t_f} \sum \mathbf{f}(t) dt = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{f}_g(t) dt + \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{f}_T(t) dt \quad (2)$$

Se o tempo de disparo Δt for suficientemente pequeno, considera-se que o impulso provocado pela força propulsiva é muito maior que aquele causado pela gravitacional:

$$\left\| \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{f}_T(t) dt \right\| \gg \left\| \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{f}_g(t) dt \right\| \quad (3)$$

3 Manobras Mono Impulsivas

O tipo mais simples de manobra impulsiva é a **mono impulsiva**. Ela pode ser produzida por variação tanto de direção quanto magnitude da velocidade, como indicado na figura 2. Nela estão representadas: a velocidade inicial \mathbf{v}_i ; velocidade final \mathbf{v}_f ; impulso de velocidade $\Delta\mathbf{v}$; ângulo β entre o impulso $\Delta\mathbf{v}$ e a velocidade inicial; ângulo α entre a velocidade final e inicial.

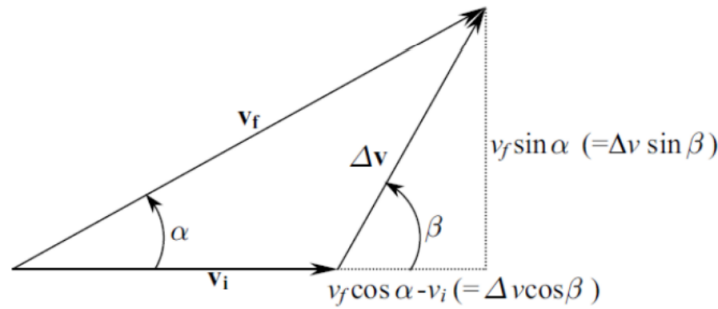


Figura 2: Ângulos entre as velocidade inicial e final. Fonte: ref. [1].

A análise de uma manobra mono impulsiva é facilitada pela hipótese de tempo de disparo muito curto:

- A manobra inicia quando o propulsor é ligado. Neste momento, a posição é \mathbf{r}_i ;
- Ao final do disparo do propulsor, a posição do VE é \mathbf{r}_i ;

- Para uma mudança de velocidade quase instantânea, assume-se que a posição inicial são praticamente as mesmas, de modo que **as órbitas inicial e final interceptam-se no ponto de manobra**.

Fisicamente, a variação de direção da velocidade é obtida alinhando-se o propulsor por meio de um ângulo β em relação ao vetor velocidade inicial. Como a maioria dos VEs possuem o propulsor alinhado com um eixo de referência que passa pelo centro de massa, rigidamente fixado com respeito a sua estrutura, este alinhamento da tração é obtido por meio de uma **manobra de atitude** que rotaciona o veículo como um todo.

Para realização de uma manobra mono impulsiva, é necessário determinar tanto o ângulo β de disparo do propulsor, quanto a magnitude $\Delta v = \|\Delta \mathbf{v}\|$ do impulso de velocidade. A partir destas informações, primeiro o controle de atitude propicia o apontamento correto e, a seguir, a magnitude do impulso de velocidade é obtida pelo tempo de disparo do propulsor (que geralmente possui tração constante).

As variações de magnitude e direção de velocidade durante a manobra estão associadas à mudança de duas propriedades distintas da órbita:

- A variação de magnitude pode alterar o formato da órbita;
- A variação de direção pode alterar o formato da órbita ou mesmo seu plano.

Assim, *numa manobra mono impulsiva genérica, pode-se alterar tanto a geometria quanto a inclinação da órbita*. Quando somente o formato da órbita é alterado, a manobra é dita coplanar.

A partir da figura 2, aplicando-se a lei dos cossenos, verifica-se que a magnitude do impulso de velocidade é obtida a partir da condição inicial $v_i = \|\mathbf{v}_i\|$ e dos requisitos α e $v_f = \|\mathbf{v}_f\|$ (que são determinados a partir da nova órbita desejada):

$$\Delta v = \sqrt{v_i^2 + v_f^2 - 2v_i v_f \cos \alpha} \quad (4)$$

A partir da figura 2, a relação entre os ângulos α e β é dada por:

$$\tan \beta = \frac{v_f \sin \alpha}{v_f \cos \alpha - v_i} \quad (5)$$

Em uma **manobra coplanar**, pode-se ocorrer mudança simultânea da magnitude da velocidade e ângulo de trajetória. A alteração de magnitude é dada pela equação 4. A mudança de ângulo de trajetória é o próprio ângulo α : $\Delta \phi = \alpha$.

Quando a forma da órbita é preservada mas seu plano é alterado, trata-se de uma **manobra de mudança de inclinação**. Neste caso, a magnitude da velocidade e o ângulo de trajetória não são alterados. O ângulo α será a variação de inclinação.

A figura 3 ilustra a relação entre as velocidades numa manobra de mudança de plano com manutenção de seu formato.

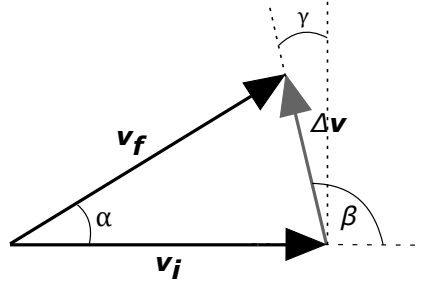


Figura 3: Ângulos entre as velocidade inicial e final com magnitude constante.

A relação 4 pode ser desenvolvida de modo a encontrar o impulso de velocidade necessário:

$$\Delta v = \sqrt{v_i^2 + v_i^2 - 2v_i v_i \cos \alpha} = \sqrt{2v_i^2(1 - \cos \alpha)} = v_i \sqrt{2(1 - \cos \alpha)}$$

Pela fórmula do seno de meio arco para $0 \leq \alpha/s \leq \pi$ (que é o caso): $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$. Então:

$$\Delta v = v_i \sqrt{4 \frac{1 - \cos \alpha}{2}} = 2v_i \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\Delta v = 2v_i \sin \frac{\alpha}{2}, \text{ mudança de inclinação sem alteração de forma} \quad (6)$$

Na manobra de mudança de plano, o ângulo α é definido por requisito, a partir da alteração de inclinação desejada. Mas a manobra é efetuada em termos do ângulo β , que precisa ser fornecido como referência para o controle de atitude. este ângulo é determinado a partir da figura 3 e equação 6:

$$\begin{aligned} v_f \sin \alpha &= \Delta v \cos \gamma = 2v_i \sin \frac{\alpha}{2} \cos \gamma \\ v_i &= v_f \rightarrow \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \gamma \end{aligned}$$

Como $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$, a relação acima implica que: $\gamma = \frac{\alpha}{2}$. Assim, o ângulo β necessário é:

$$\beta = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} \quad (7)$$

Para promover a mudança de inclinação sem alteração do formato da órbita, o **impulso de velocidade** $\Delta \mathbf{v}$ deve estar contido num plano **normal à órbita inicial**.

A equação 6 mostra que o impulso de velocidade requerido para a mudança de plano orbital é proporcional à velocidade. Por isso, tais manobras costumam ser feitas **no ponto de menor velocidade possível**, ou seja, no *apoastro*.

Quando uma manobra de mudança de inclinação requerer um alto impulso de velocidade, ela vai necessitar de uma **grande massa de propelente**. Por isso, tais manobras devem ser **evitadas**.

Para ilustrar o método de manobra mono impulsiva, segue o exemplo 5.6 da referência [1]. Nele, são ilustrados os dois tipos de manobra citadas acima: coplanar (com mudança de forma), mudança de inclinação.

3.1 Exemplo 5.6

Enunciado: um veículo espacial em uma órbita terrestre de altitude 500 km, com inclinação de 10° , deve ser enviado para uma órbita elíptica com altitudes de perigeu de 200km e apogeu de 700km, bem como inclinação de 5° . Calcule a magnitude dos impulsos de velocidade requeridos para a transferência.

Solução:

Dados e informações gerais:

- Raio equatorial terrestre: $R_e = 6.378,137 \text{ km}$;
- Constante gravitacional da Terra: $\mu = 3,986 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$;
- Altitude da órbita inicial: $h_i = 500 \text{ km}$;
- Inclinação da órbita inicial: $i_i = 10^\circ$;
- Altitude de perigeu da órbita final: $h_{pf} = 200 \text{ km}$;
- Altitude de apogeu da órbita final: $h_{af} = 700 \text{ km}$;
- Inclinação da órbita final: $i_f = 5^\circ$.

Cálculos básicos:

- Distância radial da órbita inicial: $r_i = R_e + h_i = 6.378,137 \text{ km} + 500 \text{ km}$, $r_i = 6,878137 \times 10^6 \text{ m}$;
- Distância radial de perigeu da órbita final: $r_{pf} = R_e + h_{pf} = 6.378,137 \text{ km} + 200 \text{ km}$, $r_{pf} = 6,578137 \times 10^6 \text{ m}$;
- Distância radial de apogeu da órbita final: $r_{af} = R_e + h_{af} = 6.378,137 \text{ km} + 700 \text{ km}$, $r_{af} = 7,078137 \times 10^6 \text{ m}$.

A transferência requerida pode ser realizada por meio de duas manobras mono impulsivas:

- 1º impulso: obtenção da órbita elíptica;
- 2º impulso: realização da mudança de inclinação.

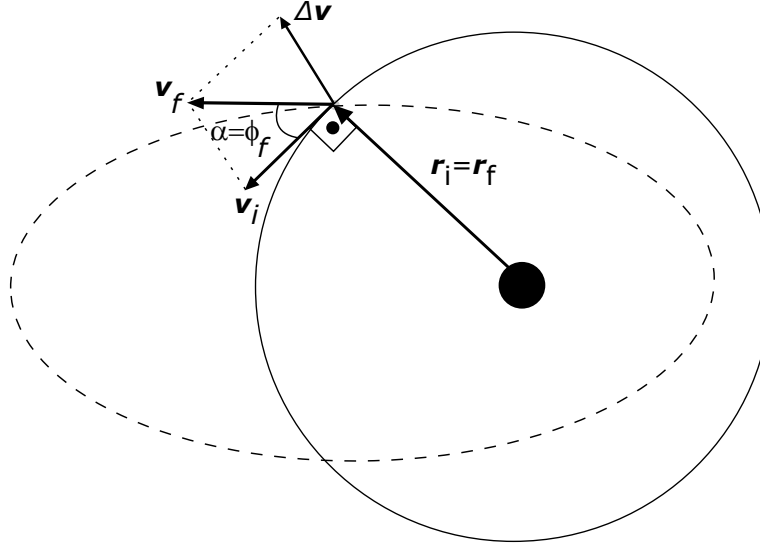


Figura 4: Ilustração da manobra mono impulsiva: geração de órbita elíptica a partir de circular.

O segundo impulso deve ser aplicado no apogeu da órbita elíptica, para minimizar a quantidade de propelente requerida.

Primeiro Impulso de Velocidade:

Como a órbita inicial é circular, o primeiro impulso de velocidade pode ser aplicado em qualquer ponto da mesma. Se ele for tangente à trajetória, ou seja, na mesma direção da velocidade inicial, o local de aplicação será o perigeu da nova órbita. Mas, a altitude de perigeu requerida é diferente da altitude da órbita circular, portanto, o primeiro impulso não pode ser tangente à trajetória, é necessário aplicá-lo com certo ângulo β .

Como mostrado na figura 2, o ângulo β está relacionado com α , que é formado entre as velocidades inicial e final. Ele pode ser determinado com a ajuda da figura 4.

Nesta situação específica em que a órbita inicial é circular, o ângulo de trajetória inicial, em qualquer ponto da órbita, é zero. Portanto, o ângulo α é igual ao ângulo de trajetória da nova órbita no ponto de manobra: $\phi_f = \alpha$.

O ângulo de trajetória da nova órbita, no ponto de manobra, deve ser compatível com a órbita desejada. Na aula 5, foram estudadas várias relações entre velocidade, posição e ângulo de trajetória em uma órbita relativa de 2 corpos. Uma delas é a equação 18 reproduzida abaixo:

$$h = rv \cos \phi \quad (8)$$

Na equação 8, para encontrar ϕ , é necessário determinar: $h = h_f$ da nova órbita, $r = r_f$ e $v = v_f$ da nova órbita no ponto de manobra.

Como as órbitas inicial e final se interceptam no ponto de manobra, $r_f = r_i$. A velocidade da órbita resultante no ponto de manobra é obtida pela equação de energia da aula 4:

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu}$$

$$v = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} \quad (9)$$

O semi eixo maior a_f da órbita resultante é determinado pelas distâncias radiais de apogeu e perigeu:

$$a_f = \frac{r_{pf} + r_{af}}{2} = \frac{6,578137 \times 10^6 + 7,078137 \times 10^6}{2}, \quad a_f = 6,828137 \times 10^6 \text{ m}$$

Substituindo a_f , r_f e μ na equação 9, obtém-se a magnitude da velocidade da nova órbita no ponto de manobra:

$$v_f = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_f} - \frac{1}{a_f} \right)} = \sqrt{3,986 \times 10^{14} \left(\frac{2}{6,878137 \times 10^6} - \frac{1}{6,828137 \times 10^6} \right)}$$

$$v_f = 7,58468 \times 10^3 \text{ m/s}$$

Para resolver a equação 8 e encontrar ϕ , falta determinar a quantidade de movimento angular h_f da órbita resultante. Ela pode ser calculada pela relação: $p = \frac{h^2}{\mu}$ (aula 4). O valor de p na órbita resultante é dado por: $p = r_a(1 - e)$ (aula 5). Sendo a excentricidade dada por: $e = \frac{r_a}{a} - 1$. Assim:

$$e_f = \frac{r_{af}}{a_f} - 1 = \frac{7,078137 \times 10^6}{6,828137 \times 10^6} - 1, \quad e_f = 0,036613$$

$$p_f = r_{af}(1 - e_f) = 7,078137 \times 10^6(1 - 0,036613), \quad p_f = 6,818987 \times 10^6 \text{ m}$$

$$h_f = \sqrt{p_f \mu} = \sqrt{6,818987 \times 10^6 \times 3,986 \times 10^{14}}, \quad h_f = 52,134904 \times 10^9 \text{ m}^2/\text{s}$$

Assim, o ângulo de trajetória da órbita resultante no ponto de manobra é:

$$\cos \phi_f = \frac{h_f}{r_f v_f} = \frac{52,134904 \times 10^9}{6,878137 \times 10^6 \times 7,58468 \times 10^3} = 0,999356621, \quad \phi_f = \pm 2,055391^\circ$$

Quaisquer dos valores de ϕ vai gerar uma órbita resultante com as características solicitadas. Ou seja, as soluções de α são: $\alpha = \pm 2,055391^\circ$.

A magnitude do primeiro impulso de velocidade é calculada pela equação 4, basta substituir v_i , v_f e α . O valor de v_i não foi informado no enunciado, mas é obtido pela equação de energia 9.

$$v_i = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_i} - \frac{1}{a_i} \right)} = \sqrt{3,986 \times 10^{14} \left(\frac{2}{6,878137 \times 10^6} - \frac{1}{6,878137 \times 10^6} \right)}$$

$$v_i = 7,6126 \times 10^3 \text{ m/s}$$

$$\Delta v = \sqrt{v_i^2 + v_f^2 - 2v_i v_f \cos \alpha}$$

$$\Delta v = \sqrt{(7,6126 \times 10^3)^2 + (7,58468 \times 10^3)^2 - 2 \times 7,6126 \times 10^3 \times 7,58468 \times 10^3 \times 0,999357}$$

$$\Delta v = 273,28 \text{ m/s}$$

O ângulo entre a velocidade inicial e o primeiro impulso de velocidade é dado pela equação 5:

$$\tan \beta = \frac{v_f \sin \alpha}{v_f \cos \alpha - v_i} = \frac{7,58468 \times 10^3 \sin(\pm 2,055391^\circ)}{7,58468 \times 10^3 \cos(\pm 2,055391^\circ) - 7,6126 \times 10^3} = \frac{\pm 272,029452}{-32,799825}$$

$$\beta = \mp 83,124757^\circ$$

O valor $\beta = 83,124757^\circ$ resulta em $\alpha = -2,055391^\circ$ e vice versa.

Segundo Impulso de Velocidade:

A variação requerida na inclinação da órbita é:

$$\Delta i = i_f - i_i = 10^\circ - 5^\circ = 5^\circ$$

A variação de inclinação é o ângulo α entre a velocidade final e a inicial no ponto de aplicação do segundo impulso de velocidade: $\alpha = \Delta i$, onde as condições sobre o vetor velocidade são:

- $\Delta \mathbf{v}$ perpendicular à órbita inicial;
- Magnitude da velocidade inalterada no ponto de manobra: $v_i = v_f$.

Para minimizar o impulso de velocidade, ele deve ser aplicado no apogeu da órbita, pois ele é proporcional à velocidade orbital (equação 6). Seu valor é:

$$\Delta v = 2v_i \sin \frac{\alpha}{2}$$

É necessário conhecer a velocidade de apogeu da órbita resultante da primeira manobra. Da equação 9:

$$v_i = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_{af}} - \frac{1}{a_f} \right)} = \sqrt{3,986 \times 10^{14} \times \left(\frac{2}{7,078137 \times 10^6} - \frac{1}{6,828137 \times 10^6} \right)}$$

$$v_i = 7.365,62 \text{ m/s}$$

Magnitude do segundo impulso de velocidade:

$$\Delta v = 2 \times 7.365,62 \sin \frac{5^\circ}{2}, \quad \Delta v = 642,57 \text{ m/s}$$

A direção do segundo impulso de velocidade, medida num plano normal ao da órbita é

(equação 7):

$$\beta = 90^\circ + 2,5^\circ, \quad \beta = 92,5^\circ \quad (10)$$

Conclusão:

- A magnitude do primeiro impulso de velocidade é: $\Delta v = 273,28 \text{ m/s}$;
- O ângulo do primeiro impulso de velocidade com respeito ao vetor velocidade, contido no plano da órbita, é: $\beta = \mp 83,124757^\circ$;
- A magnitude do segundo impulso de velocidade é: $\Delta v = 642,57 \text{ m/s}$;
- O ângulo do segundo impulso de velocidade com respeito ao vetor velocidade, contido em um plano normal ao plano da órbita inicial, é: $\beta = 92,5^\circ$.

Comentários:

- Neste exemplo, a magnitude do impulso de velocidade requerido para fazer a mudança de inclinação é mais que o dobro daquele necessário para a alteração de forma;
- Com a segunda manobra, garante-se que o ângulo entre os vetores velocidade da órbita inicial e final, no apogeu, é igual a diferença de inclinação pretendida. No entanto fica a pergunta: ele é realmente a diferença de inclinação entre as órbitas? Isso é respondido na próxima seção.

4 Mudança de Plano Genérica

A figura 5 apresenta mais detalhes sobre uma manobra de mudança de plano.

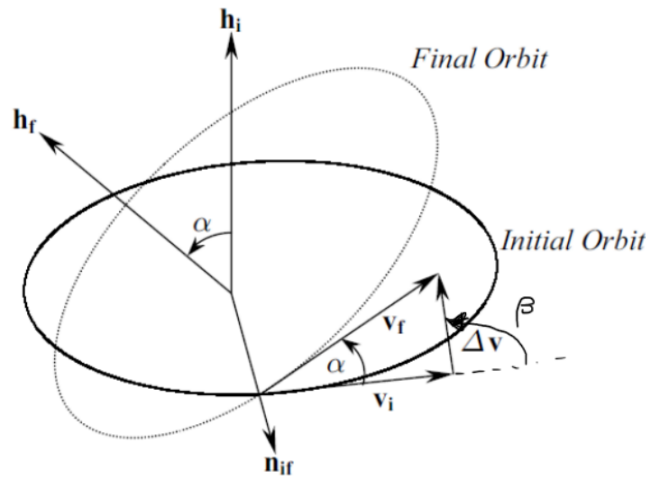


Figura 5: Ilustração de manobra de mudança de plano. Fonte: ref. [1]

Quando os planos orbitais inicial e final são definidos sem ambiguidade, em termos dos parâmetros Ω , i e ω , não é possível escolher arbitrariamente o ponto de mudança de plano.

Para uma mudança de plano genérica, é necessário esperar até que o VE atinja a **linha dos nodos formada pela intersecção dos dois planos orbitais**.

A figura 5 mostra a mudança de plano em função dos vetores quantidade de movimento angular específica inicial e final: \mathbf{h}_i e \mathbf{h}_f . O vetor nodal entre os dois planos, que define a linha onde está contido o ponto de aplicação do impulso de velocidade, é dado por:

$$\mathbf{n}_{if} = \frac{\mathbf{h}_i \times \mathbf{h}_f}{\|\mathbf{h}_i \times \mathbf{h}_f\|} \quad (11)$$

O vetor \mathbf{n}_{if} está contido nas órbitas inicial e final, pois é normal aos vetores \mathbf{h}_i e \mathbf{h}_f .

A manobra impulsiva é realizada em $\mathbf{r}_i = r_i \mathbf{n}_{if}$, sendo este o ponto no qual a velocidade inicial \mathbf{v}_i é calculada. O cosseno do ângulo α entre os dois planos é dado por:

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{h}_i \cdot \mathbf{h}_f}{h_i h_f} \quad (12)$$

A direção do impulso de velocidade em relação ao vetor velocidade inicial, como visto anteriormente, é dada por $\beta = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}$. Assim, em termos vetoriais, o impulso de velocidade é dado por:

$$\Delta \mathbf{v} = \Delta v \left(\cos \beta \frac{\mathbf{v}_i}{v_i} + \sin \beta \frac{\mathbf{h}_i}{h_i} \right) \quad (13)$$

$\Delta v \cos \beta \frac{\mathbf{v}_i}{v_i}$ é a componente de $\Delta \mathbf{v}$ na direção do vetor \mathbf{v}_i ; $\Delta v \sin \beta \frac{\mathbf{h}_i}{h_i}$ é a componente normal ao plano orbital inicial.

Para aplicar essas equações e conceitos, será desenvolvido o exemplo 5.7 da referência [1].

4.1 Exemplo 5.7

Enunciado: um veículo espacial em uma órbita terrestre elíptica, com $a = 6.900$ km, $e = 0,6$, $\Omega = 120^\circ$, $\omega = 25^\circ$ e $i = 10^\circ$. Quando o veículo está no apogeu, um impulso de velocidade é aplicado com um ângulo $\beta = 100^\circ$, relativo ao vetor velocidade, medido no sentido anti-horário em um plano normal à órbita inicial. A magnitude deste impulso é tal que não há alteração da magnitude da velocidade orbital. Determine a nova órbita do veículo espacial.

Solução:

O formato das órbitas inicial e final é o mesmo, pois:

- O impulso é aplicado em um plano normal à órbita inicial, significando que não há variação do ângulo de trajetória;
- Não há alteração da magnitude da velocidade;
- A manobra é impulsiva, de modo a distância radial no ponto de manobra não é alterada.

Então, os parâmetros da forma da órbita final são os mesmos: $a_f = 6.900$ km, $e_f = 0,6$.

A magnitude do impulso de velocidade requerido para não haver mudança de magnitude de velocidade é (equação 6):

$$\Delta v = 2v_i \sin \frac{\alpha}{2}$$

O ponto de manobra é o apogeu, então v_i é a velocidade de apogeu da órbita, calculada abaixo:

$$r_a = (1 + e)a = (1 + 0,6)6.900, \quad r_a = 11.040 \text{ km}$$

$$v_i = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_a} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{3,986 \times 10^{14} \times \left(\frac{2}{11,04 \times 10^6} - \frac{1}{6,9 \times 10^6} \right)}$$

$$v_i = 3.800,27 \text{ m/s}$$

O ângulo α no ponto de manobra é dado pela equação 7:

$$\beta = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} \rightarrow \frac{\alpha}{2} = \beta - \frac{\pi}{2} \quad \alpha = 2\beta - \pi$$

$$\alpha = 2 \times 100 - 180^\circ, \quad \alpha = 20^\circ$$

Então:

$$\Delta v = 2 \times 3.800,27 \sin \frac{20^\circ}{2}, \quad \Delta v = 1.319,82 \text{ m/s}$$

Para determinar os elementos orbitais da nova órbita, é preciso realizar cálculos vetoriais, os quais não serão feitos a mão, mas por um scrip em MATLAB. O roteiro de solução (algoritmo), é apresentado abaixo.

Vetores velocidade e posição no referencial perifocal da órbita inicial no ponto de manobra (apogeu):

$$\mathbf{v}_{p_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ -v_a \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{r}_{p_i} = \begin{bmatrix} -r_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Onde r_a e v_a são a distância radial e a velocidade de apogeu da órbita inicial.

Vetor quantidade de movimento angular específica da órbita inicial escrito o referencial

perifocal desta órbita:

$$\mathbf{h}_{p_i} = \mathbf{r}_{p_i} \times \mathbf{v}_{p_i} \quad (16)$$

Vetores velocidade e posição da órbita inicial no ponto de manobra escritos no referencial celeste:

$$\mathbf{v}_{c_i} = \mathbf{C}_c^p \mathbf{v}_{p_i} \quad (17)$$

$$\mathbf{r}_{c_i} = \mathbf{C}_c^p \mathbf{r}_{p_i} \quad (18)$$

Onde \mathbf{C}_c^p é a matriz de transformação de coordenadas do referencial perifocal da órbita inicial para o celeste, a qual é determinada pelos elementos orbitais da órbita inicial (que foram fornecidos).

Vetor quantidade de movimento angular específica da órbita inicial no referencial celeste:

$$\mathbf{h}_{c_i} = \mathbf{C}_c^p \mathbf{h}_{p_i} \quad (19)$$

Vetor impulso de velocidade escrito no referencial celeste (equação 13):

$$\Delta \mathbf{v}_c = \Delta v \left(\cos \beta \frac{\mathbf{v}_{c_i}}{v_i} + \sin \beta \frac{\mathbf{h}_{c_i}}{h_i} \right)$$

Vetor velocidade da nova órbita no ponto de manobra escrito no referencial celeste:

$$\mathbf{v}_{c_f} = \mathbf{v}_{c_i} + \Delta \mathbf{v}_c$$

Como as órbitas inicial e final se interceptam na manobra impulsiva, os vetores posição das órbitas inicial e final no ponto de manobra, são os mesmos:

$$\mathbf{r}_{c_i} = \mathbf{r}_{c_f} \quad (20)$$

De posse dos vetores velocidade e posição da órbita resultante, escritos no referencial celeste, os elementos orbitais da órbita resultantes são determinados com o algoritmo de determinação de órbita visto em aulas passadas.

Os ângulos da órbita resultante obtidos são:

- $\Omega_f = -14,509565^\circ$
- $i_f = 11,694221^\circ$
- $\omega_f = 158,772789^\circ$

Isso mostra que a diferença entre a inclinação das órbitas inicial e final é $\Delta i = i_f = i_i = 11,694221 - 10, \Delta i = 1,694^\circ$.

O Mesmo *script* pode ser usado para calcular o ângulo entre os vetores quantidade de movimento angular específica das órbitas inicial e final, que define a inclinação de uma órbita com respeito a outra:

$$\mathbf{h}_{cf} = \mathbf{r}_{cf} \times \mathbf{v}_{cf}$$

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{h}_{cf} \cdot \mathbf{h}_{ci}}{||\mathbf{h}_{cf}|| \cdot ||\mathbf{h}_{ci}||}$$

Programando essas equações e calculando o inverso do cosseno obtém-se: $\alpha = 20^\circ$. Este ângulo é igual àquele entre as velocidades inicial e final: $\alpha = 2\beta - 180^\circ = 20^\circ$.

Pergunta: Se o ângulo entre os planos orbitais inicial e final (igual ao ângulo entre as velocidades antes e depois da manobra no ponto de manobra) é 20° , por que a diferença entre a inclinação das órbitas inicial e final é somente $\Delta i = 1,694^\circ$?

Resposta: Porque o ângulo entre os planos orbitais é medido a partir da linha dos nodos formada pela interseção dos planos orbitais, enquanto que a inclinação de uma órbita é medida a partir da linha dos nodos de cada órbita com respeito ao plano equatorial.

Portanto, a **aplicação do impulso de velocidade altera o ângulo entre os planos orbitais inicial e final, não necessariamente a inclinação da nova órbita**. De fato, esta manobra orbital altera uma combinação de inclinação, longitude do nodo ascendente e argumento de periastro.

Referências

- [1] A. TEWARI. *Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modelling and simulation with MATLAB and Simulink*. Birkhauser, Boston, 2007.