

MECÂNICA DE VOO ESPACIAL - DEM 1119

Aula 26

Prof. André Luís da Silva

1 Introdução

Voo ascendente de foguete:

- Inserção em órbita;
- Avaliação de factibilidade em termos de impulso de velocidade;
- Ajuste de distribuição de massa para tornar um foguete apto à inserção orbital;
- Cálculo de parâmetros inerciais;
- Avaliação de factibilidade em termos de energia específica, órbita de referência e altitude.

2 Inserção em Órbita

Nas aulas anteriores, foi estudado o voo de sondagem, onde o veículo necessita de energia suficiente para atingir uma altitude máxima associada à missão.

Agora, é avaliado o voo de inserção orbital, onde o foguete deve inserir uma carga útil em órbita. Neste caso, ele deve fornecer energia suficiente para atingir a altitude orbital e propiciar a velocidade correspondente.

Ao longo do voo ascendente do foguete, a queima de propelente fornece energia cinética e potencial à carga útil. Isto se encerra no momento em que os motores do último estágio são desligados. Este instante é chamado de **inserção orbital**.

As condições finais do momento da inserção orbital são as condições iniciais da órbita.

É estudado o caso específico da inserção em órbita elíptica. A especificação de requisitos e análise da órbita são feitos a partir do modelo de problema de dois corpos.

Assim, o estado (variáveis de cinemática e dinâmica) do veículo no momento do desligamento do último estágio é usado para calcular os parâmetros da órbita atingida, com base nas equações da órbita elíptica no problema de dois corpos.

A tarefa de especificar uma trajetória de inserção orbital é um problema matemático desafiador, modelado a partir do conceito de **problema de valor de contorno em dois pontos**, onde as condições iniciais do lançamento, junto do comportamento dos controles ao longo do voo, devem satisfazer condições finais preestabelecidas.

Além das condições da órbita desejada, o problema de inserção orbital está associado com a carga útil e o tipo de foguete, sendo todos estes interdependentes.

O conteúdo desta e das próximas aulas trata do assunto de maneira prática, por meio da especificação de um problema e respectiva solução, consistindo basicamente de:

- 1 Especificação da carga útil a ser colocada em órbita;
- 2 Descrição do tipo de órbita que deve ser obtida;
- 3 Especificação do foguete que deve ser utilizado para propiciar a inserção orbital, levando-se em conta motores realistas;
- 4 Avaliação da factibilidade de aquisição de órbita, em nível crescente de profundidade;
- 5 Equacionamento para estabelecer as condições iniciais e de contorno que propiciam a inserção orbital;
- 6 Fases da inserção orbital: órbita de transferência e final;
- 7 Métodos de análise da órbita obtida;
- 8 Manobras para ajuste da órbita desejada;
- 9 Implementação prática por meio de programação.

Esta aula cobre os primeiros 4 itens acima.

3 Trabalho Proposto para a Disciplina

Assim como em outros anos, este curso apresenta o conteúdo de inserção orbital de maneira prática, por meio de um exemplo realista que é resolvido pelo professor e reproduzido pelos alunos.

A implementação e documentação do exemplo por parte dos alunos constitui um trabalho de avaliação da disciplina, que contempla 50% da nota N2, como previsto no plano de ensino.

O trabalho foi introduzido na **aula 19**. O objetivo é o lançamento de um CubeSat 8U em órbita geosíncrona.

Nesta aula, o tema é estudado num nível conceitual a partir da viabilidade de aquisição de órbita.

4 Avaliação Conceitual de Foguete para Aquisição de Órbita

Os itens [1] a [4] do roteiro apresentado no final da seção 2 estão interligados: o foguete e sua distribuição de massa dependem da carga útil e da órbita desejada. Devido à interdependência, é necessário um processo iterativo

A mais simples das técnicas de verificação da capacidade de aquisição de órbita é o cálculo de impulso de velocidade pela equação de foguete, segundo o processo apresentado na aula 19.

Para ilustrar o processo, aprofunda-se o exemplo prático iniciado na aula 19.

4.1 Aquisição de Órbita Geossíncrona por Lançador Dedicado de CubeSat

Na aula 19, propôs-se o problema de lançar um CubeSat 8U em órbita geossíncrona utilizando um foguete lançador dedicado. Especificou-se que esta carga útil teria massa $m_L = 13\text{ kg}$, composta por 8 módulos de 1,33 kg mais um PPOD de 2,36 kg. Como possibilidades de foguete lançador, foram considerados os veículos conceituais apresentados na referência [1].

A referência [1] estuda 3 configurações de foguetes baseados no VLM (veículo lançador de micro satélites) com capacidade aumentada, propiciando lançar cargas úteis maiores. Estas três possuem semelhança com o veículo Ariane-6, o qual tem capacidade de realizar lançamento geossíncrono.

Devido à semelhança apontada, conjecturou-se que os veículos propostos em [1] teriam capacidade de inserir cargas úteis pequenas, tais como um CubeSat 8U em órbita geossíncrona, com pouca ou nenhuma alteração. Esta hipótese, no entanto, precisava ser confirmada, sendo a primeira etapa o estudo de impulso de velocidade.

Como apontado na aula 19, na análise de factibilidade com base em impulso de velocidade, o mínimo requerido para órbita geossíncrona, já levando em conta perdas, é $\Delta v = 13\text{ km/s}$.

Elaborou-se um programa em MATLAB para calcular o impulso de velocidade associado às configurações C-1, C-2 e C-3 da referência [1]. Tomando uma carga útil de 13 kg, obteve-se o resultado da tabela 1.

Tabela 1: Impulsos de velocidade das configurações C-1, C-2 e C-3 para carga útil de 13 kg.

Configuração	C-1	C-2	C-3
Δv (km/s)	11,72	12,05	11,67

Como mostrado na tabela 1, nenhuma das configurações é capaz de imprimir o impulso específico de 13 km/s na carga útil de 13 kg. Portanto, **elas não passam no primeiro teste para a aquisição de órbita.**

Quando isto ocorre, o próximo passo é propor pequenas alterações no foguete. A mais comum, como mencionado na aula 17, é a adição de *boosters*. Assim, o próximo teste foi feito

com as 3 configurações com 4 ao invés de 3 foguetes no primeiro estágio: 4xS50. Este estudo segue num novo programa em Python (e MATLAB) mostrado aos alunos.

Especificamente, as alterações feitas com base nas configurações C-1, C-2 e C-3 são:

- Novas massas de propelente do primeiro estágio: $m_{p_b} = \frac{4}{3}m_p$. Onde m_p era a original e m_{p_b} é a nova;
- Novas massas estruturais do primeiro estágio: $m_{s_b} = \frac{4}{3}m_s$. Onde m_s era a original e m_{s_b} é a nova.

Justificativas: massas de propelente e estrutura de 4 foguetes ao invés de 3, aumentando-se proporcionalmente.

Com as mudanças, os novos impulsos específicos são aqueles da tabela 2.

Tabela 2: Impulsos de velocidade das configurações C-1, C-2 e C-3 para carga útil de 13 kg.

Configuração	C-1-b	C-2-b	C-3-b
Δv (km/s)	12,05	12,38	12,01

Como mostra a tabela 2, em nenhuma das configurações a inserção de um motor a mais no primeiro estágio foi suficiente para prover o impulso de velocidade requerido. De certa forma, isto vai de encontro ao constatado na aula 18: alterações no primeiro estágio têm pouco impacto no impulso de velocidade.

Neste sentido, propõe-se uma nova alteração, desta vez no **terceiro estágio da configuração C-2**, a qual possui os resultados mais promissores.

- Manter a razão estrutural da configuração C-2 constante ($\sigma = 0.21$);
- Aumentar a massa de propelente por tentativa e erro;
- Usar três configurações de primeiro estágio: com 3, 4 e 5 foguetes S50.

Justificativa: no terceiro estágio, sendo um foguete a propelente liquido, o mesmo motor e instrumentação podem ser mantidos enquanto se aumenta o tamanho dos tanques de combustível e oxidante. A razão estrutural constante garante que a massa estrutural aumenta na mesma proporção do propelente (uma aproximação conservativa, pois na realidade a massa do motor permanece constante, enquanto somente a dos tanques e casca externa aumentam).

A figura 1 apresenta a varredura de massa de propelente do terceiro estágio para as 3 configurações do primeiro estágio. Testou-se desde 10% até 200% da massa de propelente do terceiro estágio da configuração C-2. A figura também mostra a massa estrutural associada.

A figura 1 mostra que a configuração com 5 foguetes S50 no primeiro estágio é capaz de atingir impulso de velocidade $\Delta v = 12,98$ km/s. Como se trata de um **estudo aproximado**, assume-se que este valor **atende o requisito** de 13 km/s.

O valor de impulso de velocidade é satisfeito quando a massa de propelente é 40% da original da configuração C-2. Ao contrário do que a intuição poderia sugerir, a partir de um certo ponto, aumentar a massa de propelente do terceiro estágio piora o impulso de velocidade

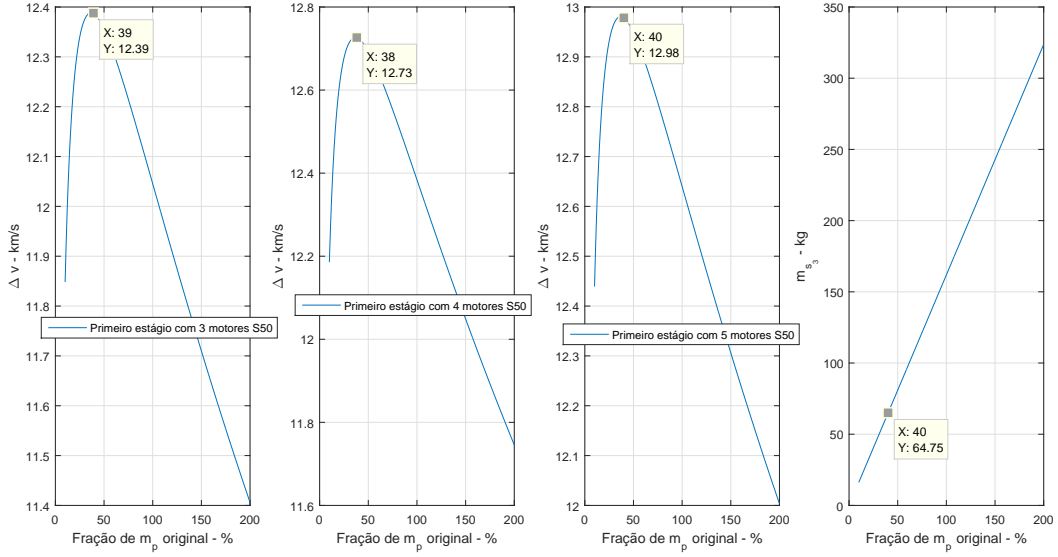


Figura 1: Varredura da massa de propelente do terceiro estágio.

total. Isto ocorre porque o terceiro estágio se comporta como uma carga útil para os primeiros. Além disso, do ponto de vista matemático, a menor massa do terceiro estágio atende melhor à proporção ótima de massa entre os estágios para maximizar o impulso de velocidade para a carga útil fornecida.

A massa estrutural resultante é de 64,75 kg. Fica a dúvida se ela é realizável. Para isso, pode-se buscar os dados do motor RD-843. De acordo com a referência [1], a massa deste motor é 16,5 kg. Assim, restariam 48,25 kg para os tanques de propelente, estrutura da casca externa, reforçadores, carenagem, coifa, adaptador de carga útil e sistemas eletrônicos, o que parece razoável, por ser um terceiro estágio bastante pequeno, para uma pequena carga útil.

5 Segunda Avaliação de Factibilidade de Aquisição de Órbita

Por ser um processo iterativo, a avaliação de factibilidade de aquisição de órbita é realizada em nível crescente de profundidade. Acima, foi apresentada a primeira etapa (impulso de velocidade) que foi útil para dimensionar a distribuição de massa entre os estágios e o propelente do último (propulsão líquida).

Após a configuração passar pelo primeiro teste, é verificada a **factibilidade em termos de energia específica**. No caso do exemplo estudado, deve-se obter uma órbita geosíncrona (GSO - *Geosynchronous orbit*), caracterizada pela velocidade orbital de $n_{gso} = 7,2921 \times 10^{-5}$ rad/s e semi eixo maior $a_{gso} = 42,164 \times 10^6$ m (6,61 vezes o raio da Terra).

Para realizar o teste, adota-se uma órbita circular de referência com raio $r_{ref} = a_{gso} = 42,164 \times 10^6$ m, que possui uma altitude $h_{ref} = 35,785863 \times 10^6$ m. Se a energia específica, no momento da inserção orbital, for maior que esta, tal órbita é possível de ser atingida por este

veículo, cabendo somente um ajuste das condições no momento do desligamento do motor do terceiro estágio.

Cabe ressaltar os seguintes detalhes importantes sobre os dois tipos de teste:

- O teste de Δv é feito aplicando-se somente a equação de foguete, com base na massa total, razões estruturais e de carga útil e impulsos específicos;
- O teste de energia específica é realizado pelo cálculo da trajetória, a partir do programa de solução das equações diferenciais desenvolvido para simulação do voo de sondagem;
- Na simulação, a velocidade é a **inercial**. Assim, é levado em conta o impulso de velocidade adicional fornecido pela rotação da Terra;
- Na simulação também são consideradas as perdas por arrasto e o trabalho do campo gravitacional (energia potencial), bem como o modelo mais detalhado do veículo e as condições iniciais do lançamento.

Para auxiliar na análise da capacidade de aquisição de órbita, podem ser feitos alguns estudos complementares, os quais são detalhados da seção 7.1:

- Comparação com a órbita de referência: velocidade e semi eixo-maior;
- Avaliação do perigeu;
- Avaliação da excentricidade.

Para realizar os cálculos mencionados acima, é necessário determinar os parâmetros inerciais associados à trajetória, a qual é resolvida para a velocidade relativa. Este procedimento é resumido abaixo.

6 Cálculo de Parâmetros Inerciais

Na aula anterior, foi elaborado um programa para implementar a mecânica de voo de um foguete de múltiplos estágios, tendo como foco o voo de sondagem.

A análise do voo de sondagem é feita de maneira satisfatória a partir da velocidade relativa e posição no referencial girante PCPF. No entanto, para estudar a inserção orbital, é preciso calcular a velocidade inercial e a posição no referencial inercial ICP, a partir destes, os parâmetros orbitais podem ser avaliados.

6.1 Conversão da Velocidade Relativa para a Inercial

Em aulas anteriores, verificou-se que a relação entre a velocidade relativa (v, A, ϕ) e a inercial (v_i, A_i, ϕ_i) é dada por:

$$v_i \sin \phi_i = v \sin \phi \quad (1)$$

$$v_i \cos \phi_i \sin A_i = v \cos \phi \sin A + r\omega_e \cos \delta \quad (2)$$

$$v_i \cos \phi_i \cos A_i = v \cos \phi \cos A \quad (3)$$

A partir destas relações, dadas as coordenadas (v, A, ϕ) da velocidade relativa, pode-se obter (v_i, A_i, ϕ_i) da velocidade inercial como segue:

Dividindo as equações 2 e 3:

$$\begin{aligned} \frac{v_i \cos \phi_i \sin A_i}{v_i \cos \phi_i \cos A_i} &= \frac{v \cos \phi \sin A + r\omega_e \cos \delta}{v \cos \phi \cos A} \\ \tan A_i &= \frac{v \cos \phi \sin A + r\omega_e \cos \delta}{v \cos \phi \cos A} \\ \tan A_i &= \tan A + \frac{r\omega_e \cos \delta}{v \cos \phi \cos A} \end{aligned} \quad (4)$$

Elevando ao quadrado ambos os lados das equações 1 e 2 e somando os resultados:

$$\begin{aligned} (v_i \sin \phi_i)^2 + (v_i \cos \phi_i \sin A_i)^2 + (v_i \cos \phi_i \cos A_i)^2 &= \\ (v \sin \phi)^2 + (v \cos \phi \sin A + r\omega_e \cos \delta)^2 + (v \cos \phi \cos A)^2 &= \\ v_i^2 (\sin^2 \phi_i + \cos^2 \phi_i \sin^2 A_i + \cos^2 \phi_i \cos^2 A_i) &= \\ v^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi \sin^2 A + \cos^2 \phi \cos^2 A) + 2v\omega_e r \cos \delta \cos \phi \sin A + r^2 \omega_e^2 \cos^2 \delta &= \\ v_i^2 = v^2 + 2v\omega_e r \cos \delta \cos \phi \sin A + r^2 \omega_e^2 \cos^2 \delta \end{aligned}$$

$$v_i = \sqrt{v^2 + 2v\omega_e r \cos \delta \cos \phi \sin A + r^2 \omega_e^2 \cos^2 \delta} \quad (5)$$

Dividindo as equações 1 e 3:

$$\begin{aligned} \frac{v_i \sin \phi_i}{v_i \cos \phi_i \cos A_i} &= \frac{v \sin \phi}{v \cos \phi \cos A} \\ \tan \phi_i &= \frac{\cos A_i}{\cos A} \tan \phi \end{aligned} \quad (6)$$

6.2 Cálculo da Posição no Referencial ICP

O programa de simulação do voo ascendente de foguete determina a posição no referencial PCPF, por meio das coordenadas de distância radial r , longitude planetária l e latitude δ .

Na modelagem de referenciais planetários vista em aulas anteriores, assumiu-se uma representação de latitude centrada no planeta (geocêntrica no caso da Terra), de modo que a distância radial e a latitude são as mesmas nos referenciais ICP e PCPF. A única distinção corre na longitude. Para o caso do planeta Terra, a conversão entre longitude planetária l e longitude celeste λ é dada por:

$$\lambda = \lambda_G + \omega_e t + l \quad (7)$$

onde λ_G é a longitude celeste do meridiano de Greenwich em $t = 0$, ω_e é a velocidade angular de rotação da Terra em relação ao espaço inercial.

Outra forma é dada por:

$$\lambda = \omega_e(t - t_g) + l \quad (8)$$

Onde t_g é o tempo no qual a longitude celeste do meridiano de Greenwich é zero.

7 Cálculo de Parâmetros Orbitais e Verificação de Aquisição de Órbita

Durante a simulação de um voo de foguete, as variáveis de estado de cinemática e dinâmica do foguete são processadas ao longo da trajetória. A partir dos dados de velocidade e posição inercial, pode-se determinar os parâmetros orbitais de uma **órbita relativa de dois corpos** correspondente à trajetória do foguete.

No equacionamento já desenvolvido, a resolução das equações de cinemática e dinâmica é feita com a velocidade relativa. Após completado o cálculo da resposta numérica das equações diferenciais, um pós processamento é feito para determinar as coordenadas de velocidade inercial e posição no referencial ICP.

A partir da velocidade inercial e da posição ICP, os **parâmetros orbitais são calculados** como detalhado abaixo. Eles são então comparados com aqueles da órbita de referência, a fim de verificar a **factibilidade da órbita propiciada pelo foguete**.

7.1 Parâmetros da Órbita Elíptica

A determinação dos parâmetros orbitais é feita a partir do algoritmo de determinação de órbita (apresentado em aulas anteriores). Ele determina os **elementos orbitais clássicos** a partir da posição e velocidade celestes.

Os dados de entrada do algoritmo são:

- \mathbf{r}_{icp} : vetor posição em relação ao centro de massa do planeta escrito no referencial ICP;
- \mathbf{v}_{icp} : vetor velocidade em relação ao centro de massa do planeta escrito no referencial ICP. Ele deve ser tomado no mesmo instante da medida da posição;

- t_0 : tempo em que a observação foi feita;
- μ : parâmetro gravitacional padrão do planeta.

Os parâmetros calculados são:

- a : semi eixo maior da órbita;
- e : excentricidade;
- τ : tempo de periastro;
- Ω : longitude celeste do nodo ascendente. Para o caso da Terra: ascensão reta do nodo ascendente (ARNA);
- i : inclinação;
- ω : argumento de periastro (para a Terra, argumento de perigeu).

7.2 Energia específica

A partir dos elementos orbitais clássicos, alguns resultados auxiliares podem ser determinados, os quais são úteis para avaliar uma órbita. Um destes é a **energia específica**:

$$\epsilon = \frac{v_i^2}{2} - \frac{\mu}{r} \quad (9)$$

7.3 Altitudes mínima e máxima

Na avaliação de factibilidade de uma inserção orbital, é fundamental avaliar as altitudes de apoastro h_a e periastro h_p .

As distâncias radiais de periastro r_p e apoastro r_a de uma órbita elíptica são dadas por:

$$r_p = (1 - e)a \quad (10)$$

$$r_a = (1 + e)a \quad (11)$$

Para calcular as altitudes de apoastro e periastro, é assumido o caso simplificado de um planeta esférico, onde o raio de referência da superfície é o raio equatorial R_e . Assim, as altitudes h_p e h_a são:

$$h_p = r_p - R_e \quad (12)$$

$$h_a = r_a - R_e \quad (13)$$

7.4 Comparação com Órbita de Referência

Para verificar a factibilidade da órbita, o semi-eixo maior a e a energia específica ϵ são comparadas com a_{ref} e ϵ_{ref} relacionados à órbita circular de referência:

$$a_{ref} = R_e + h_{ref} \quad (14)$$

Onde R_e é o raio equatorial do planeta.

$$\epsilon_{ref} = -\frac{\mu}{2a_{ref}} \quad (15)$$

Para órbita circular, a distância radial r é constante, consistindo no raio da órbita, o qual é igual ao semi-eixo maior a . Da equação da energia específica da aula 3:

$$-\frac{\mu}{2a} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \rightarrow -\frac{\mu}{2r} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \rightarrow \frac{v^2}{2} = -\frac{\mu}{2r} + \frac{\mu}{r} = \frac{2\mu - \mu}{2r} = \frac{\mu}{2r}$$

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \quad (16)$$

A equação 16 determina a **velocidade orbital em uma órbita circular**, em função do raio r da órbita. Ela pode ser usada para verificar a factibilidade de uma órbita, determinando uma velocidade de referência que é comparada com a velocidade inercial no momento do desligamento do último estágio do foguete:

$$v_{ref} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{ref}}} \quad (17)$$

Outra verificação importante diz respeito à avaliação preliminar da **altitude de periastro**, relacionada com o arrasto atuante e a reentrada. Neste sentido, os seguintes comportamentos gerais podem ser avaliados:

- Altitude de periastro negativa: a carga útil lançada pelo foguete vai reentrar na atmosfera antes de completar uma órbita, pois esta intercepta a superfície do planeta;
- Altitude de periastro contida na baixa atmosfera: por baixa atmosfera, entende-se o segmento onde a densidade ainda é significativa, de modo a provocar força aerodinâmica considerável. No planeta Terra, é considerado que abaixo de 100km de altitude não ocorre voo espacial, mas voo atmosférico. Se a altitude de periastro está contida na baixa atmosfera, a carga útil lançada pelo foguete realiza reentrada atmosférica, provocando uma força de arrasto que consome a energia orbital. Assim, a órbita não é sustentada por muitas revoluções;
- Altitude de periastro na alta atmosfera: nesta região, a força de arrasto é muito pequena. Sendo assim, a perda de energia orbital é insignificante a cada revolução. Logo, a órbita

pode ser mantida por longos períodos.

Em resumo, a análise de factibilidade de órbita em termos de altitude se resume em calcular h_a , segundo a equação 13, e verificar se ela é maior que uma altitude mínima de referência. Para o caso de uma órbita terrestre, esta altitude é a linha de Kármán: $h_{ref} = 100$ km.

Referências

- [1] Pedro L. K. da Cás, Carlos A. G. Veras, Olexiy Shynkarenko, and Rodrigo Leonardi. A brazilian space launch system for the small satellite market. *Aerospace*, 6(11), 2019.