

MECÂNICA DE VOO ESPACIAL - DEM 1119

Aula 21

Prof. André Luís da Silva

1 Introdução

Tópicos da aula:

- Segunda Lei de Newton: corpos de massa variável;
- Determinação das equações do movimento de um foguete com respeito a um planeta girante.

Referência da aula [2]: TEWARI, A. Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modelling and simulation with MATLAB and Simulink. Boston: Birkhauser, 2007.

Na aula anterior, foram determinadas equações de cinemática de translação com respeito a referenciais planetários. Agora, serão vistas as equações de dinâmica.

O foco principal é determinar um modelo aplicável ao voo de foguete, capaz de simular trajetórias ascendentes de voo de sondagem ou inserção orbital. No entanto, as equações desenvolvidas são suficientemente genéricas, de modo que podem ser aplicadas, com pouca ou nenhuma adaptação, ao movimento de veículos atmosféricos, espaciais ou de entrada atmosférica. Ou seja, aplicam-se a veículos aeroespaciais em geral.

Para modelagem da mecânica de voo de um foguete, que é um corpo de massa variável, é necessário generalizar as equações que vinham sendo aplicadas nas disciplinas de desempenho de aeronaves e de mecânica de voo. Neste sentido, primeiro é desenvolvida a segunda lei de Newton levando em conta a eliminação contínua de massa, o que leva ao conceito de força reativa.

A seguir, com base na 2ª Lei de Newton reescrita e no resultado de cinemática de translação da aula anterior, o desenvolvimento das equações do movimento é realizado. As equações de dinâmica de translação são estabelecidas, referindo-se às forças aerodinâmica, propulsiva e gravitacional de maneira genérica.

2 Segunda Lei de Newton

A segunda Lei de Newton é bem trabalhada nas disciplinas de Física, mecânica geral, desempenho de aeronaves e mecânica de voo. No entanto, para o curso atual, é preciso prestar mais

atenção para sua aplicação quando há variação de massa. Na verdade, este tema é tratado na disciplina de desempenho de aeronaves, mas lá assume-se que a variação é relativamente pequena. Mas num foguete ela é bem intensa.

Para contextualizar o desenvolvimento da segunda lei de Newton para o caso de corpos com massa variável, primeiro faz-se uma revisão dos seus casos mais básicos: partícula e corpo contínuo com massa constante.

2.1 Forma mais Básica de Segunda Lei de Newton e Referenciais Inerciais

A aula anterior tratou da cinemática de um ponto em relação a referenciais com movimento arbitrário, com seis graus de liberdade. Foi considerado um referencial “fixo”, que não possui aceleração, e descrito o movimento de outro capaz de rotacionar e acelerar sua origem com respeito ao primeiro.

É neste cenário que as leis da mecânica de Newton são enunciadas, pois elas necessitam do conceito de referencial inercial, que não possui aceleração com respeito às estrelas distantes. Ou seja, um referencial com velocidade de translação constante e que não gira com respeito às estrelas distantes.

A segunda lei de Newton afirma que a taxa de variação da quantidade de movimento linear de uma partícula, em um referencial inercial, é igual a soma das forças que agem sobre ela:

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{mv}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} \quad (1)$$

onde \mathbf{F} é o somatório de forças que agem sobre a partícula, \mathbf{v} é sua velocidade com respeito a um referencial inercial, m é a massa da partícula, \mathbf{mv} é a sua quantidade de movimento linear, \mathbf{a} é a aceleração da partícula com respeito ao referencial inercial.

2.2 Segunda Lei de Newton para Corpo Contínuo com Massa Constante

A figura 1 apresenta um corpo contínuo, para o qual a segunda lei de Newton pode ser generalizada, supondo-se o corpo como um sistema de partículas de massas dm , sobre as quais atuam forças $d\mathbf{f}$. $SXYZ$ é um referencial inercial e $oxyz$ é um referencial associado ao corpo. Neste caso, a dinâmica de translação é:

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{mv}_0}{dt} \quad (2)$$

sendo que \mathbf{F} é o somatório de forças externas que agem sobre o corpo, \mathbf{v}_0 é a velocidade do *centro de massa* (CM) com respeito ao referencial inercial, m é a massa, \mathbf{mv}_0 é a quantidade de movimento linear.

O resultado anterior é obtido sem considerar que o corpo seja rígido, assim, pode ser aplicado

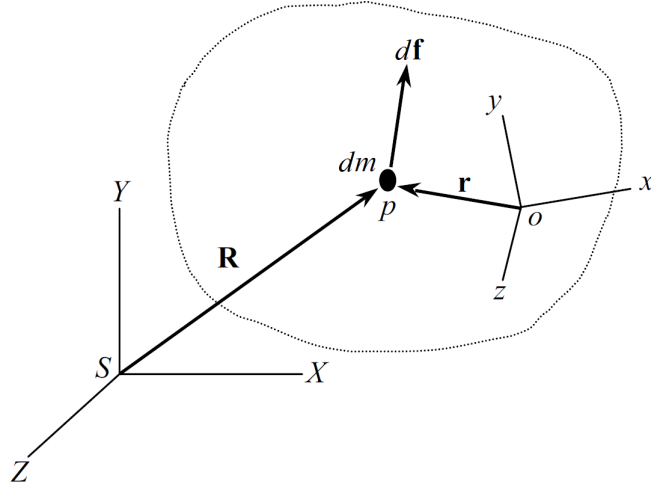


Figura 1: Sistema de partículas constituindo um corpo contínuo. Fonte: adaptado de [2].

para qualquer caso, seja um arranjo de corpos rígidos, um corpo flexível, etc, [1].

Se a massa é constante, a equação 2 resulta em:

$$\sum \mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} \quad (3)$$

O resultado da equação 3 é o mais utilizado dentro da mecânica de voo, sendo aplicado ao longo das disciplinas de desempenho de aeronaves e mecânica de voo.

2.3 Segunda Lei de Newton: Corpos de Massa Variável

Para aplicar a segunda lei de Newton a foguetes, é preciso desenvolver uma formulação para corpos de massa variável. Neste sentido, considere o esquema da figura 2.

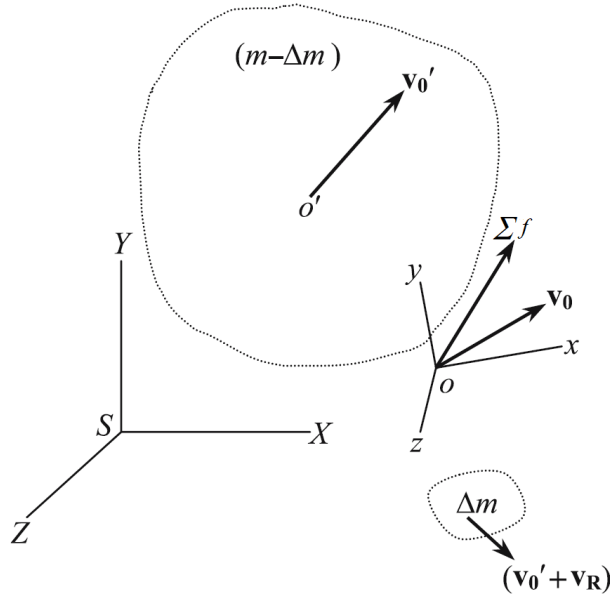


Figura 2: Corpo de massa variável, segunda Lei de Newton. Fonte: referência [2]

Na figura 2, divide-se o sistema em duas partes: uma de massa $m - \Delta m$ e outra Δm , de

modo que a massa total seja m . Supõe-se que a fração de massa Δm tenha sido ejetada do segmento de massa $m - \Delta m$.

O CM do sistema de massa m situa-se no ponto O . Já o corpo remanescente de massa $m - \Delta m$ tem o CM no ponto O' .

O CM O é a origem de um referencial móvel $Oxyz$. O outro referencial da figura é inercial, sendo denotado por: $SXYZ$.

É muito importante compreender os vetores velocidade presentes na figura 2:

- O vetor \mathbf{v}'_0 , associado ao ponto O' é a velocidade do CM do corpo $m - \Delta m$ com respeito ao referencial inercial;
- \mathbf{v}_R é a velocidade relativa do CM do segmento de massa Δm com respeito ao ponto O' ;
- $\mathbf{v}'_0 + \mathbf{v}_R$ é a velocidade do CM do segmento Δm com respeito ao referencial inercial;
- \mathbf{v}_0 é a velocidade do CM do sistema de massa m .

Da definição de CM, a quantidade de movimento linear do sistema é:

$$m\mathbf{v}_0 = (m - \Delta m)\mathbf{v}'_0 + \Delta m(\mathbf{v}'_0 + \mathbf{v}_R) \quad (4)$$

A força externa resultante sobre o sistema é reduzida ao CM, sendo representada na figura 2 por $\sum \mathbf{f}$.

A partir das definições e resultados apresentados acima, a segunda lei de Newton é aplicada ao sistema da seguinte forma:

$$\sum \mathbf{f} = (m - \Delta m)\frac{d\mathbf{v}'_0}{dt} + \mathbf{v}'_0\frac{d(m - \Delta m)}{dt} + \Delta m\frac{d(\mathbf{v}'_0 + \mathbf{v}_R)}{dt} + (\mathbf{v}'_0 + \mathbf{v}_R)\frac{d\Delta m}{dt} \quad (5)$$

Como $\frac{dm}{dt} = 0$, pois m é a massa total do sistema:

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{f} &= (m - \Delta m)\frac{d\mathbf{v}'_0}{dt} - \mathbf{v}'_0\frac{d\Delta m}{dt} + \Delta m\frac{d(\mathbf{v}'_0 + \mathbf{v}_R)}{dt} + \mathbf{v}'_0\frac{d\Delta m}{dt} + \mathbf{v}_R\frac{d\Delta m}{dt} \\ \sum \mathbf{f} &= (m - \Delta m)\frac{d\mathbf{v}'_0}{dt} + \Delta m\frac{d(\mathbf{v}'_0 + \mathbf{v}_R)}{dt} + \mathbf{v}_R\frac{d\Delta m}{dt} \end{aligned} \quad (6)$$

A equação 6 já está suficientemente desenvolvida, no entanto, esta não é a forma que costuma se utilizar no voo de foguete. Neste caso, define-se a **força de tração reativa**, provocada pela ejeção da massa Δm :

$$\mathbf{f}_T = -\Delta m\frac{d(\mathbf{v}'_0 + \mathbf{v}_R)}{dt} - \mathbf{v}_R\frac{d\Delta m}{dt} \quad (7)$$

Assim, assumindo a força de tração reativa somada à força externa resultante $\sum \mathbf{f}$, a segunda

lei de Newton aplicada ao corpo de massa variável é:

$$\sum \mathbf{f} + \mathbf{f}_T = (m - \Delta m) \frac{d\mathbf{v}'_0}{dt} \quad (8)$$

A equação 8 tem a mesma estrutura da equação 3, sendo que a massa m constante da equação 3 é substituída pela massa variável $(m - \Delta m)$; enquanto que a velocidade \mathbf{v}'_0 na equação 8 é a velocidade do CM do corpo de massa variável após a ejeção da massa Δm .

Para aplicar a equação 8 é preciso prestar muita atenção num detalhe: o somatório de forças externas $\sum \mathbf{f}$, definido na figura 2, também leva em conta a força sofrida pela massa ejetada Δm . Na propulsão com motor foguete, esta força é resultante da **pressão externa** que age sobre os gases de exaustão no bocal. Uma forma de levar isso em conta na modelagem é: determinar um modelo de força propulsiva \mathbf{f}_T que já leve em conta as “perdas propulsivas” devido à pressão. Esse assunto foi discutido na aula 16, onde foram apresentados os conceitos de bocal sub expandido, expansão ótima e super expandido.

3 Forças que Atuam sobre um Foguete

As forças que atuam no veículo aeroespacial são: aerodinâmica, propulsiva e gravitacional. É na etapa de modelagem das forças que se particulariza um veículo. No caso, a intenção é modelar o voo ascendente de foguete, de modo a permitir a simulação de trajetórias de voo de sondagem e de inserção em órbita.

Cada força, devido à sua natureza, é escrita em um sistema de eixos de referência, como já verificado nas disciplinas de desempenho de aeronaves e mecânica de voo. Mas, para incluir os vetores de força na equação de dinâmica, equação 8, é necessário que todas elas estejam escritas nos mesmos eixos. Assim, transformações de coordenadas são necessárias.

Diversas matrizes de transformação foram definidas na aula 7 e revisadas na aula 20. No entanto, para realizar a modelagem das forças, outros sistemas de eixos precisam ser definidos e suas matrizes de transformação determinadas. Isto é feito na seção seguinte.

3.1 Sistemas de Referência para Modelagem das Forças

Para representar as forças que atuam sobre um foguete, é necessário definir mais dois sistemas de eixos de referência com origem no CM do corpo: **sistema de referência do vento**, **sistema de referência propulsivo**, descritos a seguir.

3.1.1 Sistema de Referência do Vento

Primeiramente, é necessário relembrar os conceitos de velocidade relativa e aerodinâmica. A **velocidade relativa** é medida com respeito ao planeta girante. Já a **velocidade aerodinâmica** é medida em relação ao ar atmosférico.

O sistema de referência do vento (SRV) é definido com respeito à velocidade aerodinâmica. No entanto, nesta disciplina, é assumida **atmosfera estacionária**, sem vento, de modo que o

vetor velocidade relativa seja igual ao vetor velocidade aerodinâmica. Assim sendo, as definições desta seção serão baseadas no vetor velocidade relativa.

A figura 3 mostra o SRV, o qual é importante para a escrita da força aerodinâmica e propulsiva.

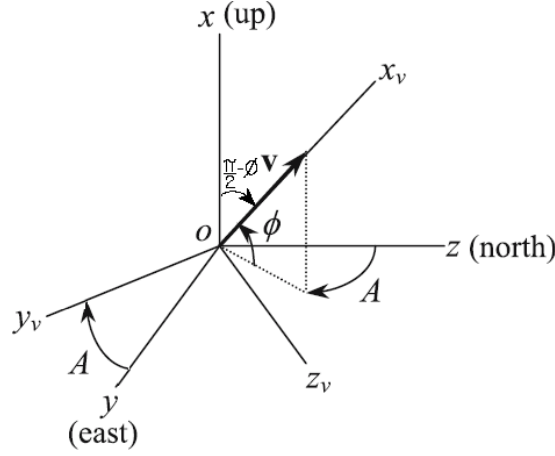


Figura 3: Referencial do vento e sua orientação com respeito ao LVLH. Fonte: adaptado da referência [2].

O sistema de referência do vento é definido da seguinte maneira:

- A origem o é o CM do veículo;
- O eixo x_v aponta na direção do vetor velocidade relativa \mathbf{v} ;
- Em aplicações de aeronáutica, o eixo z_v é definido de modo que esteja contido em um plano de simetria do veículo. No entanto, no modelo de foguete desenvolvido, não consta a mecânica de rotação e, por conseguinte, não há a informação acerca da atitude do veículo e da direção do seu plano de simetria (se é que ele existe). Assim sendo, o eixo z_v é definido de maneira genérica, independente da atitude do veículo;
- O eixo z_v é definido de modo que o plano $x_v z_v$ seja normal ao plano horizontal (Plano yz do referencial LVLH). Ele aponta para baixo conforme indicado na figura 3;
- O eixo y_v é definido de modo a completar o sistema cartesiano ortogonal de mão direita, sendo paralelo ao plano horizontal local.

Das definições acima, o plano $x_v z_v$ é basicamente um plano vertical local que contém a velocidade relativa.

Da figura 3, a transformação do sistema LVLH para o SRV é feita pela seguinte sequência de rotações elementares:

- Uma primeira rotação, por um ângulo A , em torno do eixo x do sistema LVLH, no sentido negativo da mão direita, ou seja, uma transformação dada pela matriz elementar $\mathbf{C}_1(-A)$, que gera os eixos intermediários $y'z'$, onde y' é coincidente com y_v ;

- Uma segunda rotação, por um ângulo $\frac{\pi}{2} - \phi$, em torno do eixo y' intermediário, no sentido negativo da mão direita, que gira o eixo $x' \equiv x$ até o mesmo coincidir com o vetor velocidade relativa. A matriz de rotação elementar associada é: $\mathbf{C}_2\left(-\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)\right)$.

Assim, a matriz de transformação do sistema LVLH para o SRV é dada pelo produto de matrizes de rotação elementares abaixo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{srv}^{lvlh} &= \mathbf{C}_2\left(-\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)\right) \mathbf{C}_1(-A) = \mathbf{C}_2\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) \mathbf{C}_1(-A) \\
&= \begin{bmatrix} \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) & 0 & -\sin\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) & 0 & \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos A & \sin A \\ 0 & -\sin A & \cos A \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sin \phi & 0 & -(-\cos \phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \phi & 0 & \sin \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos A & -\sin A \\ 0 & \sin A & \cos A \end{bmatrix} \\
\mathbf{C}_{srv}^{lvlh} &= \begin{bmatrix} \sin \phi & \cos \phi \sin A & \cos \phi \cos A \\ 0 & \cos A & -\sin A \\ -\cos \phi & \sin \phi \sin A & \sin \phi \cos A \end{bmatrix} \tag{9}
\end{aligned}$$

3.1.2 Sistema de Referência Propulsivo

A figura 4 mostra o sistema de referência propulsivo (SRP), que serve para determinar o apontamento da força propulsiva com respeito ao referencial do vento.

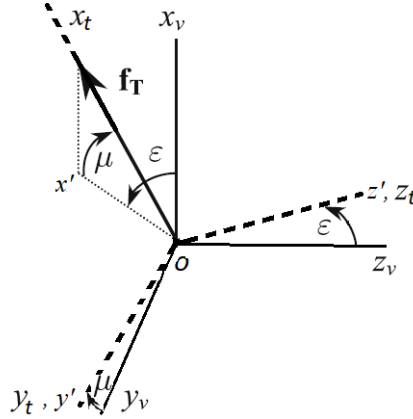


Figura 4: Orientação da força propulsiva com respeito ao referencial LVLH e identificação das demais forças que agem sobre o veículo. Fonte: adaptado da referência [2].

O SRP é definido da seguinte maneira:

- A origem é o cm do corpo;
- O eixo x_t aponta na direção da força propulsiva;
- O eixo z_t está contido no plano $x_v z_v$ do SRV, ou seja: no plano vertical local;

- O eixo y_t completa o sistema cartesiano ortogonal dextrogiro.

O SRP é definido de modo que a força propulsiva esteja alinhada o eixo x_t . A escolha das direções dos outros dois eixos é feita da maneira mais simples possível.

Basicamente, o SRP orienta o vetor de tração com respeito à velocidade relativa. Esta deflexão pode ocorrer por por meio de dois ângulos:

- O ângulo ϵ é medido sobre o plano $x_v z_v$, que é o plano vertical que contém a velocidade, então diz que esta é uma **deflexão vertical**;
- Já o ângulo μ é medido para fora do plano vertical, por isso diz-se que é uma **deflexão lateral**;
- Deve-se notar que estes ângulos não se referem à deflexão da força de tração com respeito ao corpo do foguete, mas ao vetor velocidade relativa, que pode estar desalinhado com o corpo do foguete;
- μ e ϵ vão orientar com respeito ao corpo quando os ângulos de ataque e derrapagem do foguete forem nulos;
- Os ângulos de ataque e derrapagem precisam da atitude do foguete para serem definidos, por isso não são tratados nesta disciplina.

De acordo coma figura 4, a transformação do SRV para o SRP é dada pela seguinte sequência de rotações elementares:

- Uma primeira rotação por um ângulo ϵ , em torno do eixo y_v , no sentido positivo da mão direita, que gera eixos intermediários $x'z'$. Esta rotação é dada pela matriz $\mathbf{C}_2(\epsilon)$;
- Uma segunda rotação por um ângulo μ , em torno do eixo z' , no sentido positivo da mão direita, de modo que o eixo x' gire até que se torne coincidente com a força propulsiva \mathbf{f}_T . Tal rotação é dada pela matriz $\mathbf{C}_3(\mu)$.

Desta maneira, a matriz de transformação é determinada pelo seguinte produto de matrizes elementares de rotação:

$$\mathbf{C}_{srp}^{srv} = \mathbf{C}_3(\mu)\mathbf{C}_2(\epsilon) = \begin{bmatrix} \cos \mu & \sin \mu & 0 \\ -\sin \mu & \cos \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \epsilon & 0 & -\sin \epsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \epsilon & 0 & \cos \epsilon \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{srp}^{srv} = \begin{bmatrix} \cos \mu \cos \epsilon & \sin \mu & -\cos \mu \sin \epsilon \\ -\sin \mu \cos \epsilon & \cos \mu & \sin \mu \sin \epsilon \\ \sin \epsilon & 0 & \cos \epsilon \end{bmatrix} \quad (10)$$

3.2 Decomposição dos Vetores de Força

Abaixo, as forças que agem sobre um foguete são decompostas de acordo com os sistemas de referência definidos anteriormente.

3.2.1 Força Aerodinâmica

O modelo aerodinâmico de um foguete será visto com certo detalhe em aulas posteriores. Mas, de modo genérico, em analogia ao caso de um avião, as forças aerodinâmicas resultantes são a sustentação L , o arrasto D e a lateral f_y . O SRV é definido de modo que elas sejam escritas como:

$$\mathbf{f}_{a_{srv}} = \begin{bmatrix} -D \\ f_y \\ -L \end{bmatrix} \quad (11)$$

O índice srv é adotado para indicar que um vetor está escrito no SRV.

Na equação 11:

- A força de arrasto D age no sentido oposto ao da velocidade relativa;
- A força de sustentação L é perpendicular à força de arrasto. Ela está contida no plano vertical local da velocidade;
- A força lateral também é perpendicular ao vetor velocidade relativa, mas é sempre paralela ao plano horizontal local, ou seja, aponta para fora do plano vertical local.

O sinal negativo na sustentação visto na equação 11 é de praxe em aeronáutica, visto que, quando o ângulo de elevação é zero, a sustentação aponta para cima (ver figura 3).

Apesar da força aerodinâmica definida acima guardar bastante semelhança com aquela da modelagem de aviões, ela tem uma diferença fundamental. Como o SRV não depende da atitude do corpo, o **rolamento** do veículo **em torno do vetor velocidade não afeta** as direções da **força de sustentação** e da **força lateral**. A primeira sempre está contida num plano vertical local, a segunda perpendicular a ele.

No decorrer do equacionamento desta aula, a força aerodinâmica será tratada de maneira genérica, segundo a decomposição da equação 11. Para a modelagem de um veículo específico (escrita de D , f_y e L em função das variáveis de estado, controle e parâmetros do veículo), é necessário incluir seu modelo aerodinâmico. Neste sentido, em uma aula posterior, será apresentado um modelo genérico de arrasto para um veículo aeroespacial, aplicável a uma vasta faixa de números de Mach e Knudsen.

3.2.2 Força Propulsiva

A força propulsiva possui magnitude f_T , que aponta ao longo do eixo x_t do SRP:

$$\mathbf{f}_{T_{srp}} = \begin{bmatrix} f_T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

O índice *srp* indica que um vetor está escrito no SRP.

Para a escrita das equações do movimento, todas as forças serão decompostas no SRV. Neste sentido, a força propulsiva é decomposta por meio da matriz de rotação da equação 10:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{T_{srv}} &= \mathbf{C}_{srv}^{srp} \begin{bmatrix} f_T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (\mathbf{C}_{srp}^{srv})^T \begin{bmatrix} f_T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \epsilon \cos \mu & -\cos \epsilon \sin \mu & \sin \epsilon \\ \sin \mu & \cos \mu & 0 \\ -\cos \mu \sin \epsilon & \sin \epsilon \sin \mu & \cos \epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{f}_{T_{srv}} &= \begin{bmatrix} f_T \cos \epsilon \cos \mu \\ f_T \sin \mu \\ -f_T \cos \mu \sin \epsilon \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

A equação 13 evidencia que o ângulo μ está associado a uma deflexão lateral da tração em relação ao plano $x_v z_v$, ocasionando uma componente na direção do eixo y_v . Já o ângulo ϵ está associado com uma deflexão vertical sobre o plano $x_v z_v$.

Na prática, os ângulos ϵ e μ indicam a direção da tubeira do veículo em relação ao vetor velocidade relativa. Quando os ângulos de ataque α e derrapagem β são nulos, a velocidade relativa está alinhada com o eixo de simetria longitudinal do veículo. Assim μ e ϵ estarão referenciados ao corpo do veículo, sendo que eles serão os ângulos do guimbal de 2 graus de liberdade (GDL) responsável pela “vetoração” da tração. Quando este guimbal é acionado, se promove o desvio da tração em relação ao eixo de simetria longitudinal do veículo. O cálculo destes ângulos é feito por um algoritmo de controle automático, em malha aberta ou fechada, de modo a exercer controle sobre a trajetória.

Caso a velocidade relativa não esteja alinhada com o eixo de simetria longitudinal do veículo, devido a ângulos de ataque e/ou derrapagem não nulos, a interpretação acima continua válida. No entanto, os ângulos μ e ϵ são serão mais os ângulos do guimbal de 2 GDL, mas uma combinação destes ângulos com α e β .

A magnitude f_T da força propulsiva depende da motorização do veículo. No caso de um foguete de múltiplos estágios, cada um terá um modelo de força. Haverá uma lógica de acionamento em função do tempo ou eventos externos, que indicará quando um modelo é trocado

pelo outro, devido à desativação de um estágio e entrada do outro.

O modelo de cada estágio depende principalmente do tipo de propelente. Em um estágio de propelente sólido, a queima ocorre livremente após sua ignição, seguindo uma curva de empuxo previamente obtida. Já para o caso de um estágio com propelente líquido, a força f_T é controlada por válvulas e bombas, que regulam a mistura de combustível e comburente. A lógica de controle desta força pode ser feita em malha fechada ou aberta, de modo que o foguete siga uma trajetória de referência e respeite os limites operacionais do motor.

Deste ponto em diante, para formulação das equações do movimento, a força propulsiva continuará sendo representada genericamente por f_T , analogamente às forças aerodinâmicas. Um modelo específico da força propulsiva deve ser substituído ao particularizar-se a modelagem de determinado veículo.

3.2.3 Força Gravitacional

A força gravitacional \mathbf{f}_g foi extensivamente discutida nas aulas 1 e 2. Em tal momento, foram apresentadas formulações de diferentes nível de detalhamento:

- Gravidade de um planeta esférico: atua puramente na direção do CM do planeta (radial com sinal negativo);
- Gravidade de um planeta axis simétrico: possui uma componente g_r na direção radial (com sinal negativo) e uma componente g_ϕ na direção colatitudinal (vetor diretor \mathbf{e}_ϕ de coordenadas esféricas);
- Gravidade de planeta com anomalias longitudinais: termos adicionais no modelo de planeta axis simétrico, gerando componentes radial, colatitudinal e longitudinal, calculadas por expansão em harmônicos esféricos.

Nas equações do movimento desenvolvidas, será considerado o modelo gravitacional de planeta axis simétrico, onde a declinação longitudinal da gravidade é desprezada (quando ela existe é geralmente pequena).

Nesta seção, analogamente às outras forças, a aceleração da gravidade será escrita de maneira genérica, por meio das componentes:

- aceleração g_c na direção centrípeta (oposto da radial);
- aceleração g_δ na direção norte (componente latitudinal).
- Comparando-se com a formulação das aulas 1 e 2, $g_c = -g_r$ e $g_\delta = -g_\phi$;

As expressões analíticas de g_c e g_δ como funções da latitude δ e distância radial r , em termos das constantes de Jeffery, são substituídas no momento da programação das equações para simulação ou deduções analíticas, não sendo necessárias neste momento.

Em função das definições acima, a força gravitacional é representada no referencial LVLH da seguinte maneira:

$$\mathbf{f}_{g_{lvh}} = m \begin{bmatrix} -g_c \\ 0 \\ g_\delta \end{bmatrix} \quad (14)$$

Onde m é a massa do corpo.

Para escrever a força gravitacional no SRV, utiliza-se a matriz de transformação da equação 9:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{g_{srv}} &= \mathbf{C}_{srv}^{lvh} \mathbf{f}_g = \begin{bmatrix} \sin \phi & \cos \phi \sin A & \cos \phi \cos A \\ 0 & \cos A & -\sin A \\ -\cos \phi & \sin A \sin \phi & \sin \phi \cos A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -mg_c \\ 0 \\ mg_\delta \end{bmatrix} \\ \mathbf{f}_{g_{srv}} &= \begin{bmatrix} -mg_c \sin \phi + mg_\delta \cos \phi \cos A \\ -mg_\delta \sin A \\ mg_c \cos \phi + mg_\delta \sin \phi \cos A \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

4 Dinâmica de Translação

A segunda lei de Newton (dinâmica de translação) para um corpo de massa variável foi vista na seção 2.3. Foi avaliado o caso de exaustão de uma massa Δm , fazendo com que um corpo inicialmente com massa m passe a ter $m - \Delta m$. Essa exaustão de massa gera a força de tração de um motor a jato.

Abaixo, a equação 8 da seção 2.3 é reescrita, substituindo-se $m - \Delta m$ por m , com a ressalva de que m é uma função do tempo, que precisa ser modelada a partir de uma equação diferencial e/ou algébrica. No caso de um foguete, m é a massa no instante t , após descontar-se a massa de propelentes ejetados até este momento, bem como a massa estrutural dos estágios já desacoplados:

$$\sum \mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \quad (16)$$

Para se obter a equação 16 a partir de 8, também se substituiu $\sum \mathbf{f} + \mathbf{f}_T$ por $\sum \mathbf{F}$. Sendo que o somatório de forças da equação 16 inclui todas as forças externas que agem sobre o corpo, bem como a tração reativa, proveniente da queima de combustível. Como enfatizado na seção 2.3, o modelo propulsivo deve levar em conta tanto a força proveniente da velocidade dos gases de exaustão, quanto da distribuição de pressão na saída do bocal.

A velocidade \mathbf{v}_i na equação 16 é a velocidade inercial do CM instantâneo (o CM varia com o tempo devido à exaustão dos propelentes). Inclui-se o índice i para não confundir a velocidade inercial com a relativa.

O referencial inercial considerado para obter e diferenciar a velocidade é o ICP. Abaixo, é reproduzida a figura da aula 20 que mostra os referenciais utilizados.

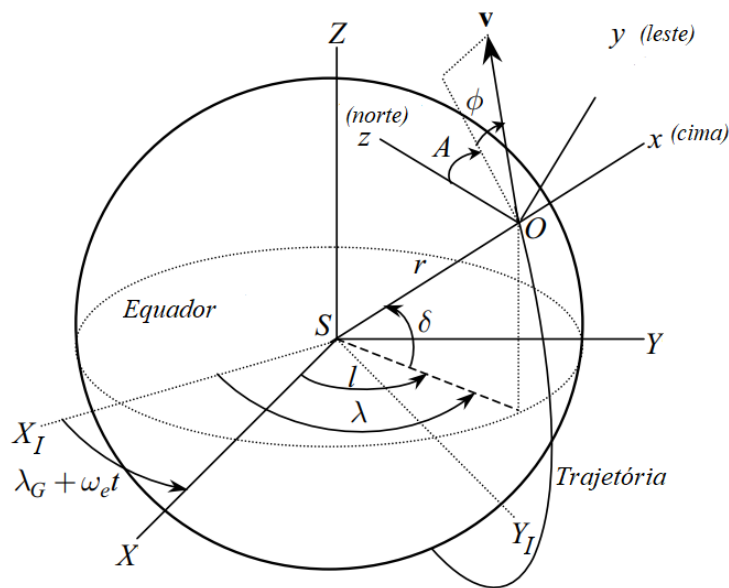


Figura 5: Referenciais inercial celeste, fixo e centrado no planeta e local vertical, local horizontal. Adaptado de [2].

Na figura 5, o é o CM do veículo, \mathbf{v} é a sua velocidade relativa com respeito ao referencial PCPF. A velocidade inercial do ponto o com respeito ao referencial ICP é: a soma da velocidade relativa com a velocidade devido à rotação do referencial PCPF com respeito ao ICP:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}_{icp}^{pcpf} \times \mathbf{r} \quad (17)$$

Onde ω_{icp}^{pcpf} é a velocidade angular do referencial PCPF com respeito ao ICP escrita no referencial LVLH.

Na equação 17, não foram usados sub-índices nos vetores. Isto ocorre porque é adotada a consideração da aula anterior: quando um vetor estiver escrito no referencial LVLH, seu sub-índice é omitido (isto é feito por questão de limpeza na notação, visto que este é o referencial mais usado).

Da equação 18 da aula 20, o vetor velocidade relativa é substituído na equação 17:

$$\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} v \sin \phi \\ v \cos \phi \sin A \\ v \cos \phi \cos A \end{bmatrix} + \boldsymbol{\omega}_{icp}^{pcpf} \times \mathbf{r} \quad (18)$$

Como o referencial PCPF gira em torno do seu eixo Z , a velocidade $\boldsymbol{\omega}_{icp}^{pcpf}$ é dada por:

$$\boldsymbol{\omega}_{icp}^{pcpf} = \mathbf{C}_{lvlh}^{pcpf} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_e \end{bmatrix} \quad (19)$$

Onde ω_e é a magnitude da velocidade de rotação do planeta.

Substituindo, na equação 19, a matriz de transformação da equação 10 da aula 20 e fazendo os cálculos, a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_{icp}^{pcpf}$ é:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{icp}^{pcpf} &= (\mathbf{C}_{lvlh}^{pcpf})^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta \cos l & -\sin l & -\cos l \sin l \\ \cos \delta \sin l & \cos l & -\sin \delta \sin l \\ \sin \delta & 0 & \cos \delta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_e \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \delta \cos l & \cos \delta \sin l & \sin \delta \\ -\sin l & \cos l & 0 \\ -\cos l \sin l & -\sin \delta \sin l & \cos \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_e \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\omega}_{icp}^{pcpf} &= \begin{bmatrix} \omega_e \sin \delta \\ 0 \\ \omega_e \cos \delta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

Substituindo $\boldsymbol{\omega}_{icp}^{pcpf}$ da equação 20 e $\mathbf{r} = [r, 0, 0]^T$ na equação 18, e fazendo os cálculos necessários, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i &= \begin{bmatrix} v \sin \phi \\ v \cos \phi \sin A \\ v \cos \phi \cos A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_e \sin \delta \\ 0 \\ \omega_e \cos \delta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \sin \phi \\ v \cos \phi \sin A \\ v \cos \phi \cos A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ r \omega_e \cos \delta \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{v}_i &= \begin{bmatrix} v \sin \phi \\ v \cos \phi \sin A + r \omega_e \cos \delta \\ v \cos \phi \cos A \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

A equação 21 fornece a velocidade inercial escrita no LVLH. Para obter a aceleração inercial, é necessário diferenciar este vetor segundo um observador no referencial inercial.

Usando a regra da derivada de um vetor com respeito a um referencial girante:

$$\left. \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \right|_{icp} = \left. \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} \right|_{lvlh} + \boldsymbol{\omega}_{icp}^{lvlh} \times \mathbf{v}_i \quad (22)$$

Onde: a derivada $\left. \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} \right|_{lvlh}$ é calculada segundo um observador no LVLH; $\boldsymbol{\omega}_{icp}^{lvlh}$ é a velocidade angular do LVLH com respeito ao ICP.

A velocidade angular ω_{icp}^{vlh} é dada pela soma das velocidades angulares das equações 20 (acima) e 15 da aula 20:

$$\omega_{icp}^{vlh} = \omega_{pcpf}^{vlh} + \omega_{icp}^{pcpf} = \begin{bmatrix} \dot{l} \sin \delta \\ -\dot{\delta} \\ \dot{l} \cos \delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_e \sin \delta \\ 0 \\ \omega_e \cos \delta \end{bmatrix}$$

$$\omega_{icp}^{vlh} = \begin{bmatrix} \omega_e \sin \delta + \dot{l} \sin \delta \\ -\dot{\delta} \\ \dot{l} \cos \delta + \omega_e \cos \delta \end{bmatrix} \quad (23)$$

A equação 23 fornece a velocidade de rotação do LVLH com respeito ao ICP, escrita no LVLH. Este resultado depende das derivadas das coordenadas longitude l e latitude δ . Estas derivadas podem ser substituídas, em função das coordenadas de velocidade relativa, a partir da cinemática de translação da equação 19 da aula 20:

$$\omega_{icp}^{vlh} = \begin{bmatrix} \omega_e \sin \delta + \frac{v \cos \phi \sin A}{r \cos \delta} \sin \delta \\ -\frac{v \cos \phi \cos A}{r} \\ \frac{v \cos \phi \sin A}{r \cos \delta} \cos \delta + \omega_e \cos \delta \end{bmatrix}$$

$$\omega_{icp}^{vlh} = \begin{bmatrix} \omega_e \sin \delta + \frac{v}{r} \cos \phi \sin A \tan \delta \\ -\frac{v}{r} \cos \phi \cos A \\ \frac{v}{r} \cos \phi \sin A + \omega_e \cos \delta \end{bmatrix} \quad (24)$$

Substituindo, na equação 22, a velocidade inercial dada pela equação 21, a velocidade angular dada pela equação 24 e realizando os cálculos pertinentes, obtém-se o resultado abaixo, que expressa as componentes da aceleração inercial $\mathbf{a}_i = [a_x \ a_y \ a_z]^T = \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}|_{icp}$ no LVLH:

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}|_{icp}$$

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} v \sin \phi \\ v \cos \phi \sin A + r\omega_e \cos \delta \\ v \cos \phi \cos A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_e \sin \delta + \frac{v}{r} \cos \phi \sin A \tan \delta \\ -\frac{v}{r} \cos \phi \cos A \\ \frac{v}{r} \cos \phi \sin A + \omega_e \cos \delta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v \sin \phi \\ v \cos \phi \sin A + r\omega_e \cos \delta \\ v \cos \phi \cos A \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \dot{v} \sin \phi + v \dot{\phi} \cos \phi \\ \dot{v} \cos \phi \sin A - v \dot{\phi} \sin \phi \sin A + v \dot{A} \cos \phi \cos A + \dot{r} \omega_e \cos \delta - r \dot{\delta} \omega_e \sin \delta \\ \dot{v} \cos \phi \cos A - v \dot{\phi} \sin \phi \cos A - v \dot{A} \cos \phi \sin A \end{bmatrix} + \\
&\begin{bmatrix} -\frac{v}{r} \cos \phi \cos A v \cos \phi \cos A - (\frac{v}{r} \cos \phi \sin A + \omega_e \cos \delta)(v \cos \phi \sin A + r \omega_e \cos \delta) \\ (\frac{v}{r} \cos \phi \sin A + \omega_e \cos \delta) v \sin \phi - (\omega_e \sin \delta + \frac{v}{r} \cos \phi \sin A \tan \delta) v \cos \phi \cos A \\ (\omega_e \sin \delta + \frac{v}{r} \cos \phi \sin A \tan \delta)(v \cos \phi \sin A + r \omega_e \cos \delta) + \frac{v}{r} \cos \phi \cos A v \sin \phi \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dot{v} \sin \phi + v \dot{\phi} \cos \phi \\ \dot{v} \cos \phi \sin A - v \dot{\phi} \sin \phi \sin A + v \dot{A} \cos \phi \cos A + \dot{r} \omega_e \cos \delta - r \dot{\delta} \omega_e \sin \delta \\ \dot{v} \cos \phi \cos A - v \dot{\phi} \sin \phi \cos A - v \dot{A} \cos \phi \sin A \end{bmatrix} + \\
&\begin{bmatrix} -\frac{v^2}{r} \cos^2 \phi \cos^2 A - \frac{v^2}{r} \cos^2 \phi \sin^2 A - v \omega_e \cos \phi \sin A \cos \delta - v \omega_e \cos \delta \cos \phi \sin A - r \omega_e^2 \cos^2 \delta \\ \frac{v^2}{r} \cos \phi \sin \phi \sin A + v \omega_e \cos \delta \sin \phi - v \omega_e \sin \delta \cos \phi \cos A - \frac{v^2}{r} \cos^2 \phi \sin A \cos A \tan \delta \\ v \omega_e \sin \delta \cos \phi \sin A + r \omega_e^2 \sin \delta \cos \delta + \frac{v^2}{r} \cos^2 \phi \sin^2 A \tan \delta + v \omega_e \cos \phi \sin A \sin \delta + \frac{v^2}{r} \cos \phi \sin \phi \cos A \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dot{v} \sin \phi + v \dot{\phi} \cos \phi \\ \dot{v} \cos \phi \sin A - v \dot{\phi} \sin \phi \sin A + v \dot{A} \cos \phi \cos A + \dot{r} \omega_e \cos \delta - r \dot{\delta} \omega_e \sin \delta \\ \dot{v} \cos \phi \cos A - v \dot{\phi} \sin \phi \cos A - v \dot{A} \cos \phi \sin A \end{bmatrix} + \\
&\begin{bmatrix} -\frac{v^2}{r} \cos^2 \phi - 2v \omega_e \cos \phi \sin A \cos \delta - r \omega_e^2 \cos^2 \delta \\ \frac{v^2}{r} \cos \phi \sin A (\sin \phi - \cos \phi \cos A \tan \delta) + v \omega_e (\cos \delta \sin \phi - \sin \delta \cos \phi \cos A) \\ 2v \omega_e \sin \delta \cos \phi \sin A + r \omega_e^2 \sin \delta \cos \delta + \frac{v^2}{r} \cos \phi (\cos \phi \sin^2 A \tan \delta + \sin \phi \cos A) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

O resultado acima combina as derivadas das coordenadas esféricas da velocidade (\dot{v} , \dot{A} e $\dot{\phi}$), com derivadas das coordenadas de posição (\dot{r} e $\dot{\delta}$). As últimas podem ser substituídas a partir das relações de cinemática de translação (equação 19 da aula 20):

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{v} \sin \phi + v \dot{\phi} \cos \phi \\ \dot{v} \cos \phi \sin A - v \dot{\phi} \sin \phi \sin A + v \dot{A} \cos \phi \cos A + v \sin \phi \omega_e \cos \delta - r \frac{v \cos \phi \cos A}{r} \omega_e \sin \delta \\ \dot{v} \cos \phi \cos A - v \dot{\phi} \sin \phi \cos A - v \dot{A} \cos \phi \sin A \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} -\frac{v^2}{r} \cos^2 \phi - 2v \omega_e \cos \phi \sin A \cos \delta - r \omega_e^2 \cos^2 \delta \\ \frac{v^2}{r} \cos \phi \sin A (\sin \phi - \cos \phi \cos A \tan \delta) + v \omega_e (\cos \delta \sin \phi - \sin \delta \cos \phi \cos A) \\ 2v \omega_e \sin \delta \cos \phi \sin A + r \omega_e^2 \sin \delta \cos \delta + \frac{v^2}{r} \cos \phi (\cos \phi \sin^2 A \tan \delta + \sin \phi \cos A) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dot{v} \sin \phi + v \dot{\phi} \cos \phi \\ \dot{v} \cos \phi \sin A - v \dot{\phi} \sin \phi \sin A + v \dot{A} \cos \phi \cos A + v \omega_e \sin \phi \cos \delta - v \omega_e \cos \phi \cos A \sin \delta \\ \dot{v} \cos \phi \cos A - v \dot{\phi} \sin \phi \cos A - v \dot{A} \cos \phi \sin A \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} -\frac{v^2}{r} \cos^2 \phi - 2v \omega_e \cos \phi \sin A \cos \delta - r \omega_e^2 \cos^2 \delta \\ \frac{v^2}{r} \cos \phi \sin A (\sin \phi - \cos \phi \cos A \tan \delta) + v \omega_e (\cos \delta \sin \phi - \sin \delta \cos \phi \cos A) \\ 2v \omega_e \sin \delta \cos \phi \sin A + r \omega_e^2 \sin \delta \cos \delta + \frac{v^2}{r} \cos \phi (\cos \phi \sin^2 A \tan \delta + \sin \phi \cos A) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_x &= \dot{v} \sin \phi + v \dot{\phi} \cos \phi - \frac{v^2}{r} \cos^2 \phi - 2v\omega_e \cos \phi \sin A \cos \delta - r\omega_e^2 \cos^2 \delta \\
a_y &= \dot{v} \cos \phi \sin A - v \dot{\phi} \sin \phi \sin A + v \dot{A} \cos \phi \cos A + 2v\omega_e (\cos \delta \sin \phi - \cos A \sin \delta \cos \phi) \\
&\quad + \frac{v^2}{r} \cos \phi \sin A (\sin \phi - \cos \phi \cos A \tan \delta) \\
a_z &= \dot{v} \cos \phi \cos A - v \dot{\phi} \sin \phi \cos A - v \dot{A} \cos \phi \sin A + 2v\omega_e \sin \delta \cos \phi \sin A \\
&\quad + \frac{v^2}{r} \cos \phi (\cos \phi \sin^2 A \tan \delta + \sin \phi \cos A) + r\omega_e^2 \sin \delta \cos \delta
\end{aligned} \tag{25}$$

Na equação 25, as componentes da aceleração inercial estão expressas no referencial LVLH. Nela, as derivadas das coordenadas de velocidade estão acopladas: em a_x , constam \dot{v} e $\dot{\phi}$; em a_y e a_z constam \dot{v} , \dot{A} e $\dot{\phi}$. Isto faz com que tais equações não determinem de maneira explícita a dinâmica de translação. Uma maneira de explicitar \dot{v} , \dot{A} e $\dot{\phi}$ é pela transformação da aceleração inercial para o referencial do vento:

$$\mathbf{a}_{i_{srv}} = \begin{bmatrix} a_{x_v} \\ a_{y_v} \\ a_{z_v} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{srv}^{lvlh} \mathbf{a}_i \tag{26}$$

Substituindo, na equação 26, a matriz de conversão do referencial LVLH para o SRV, dada pela equação 9, bem como as componentes de aceleração no sistema LVLH dadas pela equação 25 e fazendo os respectivos cálculos, tem-se que as componentes da aceleração inercial no SRV:

$$\begin{bmatrix} a_{x_v} \\ a_{y_v} \\ a_{z_v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \phi & \cos \phi \sin A & \cos \phi \cos A \\ 0 & \cos A & -\sin A \\ -\cos \phi & \sin \phi \sin A & \sin \phi \cos A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$

$$a_{x_v} = \sin \phi a_x + \cos \phi \sin A a_y + \cos \phi \cos A a_z$$

$$a_{y_v} = \cos A a_y - \sin A a_z$$

$$a_{z_v} = -\cos \phi a_x + \sin \phi \sin A a_y + \sin \phi \cos A a_z$$

$$\begin{aligned}
a_{x_v} = & \sin \phi \left(\dot{v} \sin \phi + v \dot{\phi} \cos \phi - \frac{v^2}{r} \cos^2 \phi - 2v\omega_e \cos \phi \sin A \cos \delta - r\omega_e^2 \cos^2 \delta \right) + \\
& \cos \phi \sin A \left(\dot{v} \cos \phi \sin A - v \dot{\phi} \sin \phi \sin A + v \dot{A} \cos \phi \cos A + 2v\omega_e (\cos \delta \sin \phi - \cos A \sin \delta \cos \phi) + \right. \\
& \left. \frac{v^2}{r} \cos \phi \sin A (\sin \phi - \cos \phi \cos A \tan \delta) \right) + \cos \phi \cos A \left(\dot{v} \cos \phi \cos A - v \dot{\phi} \sin \phi \cos A - v \dot{A} \cos \phi \sin A \right. \\
& \left. + 2v\omega_e \sin \delta \cos \phi \sin A + \frac{v^2}{r} \cos \phi (\cos \phi \sin^2 A \tan \delta + \sin \phi \cos A) + r\omega_e^2 \sin \delta \cos \delta \right) \\
a_{x_v} = & \dot{v} (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi \sin^2 A + \cos^2 \phi \cos^2 A) + v \dot{\phi} (\cos \phi \sin \phi - \sin^2 A \sin \phi \cos \phi - \cos^2 A \sin \phi \cos \phi) + \\
& v \dot{A} (\cos^2 \phi \cos A \sin A - \cos^2 \phi \sin A \cos A) + r\omega_e^2 (-\cos^2 \delta \sin \phi + \sin \delta \cos \delta \cos \phi \cos A) + \\
& \frac{v^2}{r} \cos^2 \phi (-\sin \phi + \sin \phi \sin^2 A - \cos \phi \sin^2 A \cos A \tan \delta + \cos \phi \cos A \sin^2 A \tan \delta + \sin \phi \cos^2 A) + \\
& 2v\omega_e (-\cos \phi \sin \phi \sin A \cos \delta + \cos \delta \sin \phi \cos \phi \sin A - \sin A \cos A \sin \delta \cos^2 \phi + \sin \delta \cos^2 \phi \sin A \cos A)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{y_v} = & \cos A \left(\dot{v} \cos \phi \sin A - v \dot{\phi} \sin \phi \sin A + v \dot{A} \cos \phi \cos A + 2v\omega_e (\cos \delta \sin \phi - \cos A \sin \delta \cos \phi) + \right. \\
& \left. \frac{v^2}{r} \cos \phi \sin A (\sin \phi - \cos \phi \cos A \tan \delta) \right) - \sin A \left(\dot{v} \cos \phi \cos A - v \dot{\phi} \sin \phi \cos A - v \dot{A} \cos \phi \sin A + \right. \\
& \left. 2v\omega_e \sin \delta \cos \phi \sin A + \frac{v^2}{r} \cos \phi (\cos \phi \sin^2 A \tan \delta + \sin \phi \cos A) + r\omega_e^2 \sin \delta \cos \delta \right) \\
a_{y_v} = & \dot{v} (\cos \phi \sin A \cos A - \cos \phi \cos A \sin A) + v \dot{\phi} (-\sin \phi \sin A \cos A + \sin \phi \cos A \sin A) + \\
& v \dot{A} (\cos \phi \cos^2 A + \cos \phi \sin^2 A) + 2v\omega_e (\cos \delta \sin \phi \cos A - \cos^2 A \sin \delta \cos \phi - \sin \delta \cos \phi \sin^2 A) + \\
& \frac{v^2}{r} \cos \phi (\sin \phi \sin A \cos A - \cos \phi \sin A \cos^2 A \tan \delta - \cos \phi \sin^2 A \tan \delta \sin A - \sin \phi \cos A \sin A) + \\
& - r\omega_e^2 \sin \delta \cos \delta \sin A
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{z_v} = & -\cos \phi \left(\dot{v} \sin \phi + v \dot{\phi} \cos \phi - \frac{v^2}{r} \cos^2 \phi - 2v\omega_e \cos \phi \sin A \cos \delta - r\omega_e^2 \cos^2 \delta \right) + \\
& \sin \phi \sin A \left(\dot{v} \cos \phi \sin A - v \dot{\phi} \sin \phi \sin A + v \dot{A} \cos \phi \cos A + 2v\omega_e (\cos \delta \sin \phi - \cos A \sin \delta \cos \phi) + \right. \\
& \left. \frac{v^2}{r} \cos \phi \sin A (\sin \phi - \cos \phi \cos A \tan \delta) \right) + \sin \phi \cos A \left(\dot{v} \cos \phi \cos A - v \dot{\phi} \sin \phi \cos A - v \dot{A} \cos \phi \sin A + \right. \\
& \left. 2v\omega_e \sin \delta \cos \phi \sin A + \frac{v^2}{r} \cos \phi (\cos \phi \sin^2 A \tan \delta + \sin \phi \cos A) + r\omega_e^2 \sin \delta \cos \delta \right) \\
a_{z_v} = & \dot{v} (-\sin \phi \cos \phi + \cos \phi \sin \phi \sin^2 A + \cos \phi \sin \phi \cos^2 A) + v \dot{\phi} (-\cos^2 \phi - \sin^2 \phi \sin^2 A - \sin^2 \phi \cos^2 A) \\
& + v \dot{A} (\cos \phi \sin \phi \cos A \sin A - \cos \phi \sin \phi \sin A \cos A) + r\omega_e^2 (\cos^2 \delta \cos \phi + \sin \delta \cos \delta \sin \phi \cos A) + \\
& \frac{v^2}{r} \cos \phi (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi \sin^2 A - \cos \phi \sin \phi \sin^2 A \cos A \tan \delta + \cos \phi \sin \phi \sin^2 A \cos A \tan \delta + \sin^2 \phi \cos^2 A) \\
& + 2v\omega_e (\cos^2 \phi \sin A \cos \delta + \cos \delta \sin^2 \phi \sin A - \cos A \sin A \sin \delta \cos \phi \sin \phi + \sin \delta \cos \phi \sin \phi \sin A \cos A)
\end{aligned}$$

$$a_{x_v} = \dot{v} + r\omega_e^2 \cos \delta (\cos A \sin \delta \cos \phi - \cos \delta \sin \phi) \quad (27)$$

$$a_{y_v} = v \cos \phi \dot{A} + 2v\omega_e (\cos A \cos \delta \sin \phi - \sin \delta \cos \phi) - r\omega_e^2 \sin A \sin \delta \cos \delta - \frac{v^2}{r} \sin A \tan \delta \cos^2 \phi$$

$$a_{z_v} = -v\dot{\phi} + r\omega_e^2 \cos \delta (\cos A \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi) + 2v\omega_e \sin A \cos \delta + \frac{v^2}{r} \cos \phi$$

A equação 27 é o resultado procurado, onde não há acoplamento entre as derivadas \dot{v} , \dot{A} e $\dot{\phi}$. Isto simplifica a aplicação da segunda lei de Newton, facilitando a obtenção de expressões explícitas para as derivadas \dot{v} , \dot{A} e $\dot{\phi}$ a partir das forças atuantes.

4.1 Equações Diferenciais de Dinâmica de Translação

A partir do resultado acima, a segunda lei de Newton é aplicada no referencial SRV. A aceleração inercial da equação 27 é substituída no lado direito da equação 16 (2ª lei de Newton). No lado esquerdo, é desenvolvido o somatório de forças escritas no SRV. As forças resultantes são: aerodinâmica, propulsiva e gravitacional, dadas pelas equações 11, 13 e 15:

$$\begin{bmatrix} -D \\ f_y \\ -L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_T \cos \epsilon \cos \mu \\ f_T \sin \mu \\ -f_T \cos \mu \sin \epsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -mg_c \sin \phi + mg_\delta \cos \phi \cos A \\ -mg_\delta \sin A \\ mg_c \cos \phi + mg_\delta \sin \phi \cos A \end{bmatrix} = m \mathbf{a}_{srv} = m \begin{bmatrix} a_{x_v} \\ a_{y_v} \\ a_{z_v} \end{bmatrix}$$

$$-D + f_T \cos \epsilon \cos \mu - mg_c \sin \phi + mg_\delta \cos \phi \cos A = m (\dot{v} + r\omega_e^2 \cos \delta (\cos A \sin \delta \cos \phi - \cos \delta \sin \phi)) \quad (28)$$

$$f_y + f_T \sin \mu - mg_\delta \sin A = m \left(v \cos \phi \dot{A} + 2v\omega_e (\cos A \cos \delta \sin \phi - \sin \delta \cos \phi) - r\omega_e^2 \sin A \sin \delta \cos \delta - \frac{v^2}{r} \sin A \tan \delta \cos^2 \phi \right) \quad (29)$$

$$-L - f_T \cos \mu \sin \epsilon + mg_c \cos \phi + mg_\delta \sin \phi \cos A = m \left(-v\dot{\phi} + r\omega_e^2 \cos \delta (\cos A \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi) + 2v\omega_e \sin A \cos \delta + \frac{v^2}{r} \cos \phi \right) \quad (30)$$

Explicitando-se \dot{v} , \dot{A} e $\dot{\phi}$ obtém-se as equações diferenciais de **dinâmica de translação**:

$$\dot{v} = \frac{1}{m} (-D + f_T \cos \epsilon \cos \mu - mg_c \sin \phi + mg_\delta \cos A \cos \phi) + r\omega_e^2 \cos \delta (\cos A \sin \delta \cos \phi - \cos \delta \sin \phi) \quad (31)$$

$$\dot{A} = \frac{1}{mv \cos \phi} (f_y + f_T \sin \mu - mg_\delta \sin A) - \frac{1}{v \cos \phi} 2v\omega_e (\cos A \cos \delta \sin \phi - \sin \delta \cos \phi) + \frac{1}{v \cos \phi} \left(r\omega_e^2 \sin A \sin \delta \cos \delta + \frac{v^2}{r} \sin A \tan \delta \cos^2 \phi \right) \quad (32)$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{mv} (L + f_T \cos \mu \sin \epsilon - mg_c \cos \phi - mg_\delta \cos A \sin \phi) + \frac{1}{v} \left(2v\omega_e \sin A \cos \delta + \frac{v^2}{r} \cos \phi + r\omega_e^2 \cos \delta (\cos A \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi) \right) \quad (33)$$

Complementadas com as equações de **cinemática de translação** (equação 19 da aula 20):

$$\dot{r} = v \sin \phi \quad (34)$$

$$\dot{l} = \frac{v \cos \phi \sin A}{r \cos \delta} \quad (35)$$

$$\dot{\delta} = \frac{v \cos \phi \cos A}{r} \quad (36)$$

Na equação 31, os primeiros 4 termos no lado direito são a força de arrasto e as componentes da força propulsiva e gravitacional no eixo x_v do SRV; o termo associado ao produto $r\omega_e^2$ é a componente no eixo x_v da aceleração centrípeta provocada pela rotação do planeta.

Na equação 32, os primeiros 3 termos no lado direito são a força aerodinâmica lateral e as componentes das forças propulsiva e gravitacional no eixo y_v do SRV; a expressão associada ao produto $2v\omega_e$ é a componente no eixo y_v da aceleração de Coriolis resultante da velocidade relativa v com respeito ao planeta girante; já as expressões associadas a $r\omega_e^2$ e $\frac{v^2}{r}$ correspondem às componentes de aceleração centrípeta no eixo y_v devido à rotação do planeta e geometria das coordenadas esféricas, respectivamente.

Na equação 33, os primeiros 4 termos do lado direito correspondem à força de sustentação e as componentes, no eixo z_v do referencial SRV, das forças propulsiva e gravitacional; como no caso anterior, a expressão associada $2v\omega_e$ é a componente de aceleração de Coriolis na direção do eixo z_v ; as expressões associadas a $\frac{v^2}{r}$ e $r\omega_e^2$ são as componentes da aceleração centrípeta no eixo z_v associadas à geometria das coordenadas esféricas e rotação do planeta, respectivamente.

O modelo de mecânica de voo de translação do veículo aeroespacial possui 3 graus de liberdade. Este é um sistema de 6 equações diferenciais não lineares, onde as variáveis de estado são:

- As 3 coordenadas esféricas da posição no referencial PCPF: distância radial r , longitude planetária l e latitude δ ;
- As 3 coordenadas da velocidade relativa expressa no referencial LVLH: magnitude v , azimute de velocidade A e elevação ϕ .

Referências

- [1] J.L. MERIAM and L.G. KRAIGE. *Mecânica para Engenharia: Dinâmica*. LTC-GEN, Rio de Janeiro, 2015.
- [2] A. TEWARI. *Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modelling and simulation with MATLAB and Simulink*. Birkhauser, Boston, 2007.