MECÂNICA DE VOO ESPACIAL - DEM 1119
Aula 3

Prof. André Luís da Silva

1 Introdução

- Problema de N corpos;
- Integrais do movimento;
- Problema de 2 corpos.
- Integrais do movimento de 2 corpos: quantidade de movimento angular específica, vetor excentricidade, energia específica.

Referência da aula [1]: TEWARI, A. Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modelling and simulation with MATLAB and Simulink. Boston: Birkhauser, 2007. Seções 4.4 e 4.5.

O primeiro conteúdo em um curso de mecânica orbital são as órbitas keplerianas, caracterizadas pelo movimento de um ponto de massa com respeito a um corpo central, por exemplo, um planeta ao redor do Sol, ou satélite artificial ao redor da Terra.

Mas, antes deste curso entrar neste assunto, é apresentado um assunto mais geral, do qual o problema kepleriano é um caso particular: o problema de N corpos.

A partir do problema de N corpos, é possível contextualizar as soluções keplerianas, bem como compreender casos mais gerais, como as órbitas perturbadas, ou o problema de 3 corpos restrito.

A seguir, primeiro é apresentada a definição do problema de N corpos, depois o conceito de integrais do movimento e como elas se relacionam com a solução. Em seguida, é apresentada a definição do caso de 2 corpos, situação na qual as integrais do movimento são reescritas, dando origem às integrais do movimento relativo.

2 Problema de N Corpos

O problema da atração gravitacional mútua de um número N de corpos é um caso clássico da Física, Matemática ou Astronomia, sendo investigado por importantes Físicos e Matemáticos ao longo da História.

Este problema consiste em estudar o movimento de corpos suficientemente afastados, de modo que possam ser considerados partículas. Assume-se que a força gravitacional é a única forma de interação entre eles e que o sistema é isolado, de modo que forças externas ao conjunto de N corpos sejam insignificantes.

Esta formulação é muito importante para estudar sistemas planetários, tais como o sistema Solar. Também se aplica ao movimento de satélites naturais ou artificiais.

Apesar de árduos trabalhos realizados por importantes físicos e matemáticos, o problema de N corpos não possui solução analítica. Mas, ele provê as bases para o desenvolvimento de casos mais simples e muito úteis, tais como o problema de 2 corpos e o de 3 corpos restrito, sendo que o primeiro possui solução analítica e o segundo aproximadas.

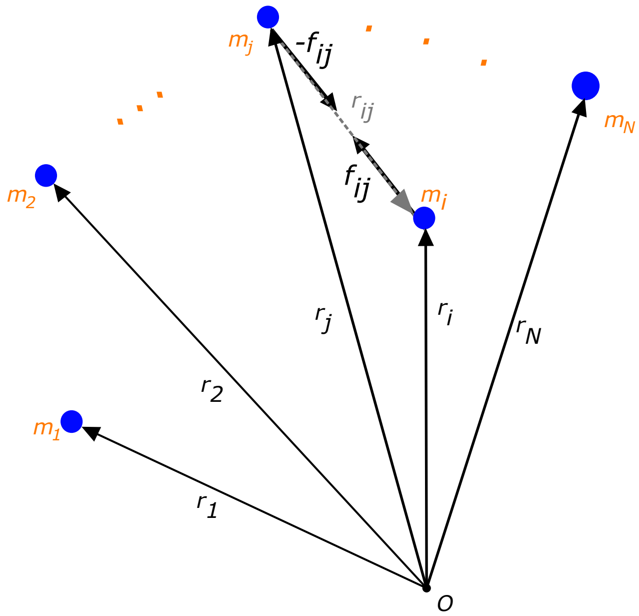

Figura 1: Ilustração do problema de N corpos.

Uma ilustração do problema de N corpos é apresentada na figura 1. As hipóteses que o caracterizam são:

- Assume-se N corpos de massa m_i, $i = 1, 2, \ldots N$;
- Os corpos são suficientemente afastados tal que podem ser considerados partículas de massa pontual;
- Somente forças gravitacionais agem sobre o sistema;
- A força gravitacional externa é assumida nula.

Definições:

- Posição da i-ézima partícula em um referencial inercial: $\mathbf{r}_i$;
- Posição da partícula i com respeito à partícula j: $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$;
- Distância entre as partículas i e j: $r_{ij} = \|\mathbf{r}_{ij}\|$.

Pela lei da atração gravitacional, a força sobre a partícula i exercida por j é:

$$\mathbf{f}_{ij} = \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^3} \left(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\right) \tag{1}$$

A força gravitacional sobre a partícula i devido à ação de todas as demais é:

$$\mathbf{f}_i = \sum_{j=1}^{N,\ j\neq i} \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^3} \left(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\right) \tag{2}$$

Como se assume que as forças que atuam sobre cada partícula são somente as gravitacionais e a posição $\mathbf{r}_i$ é assumida inercial, a segunda lei de Newton aplicada à partícula de massa m_i é:

$$m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \sum_{j=1}^{N,\ j\neq i} \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^3} \left(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\right)$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \sum_{j=1}^{N,\ j\neq i} \frac{Gm_j}{r_{ij}^3} \left(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\right) \tag{3}$$

A equação 3 representa o movimento da partícula i. A incógnita é a posição $\mathbf{r}_i$, mas esta também depende das posições $\mathbf{r}_j,\ j = 1, 2, \ldots N,\ j \neq i$, das demais partículas.

Assim, a solução da posição da partícula i não pode ser determinada sem o conhecimento das posições das demais. Deste modo, é necessário escrever as equações do movimento de todas as N partículas. Isso determina o conjunto de N equações diferenciais de 2ª ordem visto abaixo.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} &= \sum_{j=2}^{N} \frac{Gm_j}{r_{1j}^3} \left(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_1\right) \\
\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} &= \sum_{j=1}^{N,\ j\neq 2} \frac{Gm_j}{r_{2j}^3} \left(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_2\right) \\
&\vdots \\
\frac{d^2\mathbf{r}_N}{dt^2} &= \sum_{j=1}^{N-1} \frac{Gm_j}{r_{Nj}^3} \left(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_N\right)
\end{aligned} \tag{4}$$

Cada equação diferencial no sistema 4 possui 6 variáveis de estado, pois está associada à derivada de segunda ordem de um vetor com 3 componentes. Assim, existem $6N$ variáveis de estado, sendo $3N$ componentes de posição e $3N$ de velocidade. As equações são não lineares, devido aos fatores $\frac{1}{r_{ij}^3}$.

O problema de N corpos é de difícil solução para $N > 2$. De fato, ele possui solução analítica somente para $N = 2$. Para $N = 3$, existem soluções aproximadas. Mas, de modo geral, a solução para $N \geq 2$, até o conhecimento matemático atual, só pode ser determinada por cálculo numérico.

Assim, para se obter um conhecimento analítico do problema, que venha agregar aos métodos de solução numérica, alguns conceitos da mecânica geral são aplicados. Basicamente, os princípios de conservação.

Na sequência, estes princípios são aplicados ao problema de N corpos, começando pela conservação da energia mecânica.

2.1 Conservação da energia mecânica

A energia mecânica é composta pelas energias potencial e cinética, sendo a primeira associada ao potencial gravitacional.

Da aula 1, tem-se que o potencial gravitacional Φ_{ij}, relacionado à atração gravitacional da partícula j sobre a partícula i é:

$$\Phi_{ij} = \frac{Gm_j}{r_{ij}} \tag{5}$$

A **energia potencial** "V_{ij}" da partícula i devido à atração gravitacional da partícula j depende da separação entre elas. Por definição, ela é: o negativo do trabalho necessário para deslocar a partícula m_i desde a situação em que ela está em contato com m_j (distância relativa nula), até a distância atual entre elas:

$$V_{ij} = -m_i \Phi_{ij} \tag{6}$$

Esta maneira de calcular a energia potencial é a mesma vista em cursos de física básica, onde simplesmente multiplica-se o potencial pela massa. O sinal negativo é consequência da definição.

Analogamente, a energia potencial gravitacional "V" do conjunto de N corpos depende das distâncias entre eles. Ela é definida como: o negativo do trabalho necessário para levar todas as partículas desde a situação hipotética onde todas estão em contato, até a sua configuração atual, onde se assumem as distâncias relativas da figura 1.

A partir destas definições, tem-se que a energia potencial total é dada a partir da energia potencial individual como:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N,\ j \neq i} V_{ij}$$

$$V = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N,\ j \neq i} \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}} \tag{7}$$

Demonstração da equação 7:

- No somatório em relação a j, calcula-se a energia potencial da partícula i devido à ação gravitacional de todas as $N-1$ partículas que exercem força gravitacional sobre ela. Neste processo, exclui-se a energia potencial da partícula i sobre ela mesma;

- No somatório em relação a i, soma-se a energia potencial de todas as partículas do sistema;
- O resultado final é divido por dois pela seguinte razão:
  - O trabalho necessário para separar duas partículas i e j deve ser considerado somente uma vez. Assim, se ele já foi contabilizado para a partícula i, não se considera para a partícula j;
  - Para colocar isso em prática na equação 7, faz-se os dois somatórios livremente (sem levar em conta a restrição) e, ao final, divide-se o resultado por 2.

Para dar continuidade à determinação da energia mecânica, agora desenvolve-se a energia cinética "T". Neste sistema de partículas, ela é a soma da energia cinética T_i de cada partícula individual, que é dada por:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 \tag{8}$$

Onde v_i é a magnitude do vetor velocidade $\mathbf{v}_i$

$$v_i = \|\mathbf{v}_i\| \tag{9}$$

O vetor $\mathbf{v}_i$ é a **velocidade inercial** da partícula i:

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \tag{10}$$

Assim, pode-se escrever a energia cinética total do sistema de partículas como:

$$T = \sum_{i=1}^{N} T_i$$

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 \tag{11}$$

Conhecendo-se a energia potencial e a cinética do sistema de partículas, a energia mecânica "E" é dada pela definição:

$$E = T + V$$

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N,\ j \neq i} \frac{G m_i m_j}{r_{ij}} \tag{12}$$

Como a força gravitacional é conservativa, tem-se que a energia mecânica é conservada:

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N,\ j\neq i}\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}} = constante \tag{13}$$

2.2 Integral do movimento

A equação 13 fornece um importante vínculo ao problema de N corpos. Ela é uma relação escalar que reduz a ordem do sistema de equações diferenciais 4 em uma unidade. Ou seja: esta relação pode ser usada para substituir uma variável de estado no sistema, escrevendo ela em função das demais, eliminando uma equação diferencial de primeira ordem.

Este tipo de processo é muito importante em sistemas de equações diferenciais não lineares de alta ordem, pois quando a ordem é reduzida, sua solução analítica se torna mais factível.

Na resolução de um sistema de equações diferenciais, o efeito de se obter uma equação algébrica que fornece um vínculo analítico entre as variáveis de estado é equivalente a: *calcular a integral da derivada de uma variável de estado*, pois o resultado disto é exatamente *uma expressão algébrica igualada a uma constante*. Por isso, sempre que uma propriedade como esta é obtida, a grandeza física envolvida (aquela que é igual a uma constante) é chamada de **integral do movimento**.

■ Assim, no problema de N corpos, a energia mecânica E é uma integral do movimento.

2.3 Conservação da quantidade de movimento angular

Outra grandeza avaliada no problema de N corpos é a quantidade de movimento angular, ou simplesmente "momento angular"[1].

Para determinar a quantidade de movimento angular "$\mathbf{H}$" do sistema de N corpos, inicia-se por aquela associada à i-ézima partícula, denotada por $\mathbf{H}_i$:

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \tag{14}$$

esta equação é uma definição onde:

- $\mathbf{v}_i$ é a velocidade inercial da partícula;
- $\mathbf{r}_i$ é um vetor posição com respeito a um ponto de referência arbitrário, que deve estar no mesmo referencial inercial com respeito ao qual a velocidade é definida;
- Neste caso, assumiu-se que $\mathbf{r}_i$ é o próprio vetor posição da figura 1.
- Intuitivamente, $\mathbf{r}_i$ é o "braço de alavanca" da quantidade de movimento angular.

[1]Nos cursos de física básica, costuma-se utilizar a nomenclatura "momento angular", mas o termo original em inglês (onde a maioria da literatura técnica está escrita) é *angular momentum*. "Momentum" não tem tradução para português, a expressão que mais se aproxima seria "quantidade de movimento", que passa a impressão de algo que se move.

Uma vez definida a quantidade de movimento angular de uma partícula, a quantidade de movimento angular do sistema é simplesmente a soma daquelas de todas as partículas:

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{H}_i$$

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i \tag{15}$$

Na segunda lei de Newton para a rotação de um sistema de partículas, a derivada da quantidade de movimento angular total, com respeito a um referencial inercial, é igual à soma de todos os momentos externos que agem sobre ele:

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \sum \mathbf{M}_{ext} \tag{16}$$

No problema de N corpos, assumiu-se que as forças externas sobre o sistema são nulas. Assim, somente as forças internas geram momento. Mas, pela lei da ação e reação de Newton, estes cancelam-se mutuamente. Então, a seguinte propriedade conservativa vale para a quantidade de movimento angular do sistema:

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = 0 \tag{17}$$

Isto significa que a quantidade de movimento angular total é constante:

$$\mathbf{H} = constante \tag{18}$$

Ou:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = constante \tag{19}$$

A equação 19 estabelece um sistema de 3 equações algébricas, que geram acoplamento entre as posições e velocidades inerciais do sistema de N corpos.

O vínculo promovido pela relação de conservação mostra que a *quantidade de movimento angular total* $\mathbf{H}$ é outra *integral do movimento.*

Assim como no caso da energia mecânica, a conservação da quantidade de movimento angular reduz a ordem do sistema de equações diferenciais. Mas, neste caso, são 3 unidades no grau do sistema de equações, o que equivale a integrar três variáveis de estado.

Assim, juntando as *integrais* do movimento E e $\mathbf{H}$, o sistema de equações diferenciais tem a sua ordem reduzida para $6N - 4$.

2.4 Conservação da quantidade de movimento linear

Analogamente à quantidade de movimento angular, pode-se desenvolver uma relação de conservação para a quantidade de movimento linear (ou momento linear) "**P**" do sistema de partículas.

Primeiro avalia-se a quantidade de movimento linear $\mathbf{P}_i$ da i-ézima partícula:

$$\mathbf{P}_i = m_i \mathbf{v}_i \tag{20}$$

onde $\mathbf{v}_i$ é a velocidade inercial da partícula.

Assim, a quantidade de movimento linear total é:

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}_i$$

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i \tag{21}$$

A segunda lei de Newton estabelece que a taxa de variação da quantidade de movimento linear do sistema, com respeito a um referencial inercial, é igual ao somatório de forças externas agindo sobre ele:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum \mathbf{F}_{ext} \tag{22}$$

Como foi assumido que a força externa resultante sobre o sistema é nula, a taxa de variação da quantidade de movimento linear é zero:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 \tag{23}$$

Ou seja, a quantidade de movimento linear do sistema é conservada, sendo igual a uma constante:

$$\mathbf{P} = constante \tag{24}$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i = constante \tag{25}$$

A quantidade de movimento linear total pode ser escrita em termos do centro de massa (CM):

$$\mathbf{P} = M \mathbf{v}_0 \tag{26}$$

Onde M é a massa total do sistema ($M = \sum_{i=1}^{N} m_i$) e $\mathbf{v}_0$ é a velocidade do CM.

Assim, substituindo a quantidade de movimento linear da equação 26 na equação 24:

$$M\mathbf{v}_0 = constante \tag{27}$$

Como o sistema é isolado, a massa total M é uma constante. Logo, conclui-se que **a velocidade do centro de massa do sistema de N corpos é constante em um referencial inercial**:

$$\mathbf{v}_0 = constante \tag{28}$$

Da definição de velocidade do centro de massa, tem-se a seguinte relação:

$$\mathbf{v}_0 = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{v}_i$$

$$\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{v}_i = constante \tag{29}$$

A equação 29 estabelece outro vínculo entre as variáveis de estado do problema. Trata-se de equação vetorial que gera um sistema de três equações algébricas, o qual reduz a ordem do sistema de equações diferenciais em 3 unidades. Por tal razão, a *velocidade do centro de massa* é outra *integral do movimento.*

Agregando os princípios de conservação da energia mecânica, momento angular e momento linear, a ordem das equações diferenciais é reduzida em 7 unidades.

2.5 Trajetória do centro de massa

Outras relações algébricas podem ser obtidas com facilidade a partir da velocidade do CM. Da relação cinemática entre posição e velocidade tem-se que:

$$\frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \mathbf{v}_0 \tag{30}$$

Onde $\mathbf{r}_0$ é a posição do CM no referencial inercial.

Integrando a equação 30 em relação ao tempo, obtém-se

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{c} + \mathbf{v}_0 t \tag{31}$$

Onde $\mathbf{c}$ é uma constante vetorial, a posição do CM no referencial inercial em $t = 0$.

Pela equação 31, o CM apresenta uma trajetória retilínea no referencial inercial[2]. Esta equação é outra relação algébrica que define um vínculo entre as variáveis de estado do sistema.

[2]Notadamente, esta afirmação não é rigorosamente verdadeira. Por exemplo, o centro de massa do sistema solar orbita em torno do centro de massa da galáxia. Mas, o movimento retilíneo uniforme é uma boa aproximação para intervalos de tempo suficientemente curtos.

Uma forma de evidenciar isso é pela própria definição de posição do CM:

$$\mathbf{r}_0 = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{r}_i = \mathbf{c} + \mathbf{v}_0 t \tag{32}$$

A constante $\mathbf{c}$, a posição do CM em $t = 0$, é outra *integral do movimento*. Assim, a equação 32 gera 3 equações algébricas que vinculam as variáveis de estado, reduzindo em 3 unidades a ordem do sistema de equações diferenciais.

Algumas observações interessantes cabem às constantes $\mathbf{c}$ e $\mathbf{v}_0$:

- Se a origem do referencial inercial em $t = 0$ for o próprio CM, então $\mathbf{c} = 0$;
- Como não há diferença entre o repouso absoluto e uma velocidade inercial constante, é possível definir $\mathbf{v}_0 = 0$;
- Ou seja: **assumir que o CM do sistema é a própria origem do referencial inercial**.

2.6 Conclusão

Agregando as relações associadas às constantes $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{H}$ e E, o sistema de equações diferencias passa a ser restringido por 10 equações algébricas, o que reduz a sua ordem para $6N - 10$.

Se o problema for de 2 corpos: $6N - 10 = 2$. Neste caso, ainda restam 2 equações diferenciais no sistema após a substituição dos vínculos algébricos.

Na sequência, o problema de 2 corpos é tratado. Ao longo do processo, se obtém mais 2 ***integrais do movimento***, o que propicia sua solução analítica.

3 Problema de 2 Corpos

Em um problema gravitacional de N corpos, chama-se de **primários** os corpos que possuem a maior atração gravitacional mútua.

Em um problema de 2 corpos, o interesse encontra-se no movimento dos primários m_1 e m_2, assumindo-se que a influência gravitacional dos demais $N - 2$ corpos é desprezível.

Uma representação geométrica do problema de 2 corpos é mostrada na figura 2.

A partir do equacionamento já elaborado para o problema de N corpos, tem-se que o sistema de equações diferenciais vetoriais do problema de 2 corpos é:

$$\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = \frac{Gm_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{r_{21}^3} \tag{33}$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = \frac{Gm_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{r_{21}^3} \tag{34}$$

Onde $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ são os vetores posição das massas m_1 e m_2 com respeito a um referencial inercial.

Este problema possui 12 incógnitas, sendo 6 coordenadas de posição e 6 de velocidade.

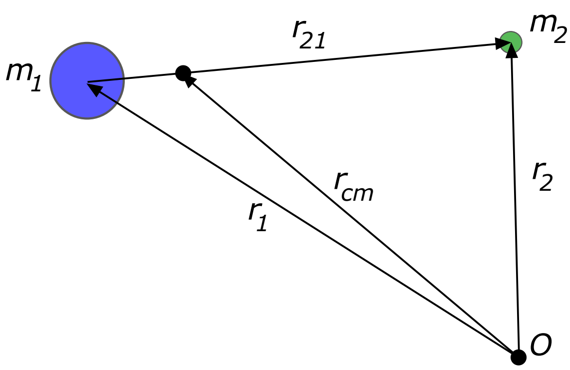

Figura 2: Geometria do problema de dois corpos, posições absolutas de cada corpo, posição do centro de massa e posição relativa.

Ao invés de desenvolver o problema no sistema inercial, encontrando as posições e velocidades absolutas de m_1 e m_2, é buscada a **posição relativa de m_2 com respeito a m_1**. Nesta situação, as incógnitas são somente 6, ou seja, as 3 coordenadas de posição e 3 de velocidade relativa.

Esta simplificação não significa uma perda de generalidade, visto que, no problema de N corpos, a posição e velocidade inerciais do centro de massa do sistema são integrais do movimento, sendo a velocidade constante e a trajetória retilínea no espaço inercial. Então, na prática, ao estudar a posição relativa de m_2 em relação a m_1,*é perdida a informação do movimento absoluto do centro de massa do sistema, que é um movimento retilíneo uniforme.*

Subtraindo a equação 33 da equação 34 e fazendo algumas manipulações simples, obtém-se a equação da dinâmica do movimento relativo de m_2 com respeito a m_1:

$$\frac{d^2\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{dt^2} = -\frac{G(m_1 + m_2)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{r_{21}^3} \tag{35}$$

O vetor posição relativa é dado por: $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, apontando da partícula m_1 para m_2. Então:

$$\frac{d^2\mathbf{r}_{21}}{dt^2} = -\frac{G(m_1 + m_2)\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3} \tag{36}$$

A notação do equacionamento pode ficar menos carregada, sem perda de generalidade, fazendo-se $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{21}$. Além disso, define-se a **constante μ do problema de 2 corpos**:

$$\mu = G(m_1 + m2)$$

Assim:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mu\mathbf{r}}{r^3} \tag{37}$$

Deste modo, chega-se na seguinte equação diferencial homogênea:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\mu\mathbf{r}}{r^3} = 0 \tag{38}$$

A equação diferencial 38 é não linear, neste sentido, a sua solução não é encontrada por meios usuais. Nos problemas de atração gravitacional, em especial o problema de 2 corpos, **a técnica das integrais do movimento é adotada**.

Não se pode aplicar diretamente os resultados das integrais do movimento vistas na aula 2, pois eles foram desenvolvidos para o movimento absoluto, enquanto que o problema de 2 corpos é desenvolvido para o movimento relativo. Assim, é necessário reescrever as equações.

3.1 Quantidade de Movimento Angular Específica

Primeiro, busca-se uma propriedade para a quantidade de movimento angular. Neste sentido, toma-se o produto vetorial por $\mathbf{r}$ nos dois lados da equação 38:

$$\mathbf{r} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \mathbf{r} \times \frac{\mu\mathbf{r}}{r^3} = 0 \tag{39}$$

A derivada $d\mathbf{r}/dt$ é o vetor velocidade relativa de m_2 com respeito a m_1: $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, ilustrado na figura 3. Substituindo ele e a identidade $\mathbf{r} \times \mathbf{r} = 0$, a equação 39 resulta em:

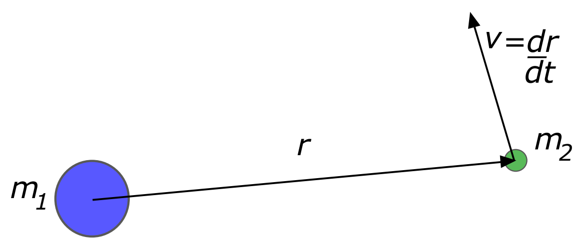

Figura 3: Posição e velocidade relativas de m_2 com respeito a m_1.

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 \tag{40}$$

Usando a regra do produto das derivadas, a equação 40 é escrita como

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{r} \times \mathbf{v}}{dt} - \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r} \times \mathbf{v}}{dt} - \mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0 \tag{41}$$

Assim obtém-se a seguinte propriedade para o vetor $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$:

$$\frac{d\mathbf{r} \times \mathbf{v}}{dt} = 0 \tag{42}$$

O vetor $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ é o **vetor quantidade de movimento angular específica** do problema, que tem unidade de quantidade de movimento angular por unidade de massa:

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \tag{43}$$

Rigorosamente falando, $\mathbf{h}$ é a quantidade de movimento angular por unidade de massa do *movimento relativo* de m_2 com respeito a m_1.

Então, a equação 42 significa que **a quantidade de movimento angular específica é conservada**:

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = 0 \tag{44}$$

Como o vetor $\mathbf{h}$ é constante, duas interpretações podem ser tiradas:

- A direção de $\mathbf{h}$ é constante: logo o plano normal ao vetor $\mathbf{h}$ possui uma orientação imutável no espaço inercial. Isso significa que a trajetória definida pelos vetores $\mathbf{r}$ e $\mathbf{v}$ é plana. Em outras palavras: o movimento relativo de m_2 com respeito a m_1 é plano;

- O módulo de $\mathbf{h}$ é constante: isso expressa uma propriedade cinemática, cuja demonstração requer uma interpretação minuciosa dos vetores envolvidos.

Para investigar a magnitude de $\mathbf{h}$, escolhe-se um sistema de coordenadas polares, uma vez que a trajetória é plana, tal como ilustrado na figura 4.

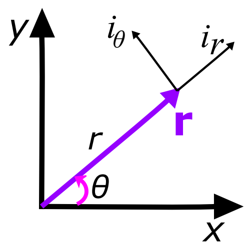

Figura 4: Sistema de coordenadas polares.

As coordenadas polares são a distância radial r e o ângulo polar θ. Em função dos vetores unitários $\mathbf{i}_r$ e $\mathbf{i}_\theta$ destas coordenadas, os vetores posição e velocidade são dadas por:

$$\mathbf{r} = r\mathbf{i}_r \tag{45}$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr\mathbf{i}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\mathbf{i}_r + r\frac{d\mathbf{i}_r}{dt} \tag{46}$$

A derivada do vetor unitário $\mathbf{i}_r$ é dada em função do vetor $\mathbf{i}_\theta$:

$$\frac{d\mathbf{i}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\mathbf{i}_\theta$$

Assim, a equação 46 é reescrita como:

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt}\mathbf{i}_r + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{i}_\theta \tag{47}$$

Então, o vetor quantidade de movimento angular específica é:

$$\mathbf{h} = r\mathbf{i}_r \times \left(\frac{dr}{dt}\mathbf{i}_r + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{i}_\theta\right) = r^2\frac{d\theta}{dt}\mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_\theta$$

$$\mathbf{h} = r^2\frac{d\theta}{dt}\mathbf{k}$$

Onde $\mathbf{k} = \mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_\theta$ é o vetor unitário normal ao plano do movimento.

Assim, a magnitude da quantidade de movimento angular específica é:

$$h = r^2\dot{\theta} \tag{48}$$

Assim, a magnitude de $\mathbf{h}$ constante significa que:

$$r^2\dot{\theta} = \text{constante} \tag{49}$$

O significado de $r^2\dot{\theta}$ está relacionado com a **segunda Lei de Kepler**, onde define-se a **velocidade areolar**, de acordo com a equação 50 e figura 5:

$$\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} \tag{50}$$

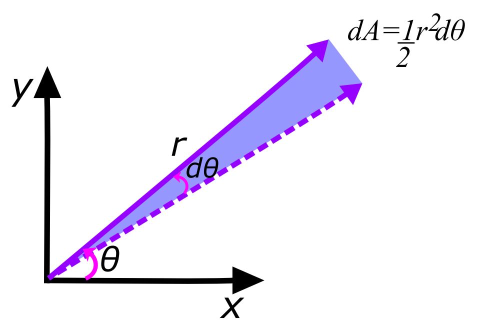

Figura 5: Incremento infinitesimal de área em coordenadas polares.

Então, a magnitude de $\mathbf{h}$ constante é uma forma alternativa de escrever a segunda Lei de Kepler, que afirma que a velocidade areolar é constante:

$$\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \text{constante} \tag{51}$$

Para chegar neste resultado usando a quantidade de movimento angular específica, não foi colocada nenhuma restrição sobre o tipo de trajetória. Assim sendo, esta propriedade é válida para qualquer solução do problema de 2 corpos, não somente a trajetória elíptica mencionada nas leis de Kepler.

3.2 Vetor Excentricidade

A equação 44 define 3 integrais do movimento, sendo necessárias mais 3 para a solução completa do movimento relativo. Outras relações podem ser obtidas tomando o produto vetorial de $\mathbf{h}$ dos dois lados da equação 38:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \times \mathbf{h} + \frac{\mu \mathbf{r} \times \mathbf{h}}{r^3} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{h} + \frac{\mu \mathbf{r} \times \mathbf{h}}{r^3} = 0 \tag{52}$$

Como $\mathbf{h}$ é um vetor constante:

$$\frac{d\mathbf{v} \times \mathbf{h}}{dt} + \frac{\mu \mathbf{r} \times \mathbf{h}}{r^3} = 0 \tag{53}$$

Para obter, na equação 53, uma propriedade relativa a uma derivada igual a zero, é necessário escrever o segundo termo da soma como uma derivada. Para isso, substitui-se $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ e utiliza-se a fórmula do triplo produto vetorial: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$. O resultado é:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{h} = \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} \tag{54}$$

Pelos vetores em coordenadas polares: $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = r\mathbf{i}_r \cdot (\dot{r}\mathbf{i}_r + r\dot{\theta}\mathbf{i}_\theta) = r\dot{r}$. Então:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{h} = r\dot{r}\mathbf{r} - r^2\mathbf{v} \tag{55}$$

Logo, o segundo termo na equação 53 é dado por:

$$\frac{\mu \mathbf{r} \times \mathbf{h}}{r^3} = \frac{\mu}{r^3}\left(r\dot{r}\mathbf{r} - r^2\mathbf{v}\right) = \mu\left(\frac{\dot{r}}{r^2}\mathbf{r} - \frac{\mathbf{v}}{r}\right)$$

$$\frac{\mu \mathbf{r} \times \mathbf{h}}{r^3} = -\mu\left(\frac{\mathbf{v}}{r} - \dot{r}\frac{\mathbf{r}}{r^2}\right) \tag{56}$$

O termo entre parêntesis do lado direito na equação 56 é a derivada de $\mathbf{r}/r$, como demonstrado abaixo:

$$\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{1}{r}\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{r}\frac{d}{dt}\frac{1}{r} = \frac{1}{r}\mathbf{v} + \mathbf{r}\frac{-\dot{r}}{r^2}$$

Então:

$$\frac{\mu \mathbf{r} \times \mathbf{h}}{r^3} = -\mu\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{57}$$

Substituindo o resultado da equação 57 na equação 53:

$$\frac{d\mathbf{v}\times\mathbf{h}}{dt}+\frac{\mu\mathbf{r}\times\mathbf{h}}{r^3}=\frac{d\mathbf{v}\times\mathbf{h}}{dt}-\mu\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{r}}{r}=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}\times\mathbf{h}-\mu\frac{\mathbf{r}}{r}\right)=0 \tag{58}$$

Então, chega-se na seguinte identidade envolvendo um vetor constante:

$$\mathbf{v}\times\mathbf{h}-\mu\frac{\mathbf{r}}{r}=constante \tag{59}$$

Ou seja, o vetor "$\mathbf{v}\times\mathbf{h}-\mu\frac{\mathbf{r}}{r}$" é **outra integral do movimento**. Devido a sua importância, ele é definido como:

$$\mu\mathbf{e}=\mathbf{v}\times\mathbf{h}-\mu\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{60}$$

A quantidade vetorial $\mathbf{e}$ é chamada de ***vetor excentricidade***:

$$\mathbf{e}=\frac{1}{\mu}\mathbf{v}\times\mathbf{h}-\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{61}$$

3.3 Energia Específica

Aparentemente, a relação 59 gera mais 3 relações algébricas. No entanto, como ela depende de $\mathbf{h}$, existe um acoplamento com esta variável, gerando somente 2 equações algébricas desacopladas. Logo, falta mais uma integral do movimento. Esta está associada com a energia mecânica do movimento relativo, como desenvolvido abaixo.

O produto escalar entre $\mathbf{e}$ e $\mathbf{h}$ é:

$$\mathbf{e}\cdot\mathbf{h}=\left(\frac{1}{\mu}\mathbf{v}\times\mathbf{h}-\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\cdot\mathbf{h}=\frac{1}{\mu}\mathbf{v}\times\mathbf{h}\cdot\mathbf{h}-\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{h}}{r} \tag{62}$$

Devidos às propriedades dos produtos vetorial e escalar, os dois termos no lado direito da equação 62 são nulos, então $\mathbf{e}\cdot\mathbf{h}=0$. Isso mostra que $\mathbf{e}$ é normal a $\mathbf{h}$, ou seja, $\mathbf{e}$ é um **vetor contido no plano da trajetória**. Assim, $\mathbf{h}$ e $\mathbf{e}$ formam um par de dois vetores ortogonais que são constantes no espaço inercial.

A magnitude do vetor $\mathbf{e}$ é a **excentricidade** da trajetória, expressa mediante a seguinte relação:

$$e^2=\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}=\left(\frac{1}{\mu}\mathbf{v}\times\mathbf{h}-\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\cdot\left(\frac{1}{\mu}\mathbf{v}\times\mathbf{h}-\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$$

$$e^2=\frac{1}{\mu^2}\mathbf{v}\times\mathbf{h}\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{h}-\frac{2}{\mu r}\mathbf{v}\times\mathbf{h}\cdot\mathbf{r}+\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}}{r^2} \tag{63}$$

Como $\mathbf{v}$ e $\mathbf{h}$ são ortogonais, $|\mathbf{v} \times \mathbf{h}| = vh$, então: $\mathbf{v} \times \mathbf{h} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{h} = |\mathbf{v} \times \mathbf{h}|^2 = v^2h^2$. Também, pelo comutatividade do produto misto: $\mathbf{v} \times \mathbf{h} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = h^2$. Então:

$$e^2 = \frac{1}{\mu^2} v^2 h^2 - \frac{2h^2}{\mu r} + 1 \tag{64}$$

Ou:

$$1 - e^2 = \frac{2h^2}{\mu r} - \frac{v^2 h^2}{\mu^2} = \frac{h^2}{\mu} \left(\frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu} \right) \tag{65}$$

Agora, define-se outras duas constantes, ambas com dimensão de comprimento: ***parâmetro*** p:

$$p = \frac{h^2}{\mu} \tag{66}$$

e constante ***semi eixo maior*** a:

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu} \tag{67}$$

Da equação 65, as constantes a e p estão relacionadas por:

$$p = (1 - e^2)a \tag{68}$$

Pela definição da constante a, **outra integral do movimento** é obtida (a sexta integral do problema de 2 corpos):

$$\epsilon \equiv -\frac{\mu}{2a}$$

$$\epsilon = -\frac{\mu}{2} \left(\frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu} \right)$$

$$\epsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \tag{69}$$

Na equação 69:

- $\frac{v^2}{2}$ é a **energia cinética do movimento relativo por unidade de massa**;
- $-\frac{\mu}{r}$ é a **energia potencial por unidade de massa do movimento relativo**.
- Assim, ϵ é a **energia mecânica específica do movimento relativo**, a qual é conservada.

Não se pode confundir ϵ com E. Uma vez que ϵ é a energia mecânica por unidade de massa do movimento relativo, enquanto que E é a energia total do movimento absoluto das duas partículas.

A energia específica contribui na avaliação física do tipo de trajetória:

- Uma **órbita limitada** é aquela na qual a energia cinética relativa por unidade de massa é menor que a magnitude da energia potencial específica. Então, as trajetórias limitadas possuem $\epsilon < 0$, ou $a > 0$;

- Uma **trajetória de escape** é verificada quando a energia cinética relativa específica é maior ou igual à energia potencial específica, ou seja $\epsilon < 0$, ou $a < 0$.

Estas relações também podem ser escritas em função da excentricidade e. A partir da equação 68:

$$p = (1 - e^2)a \quad \rightarrow \quad (1 - e^2) = \frac{p}{a} \quad \rightarrow \quad e^2 = 1 - \frac{p}{a}$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}} \tag{70}$$

Como o parâmetro p é sempre positivo (em virtude da equação 66):

- para trajetórias limitadas: $e < 1$ (pois $a > 0$);

- para trajetórias de escape: $e > 1$ (pois $a < 0$).

Referências

[1] A. TEWARI. *Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modelling and simulation with MATLAB and Simulink*. Birkhauser, Boston, 2007.