

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
CURSO DE BACHARELADO EM ENGENHARIA AEROESPACIAL

Augusto Pozzebon, Lucas Lira Sasset, Luiz Henrique Schaffazick,  
Mathias Dietrich

**TRABALHO 1:**  
**MECÂNICA DE VOO ESPACIAL**

Santa Maria, RS  
2023

Augusto Pozzebon, Lucas Lira Sassett, Luiz Henrique Schaffazick, Mathias Diettrich

**TRABALHO 1:**  
MECÂNICA DE VOO ESPACIAL

Orientador: Prof. André Luis da Silva

Santa Maria, RS  
2023

**Augusto Pozzebon, Lucas Lira Sasset, Luiz Henrique Schaffazick, Mathias Diettrich**

**TRABALHO 1:**  
**MECÂNICA DE VOO ESPACIAL**

**Aprovado em 14 de maio de 2023:**

---

**André Luis da Silva, Dr. (AAAA)**  
**(Presidente/Orientador)**

Santa Maria, RS  
2023

## **RESUMO**

### **TRABALHO 1: MECÂNICA DE VOO ESPACIAL**

**AUTOR:** Augusto Pozzebon, Lucas Lira Sasset, Luiz Henrique Schaffazick, Mathias Dietrich  
**Orientador:** André Luis da Silva

Este trabalho explora o complexo campo da mecânica de voo orbital através de uma abordagem pragmática e computacional, utilizando a linguagem de programação Python. O estudo se concentra na compreensão e resolução de uma variedade de tópicos relevantes, incluindo o cálculo da gravidade de um planeta axissimétrico, a propagação da órbita, a determinação da órbita, as manobras orbitais, as órbitas perturbadas e o problema de três corpos restrito. As aplicações práticas desses conceitos na engenharia aeroespacial são discutidas em detalhes, destacando a importância da mecânica de voo orbital para o progresso da exploração espacial. Os resultados obtidos reafirmam a eficácia da abordagem computacional, com as soluções dos exercícios propostos demonstrando sucesso e precisão.

**Palavras-chave:** Mecânica de Voo Orbital. Programação Python. Aplicações práticas.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Sistema de referência com origem no centro de massa do corpo $M$ .....	11
Figura 2 – Modelo de corpo axissimétrico e sistema de coordenadas esféricas .....	13
Figura 3 – Referencial celeste e ângulos de Euler do plano orbital .....	27
Figura 4 – Coordenadas celestes esféricas e horizonte local .....	29
Figura 5 – Referencial girante fixo ao planeta e horizonte local .....	31
Figura 6 – Manobra Impulsiva generalizada .....	35
Figura 7 – Diagrama de velocidades em uma manobra impulsiva. ....	36
Figura 8 – Transferência bi impulsiva entre órbitas elípticas. ....	37
Figura 9 – Transferência de Hohman. ....	37
Figura 10 – Órbita hélio síncrona. ....	45
Figura 11 – Órbita Moliya. ....	46
Figura 12 – Diagrama da atração gravitacional entre 3 corpos. ....	47
Figura 13 – Ilustração da esfera de influência do primário $m_1$ . ....	48
Figura 14 – Comparação entre as componentes da gravidade para um planeta esférico e um axis simétrico. ....	62
Figura 15 – Propagação de órbita elíptica. ....	64
Figura 16 – Propagação de órbita hiperbólica. ....	65
Figura 17 – Propagação de órbita parabólica. ....	66
Figura 18 – Comparação Órbita com Perturbação e Órbita Kepleriana .....	71
Figura 19 – Caso a .....	72
Figura 20 – Caso b .....	73
Figura 21 – .....	74
Figura 22 – Caso c .....	75
Figura 23 – Caso d .....	76
Figura 24 – Caso f .....	77
Figura 25 – Caso g .....	78

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – Resultados Exemplo 5.2 -Determinação de Órbita .....	67
TABELA 2 – Resultados Exemplo 5.6.....	68
TABELA 3 – Elementos Orbitais da Orbita Resultante - Exemplo 5.7 .....	68
TABELA 4 – Resultados Exemplo 5.8.....	69
TABELA 5 – .....	69
TABELA 6 – Componentes de Velocidade Relativa.....	72

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>METODOLOGIA.....</b>	<b>10</b>
2.1	CÁLCULO DA GRAVIDADE DE PLANETA AXISSIMÉTRICO .....	10
2.1.1	Força gravitacional para massas pontuais .....	10
2.1.2	Força gravitacional para corpos contínuos .....	10
2.1.3	Força gravitacional para corpos axissimétricos .....	12
2.1.4	Cálculo do campo gravitacional em coordenadas esféricas .....	15
2.1.5	Raio de um planeta não esférico .....	15
2.1.6	Vertical local .....	15
2.1.7	Anomalias gravitacionais .....	16
2.2	CÁLCULO DE PROPAGAÇÃO DE ÓRBITA .....	16
2.2.1	Problema de N corpos .....	16
2.2.2	Conservação da energia mecânica .....	17
2.2.3	Conservação da quantidade de movimento angular e linear.....	18
2.2.4	Trajetória do centro de massa .....	18
2.2.5	Problema de 2 corpos .....	19
2.2.6	Excentricidade .....	20
2.2.7	Equação de órbita: geometria das soluções de problemas de dois corpos	21
2.2.8	Órbitas elípticas, parabólicas e hiperbólicas.....	21
2.2.9	Coeficientes de Lagrange.....	22
2.2.10	Equação diferencial para propagação da anomalia verdadeira .....	23
2.2.11	Propagação de órbita elíptica .....	23
2.2.12	Propagação de órbita hiperbólica .....	25
2.2.13	Propagação de órbita parabólica .....	25
2.3	CÁLCULO DE DETERMINAÇÃO DE ÓRBITA .....	26
2.3.1	Referencial Celeste e elementos orbitais .....	26
2.3.2	Coordenadas esféricas Celestes e Horizonte Local .....	28
2.3.3	Equações de navegação: velocidade e posição .....	29
2.3.4	Referencial fixo ao planeta .....	30
2.3.5	Elementos orbitais no plano orbital .....	31
2.3.6	Órbita elíptica.....	32
2.3.7	Órbita parabólica.....	32
2.3.8	Órbita hiperbólica .....	33
2.3.9	Parâmetros de orientação da órbita com respeito ao referencial Celeste ..	33
2.4	MANOBRAS ORBITAIS.....	34
2.4.1	Manobras Mono Impulsivas .....	34

2.5	MANOBRAS ORBITAIS COM IMPULSO ÚNICO .....	34
2.5.1	<b>Manobras Multi Impulsivas</b> .....	36
2.5.1.1	Manobra bi Impulsiva e Elipse de Transferência .....	36
2.5.2	<b>Transferência de Hohmann</b> .....	37
2.6	ÓRBITAS PERTURBADAS .....	39
2.6.1	<b>Aceleração Perturbativa</b> .....	39
2.6.2	<b>Efeito do Achatamento dos Pólos</b> .....	41
2.6.2.1	Equações Planetárias de Lagrange .....	41
2.6.3	<b>Variações dos Elementos Orbitais com Achatamento dos Pólos</b> .....	43
2.6.4	<b>Órbita Hélio Síncrona</b> .....	45
2.6.5	<b>Órbita Moliya</b> .....	45
2.7	ÓRBITAS PERTURBADAS .....	46
2.7.1	<b>Perturbação de 3<sup>o</sup> corpo</b> .....	46
2.7.2	<b>Esfera de Influência e Aproximação por Seções Cônicas</b> .....	47
2.7.2.1	Esfera de Influência .....	50
2.7.3	<b>Efeito do arrasto atmosférico</b> .....	50
2.8	PROBLEMA DE 3 CORPOS .....	52
2.8.1	<b>Equações do Movimento</b> .....	52
2.8.2	<b>Solução de Lagrange</b> .....	53
2.8.3	<b>Problema Restrito de 3 Corpos</b> .....	53
3	<b>IMPLEMENTAÇÃO</b> .....	55
3.1	IMPLEMENTAÇÃO AULA 2 .....	55
3.2	IMPLEMENTAÇÃO AULA 6 .....	56
3.3	IMPLEMENTAÇÃO AULA 8 .....	57
3.4	IMPLEMENTAÇÃO AULA 10 .....	58
3.5	IMPLEMENTAÇÃO AULA 13 .....	59
3.6	IMPLEMENTAÇÃO AULA 14 .....	60
4	<b>INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS</b> .....	62
4.1	CÁLCULO DA GRAVIDADE DE PLANETA AXIS SIMÉTRICO .....	62
4.2	PROPAGAÇÃO DE ÓRBITA .....	63
4.2.1	<b>Órbita elíptica</b> .....	63
4.2.2	<b>Órbita hiperbólica</b> .....	64
4.2.3	<b>Órbita parabólica</b> .....	65
4.3	DETERMINAÇÃO DE ÓRBITA .....	66
4.4	MANOBRAS ORBITAIS .....	67
4.4.1	<b>Exemplo 5.6</b> .....	67
4.4.2	<b>Exemplo 5.7</b> .....	68
4.4.3	<b>Exemplo 5.8</b> .....	69
4.4.4	<b>Exemplo 5.9</b> .....	69



4.5	ÓRBITAS PERTURBADAS .....	70
4.5.1	<b>Exemplo 6.1</b> .....	<b>70</b>
4.5.2	<b>Exemplo 6.2</b> .....	<b>70</b>
4.6	PROBLEMA DE 3 CORPOS RESTRITO .....	71
5	<b>CONCLUSÃO</b> .....	<b>79</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>80</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A mecânica de voo orbital é um campo crucial dentro da engenharia aeroespacial, que tem visto um crescente interesse em função do aumento da exploração espacial e do desenvolvimento de tecnologias de satélites. Embora a teoria subjacente seja bem estabelecida, a natureza complexa do ambiente espacial e as numerosas variáveis envolvidas tornam a modelagem e o cálculo das trajetórias orbitais um desafio contínuo. Este trabalho busca desenvolver uma compreensão mais aprofundada desta área, focando na resolução de exercícios práticos com a ajuda de códigos em Python, a fim de demonstrar e validar os conceitos teóricos em um contexto aplicado.

O trabalho se divide em vários tópicos principais, cada um deles tratando um aspecto específico da mecânica de voo orbital. A abordagem adotada envolve a identificação dos principais desafios em cada área, a formulação de soluções através da codificação em Python e a subsequente validação dessas soluções. Essa abordagem pragmática e orientada para soluções permite uma compreensão mais profunda e aplicável dos conceitos, ao mesmo tempo em que demonstra o valor da programação como ferramenta na resolução de problemas complexos em engenharia aeroespacial.

Os resultados obtidos ao longo deste trabalho confirmam o sucesso da abordagem computacional. As soluções propostas para os exercícios demonstram não apenas a viabilidade da utilização de Python para resolver problemas de mecânica de voo orbital, mas também a precisão e a eficácia dessas soluções. Consequentemente, este trabalho serve como uma valiosa contribuição para a engenharia aeroespacial, oferecendo uma compreensão aprofundada da mecânica de voo orbital e destacando o potencial do Python como uma ferramenta eficaz para a solução de problemas complexos na área.

## 2 METODOLOGIA

### 2.1 CÁLCULO DA GRAVIDADE DE PLANETA AXISSIMÉTRICO

#### 2.1.1 Força gravitacional para massas pontuais

Para o caso de massas pontuais  $m_1$  e  $m_2$ , existe uma força gravitacional  $\mathbf{f}$  que é exercida por ambas as massas e atua sob ambas as massas com mesmo módulo e direção, porém com sentido contrário para cada uma. A equação 2.1 é a formulação da força  $\mathbf{f}$  pela lei da gravitação universal de Newton, sendo  $G = 6,67259(\pm 0,0003) \times 10^{-11}$  a constante gravitacional e  $r$  a distância entre as massas. É possível também descrever a força gravitacional em termos da aceleração da gravidade  $g$  da massa  $m_2$ .

$$\mathbf{f} = -G \frac{m_2 m_1}{r^2} \quad (2.1)$$

Assim, o módulo da força  $\mathbf{f}$  é inversamente proporcional ao quadrado da distância  $r$ , porém esse é o resultado elementar, apenas para massas pontuais, pois no caso de corpos com distribuições não simétricas de massa ocorrem variações na magnitude ou direção da gravidade, influenciando a precisão dos cálculos.

#### 2.1.2 Força gravitacional para corpos contínuos

Então, para tratar de corpos contínuos com distribuição genérica de massa, é aplicada a equação anterior quando considerada a força exercida sobre uma massa pontual, porém é necessário que o corpo contínuo possa ser aproximado por uma discretização de  $N$  massas pontuais, sendo que quanto maior o  $N$ , mais precisa é a aproximação. Portanto, a força resultante que o corpo contínuo  $M$  exerce sobre a massa pontual é a soma vetorial das forças provocadas por todas as massas discretas  $m_i, i = 1, 2, \dots, N$ , como mostrado na equação 2.2.

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i = m \sum_{i=1}^N \mathbf{g}_i \quad (2.2)$$

É possível, sem perda de generalidade, transformar esse problema para o campo escalar, isso pois o campo gravitacional é conservativo, levando à definição do potencial gravitacional, mostrado na equação 2.3, representando o potencial gravitacional da massa

$m_i$  sobre a massa  $m$ .

$$\Phi_i = \frac{Gm_i}{r_{mi}} \quad (2.3)$$

A partir do gradiente do potencial gravitacional é possível definir a aceleração da gravidade provocada pelo corpo  $m_i$ . Portanto, a aceleração da gravidade  $\mathbf{g}$  resultante sobre o corpo de massa  $m$  é dada pela equação 2.4.

$$\mathbf{g} = \sum_{i=1}^N \mathbf{g}_i = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \Phi_i}{\partial \mathbf{r}_{mi}} \quad (2.4)$$

É interessante trabalhar com somas discretas (2.4) para poucos termos ou sistemas realmente discretos, porém, nesse caso, a discretização é de um corpo contínuo, então pode-se tomar o limite de  $N \rightarrow \infty$ , ou seja, as massas pontuais  $m_i$  em elementos infinitesimais de massa  $dm$ , assim, a soma discreta 2.4 converge para uma integral de volume sobre toda a matéria do corpo  $M$ .

Para desenvolver matematicamente, é necessário aprofundar a modelagem do problema, o que pode ser feito estabelecendo uma geometria de referência, mostrada na figura 1. É tido um sistema de referência  $X, Y, Z$ , com origem no centro de massa (cm) do corpo contínuo. É mostrado um elemento de massa infinitesimal  $dm$  que possui um vetor posição  $\rho$ , que substitui o vetor posição  $\mathbf{r}_i$  do elemento discreto  $m_i$ , sendo que a posição da massa pontual  $m$  com respeito ao novo referencial é o vetor  $\mathbf{r}$ . Assim, a posição da massa discreta com respeito ao elemento  $dm$  é  $\mathbf{s} = \mathbf{r} - \rho$ .

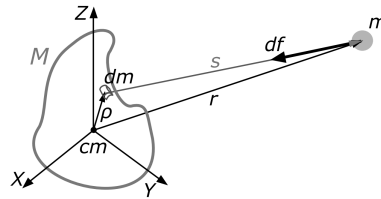


Figura 1 – Sistema de referência com origem no centro de massa do corpo  $M$

Fonte: (??)

Assim, o potencial gravitacional do elemento  $dm$  sobre a massa  $m$  é dado pela equação 2.5, onde  $s = ||\mathbf{s}||$  é a magnitude do vetor  $\mathbf{s}$ . A aceleração da gravidade  $\mathbf{g}_i$  provocada pela massa  $m_i$  é convertida na aceleração  $d\mathbf{g}$  do elemento  $dm$ , e quando substituído nas equações, retorna a equação 2.6.

$$d\Phi = \frac{Gdm}{s} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{g} = \int_M G \frac{\partial \frac{1}{s}}{\partial \mathbf{s}} dm = G \int_M \frac{\partial \frac{1}{s}}{\partial \mathbf{s}} dm \quad (2.6)$$

Essa integral é tomada sobre toda a massa  $M$ , enquanto o vetor  $\mathbf{s}$  varia em função da posição  $\rho$  do elemento  $dm$ . É importante notar que a facilidade trazida anteriormente pelo potencial escalar  $\Phi$  é eliminada pois a integral é de um campo vetorial devido ao gradiente ser calculado com respeito a  $\mathbf{s}$ . Porém, quando consideramos a origem do referencial no  $cm$  do corpo  $M$ , é possível utilizar a seguinte simplificação: se o  $cm$  do corpo  $M$  estiver suficientemente longe da massa  $m$ , a força gravitacional resultante atuará na direção do centro de massa, portanto, é possível trocar o gradiente com respeito ao vetor  $\mathbf{s}$  pelo gradiente com respeito ao vetor  $\mathbf{r}$ , resultando na equação 2.7, que permite a simplificação da derivada, resultando na equação 2.8.

$$\mathbf{g} = G \int_M \frac{\partial_1}{\partial \mathbf{r}} dm \quad (2.7)$$

$$\mathbf{g} = G \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int_M \frac{1}{s} dm = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} G \int_M \frac{1}{s} dm \quad (2.8)$$

Assim, com a definição de potencial, o potencial gravitacional sobre a massa  $m$  resultante do efeito do corpo  $M$  é dada pela equação 2.9.

$$\Phi = G \int_M \frac{1}{s} dm, \text{ onde } \mathbf{g} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} \quad (2.9)$$

### 2.1.3 Força gravitacional para corpos axissimétricos

A abordagem apresentada anteriormente é genérica. No caso de um corpo axissimétrico, é necessário assumir um modelo de corpo axissimétrico e também um sistema de coordenadas esféricas, como mostrado na figura 2, na qual, associado à massa pontual  $m$ , é definido um sistema de referência local, onde  $\mathbf{i}_r$  é um vetor diretor na direção radial,  $\mathbf{i}_\phi$  é um vetor diretor normal a  $\mathbf{i}_r$  (contido no plano  $Z - \mathbf{i}_r$  e apontando para baixo), e  $\mathbf{i}_\theta$  sendo paralelo ao plano equatorial e apontando no sentido horário do arco associado ao ângulo  $\theta$ , completando assim a tríade ortonormal dextrógira. Ainda na figura 2, existe um eixo  $Z$  alinhado com o eixo de simetria do corpo  $M$ , sendo que os eixos  $X$  e  $Y$  estão contidos no seu plano equatorial (plano normal ao eixo de simetria, com máxima área de seção transversal do corpo). As coordenadas esféricas são escolhidas devido ao problema ter simetria axial, sendo que as coordenadas da massa  $dm$  são distância radial  $\rho$ , colatitude  $\beta$  e longitude  $\lambda$ , com as coordenadas análogas da massa  $m$  sendo  $r$ ,  $\phi$  e  $\theta$ .

Para calcular o potencial gravitacional resultante, a distância  $s$  é escrita com respeito ao sistema de coordenadas adotado, utilizando a lei dos cossenos. Substituindo nas equações anteriores, é obtida a equação 2.10, a qual pode ser calculada tomando a expansão em série de polinômios de *Legendre* (equação 2.11), que é convergente para  $\rho \leq r$ , e

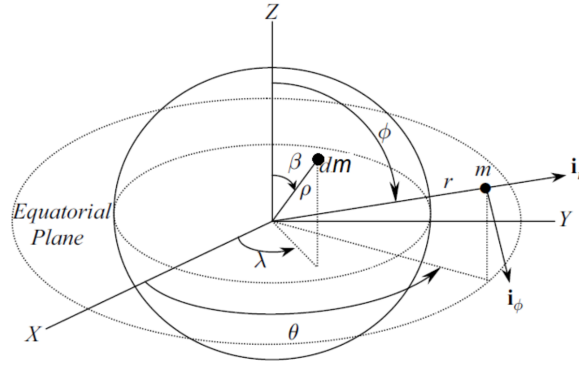


Figura 2 – Modelo de corpo axissimétrico e sistema de coordenadas esféricas  
Fonte: (SILVA, 2023)

possui forma compacta (pela relação recursiva) como mostrado na equação 2.12.

$$\Phi = \int_M \frac{G}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\gamma)}} dm \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\gamma)}} = \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{\rho}{r} \cos \gamma + \frac{1}{2} \left( \frac{\rho}{r} \right)^2 (3 \cos^2 \gamma - 1) + \frac{1}{2} \left( \frac{\rho}{r} \right)^3 (5 \cos^3 \gamma - 3 \cos \gamma) + \dots \right\} \quad (2.11)$$

$$P_n(\nu) = \frac{(2n-1)\nu P_{n-1} - (n-1)P_{n-2}(\nu)}{n} \quad (2.12)$$

Usando a notação de polinômios de Legendre, a expansão em série pode ser escrita como mostrado na equação 2.13, fazendo com que o potencial gravitacional seja dado pela equação 2.14.

$$\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\gamma)}} = \frac{1}{r} \left\{ P_0 \cos \gamma + \frac{\rho}{r} P_1(\cos \gamma) \left( \frac{\rho}{r} \right)^2 P_2(\cos \gamma) + \dots + \left( \frac{\rho}{r} \right)^n P_n(\cos \gamma) + \dots \right\} \quad (2.13)$$

$$\Phi = \frac{G}{r} \int_M \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\rho}{r} \right)^n P_n(\cos \gamma) dm = \frac{G}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \int_M \left( \frac{\rho}{r} \right)^n P_n(\cos \gamma) dm \quad (2.14)$$

Para os termos  $n = 0$  e  $n = 1$ , é simples resolver, pois para  $n = 1$  a integral é nula devido a simetria, enquanto para  $n = 0$  a resposta é dada simplesmente pela massa total, levando ao resultado do potencial gravitacional de uma distribuição esférica de massa, mostrada na equação 2.15.

$$\Phi_0 = \frac{GM}{r} \quad (2.15)$$

Para calcular os demais termos, o elemento de massa da integral precisa ser escrito em coordenadas polares, o que é feito a partir do elemento de volume neste sistema

de coordenada, porém devido a hipótese do corpo axissimétrico, não há dependência de  $D(\rho, \beta, \lambda)$  com a longitude  $\lambda$ , portanto, a função é tomada somente com respeito a  $\rho$  e  $\beta$ , resultando na equação 2.16.

$$dm = D(\rho, \beta) \rho^2 \sin \beta d\rho d\beta d\lambda \quad (2.16)$$

É necessário ainda escrever o ângulo  $\gamma$  nas coordenadas de  $dm$  e  $m$ , assim, utilizando geometria esférica,  $\gamma$  é dado pela equação 2.17, porém, para o caso axissimétrico,  $\gamma$  não depende da longitude de  $dm$  e  $m$ , independentemente assim de  $\theta$  e  $\lambda$ , sendo válido o resultado mostrado na equação 2.18.

$$\cos \gamma = \cos \beta \cos \phi + \sin \beta \sin \phi \cos(\theta - \lambda) \quad (2.17)$$

$$P_n(\cos \gamma) = P_n(\cos \beta) P_n(\cos \phi) \quad (2.18)$$

Então, o potencial gravitacional do corpo axissimétrico é dado pela equação 2.19.

$$\Phi = \frac{GM}{r} + \frac{G}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{P_n \cos(\phi)}{r^n} \int_{\rho=0, \beta=0, \lambda=0}^{\rho=R_e, \beta=\pi, \lambda=2\pi} \rho^n P_n(\cos \beta) D(\rho, \beta) \rho^2 \sin \beta d\rho d\beta d\lambda \quad (2.19)$$

Uma solução consolidada para o problema envolve escrever o somatório como mostrado na equação 2.20, que possui os coeficiente  $A_n$  dados pela equação 2.21.

$$\Phi(r, \phi) = \frac{GM}{r} + \frac{1}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_n P_n \cos(\phi)}{r^n} \quad (2.20)$$

$$A_n = G \int_{\rho=0, \beta=0, \lambda=0}^{\rho=R_e, \beta=\pi, \lambda=2\pi} \rho^{n+2} P_n(\cos \beta) D(\rho, \beta) \sin \beta d\rho d\beta d\lambda \quad (2.21)$$

Na equação 2.22 é mostrada a expressão final do potencial gravitacional, na qual os coeficientes  $A_n$  são trocados por  $J_n$  (equação 2.23), chamados de constantes de *Jeffery*, que são parâmetros da expansão em harmônicos esféricos para o caso do corpo axissimétrico, além disso, aparece a variável  $R_e$ , que é o raio equatorial do planeta. É importante notar que cada planeta possui valores intrínsecos das constantes de *Jeffery*, e em geral, apenas os quatro primeiros termos da soma são necessários ( $n = 2, 3, 4, 5$ ), que diminuem conforme o grau  $n$  aumenta. As constantes representam os desvios do campo gravitacional provocados pela variação da distribuição de massa quando comparado ao caso esférico.

$$\Phi(r, \phi) = \frac{GM}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{R_e}{r} \right)^n J_n P_n(\cos \phi) \right\} \quad (2.22)$$

$$J_n = -\frac{A_n}{GM R_e^n} \quad (2.23)$$

#### 2.1.4 Cálculo do campo gravitacional em coordenadas esféricas

Em coordenadas esféricas, o cálculo do gradiente da função potencial é dado pela equação 2.24.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} i_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} i_\phi + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} i_\theta \quad (2.24)$$

#### 2.1.5 Raio de um planeta não esférico

No caso do raio polar  $R_p$  ser inferior ao raio equatorial  $R_e$ , é necessário definir uma representação confiável da superfície média do nível do mar, que serve como referência para determinar variações de altitude na superfície, sendo que pontos de grande variação de altitude podem gerar anomalias gravitacionais locais. O raio local  $R$  é o raio que define a superfície de um elipsoide de referência, e é definido em função da latitude centrada no planeta. o raio local pode ser calculado pela equação 2.25, onde  $\epsilon$  é a elipticidade do planeta, que geralmente é um número de pequeno valor, fazendo com que a equação seja simplificada à equação 2.26.

$$R = R_e \left[ 1 - \frac{\epsilon}{2}(1 - \cos 2\delta) + \frac{5\epsilon^2}{16}(1 - \cos 4\delta) - \dots \right], \epsilon = 1 - \frac{R_p}{R_e} \quad (2.25)$$

$$R \approx R_e \left( 1 - \frac{\epsilon}{2}(1 - \cos 2\delta) \right) \quad (2.26)$$

#### 2.1.6 Vertical local

A vertical local, definida como a direção normal à superfície de referência em determinado ponto, é medida a partir do elipsoide padrão tratado, e é utilizada para determinar pequenos desvios encontrados nas direções radial e vertical em planetas não esféricos. O desvio da vertical local  $D$  é a diferença angular entre a vertical local real e a de aproximação esférica, sendo que para o caso elipsoidal, o desvio é dado pela expansão em série mostrada na equação 2.27, na qual geralmente apenas os dois primeiros termos são



considerados.

$$D = \epsilon \sin 2\delta - \frac{\epsilon^2}{4} \sin 2\delta + 2\epsilon^2 \sin 2\delta \sin^2 \delta + \dots \quad (2.27)$$

### 2.1.7 Anomalias gravitacionais

As anomalias gravitacionais são resultado da distribuição de massa real do planeta, que diferem do modelo axissimétrico, que fisicamente são superfícies equipotenciais (com contorno de potencial gravitacional constante). Quando maior precisão é necessária, os efeitos setoriais e tesserais (variações longitudinais na distribuição de massa e descrevem formas relacionadas com meridianos e paralelos) são considerados. Além disso, existem efeitos locais, como dito anteriormente. Quando é preciso levar em conta as pequenas variações gravitacionais, são utilizados os harmônicos esféricos, que são escritos a partir de funções de *Legendre* ( $P_n^m$ ) de ordem  $m$  e grau  $n$ , que podem ser relacionados com os polinômios pela equação 2.28, ou seja, os polinômios de Legendre são funções de Legendre de ordem zero.

$$P_n = P_n^0 \quad (2.28)$$

Em um modelo gravitacional geral, os coeficientes dessa expansão são dados por  $C_n^m$ , sendo que as constantes de Jeffery são o negativo desses coeficientes de ordem zero do mesmo grau, como mostrado na equação 2.29, sendo estes chamados de coeficientes harmônicos zonais. Todos os coeficientes com ordem  $m \neq 0$ , são associados com a distribuição não axissimétrica de massa, determinando a variação longitudinal da gravidade, sendo que os coeficientes de ordem  $m = n$  são chamados de coeficientes harmônicos setoriais, e os de ordem  $m \neq n$  de coeficientes harmônicos tesserais.

$$J_n = -C_n^0 \quad (2.29)$$

## 2.2 CÁLCULO DE PROPAGAÇÃO DE ÓRBITA

### 2.2.1 Problema de N corpos

O problema de  $N$  corpos trata sobre o movimento de corpos suficientemente afastados, a ponto de serem considerados partículas. Assim, a única força de interação entre

eles é a força gravitacional. Para esse problema, são assumidos  $N$  corpos de massa  $m_i$ , sendo que somente as forças gravitacionais agem sobre o sistema, e a força gravitacional externa é nula. A variável  $r_i$  representa a posição da  $i$ -ésima partícula em um referencial inercial, enquanto a posição da partícula  $i$  com respeito à partícula  $j$  é dado por  $r_{ij} = r_i - r_j$ , sendo a distância entre elas o módulo de  $r_{ij}$ . Aplicando a lei da atração gravitacional, é obtido um conjunto de  $N$  equações diferenciais de segunda ordem, mostrados na equação 2.30, onde cada equação possui 6 variáveis de estado devido a associação à derivada de segunda ordem de um vetor com 3 componentes. Portanto, existem  $6N$  variáveis de estado, com  $3N$  de posição e  $3N$  de velocidade, e devido ao componente  $\frac{1}{r_{ij}^3}$ , as equações são não lineares.

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2} = \sum_{j=2}^N \frac{Gm_j}{r_{1j}^3} (r_j - r_1), \quad \frac{d^2 r_2}{dt^2} = \sum_{j=1}^{N, j \neq 2} \frac{Gm_j}{r_{2j}^3} (r_j - r_2), \quad \dots, \quad \frac{d^2 r_N}{dt^2} = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{Gm_j}{r_{Nj}^3} (r_j - r_N) \quad (2.30)$$

Para  $N > 2$ , a solução se torna um problema, sendo possível apenas por cálculo numérico. Assim, são aplicados conceitos de conservação de energia para ter um maior significado analítico.

## 2.2.2 Conservação da energia mecânica

A energia mecânica é composta pelas energias potencial e cinética, portanto, para definir a energia mecânica, é necessário definir a energia potencial e a energia cinética. A energia potencial pode ser encontrada utilizando o potencial gravitacional mencionado anteriormente e também o conceito de energia potencial (que por definição, é o negativo do trabalho necessário para deslocar a partícula  $m_i$  desde a situação em que ela está em contato com  $m_j$ , até a distância atual entre elas), que para  $N$  corpos é dada pela equação 2.31.

$$V = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N, j \neq i} \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}} \quad (2.31)$$

A energia cinética é relacionada com o conceito de energia cinética para um sistema de partículas na qual cada partícula possui sua velocidade inercial  $v_i$ , assim, a energia cinética total do sistema é dada pela equação 2.32.

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (2.32)$$

A energia mecânica então é dada por  $E = T + V$ , como mostrado na equação 2.33,

sendo que devido a força gravitacional ser conservativa, a energia mecânica é conservada.

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{G m_i m_j}{r_{ij}} = \text{constante} \quad (2.33)$$

### 2.2.3 Conservação da quantidade de movimento angular e linear

A quantidade de movimento angular do sistema é dada pela soma daquelas de todas as partículas, como mostrado na equação 2.34, e possui valor constante devido a propriedade conservativa já que as forças internas que geram momento se cancelam. Assim, a quantidade de movimento angular total  $H$  é outra integral de movimento, assim como  $E$ . Integral do movimento é o nome dado para uma propriedade que resulta em uma expressão algébrica igualada a uma constante. Dessa forma, juntando as integrais do movimento  $E$  e  $H$ , a ordem do sistema de equações diferenciais é reduzida para  $6N - 4$ .

$$H = \sum_{i=1}^N m_i r_i \times v_i = \text{constante} \quad (2.34)$$

Para a quantidade de movimento linear, ocorre de maneira semelhante, sendo dado pela equação 2.35.

$$P = \sum_{i=1}^N m_i v_i = \text{constante} \quad (2.35)$$

A quantidade de movimento linear total do sistema pode ser escrito em termos do centro de massa  $CM$ , assim, a velocidade do centro de massa do sistema de  $N$  corpos é constante em um referencial inercial. Utilizando a definição da velocidade de centro de massa  $v_0$ , é possível obter outra integral do movimento, dada pela equação 2.36, fazendo com que a ordem das equações diferenciais sejam reduzidas em 7 unidades.

$$v_0 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i v_i = \text{constante} \quad (2.36)$$

### 2.2.4 Trajetória do centro de massa

Utilizando a velocidade do  $CM$  com a relação cinemática entre posição e velocidade é possível obter uma equação muito útil para a posição do  $CM$ , dada pela equação 2.37, a qual mostra que uma constante vetorial  $c$  é o próprio  $CM$  quando  $t = 0$ , sendo

assim outra integral de movimento.

$$r_0 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i r_i = c + v_0 t \quad (2.37)$$

Portanto, utilizando as relações das constantes  $v_0, c, H, E$ , o sistema de equações diferenciais passa a ser restringido por 10 equações algébricas, o que reduz sua ordem para 6N-10, portanto, no caso de dois corpos, ainda restam duas equações diferenciais no sistema.

### 2.2.5 Problema de 2 corpos

Para dois corpos, se obtém a equação diferencial homogênea 2.38, na qual  $\mu = G(m_1 + m_2)$  e  $r = r_{21} = r_2 - r_1$ .

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{\mu r}{r^3} = 0 \quad (2.38)$$

Para resolver essa equação, são utilizados os conceitos de integral de movimento. Inicialmente, se procura uma propriedade para a quantidade de movimento angular. Usando o produto vetorial por  $r$  em ambos os lados da equação anterior e usando o vetor velocidade junto da identidade  $r \times r = 0$ , é obtida a equação 2.39, que é o vetor quantidade de movimento angular específica, que tem unidade de quantidade de movimento angular por unidade de massa  $h = r \times v$ , na qual  $h$  é a quantidade de movimento angular por unidade de massa do movimento relativo de  $m_2$  com respeito a  $m_1$  e possui valor constante, ou seja, a quantidade de movimento angular específica é conservada, fazendo com que a trajetória definida pelos vetores  $r$  e  $v$  seja plana.

$$\frac{dr \times v}{dt} = 0 \quad (2.39)$$

Em coordenadas polares (distância radial  $r$  e ângulo polar  $\theta$ ), o vetor quantidade de movimento angular específica é dado pela equação 2.40, onde  $i_r$  e  $i_\theta$  são os vetores unitários dessas coordenadas, e  $k = i_r \times i_\theta$  é o vetor unitário normal ao plano do movimento.

$$h = r i_r \times \left( \frac{dr}{dt} i_r + r \frac{d\theta}{dt} i_\theta \right) = r^2 \frac{d\theta}{dt} i_r \times i_\theta \quad (2.40)$$

Assim, a magnitude da quantidade de movimento angular específica é dada pela equação 2.41, que está relacionada com a segunda Lei de Kepler, que define a velocidade areolar, dada pela equação 2.42, que afirma que a velocidade areolar é constante. Além disso, essa propriedade é válida para qualquer solução do problema de dois corpos, não

apenas a trajetória elíptica mencionada nas Leis de Kepler.

$$h = r^2 \dot{\theta} = \text{constante} \quad (2.41)$$

$$\dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \quad (2.42)$$

## 2.2.6 Excentricidade

A equação 2.43 mostra o vetor excentricidade, que é obtido a partir de uma integral de movimento dada pela equação 2.44.

$$e = \frac{1}{\mu} v \times h - \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.43)$$

$$v \times h - \mu \frac{\mathbf{r}}{r} = \text{constante} \quad (2.44)$$

A excentricidade da trajetória é dada pela equação 2.45, a partir das quais se definem duas constantes, o parâmetro  $p$  e o semi eixo maior  $a$ , dados pela equação 2.46, e relacionados pela equação 2.47. Pela definição de  $a$ , outra integral do movimento é obtida, mostrada na equação 2.48, a qual mostra a energia mecânica específica do movimento relativo ( $\epsilon$ ) em função da energia cinética do movimento relativo por unidade de massa ( $v^2/2$ ) e da energia potencial por unidade de massa do movimento relativo ( $-\mu/r$ ).

$$1 - e^2 = \frac{2h^2}{\mu r} - \frac{v^2 h^2}{\mu^2} = \frac{h^2}{\mu} \left( \frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu} \right) \quad (2.45)$$

$$p = \frac{h^2}{\mu}, \quad \frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu} \quad (2.46)$$

$$p = (1 - e^2)a \quad (2.47)$$

$$\epsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \quad (2.48)$$

Algumas conclusões são obtidas analisando as equações. Uma órbita limitada é aquela na qual a energia cinética relativa por unidade de massa é menor que a magnitude da energia potencial específica, ou seja,  $\epsilon < 0$  ou  $a > 0$ . Uma trajetória de escape é aquela na qual a energia relativa específica é maior ou igual à energia potencial específica, ou seja,  $\epsilon > 0$  ou  $a < 0$ . A excentricidade também pode ser escrita em termos de  $p$  e  $a$ , como

mostrado na equação 2.49.

$$e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}} \quad (2.49)$$

### 2.2.7 Equação de órbita: geometria das soluções de problemas de dois corpos

Para determinar a geometria das soluções, é necessário definir a projeção do vetor posição sobre a direção inercial definida por  $e$ , o que pode ser feito a partir do produto escalar entre o vetor  $\mu e$  e a posição  $r$ . Realizando isso, é obtida a equação 2.50, que pode ser representada em coordenadas polares, resultando na equação 2.51, que define a geometria das trajetórias, sendo chamada de equação de órbita. Qualquer trajetória do problema de dois corpos deve satisfazê-la, sendo caracterizada pela anomalia verdadeira.

$$e \cdot \mathbf{r} + r = \frac{h^2}{\mu} \quad (2.50)$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (2.51)$$

É importante também definir a decomposição do vetor velocidade, dada pela equação 2.52, que possui duas componentes, dados pela equação 2.53. É possível ainda obter o ângulo de trajetória  $\phi$  a partir da equação 2.54.

$$\mathbf{v} = v \cos \phi i_\theta + v \sin \phi i_r \quad (2.52)$$

$$\cos(\phi) = \frac{\mu(1 + e \cos \theta)}{h v}, \quad \sin(\phi) = \frac{\mu e \sin \theta}{h v} \quad (2.53)$$

$$\tan \phi = \frac{e \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \quad (2.54)$$

### 2.2.8 Órbitas elípticas, parabólicas e hiperbólicas

Para a órbita elíptica, as distâncias de periastro  $r_p$  e apoastro  $r_a$  são calculadas quando  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ , sendo válidas quando  $e < 1$ , obtendo assim as equações mostradas em 2.55, que são válidas para  $a > 0$ , obtendo assim uma órbita elíptica. Pode-se verificar também que para  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $p$  é a distância normal da linha dos apsides até a trajetória medida a partir do foco. Existe também um vetor que aponta desde o foco até a órbita ao longo da

linha de apsides, ou seja, do foco até o periastro. Esse vetor é dado pela equação 2.56.

$$r_p = (1 - e)a, \quad r_a = (1 + e)a \quad (2.55)$$

$$q = \left( \frac{1}{e} - 1 \right) a \quad (2.56)$$

Para a órbita parabólica ( $e = 1$  devido ao periastro para  $\theta = 0$ ), é obtida a equação 2.57, que mostra que a órbita é de escape, com apoastro indefinido.

$$r_p = \frac{p}{2}, \quad q = \frac{p}{2} \quad (2.57)$$

Para a órbita hiperbólica ( $e > 1$ ), o periastro novamente é definido para  $\theta = 0$ , resultando na equação 2.58.

$$r_p = -a(e - 1), \quad q = -a \left( 1 - \frac{1}{e} \right) \quad (2.58)$$

### 2.2.9 Coeficientes de Lagrange

Os coeficientes de Lagrange servem para determinar a posição e velocidade a partir de uma condição inicial de posição e velocidade do referencial perifocal (definido ao longo dos eixos gerados pelos vetores unitários  $i_e$  e  $i_p$ , sendo o plano definido por estes o plano orbital, e tendo  $i_h$  normal à órbita) em qualquer órbita do problema de dois corpos. A velocidade escrita no sistema perifocal é dada pela equação 2.59, enquanto a posição é dada pela equação 2.60.

$$\mathbf{v} = v \sin \phi i_r + v \cos \phi i_\theta \quad (2.59)$$

$$\mathbf{r} = r \cos \theta i_e + r \sin \theta i_p \quad (2.60)$$

Obtendo uma transformação da posição e velocidade no sistema perifocal a partir de condições iniciais conhecidas e determinando seus valores para uma anomalia verdadeira  $\theta$  genérica, são definidos os coeficientes de Lagrange. Após equacionar utilizando matrizes e também as definições descritas anteriormente, é encontrado uma matriz escrita no sistema perifocal, sendo seus elementos os coeficientes de Lagrange. A matriz é mostrada na equação 2.61, junto de seus coeficientes (equação 2.62).

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f & g \\ \dot{f} & \dot{g} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_0 \\ v_0 \end{Bmatrix} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned}
f &\equiv 1 + \frac{r}{p} [\cos(\theta - \theta_0) - 1] \\
g &\equiv \frac{rr_0}{h} \sin(\theta - \theta_0) \\
\dot{f} &\equiv \frac{df}{dt} = -\frac{h}{p^2} [\sin(\theta - \theta_0) + e(\sin\theta - \sin\theta_0)] \\
\dot{g} &\equiv \frac{dg}{dt} = 1 + \frac{r_0}{p} [\cos(\theta - \theta_0) - 1]
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Assim, o objetivo é encontrar a posição e velocidade no referencial perifocal associadas a uma anomalia verdadeira  $\theta$  genérica a partir de uma condição inicial  $v_0$  e  $r_0$  associada a uma anomalia verdadeira inicial  $\theta_0$ . Os coeficientes dependem das constantes  $e$ ,  $p$  e  $h$ . Essa matriz também é chamada de matriz de transição de estado.

### 2.2.10 Equação diferencial para propagação da anomalia verdadeira

A equação 2.63 é uma equação diferencial que geralmente é resolvida por métodos numéricos, porém pode ter soluções analíticas que dependem do tipo de órbita. Essa equação serve para relacionar a propagação de órbita com características temporais.

$$\frac{d\theta}{(1 + e\cos\theta)^2} = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} dt \tag{2.63}$$

### 2.2.11 Propagação de órbita elíptica

Para uma órbita elíptica, com  $e = 0 \leq e < 1$  e de acordo com a relação  $p = (1-e)^2 a$ , a equação 2.63 é reescrita como mostrado na equação 2.64.

$$\frac{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}} d\theta}{(1 + e\cos\theta)^2} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} dt \tag{2.64}$$

Para uma órbita circular, a equação seria como mostrada na equação 2.65, sendo essa equação correspondente a um movimento circular uniforme com velocidade angular  $n$ , que é chamada de movimento médio, que é a velocidade angular constante em uma órbita circular de raio  $a$  sobrescrita à trajetória elíptica de semi eixo maior  $a$ .

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \quad n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \tag{2.65}$$

A partir disso, é definida a anomalia excêntrica  $E$ , que é igual à anomalia verdadeira



quando  $\theta = n\pi$  para  $n$  inteiro, assim, para calcular  $\theta$  em qualquer instante de tempo, é necessário definir  $E$ .

As equações 2.66 e 2.67 expressam o cosseno e seno do angulo  $E$ , a partir dos quais se determina a anomalia excêntrica sem ambiguidade do quadrante. Utilizando essas equações, se obtém a equação diferencial para propagação da anomalia excêntrica, dada pela equação 2.68.

$$\cos E = \frac{e + \cos \theta}{1 + e \cos \theta} \quad (2.66)$$

$$\sin E = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \quad (2.67)$$

$$(1 - e \cos E) dE = n dt \quad (2.68)$$

Para resolver a equação 2.68, é necessário integrá-la desde um tempo inicial até um tempo final, sendo este inicial uma das integrais de movimento. Assim, a integral é feita desde o tempo de periastro da órbita até um tempo qualquer, sendo que no instante inicial  $\theta = E = 0$ , que é a definição de periastro. Dessa forma, é obtida a equação 2.69, chamada equação de *Kepler* para órbitas elípticas, sendo o termo a direita da equação chamado de anomalia média  $M$ .

$$E - e \sin E = n(t - \tau) \quad (2.69)$$

Essa equação parece simples, porém possui resolução analítica complexa que precisa de métodos de variáveis complexas. Da equação de Kepler, é possível obter o período orbital, que é o tempo gasto para completar uma volta completa na órbita, dado pela equação 2.70.

$$T = \frac{2\pi}{n} \quad (2.70)$$

Com essa equação, é possível concluir que para órbitas baixas o período é curto, enquanto para órbitas altas possuem período maior.

Assim, a partir da equação de Kepler, é possível propagar a anomalia excêntrica em função do tempo usando métodos numéricos. Quando encontrada a anomalia excêntrica, é possível determinar a anomalia verdadeira, porém para não ocorrerem problemas de ambiguidade, é interessante se avaliar de outras formas, como encontrando uma relação envolvendo tangente, dada pela equação 2.71.

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \quad (2.71)$$

Por fim, para a propagação da órbita elíptica no referencial perifocal, é necessário calcular

os coeficientes de Lagrange associados à anomalia verdadeira  $\theta$ , podendo assim determinar os vetores posição e velocidade.

### 2.2.12 Propagação de órbita hiperbólica

Para propagação de órbita hiperbólica, com  $e > 1$ , a equação 2.61 é reescrita como a equação 2.72, a qual pode ser resolvida por integração desde o tempo de periastro até um tempo qualquer no lado esquerdo e no lado direito desde  $\theta = 0$  até uma anomalia verdadeira genérica  $\theta' = \theta$ .

$$\sqrt{\frac{\mu}{p^3}} dt = \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} \quad (2.72)$$

Assim, é obtida a equação 2.73, sendo  $M_h$  definido como anomalia média hiperbólica, a parti da qual se define a anomalia hiperbólica  $H$ , que é utilizada na equação de Kepler para a hipérbole, dada na equação 2.74.

$$M_h = (e^2 - 1)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} (t - \tau) \quad (2.73)$$

$$M_h = e \sinh H - H \quad (2.74)$$

É visto que essa equação é análoga à equação de Kepler da elipse, porém a anomalia excêntrica é trocada pela hiperbólica, e a função seno é trocada pela função seno hiperbólico. Também não existe solução analítica simples, sendo necessário o uso de métodos numéricos. Primeiro é calculada a anomalia média hiperbólica, depois resolve-se a equação de Kepler encontrando a anomalia hiperbólica  $H$ , então calcula-se a anomalia verdadeira  $\theta$ , determina-se os coeficientes de Lagrange e assim são definidos os vetores posição e velocidade, no referencial perifocal, a partir da matriz de transição de estado e condições iniciais. Para encontrar a anomalia verdadeira, é necessário converter a anomalia hiperbólica, o que é feito a partir da equação 2.75.

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \tanh \frac{H}{2} \quad (2.75)$$

### 2.2.13 Propagação de órbita parabólica

Para a propagação de órbita parabólica, a equação 2.61 com  $e = 1$  se torna a equação 2.76, que quando integrada da mesma forma que anteriormente, retorna a equação

2.77, chamada de equação de *Barker*.

$$\sqrt{\frac{\mu}{p^3}} dt = \frac{d\theta}{(1 + \cos\theta)^2} \quad (2.76)$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}(t - \tau) = \frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2} + \frac{1}{6}\tan^3\frac{\theta}{2} \quad (2.77)$$

Como não há um conceito equivalente de anomalia excêntrica para a parábola, a forma de encontrar a anomalia verdadeira é dada pela equação 2.78, que precisa ser resolvida para a variável  $\alpha$ , dada pela equação 2.79.

$$\tan^3\frac{\theta}{2} + 3\tan\frac{\theta}{2} - 6\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}(t - \tau) = 0 \quad (2.78)$$

$$\alpha^3 + 3\alpha - 6M_p = 0, \tan\frac{\theta}{2} = \alpha \quad (2.79)$$

Sendo  $M_p$  a anomalia média parabólica, dada pela equação 2.80.

$$M_p = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}}(t - \tau) \quad (2.80)$$

Assim, a única solução real é dada pela equação 2.81. É possível notar que enquanto a órbita elíptica tem energia relativa negativa, na qual os dois primários estão ligados gravitacionalmente, uma órbita hiperbólica possui energia relativa positiva, o que consiste em uma trajetória de escape do campo gravitacional de um planeta. Entre ambos, está a órbita parabólica, com energia relativa nula. A órbita parabólica determina a mínima energia para escapar da ação gravitacional de um planeta, sendo usada para estimar o requisito de combustível mínimo de uma missão interplanetária.

$$\tan\frac{\theta}{2} = \left(3M_p + \sqrt{1 + 9M_p^2}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(3M_p - \sqrt{1 + 9M_p^2}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.81)$$

## 2.3 CÁLCULO DE DETERMINAÇÃO DE ÓRBITA

### 2.3.1 Referencial Celeste e elementos orbitais

A órbita na qual uma massa  $m_2$  orbita uma massa  $m_1$  em um problema de dois corpos é plana, sendo caracterizada no plano orbital por um conjunto de três parâmetros, que podem ser escolhidos dentre várias opções. Mesmo apenas três parâmetros sendo suficientes para caracterizar a órbita no plano orbital, a solução do movimento relativo no

problema de dois corpos depende de 6 integrais do movimento, ou seja, 6 parâmetros que caracterizam a trajetória para um observador fora do plano orbital. Os vetores posição inicial e velocidade inicial consistem num conjunto de 6 parâmetros, sendo um conjunto de elementos orbitais, porém não é um conjunto muito prático e intuitivo, pois não existe um referencial mais geral, assim, para determinar uma órbita para um observador genérico fora do plano geral, é definido um referencial com respeito ao qual qualquer órbita ao redor do corpo  $m_1$  possa ser descrita, sendo que tal referencial precisa ser inercial e possuir eixos com direções bem definidas devido ao problema de ambiguidade.

O referencial Celeste terrestre, definido na figura 3, possui origem no centro de massa da Terra, e não é exatamente inercial devido à aceleração do centro de massa proveniente do movimento orbital ao redor do Sol, porém pode ser considerado inercial. Esse referencial possui sua principal orientação dada pelo eixo  $X$ , que aponta na direção do equinócio vernal (representa o primeiro dia da primavera no hemisfério norte, ou outono no hemisfério sul, sendo aproximadamente o dia 21 de março), que ocorre ao meio dia e está orientado ao longo da interseção dos planos "equador celeste" e "eclíptica". O equador celeste é o prolongamento do plano equatorial terrestre, enquanto a eclíptica é o plano da órbita da Terra ao redor do Sol.

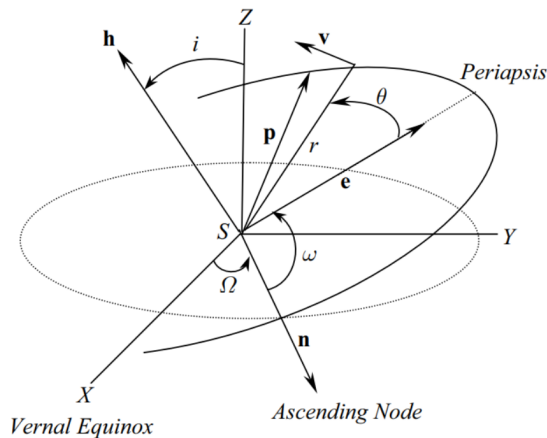


Figura 3 – Referencial celeste e ângulos de Euler do plano orbital  
Fonte: (SILVA, 2023)

O eixo  $Z$  depende do tipo de órbita avaliada, no caso de órbitas próximas da Terra, o eixo  $Z$  costuma ser definido como apontando no sentido do polo norte celeste, que é o prolongamento do polo norte da Terra. No caso de órbitas de transferência interplanetária, o eixo é definido como apontando para o polo norte da eclíptica.

O eixo  $Y$  completa o sistema cartesiano de mão direita, quando  $Z$  está para o polo norte celeste,  $Y$  é definido tal que o plano  $XY$  seja o equador celeste. Quando  $Z$  está para o polo norte da eclíptica,  $Y$  é definido tal que o plano  $XY$  seja o plano da eclíptica. A definição usada é aquela na qual  $Z$  aponta na direção do polo norte da eclíptica.

Com o referencial definido, é possível referenciar uma órbita qualquer em relação a ele, o que pode ser feito por ângulos de Euler, geralmente na sequência de rotações

313, mostrada na figura 3, onde o vetor  $\mathbf{n}$  é unitário e está alinhado com a linha dos nodos (sendo essa a interseção do plano orbital com o plano  $XY$  do referencial celeste), e possui direção apontando para o local onde a órbita cruza o plano celeste vindo do polo sul em direção ao norte. O primeiro ângulo de Euler é o  $\Omega$  (longitude do nodo ascendente), sendo a rotação no sentido da mão direita em torno do eixo  $Z$ , fazendo  $X$  girar até encontrar  $\mathbf{n}$ . O segundo ângulo de Euler é o  $i$  (inclinação da órbita), sendo a rotação no sentido positivo da mão direita em torno de  $\mathbf{n}$  tal que o plano  $XY$  gire até encontrar o plano da órbita. O terceiro ângulo é o  $\omega$  (argumento de periastro), também no sentido positivo da mão direita, sendo a rotação feita em torno do vetor  $\mathbf{h}$  da órbita com magnitude tal que o vetor  $\mathbf{n}$  seja rotacionado até encontrar o vetor  $\mathbf{e}$ . Após as rotações, o sistema de referência resultante é o perifocal, que tem os eixos  $x$  e  $y$  alinhados aos vetores  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{p}$ , respectivamente, e  $z$  dirigido ao longo do vetor  $\mathbf{h}$ . Os ângulos de Euler possuem singularidade na segunda rotação  $i$  para valores de zero ou  $\pi$  rad. Assim, órbitas equatoriais não podem ser descritas usando os parâmetros  $\Omega$ ,  $i$  e  $\omega$ . Além disso, quando a excentricidade é nula, o periastro é indeterminado, não sendo possível obter  $\omega$ .

Quando os parâmetros  $\Omega$ ,  $i$  e  $\omega$  existem, eles constituem 3 elementos orbitais, que juntos de 3 parâmetros no plano orbital foram um conjunto de 6 elementos orbitais que caracterizam completamente uma órbita no espaço tridimensional.

### 2.3.2 Coordenadas esféricas Celestes e Horizonte Local

Para problemas com simetria esférica, podem ser utilizadas coordenadas esféricas, como mostrado na figura 4. Para uma órbita genérica do problema de dois corpos com uma massa  $m_2$  com posição  $O$  em dado instante de tempo, a origem  $S$  do referencial está no centro da massa  $m_1$ . As coordenadas esféricas são a distância radial  $r$  entre  $S$  e  $O$ , o ângulo  $\delta$  entre o segmento  $SO$  e o plano  $XY$  do referencial celeste (chamado de latitude celeste ou declinação, sendo positiva quando medida acima deste plano), e o ângulo  $\lambda$  entre a projeção do segmento  $SO$  sobre o plano  $XY$  e o eixo  $X$  (chamado de longitude celeste, sendo positivo na direção leste). Esse referencial serve para definir um horizonte local ao longo da órbita, sendo possível definir os eixos de diversas formas, sendo que na figura 4 o eixo  $x$  está alinhado com o radial  $SO$  com direção positiva afastando-se de  $O$ . O eixo  $z$  é normal a  $x$  e aponta para o norte, enquanto o eixo  $y$  completa o sistema de referência de mão direita, que aponta para o leste. Os eixos  $y$  e  $z$  formam o plano horizontal local, enquanto  $x$  aponta para cima em relação à superfície do astro, sendo por essa sequencia de eixos  $x(up)$ ,  $y(east)$  e  $z(north)$ , chamado de **UEN**. A orientação do referencial horizontal local é obtida a partir de duas rotações elementares com respeito ao celeste, sendo a primeira pelo ângulo  $\lambda$  em torno do eixo  $Z$  do sistema celeste no sentido positivo da mão direita (com o eixo  $y$  resultante apontando na direção leste), e a segunda

pelo ângulo  $\delta$  em torno do eixo  $y$  (leste) no sentido negativo da mão direita.

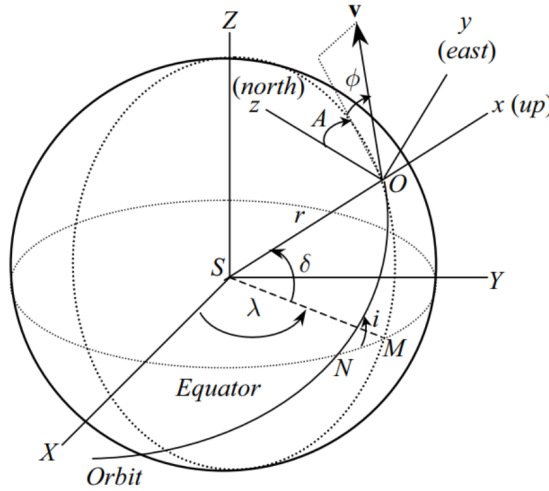


Figura 4 – Coordenadas celestes esféricas e horizonte local  
Fonte: (SILVA, 2023)

### 2.3.3 Equações de navegação: velocidade e posição

A principal utilidade do referencial horizontal local é escrever o vetor velocidade, que é dado em termos de  $v$  (magnitude),  $\phi$  (ângulo de trajetória) e  $A$  (azimute de velocidade), e pode ser escrito como mostrado na equação 2.82. A velocidade inercial escrita no referencial celeste é dada pela equação 2.83. A relação entre velocidade inercial escrita nos referenciais horizontal local e celeste é dada pela equação 2.84.

$$V_{hl} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \sin \phi \\ v \cos \phi \sin A \\ v \cos \phi \cos A \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

$$V_c = \begin{bmatrix} v_X \\ v_Y \\ v_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta \cos \lambda & -\sin \lambda & -\cos \lambda \sin \delta \\ \cos \delta \sin \lambda & \cos \lambda & -\sin \delta \sin \lambda \\ \sin \delta & 0 & \cos \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \sin \phi \\ v \cos \phi \sin A \\ v \cos \phi \cos A \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

$$\begin{bmatrix} v_X \\ v_Y \\ v_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(\sin \phi \cos \delta \cos \lambda - \cos \phi \sin A \sin \lambda - \cos \phi \cos A \sin \delta \cos \lambda) \\ v(\sin \phi \cos \delta \sin \lambda + \cos \phi \sin A \cos \lambda - \cos \phi \cos A \sin \delta \sin \lambda) \\ v(\sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos A \cos \delta) \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

Da mesma forma para o vetor posição, tem-se as equações 2.85, 2.86 e 2.87.

$$Rhl = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

$$Rc = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\delta\cos\lambda & -\sin\lambda & -\cos\lambda\sin\delta \\ \cos\delta\sin\lambda & \cos\lambda & -\sin\delta\sin\lambda \\ \sin\delta & 0 & \cos\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\delta\cos\lambda \\ r\cos\delta\sin\lambda \\ r\sin\delta \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

### 2.3.4 Referencial fixo ao planeta

O referencial fixo ao planeta, mostrado na figura 5, é útil pois o referencial celeste possui seus eixos  $X$  e  $Y$  referenciados a estrelas, enquanto o referencial local horizontal move-se junto do corpo que realiza a órbita, sendo assim, é necessário um referencial que tem como referencia o planeta, o qual é girante. Assim, define-se o referencial centrado no planeta e fixo ao mesmo, sendo que no caso da Terra é chamado de earth centered, earth fixed (ECEF) e possui a origem sendo o centro de massa do planeta. O eixo  $Z'$  é alinhado ao eixo polar celeste, sendo coincidente com o eixo  $Z$  do referencial inercial celeste. Os eixos  $X'$  e  $Y'$  completam o sistema cartesiano ortogonal de mão direita, e estão contidos no plano equatorial do planeta e fixos ao mesmo. As coordenadas esféricas no referencial fixo ao planeta são a distância radial  $r$  (mesma do referencial celeste), a latitude  $\delta$  (pode ser a mesma do celeste quando medida em relação ao centro do planeta, que é o caso considerado), e a longitude  $l$ , que no caso de linhas de longitude constante, se chamam meridianos.

Se o planeta possuir velocidade de rotação constante  $\omega_e$ , no mesmo horário do dia cada meridiano irá se alinhar com a direção de uma certa estrela, identificada por uma longitude celeste  $\lambda$ . É possível realizar a conversão da longitude  $l$  para a longitude celeste  $\lambda$  conhecendo a longitude celeste do meridiano primário em um dado tempo de referência a partir da equação  $\lambda = \lambda_G + \omega_e t + l$ , sendo que a transformação de coordenadas do referencial celeste para o fixo ao planeta é dada por uma rotação elementar em torno do eixo  $Z \equiv Z'$  por um ângulo  $\lambda - l$ . Além disso, é necessário também conhecer a velocidade inercial e relativa. A velocidade relativa depende da velocidade de rotação do planeta e também da posição dada pela distância radial e latitude. A velocidade na órbita relativa ao referencial girante  $\mathbf{v}'$  possui como coordenadas polares a magnitude da velocidade relativa





$$a = \frac{p}{1 - e^2} \quad (2.92)$$

O tempo de periastro  $\tau$  depende do tipo de trajetória, porém é preciso primeiro calcular a anomalia verdadeira  $\theta_0$  no ponto da órbita observado, o que é realizado a partir das equações 2.93 (em ambas para evitar ambiguidade).

$$\sin\theta_0 = \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{p}}{r_0 p}, \quad \cos\theta_0 = \frac{p - r_0}{er_0} \quad (2.93)$$

Para analisar a equação 2.93, é necessário definir  $\mathbf{p}$ , que é dado pela equação 2.94, assim, é possível definir a anomalia verdadeira e seguir para a determinação do tempo de periastro  $\tau$ .

$$\mathbf{p} = p \frac{\mathbf{h} \times \mathbf{e}}{h e} \quad (2.94)$$

### 2.3.6 Órbita elíptica

Para a órbita elíptica, o tempo de periastro é dado pela equação 2.95, onde  $t_0$  é o tempo de observação medido em algum padrão de referência de tempo,  $E_0$  é a anomalia excêntrica no ponto observado e  $n$  é o movimento médio da órbita elíptica. A anomalia excêntrica é dada pela equação 2.71 e o movimento médio é dado pela equação 2.63.

$$\tau = t_0 - \frac{E_0 - e \sin E_0}{n} \quad (2.95)$$

### 2.3.7 Órbita parabólica

Para a órbita parabólica, o tempo de periastro é dado pela equação 2.96, obtida através da equação de Barker (2.77).

$$\tau = t_0 - \frac{\frac{1}{2} \tan \frac{\theta}{2} + \frac{1}{6} \tan^3 \frac{\theta}{2}}{\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}} \quad (2.96)$$

### 2.3.8 Órbita hiperbólica

O tempo de periastro para a órbita hiperbólica é dada pela equação de Kepler hiperbólica (2.74), a partir da qual se obtém a equação 2.97.

$$\tau = t_0 - \frac{e \sinh H_0 - H_0}{(e^2 - 1)^{3/2} \sqrt{\frac{\mu}{p^3}}} \quad (2.97)$$

### 2.3.9 Parâmetros de orientação da órbita com respeito ao referencial Celeste

Para determinar  $\Omega$ , é necessário definir o vetor  $\mathbf{n}$ , que é dado pela equação 2.98, onde  $\mathbf{n}$  é escrito no referencial celeste. A rotação elementar em torno do eixo  $Z$  segundo o ângulo  $\Omega$  orienta  $n$  com respeito aos vetores diretores  $\mathbf{I}$  e  $\mathbf{J}$  do referencial celeste, assim, é tido que o vetor  $n$  aponta na direção do eixo  $X'$  do sistema intermediário gerado pela rotação elementar. Realizando os cálculos de matrizes, é encontrada a equação 2.98, que serve para determinar  $\Omega$  sem ambiguidade de quadrante.

$$\begin{bmatrix} n_X \\ n_Y \\ n_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega \\ \sin \Omega \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tan \Omega = \frac{n_Y}{n_X} \quad (2.98)$$

Para determinar a inclinação  $i$ , é realizada a transformação do vetor  $\mathbf{h}$  do segundo intermediário para o celeste utilizando a matriz de rotação do segundo intermediário para o celeste. Assim, realizando os cálculos, são definidas as equações 2.99, porém, é necessário desenvolver duas relações, uma envolvendo seno e outra cosseno, para avaliar o argumento de periastro sem ambiguidade.

$$\begin{bmatrix} h_X \\ h_Y \\ h_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \sin \Omega \sin i \\ -h \cos \Omega \sin i \\ h \cos i \end{bmatrix}, \quad \tan i = \frac{h_X / \sin \Omega}{h_Z}, \quad \tan i = \frac{-h_Y / \cos \Omega}{h_Z} \quad (2.99)$$

Assim, encontrar o argumento do periastro  $\omega$ , são definidas as equações 2.100 (sendo  $\mathbf{ie}$  um vetor diretor associado ao vetor  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{ie} = \mathbf{e}/e$ , e de forma similar,  $\mathbf{ih} = \mathbf{h}/h$ ), com as quais se obtém a equação 2.101, que possibilita o cálculo sem ambiguidade.

$$\cos \omega = \mathbf{ie} \cdot \mathbf{n}, \quad \sin \omega = \mathbf{ih} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{ie}) \quad (2.100)$$

$$\tan \omega = \frac{\mathbf{ih} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{ie})}{\mathbf{ie} \cdot \mathbf{n}} \quad (2.101)$$

## 2.4 MANOBRAS ORBITAIS

### 2.4.1 Manobras Mono Impulsivas

## 2.5 MANOBRAS ORBITAIS COM IMPULSO ÚNICO

Frequentemente, é necessário alterar a trajetória de uma espaçonave usando manobras propulsivas. Considerando que a duração do impulso do foguete aplicado em tal manobra é negligenciável em comparação com o período orbital, é razoável supor que a mudança de velocidade ocorra instantaneamente no ponto de aplicação do impulso. Assim, as manobras orbitais são geralmente consideradas impulsivas.

A manobra impulsiva mais simples ocorre quando as trajetórias inicial e final se intersectam, onde um único impulso de velocidade,  $\Delta v$ , é suficiente para produzir uma mudança de velocidade de  $v_i$  para  $v_f$  numa dada posição orbital,  $r$ . O vetor  $v_f$  faz um ângulo  $\alpha$  com  $v_i$ . A relação entre as magnitudes  $v_i$ ,  $v_f$  e  $\Delta v$  é dada pela equação:

$$\Delta v = \sqrt{v_i^2 + v_f^2 - 2v_i v_f \cos \alpha} \quad (2.102)$$

Uma manobra de impulso único geral pode alterar tanto a forma quanto o plano da órbita. Às vezes, é necessário alterar apenas a forma orbital sem afetar o plano orbital. Essas manobras são ditas coplanares. Numa manobra coplanar, pode haver uma mudança simultânea na velocidade ( $v_f - v_i$ ) e no ângulo de trajetória de voo,  $\alpha$ , levando a uma nova trajetória coplanar.

Outras vezes é necessário mudar o plano da órbita sem mudar a sua forma. Essa manobra é chamada de manobra de mudança de plano e não envolve modificação da velocidade ou do ângulo da trajetória de voo no ponto do impulso. Para uma mudança de plano por um ângulo  $\alpha$  a uma velocidade constante,  $v_i$ , o seguinte impulso, aplicado em um ângulo  $\beta = \alpha/2 + 90^\circ$  para  $v_i$ , é requerido:

$$\Delta v = 2v_i \sin \frac{\alpha}{2} \quad (2.103)$$

É evidente pela equação acima que a magnitude do impulso de velocidade para uma mudança de plano por um determinado ângulo é diretamente proporcional à velocidade na qual a mudança é realizada. Portanto, uma mudança de plano por um ângulo pequeno pode exigir um grande impulso de velocidade, o que resulta em um aumento considerável na massa de propelente necessária (causando uma redução na carga útil). Por essa razão, mudanças de plano devem ser realizadas na menor velocidade possível (por exemplo, no apogeu de uma órbita elíptica). Para uma mudança de plano de  $60^\circ$ , a

magnitude do impulso é igual à velocidade de voo.

Quando os planos orbitais inicial e final são definidos de forma inequívoca pelos conjuntos dados de  $\Omega, \omega, i$ , não podemos escolher o ponto de mudança de plano de forma arbitrária. Para a mudança de plano geral, devemos esperar até que a espaçonave alcance a linha dos nodos formada pela intersecção dos dois planos orbitais, momento em que um impulso de velocidade é aplicado para mudar o plano orbital. Obviamente, se a manobra deve ser realizada por um único impulso de velocidade, as duas órbitas também devem se intersectar na linha dos nodos, o que é verdade apenas para órbitas circulares de raios iguais.

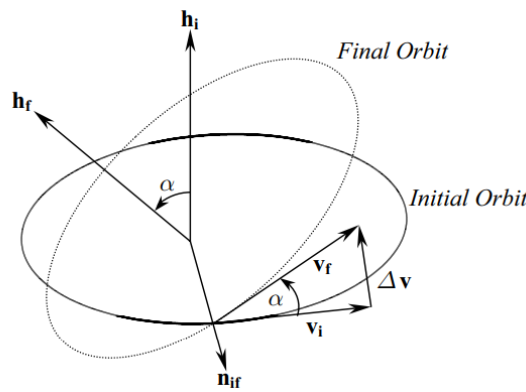


Figura 6 – Manobra Impulsiva generalizada  
Fonte: (SILVA, 2023)

A Figura (6) descreve a geometria da mudança de plano geral em termos dos momentos angulares orbital inicial e final,  $\mathbf{h}_i$  e  $\mathbf{h}_f$ , respectivamente. O vetor nodal entre os dois planos indicando o ponto de aplicação do impulso de velocidade é dado por:

$$\mathbf{n}_{if} = \frac{\mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_f}{|\mathbf{h}_i \times \mathbf{h}_f|} \quad (2.104)$$

A manobra impulsiva é realizada em  $\mathbf{r}_i = r_i \mathbf{n}_{if}$ , a partir do qual a velocidade da mudança de plano,  $v_i$ , é calculada. O cosseno do ângulo,  $\alpha$ , entre os dois planos é obtido da seguinte maneira:

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{h}_i \cdot \mathbf{h}_f}{h_i h_f} \quad (2.105)$$

A direção do impulso de mudança de plano em relação ao vetor de velocidade inicial é dada por  $\beta = \alpha/2 + 90^\circ$ , o que resulta na seguinte expressão para o impulso de velocidade:

$$\Delta \mathbf{v} = \Delta v \left( \cos \beta \frac{\mathbf{v}_i}{v_i} + \sin \beta \frac{\mathbf{h}_i}{h_i} \right) \quad (2.106)$$

levando a

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_i + \Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_i + \Delta v \left( \cos \beta \frac{\mathbf{v}_i}{v_i} + \sin \beta \frac{\mathbf{h}_i}{h_i} \right) \quad (2.107)$$

Está claro pelas equações (2.103) e (2.107) que, para realizar uma mudança de plano sem afetar a velocidade (ou seja,  $v_f = v_i$ ), o ângulo  $\beta$  deve ser maior que  $90^\circ$ .

### 2.5.1 Manobras Multi Impulsivas

Em manobras mono impulsivas, as órbitas inicial e final se interceptam no ponto de aplicação do impulso. No entanto, para obter órbitas que não se interceptam, pode-se aplicar manobras multi impulsivas ou transferências de baixo empuxo. Transferências de baixo empuxo são especialmente importantes para missões de pequenos satélites, onde um propulsor de baixa tração é acionado continuamente por um longo período de tempo.

Manobras multi impulsivas são abordadas neste curso. A Figura (7) apresenta o diagrama de velocidades em uma manobra multi impulsiva. A maior magnitude da velocidade final  $v_f$  é obtida para  $\alpha = 0$ , enquanto a menor magnitude ocorre para  $\alpha = \pi$  rad. Quando o vetor impulso de velocidade  $\Delta v$  é colinear com a velocidade inicial, a mudança na magnitude da velocidade é máxima ou mínima, resultando no máximo levantamento ou abaixamento da órbita para a mesma quantidade de propelente.

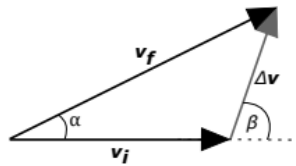


Figura 7 – Diagrama de velocidades em uma manobra impulsiva.  
Fonte: (SILVA, 2023)

Manobras impulsivas ótimas são realizadas aplicando múltiplos impulsos colineares à velocidade em diferentes pontos da órbita. Em órbitas elípticas, os pontos de aplicação geralmente são periastro ou apoastro. Manobras multi impulsivas referem-se a manobras com múltiplos impulsos colineares ao vetor velocidade e são usadas para alterar a geometria da órbita, mas não sua inclinação.

As órbitas inicial e final podem se interceptar ou não, dependendo da técnica adotada. Em manobras multi impulsivas, o conceito de elipse de transferência é importante, que é uma órbita intermediária seguida entre a aplicação de dois impulsos. A técnica de manobra com dois impulsos é chamada de bi-impulsiva.

#### 2.5.1.1 Manobra bi Impulsiva e Elipse de Transferência

Manobras ótimas de transferência entre órbitas elípticas coplanares (com órbitas circulares como casos particulares) são feitas aplicando impulsos tangenciais à trajetória,

ou seja, colineares com a velocidade. Em órbitas circulares, qualquer ponto pode ser escolhido, enquanto em órbitas elípticas, os impulsos devem ser aplicados no periastro ou apoastro.

Como pode ser visto na Figura (8) O processo de manobra orbital bi-impulsiva envolve:

1. Aplicar o primeiro impulso em qualquer ponto da órbita circular;
2. O primeiro impulso altera a órbita, gerando uma órbita de transferência elíptica;
3. O segundo impulso é aplicado no apogeu ou perigeu da órbita de transferência, que coincidirá com o apogeu ou perigeu da órbita final desejada.

Há duas opções de órbita de transferência:

1. Apogeu da órbita de transferência coincide com o apogeu da órbita final;
2. Perigeu da órbita de transferência coincide com o perigeu da órbita final.

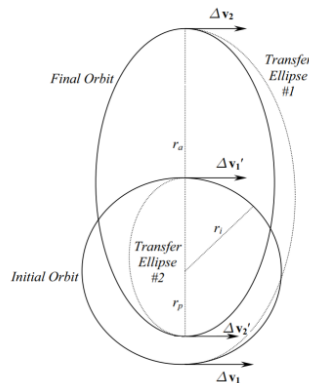


Figura 8 – Transferência bi impulsiva entre órbitas elípticas.

Fonte: (SILVA, 2023)

## 2.5.2 Transferência de Hohmann

Quando as órbitas inicial e final são circulares, a manobra ótima bi-impulsiva é chamada de transferência de Hohmann. A transferência de Hohmann consiste na aplicação de dois impulsos tangentes. No levantamento de órbita circular por transferência de Hohmann, ambos os impulsos são aplicados na direção progressiva da órbita.

Figura 9 – Transferência de Hohman.

Fonte: ??

As distâncias de periastro e apoastro da órbita de transferência são os raios das órbitas inicial e final, respectivamente:

$$r_{pH} = r_i \quad (2.108)$$

$$r_{aH} = r_f \quad (2.109)$$

O semi eixo maior da órbita de transferência é:

$$a_H = \frac{r_i + r_f}{2} \quad (2.110)$$

A magnitude dos dois impulsos de velocidade é:

$$\begin{aligned} \Delta v_1 &= v_{pH} - v_i = \sqrt{\frac{2\mu}{r_i} - \frac{\mu}{a_H}} - \frac{\mu}{r_i} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_i} - \frac{2\mu}{r_i + r_f}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_i}} \\ \Delta v_1 &= \sqrt{\frac{2\mu(r_i + r_f) - 2\mu r_i}{r_i(r_i + r_f)}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_i}} = \sqrt{\frac{2\mu r_f}{r_i(r_i + r_f)}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_i}} \\ \Delta v_1 &= \sqrt{\frac{\mu}{r_i}} \left( \sqrt{\frac{2r_f}{r_i + r_f}} - 1 \right) \end{aligned} \quad (2.111)$$

$$\begin{aligned} \Delta v_2 &= v_f - v_{aH} = \sqrt{\frac{\mu}{r_f}} - \sqrt{\frac{2\mu}{r_f} - \frac{\mu}{a_H}} = \sqrt{\frac{\mu}{r_f}} - \sqrt{\frac{2\mu}{r_f} - \frac{2\mu}{r_i + r_f}} \\ \Delta v_2 &= \sqrt{\frac{\mu}{r_f}} - \sqrt{\frac{2\mu(r_i + r_f) - 2\mu r_f}{r_f(r_i + r_f)}} = \sqrt{\frac{\mu}{r_f}} - \sqrt{\frac{2\mu r_i}{r_f(r_i + r_f)}} \\ \Delta v_2 &= \sqrt{\frac{\mu}{r_f}} \left( 1 - \sqrt{\frac{2r_i}{r_i + r_f}} \right) \end{aligned} \quad (2.112)$$

Se o processo de transferência for de uma órbita de maior raio (mais alta) para uma de menor (mais baixa), a equação do impulso de velocidade é:

$$\Delta v_1 = v_{aH} - v_i = \sqrt{\frac{2\mu}{r_i} - \frac{\mu}{a_H}} - \frac{\mu}{r_i} = \sqrt{\frac{\mu}{r_i}} \left( \sqrt{\frac{2r_f}{r_i + r_f}} - 1 \right) \quad (2.113)$$

$$\Delta v_2 = v_f - v_{pH} = \sqrt{\frac{\mu}{r_f}} - \sqrt{\frac{2\mu}{r_f} - \frac{\mu}{a_H}} = \sqrt{\frac{\mu}{r_f}} \left( 1 - \sqrt{\frac{2r_i}{r_i + r_f}} \right) \quad (2.114)$$

No abaixamento de órbita circular por transferência de Hohmann, ambos os impulsos são aplicados na direção oposta à órbita, pois  $r_i > r_f$ . Nesse caso, ambos os impulsos de velocidade são negativos.

A órbita de transferência dura meio período, que é o tempo da transferência de Hohmann. Este tempo pode ser calculado pela seguinte equação, tendo como base a equação 2.60 dependendo apenas do semi eixo maior da órbita de transferência:

$$T_h = \pi \sqrt{\frac{a_H^3}{\mu}}, \text{ ou } T_h = \pi \sqrt{\frac{(r_i + r_f)^3}{8\mu}} \quad (2.115)$$

## 2.6 ÓRBITAS PERTURBADAS

### 2.6.1 Aceleração Perturbativa

A aceleração perturbativa ocorre quando o movimento no problema dos dois corpos ideal é afetado por forças além da atração gravitacional mútua. No problema dos dois corpos ideal, consideramos apenas órbitas Keplerianas (elipse, hipérbole e parábola) com coeficientes constantes no plano orbital. Entretanto, na realidade, há sempre perturbações extras.

Perturbações podem ser conservativas ou não conservativas. Exemplos de perturbações conservativas incluem:

- Gravidade de terceiro corpo;
- Achatamento de um planeta, alterando sua geometria de uma esfera;
- Força magnética proveniente da interação de correntes elétricas internas do corpo com o campo magnético do planeta.

Exemplos de perturbações não conservativas são:

- Arrasto atmosférico;
- Pressão solar;
- Disparo de propulsor.

Resolver um problema com várias forças perturbativas agindo simultaneamente é desafiador. No entanto, muitas situações práticas apresentam perturbações que não se manifestam com a mesma intensidade, na mesma região e ao mesmo tempo. Isso permite analisar o efeito da perturbação principal, ignorando as demais.

Por exemplo:



- Em órbita baixa, a perturbação de maior intensidade costuma ser o arrasto atmosférico;
- Em uma órbita interplanetária, a perturbação mais relevante costuma ser a de terceiro corpo.

Em termos matemáticos, conforme visto na aula 3, o problema dos dois corpos é formulado para o movimento relativo de uma partícula de massa  $m$  em relação a outra de massa  $M$ . A equação do movimento é dada por:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0 \quad (2.116)$$

Onde  $\mathbf{r}$  é o vetor posição relativa da partícula  $m$  com respeito a  $M$ , e  $\mu = GM$  quando  $m \ll M$ . Alternativamente, podemos considerar que  $M$  é um planeta esférico e  $m$  um corpo de dimensões insignificantes em comparação a ele. Nesse caso, o vetor posição é medido entre  $m$  e o centro de massa (CM) do planeta, sendo válido, por exemplo, para o movimento de satélites artificiais ao redor da Terra.

Nesse contexto, a maneira mais comum de avaliar uma perturbação é inserindo uma aceleração perturbativa  $\mathbf{a}_d$  no lado direito da equação 1:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{a}_d \quad (2.117)$$

A equação (2.117) leva em consideração a aceleração perturbativa, permitindo uma análise mais precisa das órbitas em situações reais onde perturbações adicionais, além da atração gravitacional mútua, estão presentes.

Quando a força perturbativa é conservativa, a aceleração perturbativa pode ser escrita como o gradiente de uma função potencial  $\Phi$ :

$$\mathbf{a}_d = \nabla \Phi^T \quad (2.118)$$

Neste caso, ao invés de um problema vetorial de 3 componentes, o problema é descrito por uma função escalar  $\Phi$ , que representa o potencial perturbativo.

A aceleração perturbativa (ou potencial perturbativo) é estudada em casos específicos. O primeiro deles é o efeito do achatamento dos polos do planeta. Este efeito leva em consideração que a forma do planeta não é perfeitamente esférica, mas sim, um pouco achatada nos polos. Essa deformação na forma do planeta resulta em perturbações no movimento orbital de satélites e outros corpos celestes próximos.

### 2.6.2 Efeito do Achatamento dos Pólos

Como discutido anteriormente, a equação de dinâmica do problema de dois corpos é válida quando o planeta possui massa esfericamente distribuída, de modo que seu modelo gravitacional é o mesmo de uma massa pontual:

$$g = GM \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (2.119)$$

Se um planeta possui achatamento nos polos, seu modelo gravitacional é determinado por uma expansão em série do potencial gravitacional. Quando o corpo possui massa distribuída de maneira axis simétrica, o potencial é determinado pelas constantes de Love (denominadas  $J_n$ ).

Neste contexto, a dinâmica de órbita perturbada da equação 2 é utilizada, com a aceleração perturbativa dada pela equação (2.118):

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \nabla \Phi^T \quad (2.120)$$

Na aula 2, foi determinado o potencial gravitacional de um corpo axis simétrico:

$$\Phi = \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{R_e}{r} \right)^n J_n P_n(\sin \delta) \quad (2.121)$$

Onde:  $R_e$  é o raio equatorial do planeta,  $\delta$  é a latitude,  $P_n$  é o polinômio de Legendre de grau  $n$ ,  $J_n$  é a  $n$ -ésima constante de Love. Na equação (2.121), o primeiro termo da soma ( $\mu/r$ ) é o potencial gravitacional da massa pontual (igual ao de um planeta com massa esfericamente distribuída). Os demais estão relacionados com a não esfericidade do planeta. Sendo assim, o potencial perturbativo é:

$$\Phi = -\frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{R_e}{r} \right)^n J_n P_n(\sin \delta) \quad (2.122)$$

Assim, o efeito do achatamento dos polos é avaliado determinando-se a solução da equação diferencial abaixo:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{R_e}{r} \right)^n J_n P_n(\sin \delta) \quad (2.123)$$

#### 2.6.2.1 Equações Planetárias de Lagrange

As Equações Planetárias de Lagrange fornecem uma maneira de encontrar a solução perturbada devido a um potencial perturbativo. Supomos que a solução perturbada seja uma função dos 6 parâmetros das órbitas keplerianas e do tempo, agrupados em um

vetor  $\mathbf{c}$ :

$$\mathbf{c} = [c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6]^T = [a, e, \tau, \Omega, i, \omega]^T \quad (2.124)$$

As funções genéricas  $f$  e  $g$  são usadas para representar a solução:

$$r = f(\mathbf{c}, t), \quad v = g(\mathbf{c}, t) \quad (2.125)$$

E temos:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \quad (2.126)$$

Quando  $f$  e  $g$  são soluções para o problema não perturbado, os parâmetros orbitais são constantes. O método de solução consiste em substituir na equação da aceleração perturbativa a solução da equação não perturbada. E aplicando regra da cadeia temos que:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{c}} \frac{d\mathbf{c}}{dt} = 0 \quad (2.127)$$

e

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{c}} \frac{d\mathbf{c}}{dt} \quad (2.128)$$

As equações indicam que a derivada dos parâmetros orbitais  $\frac{d\mathbf{c}}{dt}$  é ortogonal à matriz jacobiana  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{c}}$ . Essa relação é útil para analisar a dinâmica de órbitas perturbadas e entender como as perturbações afetam os parâmetros orbitais. E substituindo as equações (2.125) e (2.128) na equação (2.120) e assumindo que  $f$  e  $g$  satisfazem a equação dinâmica do problema não perturbado, temos que a equação diferencial perturbativo como:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{c}} \frac{d\mathbf{c}}{dt} = \nabla \Phi^T \quad (2.129)$$

As equações (2.127) e (2.129) formam um conjunto de 6 equações diferenciais para determinar a variação dos parâmetros orbitais em função da aceleração perturbativa:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{c}} \frac{d\mathbf{c}}{dt} = 0 \quad (2.130)$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{c}} \frac{d\mathbf{c}}{dt} = \nabla \Phi^T \quad (2.131)$$

Para continuar com a dedução, temos as seguintes definições de notação:

- $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{f}$  e  $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{g}$  são as soluções do problema não perturbado (kepleriano);
- $\tilde{\mathbf{r}}$  e  $\tilde{\mathbf{v}}$  são as perturbações das soluções keplerianas, de modo que:

- Soluções perturbadas:  $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}} + \tilde{\mathbf{r}}$  e  $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{v}}$ .

Após reescrever as equações e usar álgebra matricial, obtemos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{c}} \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{c}} \end{bmatrix} \frac{d\mathbf{c}}{dt} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \nabla \Phi^T \end{bmatrix} \quad (2.132)$$

Multiplicamos ambos os lados pela matriz:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} - \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{c}} \right)^T \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{c}} \right)^T \end{bmatrix} \quad (2.133)$$

Resultando em:

$$\left( \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{c}} \right)^T \frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{c}} - \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{c}} \right)^T \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{c}} \right) \frac{d\mathbf{c}}{dt} = \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{c}} \right)^T \nabla \Phi^T \quad (2.134)$$

Por derivações e manipulações matemáticas é possível chegar na matriz de Lagrange, dada por:

$$\mathbf{L} = \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{c}} \right)^T \frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{c}} - \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{c}} \right)^T \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{c}} \quad (2.135)$$

$$\mathbf{L} \frac{d\mathbf{c}}{dt} = \frac{\partial \Phi^T}{\partial \mathbf{c}} \quad (2.136)$$

Que por sua vez é antissimétrica e não depende explicitamente do tempo. A equação (2.136) define 6 equações diferenciais de primeira ordem, uma para cada parâmetro orbital. Elas são equações diferenciais de primeira ordem que determinam a taxa de variação dos parâmetros orbitais em função do potencial perturbativo. Estas equações diferenciais são chamadas de equações planetárias de Lagrange.

### 2.6.3 Variações dos Elementos Orbitais com Achatamento dos Pólos

A seguir, são apresentadas as equações planetárias de Lagrange para o caso estudado:

- Os parâmetros orbitais são os clássicos:  $\mathbf{c} = [a, e, \tau, \Omega, i, \omega]^T$ ;
- O potencial perturbativo está associado ao planeta com achatamento nos pólos;
- Ou seja, o potencial perturbativo é dado pela equação 7, sendo função das constantes de Jefiery.

As equações diferenciais que apresentam a taxa de variação dos elementos orbitais

serão apresentadas sem demonstração. As taxas de variação de  $\Omega$  e  $\omega$ , levando em conta a primeira constante de Jefiery ( $J_2$ ), são:

$$\dot{\Omega} = \frac{h}{\mu \sin i (1 + e \cos \theta)} \left( -\frac{3\mu}{2r^2} J_2 \left( \frac{R_e}{r} \right)^2 \sin 2i \sin(\omega + \theta) \right) \quad (2.137)$$

$$-\frac{r \sin(\omega + \theta)}{h \tan i} \left( -\frac{3\mu}{2r^2} J_2 \left( \frac{R_e}{r} \right)^2 \sin 2i \sin(\omega + \theta) \right) \quad (2.138)$$

Entretanto, os efeitos instantâneos não são significativos, eles geram pouco impacto sobre uma única órbita. O maior efeito é cumulativo, ou seja: mudanças perceptíveis ocorrem somente depois de um número significativo de voltas. Neste sentido, algumas referências costumam escrever as equações diferenciais dos parâmetros orbitais em termos da média relativa a uma órbita completa. Portanto, temos que as derivadas médias dos parâmetros  $a$ ,  $e$ ,  $\omega$  e  $\Omega$  levando em conta somente a primeira constante:

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = 0 \quad (2.139)$$

$$\frac{d\bar{e}}{dt} = 0 \quad (2.140)$$

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{3}{4} n J_2 \left( \frac{R_e}{p} \right)^2 (5 \cos^2 i - 1) \quad (2.141)$$

$$\frac{d\bar{\Omega}}{dt} = \frac{3}{4} n J_2 \left( \frac{R_e}{p} \right)^2 \cos i \quad (2.142)$$

Dessa forma, o efeito da perturbação devido ao achatamento dos polos, quando apenas a primeira constante de Jefiery (a mais significativa) é levada em consideração, mantém o formato da órbita inalterado. Isso ocorre porque, ao longo de órbitas completas, as variações médias do semieixo maior e da excentricidade são nulas.

Por outro lado essa perturbação provoca mudança na direção da órbita:

- A variação da longitude celeste do nodo ascendente está relacionada à mudança de direção linha dos nodos;
- A variação do argumento de periastro está associada à mudança de direção da linha dos apsides.

### 2.6.4 Órbita Hélio Síncrona

Um efeito benéfico da regressão nodal é a órbita heliossíncrona ilustrada na figura (10), utilizada para mapeamento fotográfico e satélites de observação. Uma órbita heliossíncrona permite uma elevação solar constante em um dado ponto, o que é desejável para fotografias de superfície.

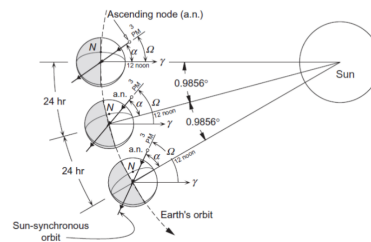


Figura 10 – Órbita hélio síncrona.  
Fonte: (SILVA, 2023)

Em uma órbita heliossíncrona, o plano orbital forma um ângulo constante com a radial do Sol até a Terra. Para isso, o plano orbital deve girar no espaço inercial com uma velocidade angular igual à da Terra ao redor do Sol, que é  $360^\circ$  a cada 365,26 dias, ou  $0,9856^\circ$  por dia. Este tipo de órbita síncrona cruza uma dada latitude em um tempo solar fixo. Na ilustração da figura (10), isso ocorre às 15h. Durante cada órbita, o satélite vê a mesma área da superfície terrestre no mesmo horário.

### 2.6.5 Órbita Moliya

Outra aplicação especial desenvolvida com base nos resultados desta aula são as órbitas Molniya, utilizadas pela Rússia para satélites de comunicação em altas latitudes, onde se situa a maior parte do país. Uma órbita Molniya é ilustrada na figura (11).

Para que as comunicações sejam efetivas, os satélites devem permanecer em altas latitudes por longos períodos. Isso resulta em órbitas altamente elípticas, adotando o valor de excentricidade  $e = 0.73$ . O período dessas órbitas é aproximadamente 12 horas, com apogeu na direção do polo norte.

Para uma órbita Molniya, é crucial que a latitude do periastro não mude devido à rotação dos apsides, provocada pelo achatamento da Terra. Então, uma órbita Molniya sempre tem a inclinação crítica  $i_c = 63.44^\circ$ , para a qual  $\dot{\omega} = 0$ .

A alta inclinação de uma órbita Molniya é obtida a partir de lançamentos do centro de Plesetsk, localizado em uma latitude de  $62.8^\circ$ . Lançar de uma latitude próxima da inclinação da órbita otimiza o lançamento, reduzindo o consumo de propelente, o que é especialmente desejável para inclinações altas.

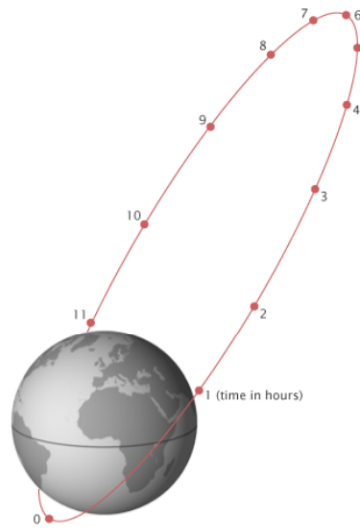


Figura 11 – Órbita Moliya.  
Fonte: (SILVA, 2023)

## 2.7 ÓRBITAS PERTURBADAS

### 2.7.1 Perturbação de 3º corpo

A perturbação gravitacional de um terceiro corpo em uma órbita de dois corpos é modelada de maneira similar à perturbação gravitacional de um corpo primário não esférico. Considere a órbita gerada pela atração gravitacional mútua de dois corpos  $m_1$  e  $m_2$ , perturbados pela presença de um terceiro corpo  $m_3$ , como visto na figura (12). As equações do movimento para os corpos de massa  $m_1$  e  $m_2$  são:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = -\frac{Gm_2}{r_{21}^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \frac{Gm_3}{r_{31}^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \quad (2.143)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = -\frac{Gm_1}{r_{21}^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - \frac{Gm_3}{r_{32}^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \quad (2.144)$$

Subtraindo a equação (2.143) da equação (2.144), obtemos a equação do movimento relativo:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = Gm_3 \left( \frac{\mathbf{r}_{32}}{r_{32}^3} - \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} \right) \quad (2.145)$$

onde  $\mu = G(m_1 + m_2)$ . O lado esquerdo da equação (2.145) é o mesmo do problema de dois corpos, enquanto o lado direito é a aceleração perturbativa sobre o sistema de dois corpos. Essa aceleração depende da distância do terceiro corpo até cada um dos primários e da constante gravitacional de  $m_3$ ,  $\mu_3 = Gm_3$ . Além do mais, o potencial

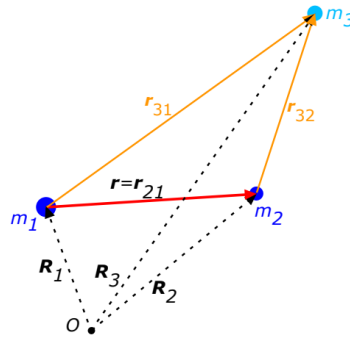


Figura 12 – Diagrama da atração gravitacional entre 3 corpos.

Fonte: (SILVA, 2023)

perturbativo do terceiro corpo é dado por:

$$\Phi = Gm_3 \left( \frac{1}{r_{32}} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} \right) \quad (2.146)$$

A perturbação de terceiro corpo pode ser estudada sem perda de generalidade para a ação de uma quantidade maior de corpos perturbativos. Entretanto, o efeito de terceiro corpo é satisfatório para a maioria das missões espaciais. O potencial perturbativo de terceiro corpo pode ser expandido segundo uma série infinita de polinômios de Legendre:

$$\Phi = \frac{Gm_3}{r_{31}} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^n P_n(\cos \gamma) \right] \quad (2.147)$$

onde  $\gamma$  é o ângulo entre os vetores  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}_{31}$ . A equação do movimento perturbado se torna:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} = \frac{Gm_3}{r_{31}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^n \left( P'_{n+1}(\cos \gamma) \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}} - P'_n(\cos \gamma) \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (2.148)$$

onde  $P'_n$  é a derivada de um polinômio de Legendre com respeito ao seu argumento, determinada pela regra de recorrência:

$$P'_n(\nu) = \nu P'_{n-1}(\nu) + n P_{n-1}(\nu) \quad (2.149)$$

### 2.7.2 Esfera de Influência e Aproximação por Seções Cônicas

Diferentemente do problema de dois corpos ideal ou do caso perturbado pela gravidade de um planeta não esférico, o movimento perturbado por terceiro corpo não possui solução analítica. Uma aproximação comumente usada em mecânica orbital está associ-



ada ao conceito de esfera de influência. Dentro dessa esfera, a gravidade de um planeta domina, enquanto fora dela a atração gravitacional do Sol é predominante.

Assumindo que o corpo  $m_2$  esteja sob a influência gravitacional de dois primários, as equações do movimento podem ser expressas como:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + G(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}}{r^3} = Gm_3 \left( \frac{\mathbf{r}_{32}}{r_{32}^3} - \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} \right) \quad (2.150)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_{23}}{dt^2} + G(m_3 + m_2) \frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}^3} = Gm_1 \left( \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \quad (2.151)$$

A equação (2.150) trata do movimento relativo do corpo  $m_2$  com respeito a  $m_1$ , onde  $m_3$  gera a perturbação. Este modelo subentende uma órbita aproximadamente kepleriana de  $m_2$  com respeito ao primário  $m_1$ , sendo  $m_3$  o terceiro corpo impondo uma perturbação. Isso pode ser visualizado na figura (13).

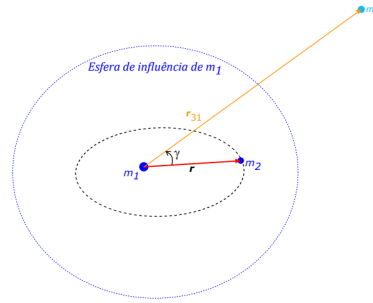


Figura 13 – Ilustração da esfera de influência do primário  $m_1$ .  
Fonte: (SILVA, 2023)

Da mesma forma a equação (2.151) trata do movimento relativo do corpo  $m_2$  em relação a  $m_3$ . Ela é obtida por analogia à equação (2.150), trocando  $m_1$  por  $m_3$  e vice-versa,  $r_{21} = r$  por  $r_{23}$ ,  $r_{32}$  por  $r_{12} = -r$  e  $r_{31}$  por  $r_{13} = -r_{31}$ .

Na equação (2.151), o corpo  $m_3$  é o primário e  $m_1$  gera a perturbação. Ou seja, este modelo supõe uma órbita aproximadamente kepleriana de  $m_2$  em relação a  $m_3$ , sendo  $m_1$  o terceiro corpo gerador da perturbação. A melhor aproximação é dada pela equação que apresenta a menor razão entre a aceleração perturbativa e a aceleração do primário.

Para aprofundar essa questão, serão avaliadas as acelerações perturbativas em comparação com as do primário.

Na equação (2.150), a aceleração do primário é o efeito de  $m_1$  sobre  $m_2$ , enquanto a perturbação é o efeito de  $m_3$  sobre  $m_2$ :

$$\mathbf{a}_{21} = -G(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (2.152)$$

$$\mathbf{a}_{d23} = Gm_3 \left( \frac{\mathbf{r}_{32}}{r_{32}^3} - \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} \right) \quad (2.153)$$

Na equação (2.151), a aceleração do primário é o efeito de  $m_3$  sobre  $m_2$ , enquanto

a perturbação é o efeito de  $m_1$  sobre  $m_2$ :

$$\mathbf{a}_{23} = -G(m_3 + m_2) \frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}^3} \quad (2.154)$$

$$\mathbf{a}_{d21} = Gm_1 \left( \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \quad (2.155)$$

A precisão da aproximação da órbita kepleriana de  $m_2$  com respeito a  $m_1$  é medida calculandose a razão entre: a magnitude da perturbação de  $m_3$  sobre  $m_2$  e a magnitude da aceleração de  $m_2$  provocada por  $m_1$ . Para  $\frac{a_{d23}}{a_{21}}$ , temos:

$$\frac{a_{d23}}{a_{21}} = \frac{\|\mathbf{a}_{d23}\|}{\|\mathbf{a}_{21}\|} \quad (2.156)$$

Para  $\frac{a_{d23}}{a_{21}} \ll 1$  a perturbação provocada pelo corpo  $m_3$  é pouco significativa quando comparada à aceleração imposta por  $m_1$ .

Por outro lado, a aproximação de órbita kepleriana de  $m_2$  com respeito a  $m_3$  é avaliada pela razão entre: a magnitude da perturbação de  $m_1$  sobre  $m_2$  e a magnitude da aceleração de  $m_2$  provocada por  $m_3$ . Para  $\frac{a_{d21}}{a_{23}}$ , temos:

$$\frac{a_{d21}}{a_{23}} = \frac{\|\mathbf{a}_{d21}\|}{\|\mathbf{a}_{23}\|} \quad (2.157)$$

Para  $\frac{a_{d21}}{a_{23}} \ll 1$  a perturbação provocada pelo corpo  $m_1$  é pouco significativa quando comparada à aceleração imposta por  $m_3$ .

Com esses desenvolvimentos chegamos em dois pontos, a Primeira razão de perturbação, vista na equação (2.158), e a Segunda razão de perturbação, vista na equação (2.159).

$$\begin{aligned} \frac{a_{d23}}{a_{21}} = \frac{m_3}{m_1 + m_2} & \left( \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^4 + \left( \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^{-2} - 2 \cos \gamma \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^{-1} + 1 \right)^{-\frac{3}{2}} \left( \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^3 - \frac{r}{r_{31}} \right) + \right. \\ & \left. \left( \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^{-2} - 2 \cos \gamma \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^{-1} + 1 \right)^{-2} - \left( \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^{-2} - 2 \cos \gamma \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^{-1} + 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^3 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.158)$$

$$\begin{aligned} \frac{a_{d21}}{a_{23}} = \frac{m_1}{m_3 + m_2} & \left( \left( \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^2 - 2 \cos \gamma \frac{r}{r_{31}} + 1 \right)^2 + \left( \left( \frac{r_{31}}{r} \right)^2 - 2 \cos \gamma \frac{r_{31}}{r} + 1 \right)^2 + \right. \\ & \left. - 2 \cos \gamma \left( \left( \frac{r}{r_{31}} \right)^2 - 2 \cos \gamma \frac{r}{r_{31}} + 1 \right) \left( \left( \frac{r_{31}}{r} \right)^2 - 2 \cos \gamma \frac{r_{31}}{r} + 1 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.159)$$

### 2.7.2.1 Esfera de Influência

As expressões  $\frac{a_{d23}}{a_{21}}$  e  $\frac{a_{d21}}{a_{23}}$  são usadas para determinar a região onde a ação gravitacional de  $m_1$  predomina sobre a de  $m_3$ , que nada mais é do que a esfera de influência de  $m_1$  com respeito a  $m_3$ . Essa é região dentro da qual a perturbação relativa de  $m_3$  é menor que a perturbação de  $m_1$ :

$$\frac{a_{d23}}{a_{21}} < \frac{a_{d21}}{a_{23}} \quad (2.160)$$

Pelas equações (2.158) e (2.159), verifica-se que a esfera de influência depende das massas  $m_1, m_2$  e  $m_3$ , da distância  $r_{13}$  entre o primeiro e o terceiro corpo, bem como do ângulo  $\gamma$ . Rigorosamente falando, devido à dependência com  $\gamma$ , a distância  $r$  sobre a borda da esfera de influência depende da posição orbital de  $m_2$  com respeito ao corpo  $m_1$ .

### 2.7.3 Efeito do arrasto atmosférico

As espaçonaves em órbita baixa experimentam um arrasto atmosférico significativo, cuja magnitude é proporcional ao produto da densidade atmosférica,  $\rho$ , e o quadrado da velocidade relativa,  $\dot{r}^2$ . Como o arrasto se opõe ao movimento orbital, podemos expressar a equação de movimento perturbada por:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} = -q\dot{r}\mathbf{r} \quad (2.161)$$

onde

$$q \doteq \frac{1}{2}\rho\frac{C_DA}{m_2} \quad (2.162)$$

E  $C_D$  é o coeficiente de arrasto com base numa área de referência,  $A$ . Geralmente, a suposição de fluxo livre-molecular é válida nas altitudes orbitais, que de acordo com os métodos estudados produz um valor de coeficiente de arrasto,  $C_D \approx 2$ , para a maioria das formas, com base na área máxima de seção transversal voltada para o fluxo. A dependência do arrasto na velocidade, ao invés da posição, torna-o uma força não conservativa, que resulta em um declínio da energia orbital,  $\epsilon = -\mu/2a$ , e portanto, do semi-eixo maior,  $a$ . Tomando o produto escalar da desaceleração devido ao arrasto com a velocidade relativa, temos a taxa de mudança da energia orbital:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\mu}{2a^2}\dot{a} = -q\dot{r}\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -qv^3 \quad (2.163)$$

ou

$$\dot{a} = -\frac{2a^2}{\mu}qv^3 \quad (2.164)$$

Onde  $v \doteq \dot{r}$ . Claramente, a taxa de declínio da órbita aumenta proporcionalmente com  $q$  e diminui à medida que o tamanho da órbita aumenta. A densidade atmosférica em altitudes orbitais pode ser aproximada como uma função exponencialmente decrescente da altitude,  $z \doteq r - R_e$ , onde  $\rho = \rho_0 e^{-z/H}$ , e podemos escrever:

$$\dot{a} = -\frac{a^2 C_D A}{m_2 \mu} \rho_0 v^3 e^{-\frac{z}{H}} \quad (2.165)$$

Tomando o produto vetorial da desaceleração devido ao arrasto com a velocidade relativa, temos a taxa de variação do momento angular,

$$\dot{\mathbf{h}} = -\mathbf{r} \times q\dot{\mathbf{r}} = -q\dot{\mathbf{r}}\mathbf{h} \quad (2.166)$$

Agora, deve-se notar que a derivada em relação ao tempo da equação  $h^2 = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h}$  resulta em:

$$h\dot{h} = \mathbf{h} \cdot \dot{\mathbf{h}} \quad (2.167)$$

Substituindo (2.166) na 2.167):

$$h\dot{h} = -q\dot{\mathbf{r}}\mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = -q\dot{\mathbf{r}}h^2 \quad (2.168)$$

Agora, como  $h = h\mathbf{i}_h$ , temos:

$$\dot{\mathbf{h}} = \dot{h}\mathbf{i}_h + h\frac{d\mathbf{i}_h}{dt} \quad (2.169)$$

E substituindo 2.166) e 2.168) em 2.169), temos:

$$h\frac{d\mathbf{i}_h}{dt} = q\dot{\mathbf{r}}h\mathbf{i}_h - q\dot{\mathbf{r}}\mathbf{h} = \mathbf{0} \quad (2.170)$$

$$\frac{d\mathbf{i}_h}{dt} = \mathbf{0} \quad (2.171)$$

A equação (2.171) mostra que a direção do plano orbital no espaço inercial não é alterada pelo arrasto. Assim, o arrasto mantém a orientação da órbita inalterada. Essas características são usadas para realizar uma manobra orbital assistida pela aerodinâmica. Ao invés de se realizar um disparo de retro propulsor para realizar o abaixamento de uma órbita altamente elíptica, isso é feito por múltiplas passagens da atmosfera de um planeta.

## 2.8 PROBLEMA DE 3 CORPOS

### 2.8.1 Equações do Movimento

O problema dos três corpos refere-se ao sistema dinâmico composto pelo movimento de três massas sob atração gravitacional mútua. Este problema geralmente surge quando estamos interessados nas perturbações orbitais de dois corpos causadas por um terceiro corpo distante, ou no movimento de um corpo menor no campo gravitacional formado por dois corpos maiores.

O problema dos três corpos tem atraído a atenção de matemáticos e físicos ao longo dos últimos 300 anos, principalmente devido à sua promessa de modelar o comportamento errático da lua. As equações de movimento para o problema dos três corpos podem ser escritas usando as equações N-corpos derivadas estudadas com  $N = 3$  da seguinte forma:

$$\frac{d^2 \mathbf{R}_i}{dt^2} = G \sum_{j \neq i}^3 \frac{m_j}{R_{ij}^3} (\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i) \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.172)$$

Onde  $G$  é a constante gravitacional universal,  $R_i$  denota a posição do centro de massa do corpo  $i$ , e  $R_{ij} = |\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i|$  denota a separação relativa dos centros de massa dos corpos  $i, j$ . A energia potencial do sistema de três corpos é dada por:

$$\begin{aligned} V &\doteq \frac{1}{2} G \sum_{i=1}^3 m_i \sum_{j \neq i}^3 \frac{m_j}{R_{ij}} \\ &= -G \left( \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} \right) \end{aligned} \quad (2.173)$$

Enquanto sua energia cinética é a seguinte:

$$T \doteq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j \neq i}^3 m_i \left( \frac{dR_{ij}}{dt} \right)^2 \quad (2.174)$$

O problema dos três corpos, portanto, resistiu a tentativas de solução geral de forma fechada. No entanto, Lagrange mostrou que existem certas soluções particulares do problema quando o movimento dos três corpos está confinado a um único plano. Tal movimento coplanar dos corpos é a ocorrência mais comum no universo, como o sistema solar. Antes de tentar as soluções particulares de Lagrange, vamos reescrever as equações de movimento na seguinte forma:

$$\mathbf{f}_i = G m_i \sum_{j \neq i}^3 \frac{m_j}{R_{ij}^3} (\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i) \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.175)$$

onde  $\mathbf{f}_i$  é a força resultante experimentada pela massa  $m_i$  devido às outras duas massas.

### 2.8.2 Solução de Lagrange

Como a força líquida experimentada por  $m_i$  é direcionada para o centro comum, temos

$$\mathbf{f}_i(t) = -m_i b^2 \mathbf{R}_i(t) \quad (2.176)$$

onde  $b$  é uma constante. Em um movimento planar com aceleração radial, temos

$$R_i^2 \dot{\theta} = \text{constante} \quad (2.177)$$

portanto:

$$\frac{d^2 a}{dt^2} - a \dot{\theta}^2 = -\frac{b^2}{a^2} \quad (2.178)$$

As duas últimas equações representam uma seção cônica em coordenadas polares, que é a equação do movimento relativo de dois corpos. Portanto, cada massa no problema dos três corpos coplanares traça uma seção cônica sobre o centro comum de massa. Esta solução simples e elegante possui vários casos interessantes e oferece uma visão valiosa sobre um problema de outra forma intratável.

Obviamente, para uma solução estacionária em relação ao referencial rotativo, requeremos um valor constante de  $a = 1$ , o que leva a uma velocidade angular constante,  $\omega = \dot{\theta}$ , pela conservação do momento angular. As equações de movimento nesse caso são escritas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\omega^2}{G} - \frac{m_2}{R_{12}^3} - \frac{m_3}{R_{13}^3} \right) \mathbf{R}_1 + \frac{m_2}{R_{12}^3} \mathbf{R}_2 + \frac{m_3}{R_{13}^3} \mathbf{R}_3 &= 0 \\ \frac{m_1}{R_{12}^3} \mathbf{R}_1 + \left( \frac{\omega^2}{G} - \frac{m_1}{R_{12}^3} - \frac{m_3}{R_{23}^3} \right) \mathbf{R}_2 + \frac{m_3}{R_{23}^3} \mathbf{R}_3 &= 0 \\ m_1 \mathbf{R}_1 + m_2 \mathbf{R}_2 + m_3 \mathbf{R}_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.179)$$

### 2.8.3 Problema Restrito de 3 Corpos

Quando a massa de um dos três corpos, digamos  $m_3$ , é negligenciável em comparação com a das outras duas massas (chamadas de primárias), ocorre uma simplificação no problema dos três corpos, em que negligenciamos a atração gravitacional de  $m_3$  sobre

$m_1$  e  $m_2$ . Nesse caso, o movimento de  $m_3$  em relação às primárias, que executam órbitas circulares em torno do centro de massa comum, é chamado de problema restrito dos três corpos. As equações de movimento do problema restrito são geralmente adimensionalizadas dividindo as massas pela massa total das primárias,  $m_1 + m_2$ , e as distâncias pela separação constante entre as primárias,  $R_{12}$ .

$$\begin{aligned}\mu &\doteq \frac{m_2}{m_1 + m_2} \\ r_1 &= \frac{R_{13}}{R_{12}} \\ r_2 &= \frac{R_{23}}{R_{12}}\end{aligned}\tag{2.180}$$

Acabamos de ver que certas soluções de equilíbrio são possíveis para o problema geral dos três corpos. Os pontos de equilíbrio para o problema restrito são chamados de pontos de Lagrange e podem ser obtidos igualando as derivadas temporais nas equações acima a zero, resultando nas seguintes equações algébricas:

$$\begin{aligned}x &= \frac{(1 - \mu)(x - \mu)}{r_1^3} + \frac{\mu(1 - \mu + x)}{r_2^3} \\ y &= \frac{(1 - \mu)y}{r_1^3} + \frac{\mu y}{r_2^3} \\ 0 &= \frac{(1 - \mu)z}{r_1^3} + \frac{\mu z}{r_2^3}\end{aligned}\tag{2.181}$$

### 3 IMPLEMENTAÇÃO

#### 3.1 IMPLEMENTAÇÃO AULA 2

A implementação do exemplo 3.1 mostrado na aula 2 utilizando Python, é dividida nas seguintes etapas:

- O script principal importa vários módulos e pacotes, incluindo 'parametros', 'numpy', 'matplotlib.pyplot', e 'gravidade-axissim'. O módulo 'parametros' fornece um espaço para armazenar variáveis globais, enquanto 'gravidade-axissim' contém a função que calcula a gravidade axissimétrica da Terra;
- No script principal, são definidas várias constantes relacionadas à Terra, incluindo o raio equatorial da Terra ( $R_e$ ), a constante de gravitação universal ( $G$ ), a massa da Terra ( $M$ ), e as constantes de Jeffery ( $J_2$ ,  $J_3$ ,  $J_4$ ). Essas constantes são armazenadas no módulo 'parametros' para uso posterior;
- O script principal cria um vetor 'h' contendo 100 valores igualmente espaçados entre 0 e 200 km, que representam diferentes altitudes acima da superfície da Terra. O vetor 'delta' é definido como 'h - 100', representando a latitude em graus;
- No script principal, 'h' é convertido para metros e adicionado ao raio da Terra para obter a distância radial 'r'. 'delta' é convertido para radianos e subtraído de  $\pi/2$  para obter a colatitude 'phi';
- Para cada valor em 'h', o script principal calcula a gravidade 'g' usando o modelo esférico. A função 'grav-axissimetrico' do script 'gravidade-axissim' é chamada para calcular a gravidade axissimétrica. Ela recebe 'r' e 'phi' como argumentos e retorna as componentes radial e colatitudinal da gravidade ( $g_r$  e  $g_{\phi}$ ). Dentro da função 'grav-axissimetrico', as constantes do módulo 'parametros' são usadas para compartilhar variáveis globais;
- Por fim, o script principal plota os resultados em dois gráficos. O primeiro gráfico mostra a gravidade calculada pelos modelos esférico e axissimétrico em função da latitude. O segundo gráfico mostra a componente colatitudinal da gravidade calculada pelo modelo axissimétrico, também em função da latitude.



### 3.2 IMPLEMENTAÇÃO AULA 6

A implementação dos exemplos mostrados na aula 6 utilizando Python, é dividida nas seguintes etapas:

- O script `resolveEqBarker` calcula a anomalia verdadeira de uma órbita parabólica com base no tempo fornecido como entrada. Ele utiliza parâmetros definidos em um arquivo chamado "parametros.py" (no qual os parâmetros são dados como nulos inicialmente) e faz uso da biblioteca NumPy para realizar cálculos matemáticos. A função utiliza fórmulas matemáticas específicas para calcular a anomalia média parabólica, a solução analítica e, por fim, a anomalia verdadeira. O resultado final, representado pela variável  $\theta$ , é retornado como saída da função em radianos;
- O script com funções `Kepler` e `resolveEqKepler` resolve a equação de Kepler utilizando a anomalia excêntrica como incógnita e parâmetros adicionais, após isso, calcula a anomalia excêntrica para um tempo específico em uma órbita elíptica. Ela extrai os parâmetros relevantes, calcula a anomalia média e, em seguida, utiliza a função `fsolve` para resolver numericamente a equação de Kepler. O resultado retornado é a anomalia excêntrica correspondente ao tempo fornecido;
- Em outro script, a função `KeplerHiperbolica` resolve a equação de Kepler hiperbólica, utilizando a anomalia hiperbólica ( $H$ ) como a incógnita e parâmetros adicionais ( $e$ ,  $Mh$ ). A equação é resolvida através do cálculo da função objetivo ( $y$ ), que é uma combinação da excentricidade ( $e$ ), do seno hiperbólico de  $H$ , de  $H$  e de  $Mh$ . Quando  $y$  é igual a zero, a equação de Kepler hiperbólica está resolvida. Já a função `resolveEqKeplerHiperbolica` calcula a anomalia hiperbólica para um determinado tempo ( $t$ ) em uma órbita hiperbólica. Ela utiliza os parâmetros definidos em "parametros.py" e as bibliotecas NumPy e `scipy.optimize`. A função extrai os parâmetros relevantes, como o tempo de periastro ( $\tau$ ), o parâmetro ( $p$ ), a constante gravitacional do planeta ( $\mu$ ) e a excentricidade da órbita ( $e$ ). Em seguida, calcula a anomalia média hiperbólica ( $Mh$ ) com base no tempo fornecido. Os parâmetros adicionais ( $e$ ,  $Mh$ ) são passados para a função `fsolve` juntamente com o valor inicial ( $H_0$ ) para a anomalia hiperbólica. A função `fsolve` utiliza a função `KeplerHiperbolica` para resolver numericamente a equação de Kepler hiperbólica e encontrar a anomalia hiperbólica ( $H$ ) correspondente ao tempo fornecido. O resultado,  $H$ , é retornado pela função `resolveEqKeplerHiperbolica`;
- O script com a função `matrizTransicaoEstado` calcula a matriz de transição de estado. A função recebe a anomalia verdadeira como entrada e utiliza parâmetros definidos em um arquivo externo. Ela realiza os cálculos necessários para determinar as constantes associadas à órbita, como o momento angular específico e a

distância radial inicial. Em seguida, utiliza essas constantes para calcular os coeficientes de Lagrange. A matriz de transição de estado é então construída a partir desses coeficientes e retornada como resultado da função. Em resumo, a função `matrizTransicaoEstado` calcula e retorna a matriz de transição de estado com base na anomalia verdadeira fornecida;

- O script principal começa importando os módulos necessários. Em seguida, algumas constantes gerais são definidas, como a constante de gravitação universal, a massa da Terra e o raio equatorial da Terra. As condições iniciais dos exemplos também são definidas, como a anomalia verdadeira inicial e o tempo de periastro. O script possui exemplos de aplicação em órbita elíptica, órbita hiperbólica e órbita parabólica. Para cada exemplo, são definidos parâmetros específicos, como a distância de periastro, excentricidade e semi-eixo maior. Em seguida, são realizados cálculos para determinar o período da órbita, vetor de tempo, vetores de posição e velocidade inicial, e matrizes que armazenarão a solução. A propagação da órbita é feita para cada instante de tempo, resolvendo equações de Kepler específicas para cada tipo de órbita. A matriz de transição de estado é determinada a partir da anomalia verdadeira, e a posição e velocidade são calculadas usando essa matriz. Finalmente, são plotados gráficos ilustrando os resultados para cada exemplo de órbita. Os gráficos incluem a variação da anomalia excedente/verdadeira, componentes da velocidade, e a trajetória orbital em coordenadas retangulares. No final do script, é exibido um gráfico para cada exemplo de órbita: órbita elíptica, órbita hiperbólica e órbita parabólica. Cada gráfico mostra a variação da anomalia verdadeira, as componentes da velocidade e a trajetória orbital.

### 3.3 IMPLEMENTAÇÃO AULA 8

A implementação dos exemplos mostrados na aula 8 utilizando Python, é dividida nas seguintes etapas:

- O script recebe os argumentos que representam o tempo da observação, o vetor posição relativa, o vetor velocidade relativa e o parâmetro gravitacional. A função realiza uma série de cálculos matemáticos para determinar os parâmetros orbitais com base nas informações fornecidas. Esses parâmetros descrevem a órbita dos corpos no espaço. Os cálculos incluem a determinação da distância radial no instante observado, o vetor quantidade de movimento angular específica no referencial celeste, o vetor excentricidade no referencial celeste, a excentricidade da órbita, o módulo do vetor quantidade de movimento angular, o parâmetro da órbita e o semi eixo maior;

- São calculados a anomalia verdadeira no instante da observação e o tipo de órbita com base na excentricidade. O tempo de periastro é então calculado levando em consideração o tipo de órbita: elíptica, parabólica ou hiperbólica;
- O código determina a linha dos nodos, o vetor unitário ao longo dessa linha (no sistema celeste), a longitude celeste do nodo ascendente e a inclinação da órbita;
- Por fim, são calculados o vetor unitário ao longo do vetor excentricidade (no referencial celeste), o vetor unitário ao longo do vetor quantidade de movimento angular (no referencial celeste) e o argumento de periastro. Todos esses parâmetros são armazenados em um vetor chamado par-orb, que contém seis elementos: semi eixo maior ( $a$ ), excentricidade ( $e$ ), tempo de periastro ( $\tau$ ), longitude celeste do nodo ascendente (OMEGA), inclinação ( $i$ ) e argumento de periastro ( $\omega$ );
- Em outro script, é resolvido o exemplo 5.2, no qual são calculados os parâmetros orbitais com base em uma observação de posição e velocidade no espaço. Os valores de exemplo para a posição, velocidade e parâmetro gravitacional são fornecidos, e os parâmetros orbitais são calculados e impressos na tela utilizando o script principal.

### 3.4 IMPLEMENTAÇÃO AULA 10

Para os exemplos realizados na aula 10, é escrito um código para cada exemplo:

- Exemplo 5.6: Inicialmente são estabelecidas as constantes do problema, como o raio da Terra, a constante gravitacional e as características das órbitas inicial e final. Então, são calculados as distâncias radiais da órbita inicial, de perigeu da órbita final e de apogeu da órbita final. Nesse momento, calcula-se o semi eixo maior final, a velocidade da nova órbita, a excentricidade da nova órbita, o parâmetro da nova órbita e a altitude da nova órbita. Após isso, é calculado o ângulo de trajetória da órbita resultante no ponto de manobra. Então, com a equação da energia é encontrado a velocidade inicial da órbita, com a qual se define o primeiro impulso de velocidade e posteriormente o ângulo entre a velocidade inicial e o primeiro impulso. Para o segundo impulso, se define a variação requerida da inclinação para a manobra, e de forma similar ao feito anteriormente, se define a velocidade inicial da nova órbita, com a qual se define o segundo impulso e também o ângulo entre a velocidade e o mesmo;
- Exemplo 5.7: Primeiro, são importados os pacotes necessários e definidos a constante gravitacional da Terra e os parâmetros da órbita inicial. Então, define-se a direção do impulso de velocidade e calcula-se a velocidade no apogeu e a magnitude

do impulso de velocidade necessário para a manobra. Assim, são estabelecidos os vetores posição e velocidade no ponto de manobra, além do vetor de quantidade de movimento angular específica da órbita inicial, todos no referencial perifocal inicial. Depois, calcula-se o vetor impulso de velocidade necessário para a manobra no referencial perifocal inicial, e o vetor velocidade resultante após a manobra. É definida uma matriz de transformação de coordenadas do referencial perifocal da órbita inicial para o referencial celeste, e transforma os vetores envolvidos na manobra para este referencial. O vetor posição na órbita resultante no ponto de manobra é o mesmo que na órbita inicial. É usada a função det-orbita para determinar os elementos orbitais da órbita resultante e imprimir esses parâmetros. Por fim, calcula-se o ângulo entre os planos das órbitas inicial e final;

- Exemplo 5.8: Inicialmente, são definidos os dados iniciais e os cálculos preliminares como raio equatorial, constante gravitacional, distância radial da órbita inicial, etc. Dado que a elipse 2 promove um abaixamento de órbita circular, ela é descartada, então é escolhida a elipse de transferência 1. Tem-se que o perigeu da órbita de transferência é coincidente com o raio da órbita circular, e o apogeu da órbita de transferência é coincidente com o apogeu da órbita elíptica desejada. Na sequência é calculado o semi eixo maior da elipse de transferência a partir do raio de perigeu e de apogeu da órbita de transferência. Então são calculadas as velocidades de apogeu e perigeu da órbita utilizando a equação da energia. Por fim, são definidas as velocidades no ponto de aplicação de impulso das órbitas inicial e final também a partir da equação de energia. O primeiro impulso é dado pela subtração da velocidade de perigeu da órbita de transferência com a velocidade no ponto de aplicação do impulso da órbita inicial, de forma similar, o segundo impulso é calculado subtraindo a velocidade de apogeu da órbita de transferência com a velocidade no ponto de aplicação de impulso da órbita final. O impulso total é dado pela soma do módulo dos dois impulsos definidos;
- Exemplo 5.9: São inseridos os dados do problema, seguido pelo cálculo do raio da órbita inicial. O raio final é dado pela manipulação da equação do tempo sideral. Os impulsos de velocidade são calculados pela equação de impulso de velocidade da transferência de Hommann. O tempo de transferência é obtido utilizando também uma das equações de Hommann.

### 3.5 IMPLEMENTAÇÃO AULA 13

Para os exemplos realizados na aula 13, é escrito um código para cada exemplo:

- Exemplo 6.1: Primeiramente são definidas as constantes, incluindo a constante gravitacional da Terra ( $\mu$ ), a segunda constante de Jeffery da Terra ( $J_2$ ), o raio equatorial da Terra ( $R_e$ ), e as propriedades da órbita desejada, incluindo o semieixo maior ( $a$ ) e a excentricidade ( $e$ ). Então é calculada a velocidade angular média da Terra em sua órbita ao redor do Sol (OMpm), primeiro em radianos por dia e depois em radianos por segundo. Depois, é calculada a velocidade angular média da órbita desejada ( $n$ ) usando a terceira lei de Kepler. Posteriormente, é definido o parâmetro da órbita. Por fim, é calculada a inclinação necessária ( $inc$ ) para que a órbita seja heliossíncrona, ou seja, para que ela mantenha uma orientação constante em relação ao Sol. O script então imprime essa inclinação em graus;
- Exemplo 6.2: Primeiro são importados os pacotes necessários, incluindo funções para a propagação da órbita Kepleriana, a determinação de elementos orbitais e a aplicação de perturbações devido ao terceiro corpo. Também define constantes globais para os parâmetros gravitacionais do Sol e da Terra. É definido o vetor de elementos orbitais da Terra em relação ao Sol e o vetor de estado inicial do veículo espacial (VE) - posição e velocidade. Define-se também uma função, `dinPert3corpo`, para calcular a dinâmica da massa de prova perturbada pelo terceiro corpo (a Terra). Esta função recebe como entrada o tempo e o vetor de estado do VE, e retorna as derivadas desse vetor. É utilizada a função `solve-ivp` do pacote `scipy` para integrar numericamente a equação de movimento perturbada pelo terceiro corpo ao longo de 100 dias solares médios. O resultado é a posição e velocidade do VE em cada ponto do tempo. Para comparação, o script também propaga a órbita do VE usando a solução analítica Kepleriana, que ignora a influência da Terra. Por fim, são comparados os resultados das duas simulações, integrada e Kepleriana, plotando a posição e velocidade do VE em cada componente (X, Y, Z) em função do tempo. Cada gráfico mostra duas curvas: uma para a solução integrada e outra para a solução Kepleriana.

### 3.6 IMPLEMENTAÇÃO AULA 14

Para os exemplos realizados na aula 14, é escrito um código para cada exemplo:

- Exemplo 7.3: Primeiramente, o código define uma função `res3body` que contém as equações de movimento para o sistema. A massa do segundo primário é assumida como uma constante. As distâncias aos primários são calculadas, seguidas das equações de movimento. Em seguida, um vetor de tempo é definido, além de várias condições iniciais para a velocidade. Após definir a função e as condições iniciais, o código itera sobre a lista `compvelocidade` com as condições iniciais de velocidade.

Em cada iteração, a função *solveivp* da biblioteca *scipy* é usada para resolver o sistema de equações diferenciais ordinárias que descrevem o movimento. O método *RK45* é usado para a resolução. Os resultados de cada simulação são então traçados em um gráfico de *x* contra *y* usando a biblioteca *matplotlib*. Cada gráfico é título como "Trajetória da Espaçonave: Caso X", onde X varia de (a) a (g), correspondendo a cada configuração de velocidade inicial. Por fim, todos os gráficos são exibidos com a função *plt.show()*. Infelizmente, as posições da Terra e da Lua não estão sendo plotadas, já que as linhas de código relevantes estão comentadas.

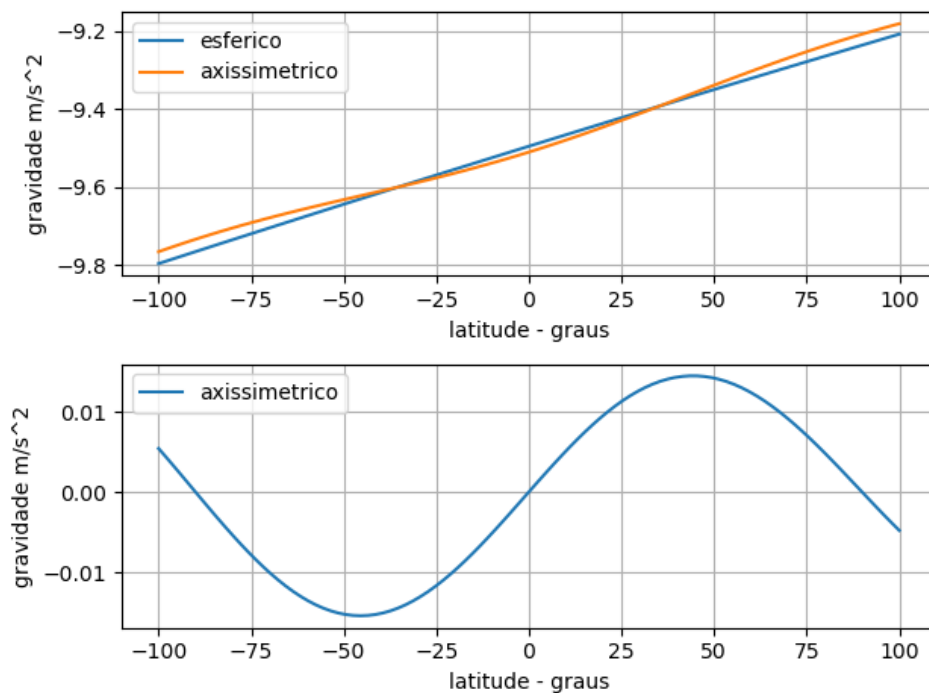
## 4 INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo, será abordado a interpretação dos resultados obtidos durante a implementação dos códigos e solução dos problemas. Serão analisados os resultados obtidos, relacionando-os com a metodologia e verificando a coerência dos resultados com os fenômenos físicos esperados.

### 4.1 CÁLCULO DA GRAVIDADE DE PLANETA AXIS SIMÉTRICO

O primeiro problema, trata-se da comparação entre os modelos de gravidade para planeta axis simétrico e esférico. As componentes gravitacionais são  $g_r$  que está na direção do centro do planeta, porém seu sentido é para fora dele, e  $g_\phi$  que aponta para o norte no planeta. Os gráficos são representados da forma que  $h = 200km$  quando  $\delta = 100^\circ$  e  $h = 0km$  quando  $\delta = -100^\circ$ .

Figura 14 – Comparação entre as componentes da gravidade para um planeta esférico e um axis simétrico.



Fonte: Autores, 2023

Observa-se que a componente  $g_r$  é igual para ambos os modelos quando a latitude é igual a  $\pm 45^\circ$  e a componente  $g_\phi$  é igual no equador e nos polos. A maior diferença entre os modelos pode ser observado para  $g_r$  nos polos e para  $g_\phi$  quando  $\delta = \pm 45^\circ$ .

Ainda, nota-se que a magnitude dessas variações não é tão grande, porém pode gerar um erro gigantesco em simulações de voos de longa duração, praticamente a totalidade das operações aeroespaciais.

## 4.2 PROPAGAÇÃO DE ÓRBITA

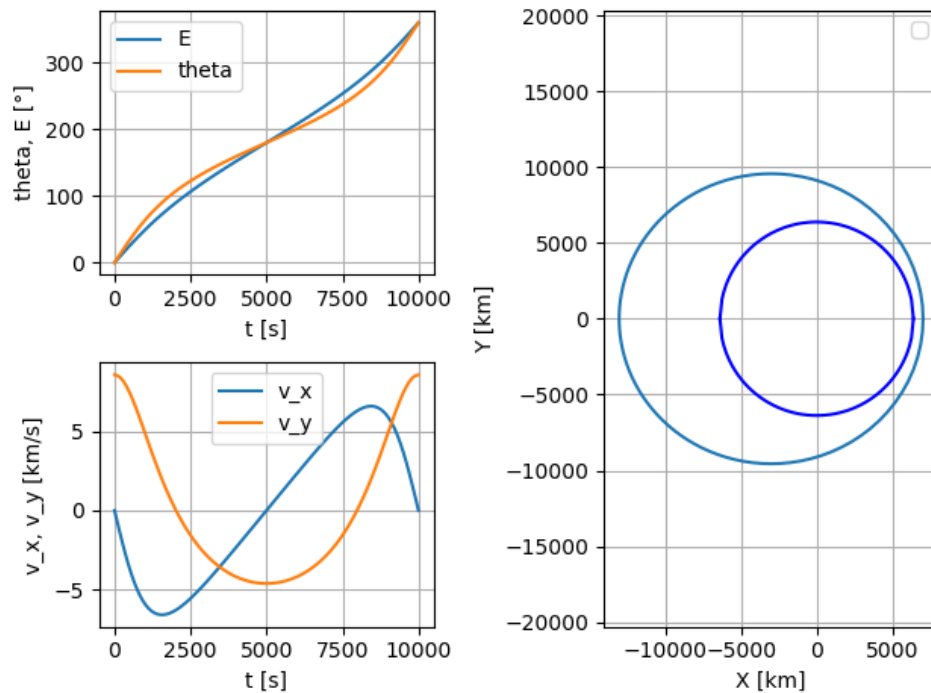
A propagação de órbita permite prever com precisão a posição futura de um objeto em órbita, o que é fundamental para o planejamento de missões espaciais, manobras orbitais, posicionamento de satélites e controle de espaçonaves. Além disso, a propagação de órbita também é utilizada para monitorar o estado de saúde de satélites em órbita, detectar possíveis colisões e realizar ajustes necessários para manter a órbita desejada. Serão apresentadas 3 tipos de órbitas: elíptica; hiperbólica e parabólica, sendo apresentadas as variações da anomalia verdadeira,  $\theta$ , componente da velocidade na direção x,  $v_x$ , componente da velocidade na direção y,  $v_y$  no tempo, e as coordenadas no plano  $XY$ .

### 4.2.1 Órbita elíptica

Uma órbita elíptica é caracterizada por ter a forma de uma elipse. Nesse tipo de órbita, o objeto em movimento descreve uma trajetória oval ao redor do corpo celeste central, como a Terra. A elipse possui dois focos, sendo que o corpo celeste central (como a Terra) está localizado em um dos focos. A figura 15, mostra as variações dos parâmetros para esse tipo de órbita. Ainda é considerado o a variação da anomalia excêntrica.



Figura 15 – Propagação de órbita elíptica.



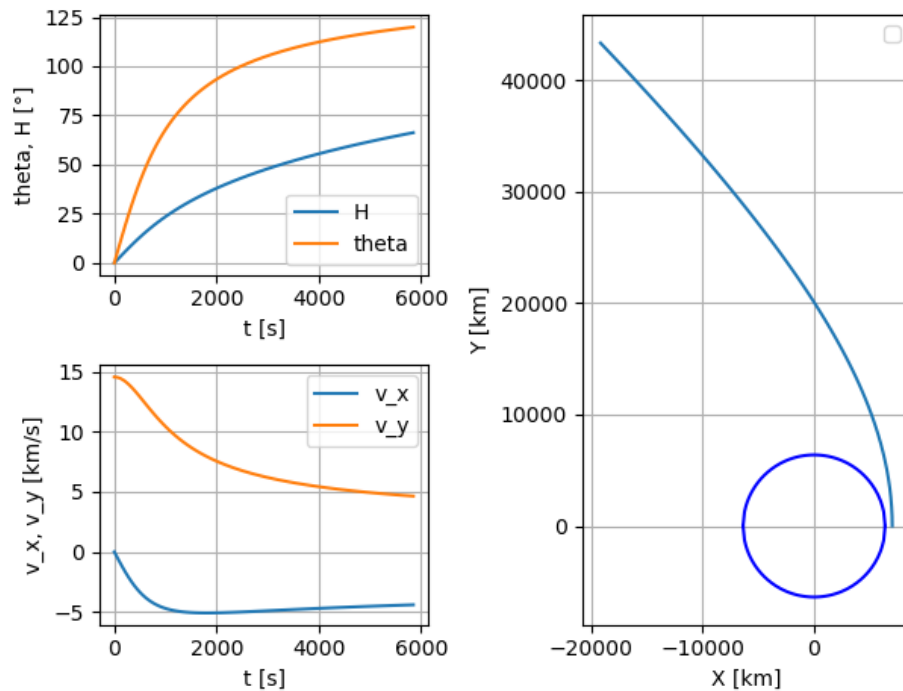
Fonte: Autores, 2023

Como esperado, para a órbita elíptica, a anomalia verdadeira deverá ser igual a anomalia excêntrica nos pontos em que  $\theta = n\pi$ , para  $n$  inteiro, isso ocorre devido ao fato que no periastro e no apoastro as anomalias excêntrica e verdadeira coincidem. Também observa-se que as componentes da velocidade estão coerentes pois  $v_x = 0$  quando  $v_y = \max$ , porém o contrário não é válido justamente pelas características da órbita, seria válido apenas para uma órbita circular. Por último o gráfico mais a direita mostra o formato elíptico da órbita.

#### 4.2.2 Órbita hiperbólica

Uma órbita hiperbólica é caracterizada por ter a forma de uma hipérbole. Nesse tipo de órbita, o objeto em movimento descreve uma trajetória aberta, em forma de "U". A velocidade do objeto em relação ao corpo celeste central é suficientemente alta para que ele escape da influência gravitacional e não retorne. Essas órbitas são utilizadas para missões espaciais interplanetárias ou quando se deseja realizar uma trajetória de passagem próxima a um corpo celeste sem entrar em órbita. Para essa órbita também é observado a variação da anomalia hiperbólica.

Figura 16 – Propagação de órbita hiperbólica.



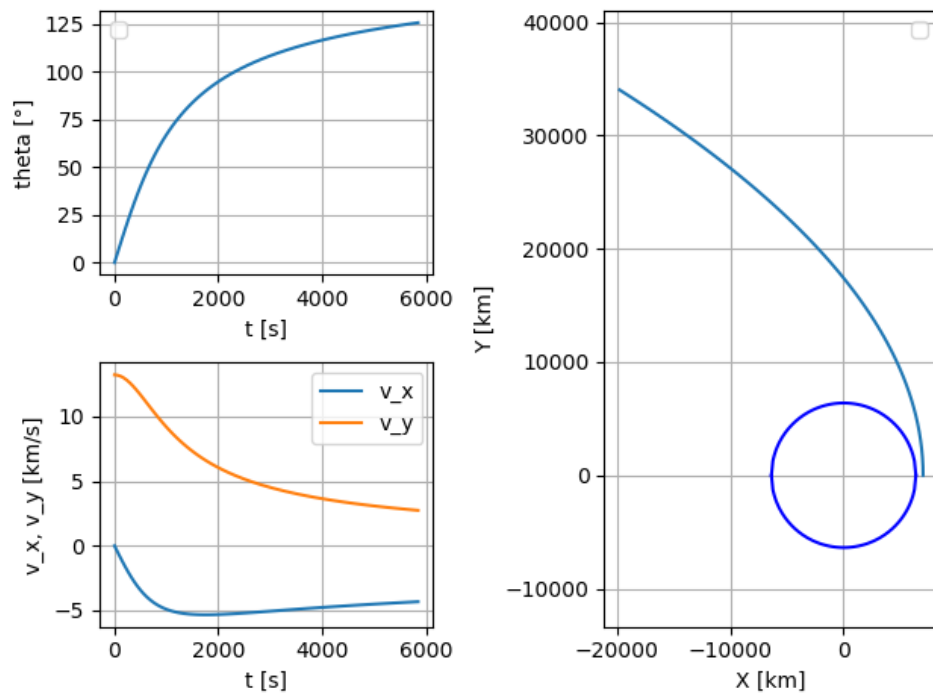
Fonte: Autores, 2023

Por se tratar de uma órbita de escape, não existe uma repetição de valores das velocidades como para a órbita elíptica, eles tendem a convergir para algum valor conforme pode ser observado pela figura 16. Para a anomalia verdadeira, observa-se uma mudança rápida em seu valor e depois um amortecimento fazendo ela tender a um valor, o que também faz sentido por se tratar de uma órbita de escape. Ainda, a anomalia hiperbólica tem sua magnitude menor que a anomalia verdadeira, o que também está coerente já que ela está relacionada a uma função hiperbólica. Por ultimo o gráfico da trajetória representa a forma hiperbólica da trajetória e mostrando a sua posição tendendo para longe da órbita circular.

### 4.2.3 Órbita parabólica

Uma órbita parabólica é uma órbita especial que está no limite entre as órbitas elípticas e hiperbólicas. Nesse tipo de órbita, o objeto em movimento descreve uma trajetória parabólica. A velocidade do objeto é exatamente suficiente para que ele escape da influência gravitacional do corpo celeste central, mas sem energia cinética adicional para se afastar indefinidamente. Essas órbitas são raras e geralmente ocorrem em situações especiais, como trajetórias de passagem próxima a um corpo celeste ou quando a velocidade de lançamento é cuidadosamente ajustada.

Figura 17 – Propagação de órbita parabólica.



Fonte: Autores, 2023

Da mesma forma que para a órbita hiperbólica, a órbita parabólica é de escape e pode ser observado na figura 17. Tanto as componentes da velocidade quanto a anomalia verdadeira são bem parecidas com a órbita hiperbólica o que é bem coerente.

#### 4.3 DETERMINAÇÃO DE ÓRBITA

Nessa seção será resolvido um exemplo onde serão obtidos os parâmetros de uma órbita em um problema de dois corpos a partir de uma única observação de posição e velocidade. Os elementos orbitais consistem em 6 parâmetros, que descrevem a progressão e a orientação da órbita. Um conjunto comum de elementos orbitais inclui a excentricidade, semi eixo maior, tempo de periastro, longitude celeste do nodo ascendente, inclinação e argumento de periastro.

Do enunciado tem-se que uma espaçonave observada no referencial centrado na Terra possui a seguinte posição e velocidade celeste:  $\mathbf{r} = -500\mathbf{i} + 12500\mathbf{k}$  [km] e  $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$  [km/s]. Foi solicitado que fosse determinado os parâmetros orbitais. Utilizando o programa desenvolvido em aula, foram obtidos os valores mostrados na tabela 1

Tabela 1 – Resultados Exemplo 5.2 -Determinação de Órbita

Elementos Orbitais	Valor	Unidade
Semi-Eixo Maior	-13382.403826218939	Km
Excentricidade	1.9765961447821856	-
$\tau$	416.7937786907604	s
$\Omega$	122.0053832080835	graus
$i$	71.26309861909091	graus
$\omega$	95.71519588364482	graus

Analisando os elementos pode-se afirmar que a espaçonave se aproxima da Terra, uma vez que  $\tau$  é positivo. Isso também pode ser visto devido a anomalia verdadeira no quarto quadrante.

#### 4.4 MANOBRAS ORBITAIS

As manobras orbitais desempenham um papel crucial na exploração espacial e na operação de satélites, permitindo que espaçonaves e satélites alterem sua posição, velocidade e direção no espaço. Essas manobras são essenciais para alcançar órbitas desejadas, manter a estabilidade orbital, evitar colisões e realizar missões específicas.

Para uma maior compreensão do assunto e aplicação dos conceitos vistos anteriormente serão discutidos os resultados dos exemplos mostrados a seguir.

##### 4.4.1 Exemplo 5.6

É dado que um veículo espacial está em uma órbita terrestre de altitude 500 km, com inclinação de  $10^\circ$ , deve ser enviado para uma órbita elíptica com altitudes de perigeu de 200km e apogeu de 700km, bem como inclinação de  $5^\circ$ .

Serão aplicados dois impulsos; um para a obtenção da órbita elíptica e o segundo para mudar a inclinação da órbita intermediária, sendo que esse é aplicado no apogeu para minimizar a quantidade de propelente.

O primeiro impulso deve ser aplicado com um ângulo  $\beta_1$ , uma vez que a altitude de perigeu solicitada é diferente da inicial. Este está relacionado com a velocidade inicial e final.

O segundo impulso de velocidade é baseado na variação de inclinação necessária. Da mesma forma, esse deve ser aplicado de forma a minimizar o uso de propelente, isso se dá com a aplicação no apogeu.

Com essas considerações e utilizando o programa desenvolvido em aula, obtém-se os seguintes resultados:

Tabela 2 – Resultados Exemplo 5.6

	Valor	Unidade
$\Delta_{v1}$	274.066	m/s
$\beta_1$	83.12524398118913	grau
$\Delta_{v2}$	642.5679592057598	m/s
$\beta_2$	92.05589473193183	grau

Comparando as magnitudes dos impulsos, percebe-se que a mudança de inclinação é a manobra que requer um maior incremento de velocidade, utilizando assim a maior quantidade de propelente. Para a otimização de uma dada missão o interessante é lançar a espaçonave o mais próximo possível da inclinação desejada.

#### 4.4.2 Exemplo 5.7

Um veículo espacial em uma órbita terrestre elíptica, com  $a = 6.900$  km,  $e = 0,6$ ,  $\Omega = 120^\circ$ ,  $\omega = 25^\circ$  e  $i = 10^\circ$ . Quando o veículo está no apogeu, um impulso de velocidade é aplicado com um ângulo  $\beta = 100^\circ$ , relativo ao vetor velocidade, medido no sentido anti-horário em um plano normal à órbita inicial. A magnitude deste impulso é tal que não há alteração da magnitude da velocidade orbital. Determine a nova órbita do veículo espacial.

O formato das órbitas será o mesmo, dado que o impulsivo foi aplicado em um plano normal a órbita inicial, não houve alteração da magnitude da velocidade e a distância radial no ponto de manobra não foi alterada, dado as características da manobra.

Tabela 3 – Elementos Orbitais da Órbita Resultante - Exemplo 5.7

Elementos Orbitais Finais	Valor	Unidade
Semi-Eixo Maior	6899999.999	m
Excentricidade	0.6000000000000002	-
$\Omega$	-14.509563087754747	grau
$\omega$	158.77278698980075	grau
inclinação	11.694220111804377	grau
$\alpha$	20.000	grau

A diferença entre a inclinação inicial e final é de  $\delta_i = 1.694$ . Já o ângulo  $\alpha = 20^\circ$ . Como a medida do ângulo  $\alpha$  é feita da linha dos nodos na intersecção dos planos orbitais e a medida da inclinação é feita a partir da linha dos nodos da órbita com o plano equatorial, tem-se essa diferença dos ângulos. Com isso conclui-se que uma aplicação de impulso de velocidade não implica em uma alteração da inclinação da nova órbita.

#### 4.4.3 Exemplo 5.8

Foi solicitado o menor impulso total requerido, em uma manobra de transferência orbital bi impulsiva, de uma órbita circular terrestre de 500 km de altitude, para a órbita elíptica vista no exemplo 5.7 que intercepta a circular.

Utilizando o script feito em aula, obtém-se os seguintes valores mínimos:

Tabela 4 – Resultados Exemplo 5.8

	Valor	Unidade
$v_{at}$	5264.8753	m/s
$v_{pt}$	8450.5766	m/s
$v_i$	7612.6039	m/s
$v_f$	3800.2669	m/s
$\delta_{v1}$	837.9726	m/s
$\delta_{v2}$	-1464.6083	m/s
$\delta_{vt}$	2302.5810	m/s

Como pode ser visto na tabela acima o menor impulso total requerido é de 2303.581 m/s.

#### 4.4.4 Exemplo 5.9

Enunciado: Calcule os impulsos de velocidade e o tempo requerido para uma transferência de Hohmann a partir de uma órbita circular terrestre de altitude  $250km$  (órbita de estacionamento - parking orbit), para uma órbita geosíncrona.

Tabela 5

	Valor	Unidade
$\delta_{v1}$	2440.0824	$m/s$
$\delta_{v2}$	1472.0333	$m/s$
Tempo da Transferência	18961.0618	$s$

A transferência de Hohmann é uma manobra orbital amplamente utilizada na engenharia espacial para mover uma espaçonave entre duas órbitas circulares ao redor de um corpo celeste, como a Terra. A manobra é feita com dois impulsos conforme listado abaixo:

1. Inserção em órbita de transferência: A espaçonave é colocada em uma órbita elíptica ao redor do corpo celeste de partida. Essa órbita tem um periastro (ponto mais próximo do corpo celeste) na órbita original e um apoastro (ponto mais afastado do corpo celeste) na órbita de destino desejada.

2. Inserção na órbita de destino: Quando a espaçonave atinge o apoastro da órbita de transferência, uma segunda queima de propulsão é realizada para alterar sua velocidade e direção, de forma a circularizar a órbita na qual deseja-se chegar.

O valor do incremento da velocidade em cada impulso e o tempo para que ocorra a transferência estão dados na tabela 5.

## 4.5 ÓRBITAS PERTURBADAS

### 4.5.1 Exemplo 6.1

Enunciado: Calcular a inclinação orbital de uma terra sincronizada com o sol satélite de  $a = 6700km$  e  $e = 0.01$ .

Ao introduzir uma inclinação em uma órbita sol síncrona, o satélite não permanece fixo em relação ao plano equatorial da Terra. Em vez disso, ele oscila para o norte e para o sul do equador em uma faixa determinada pelo ângulo de inclinação. Isso pode permitir que o satélite tenha uma cobertura mais ampla em termos de latitude, possibilitando a comunicação e observação de áreas que não seriam cobertas por uma órbita geoestacionária padrão. Para as condições dadas calcula-se o valor dos parâmetros  $p = 6699.33km$  e  $n = 0.0011512156rad/s$ , usando-se  $\mu = 3.986004418e^{14}$ ,  $a = 6700e^3$ ,  $R_e = 6378.14km$  e  $J_2 = 0.00108263$ . Assim obtêm-se uma inclinação  $i = 96.74779106514552^\circ$ . Observa-se uma discrepância de aproximadamente 6.9% para o valor do livro, o que pode ser justificado pelo valor de  $\mu$  escolhido que não é especificado pelo livro e os demais valores estão coerentes.

### 4.5.2 Exemplo 6.2

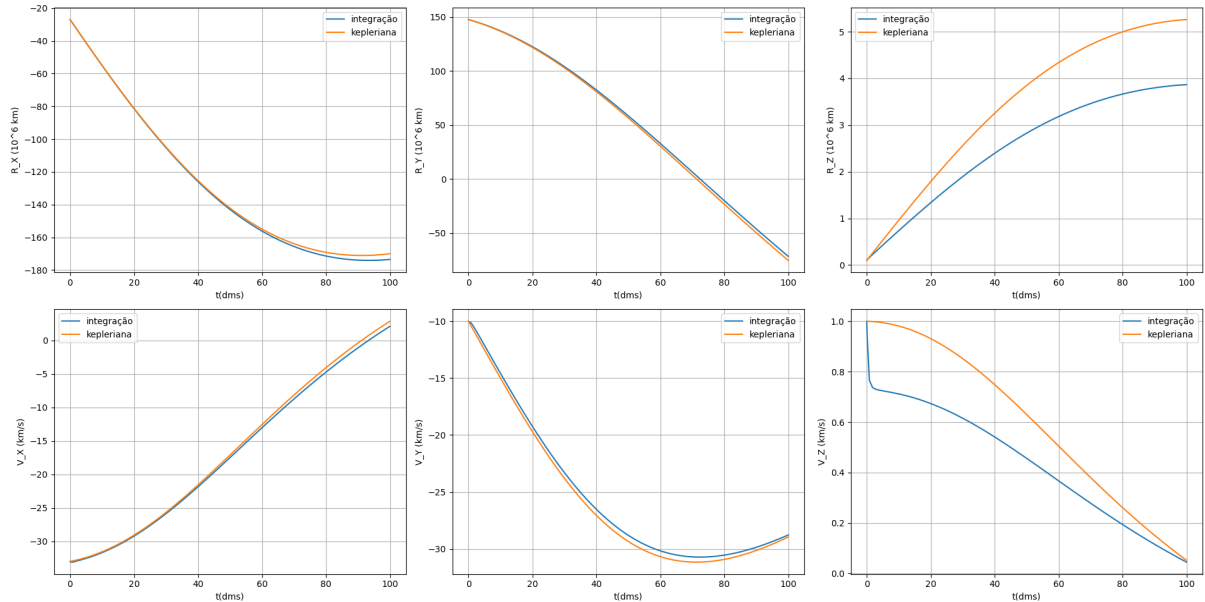
Enunciado: Uma espaçonave está em uma viagem interplanetária partindo da Terra. A posição heliocêntrica atual e a velocidade inercial da espaçonave em relação à eclíptica são dadas por

$$R(0) = \begin{bmatrix} -27 \\ 147.5 \\ 0.1 \end{bmatrix} \times 10^6 km, \quad V(0) = \begin{bmatrix} -33 \\ -10 \\ 1 \end{bmatrix}; km/s \quad (4.1)$$

Os elementos orbitais da Terra calculados a partir de gráficos de efemérides para o tempo presente são os seguintes:  $a = 149597870km$ ,  $e = 0.01667$ ,  $\tau = -100 \text{ mean solar}$

days. Determine a posição geocêntrica e a velocidade da espaçonave com 100 *mean solar days* a partir de agora.

Figura 18 – Comparação Órbita com Perturbação e Órbita Kepleriana



Fonte: Autores, 2023

A posição inicial da espaçonave está claramente dentro do espaço de influência da terra. No entanto, devido a alta velocidade, a esfera de influência será cruzada nos próximos dias resultando em uma diminuição dessa influência. Conforme a figura 18 nota-se que para um espaço de tempo curto a perturbação que é a principal direção de ação da perturbação. conforme maior o tempo considerado maior a diferença entre os modelos evidenciando a impacto das perturbações.

#### 4.6 PROBLEMA DE 3 CORPOS RESTRITO

Aqui é apresentada a simulação da trajetória de uma espaçonave que passa pelo ponto (0,1,0) no sistema Terra-Lua. Foram simulados os seguintes casos mostrados na tabela abaixo:

Os resultados obtidos podem ser vistos nas figuras a seguir. Destaca-se que os resultados encontrados ficaram ligeiramente diferentes dos obtidos por (TEWARI, 2006). Os autores acreditam que a divergência se dá devido ao solver utilizado. No caso deste trabalho foi utilizado o solver *solve\_ivp* com o método "RK45". Já (TEWARI, 2006) utiliza o solver ODE45 do *Matlab*.

A trajetória para o caso (a) é simulada com um tempo máximo de  $t = 1$  e é ilustrada

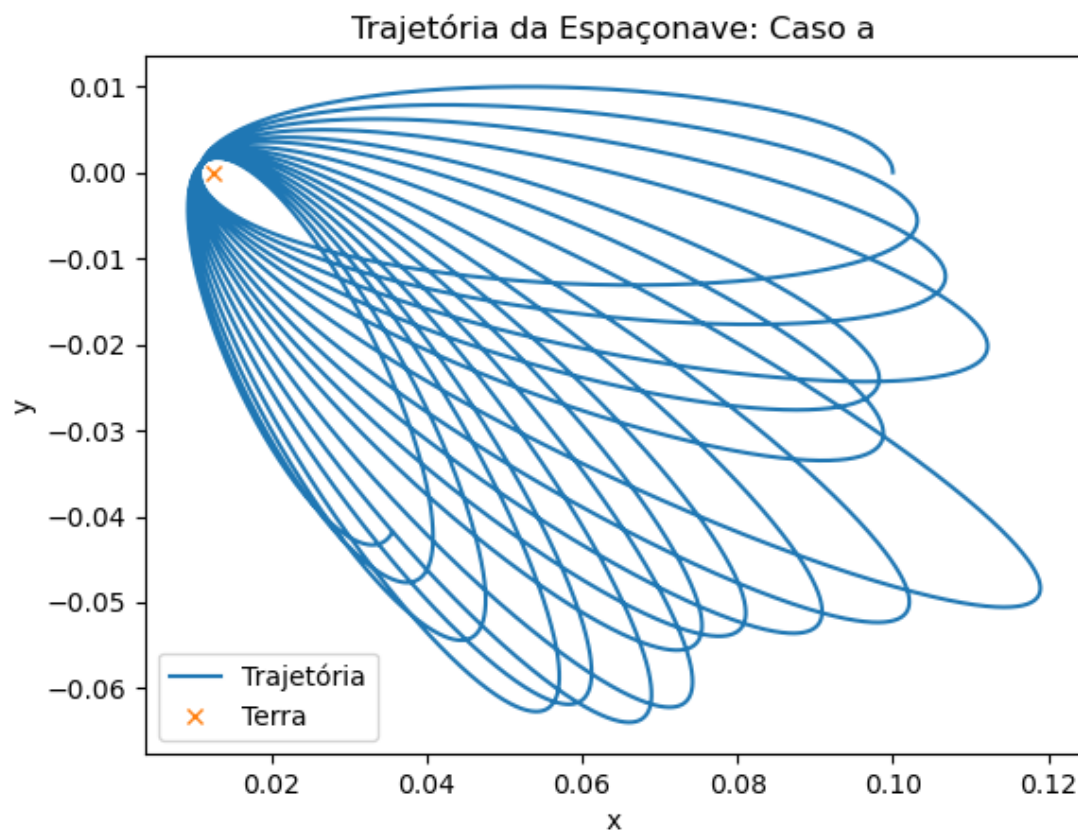


Tabela 6 – Componentes de Velocidade Relativa

Caso	$\dot{x}$	$\dot{y}$
a)	0	0.5
b)	-4	1
c)	-3.35	3
d)	-3.37	3
e)	-3.4	3
f)	-3.5	3
g)	-3.6	3

na figura ?? abaixo. As órbitas em torno da Terra, com rotação apsidal e nodal do plano orbital causada pela gravidade da lua ficam claras na imagem.

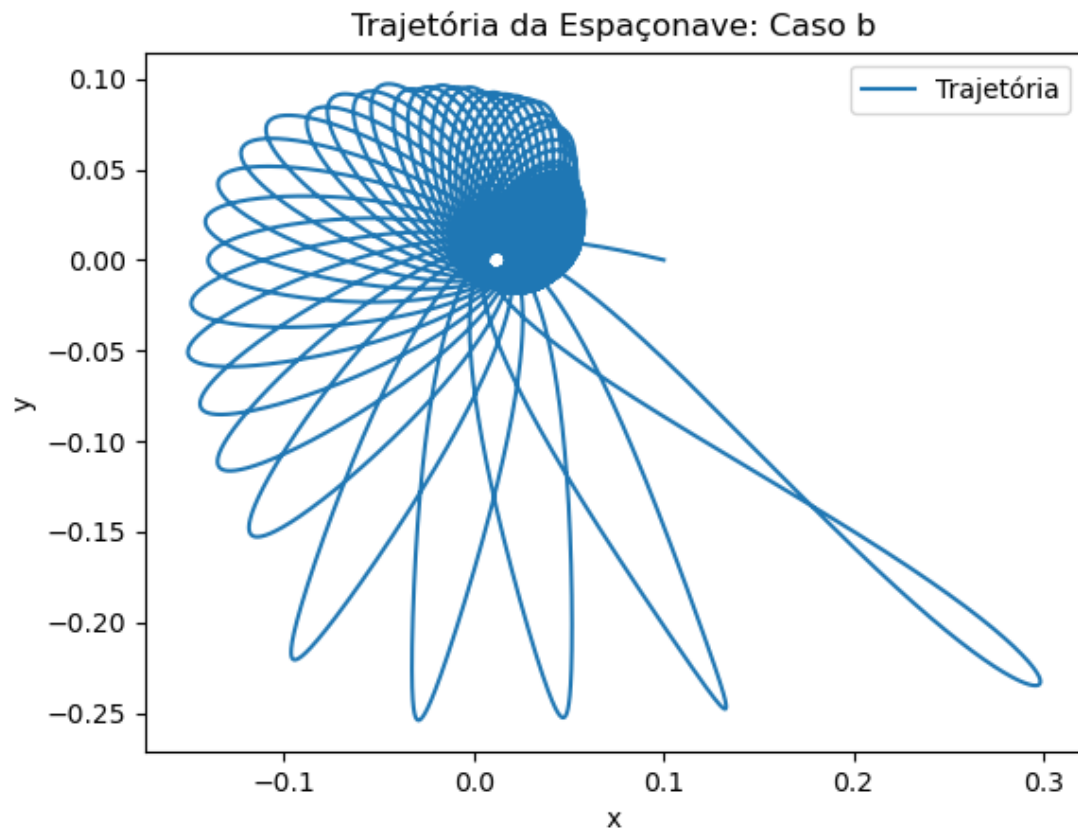
Figura 19 – Caso a



Fonte: Autores, 2023

Com o aumento da velocidade inicial para o caso (b), as órbitas em torno da Terra transformam-se em trajetórias mais energéticas e altamente excêntricas, mesmo assim o veículo não consegue atravessar o contorno de velocidade zero de C para uma missão lunar. A figura 20 ilustra o decaimento da órbita com o tempo devido à gravitação da Lua.

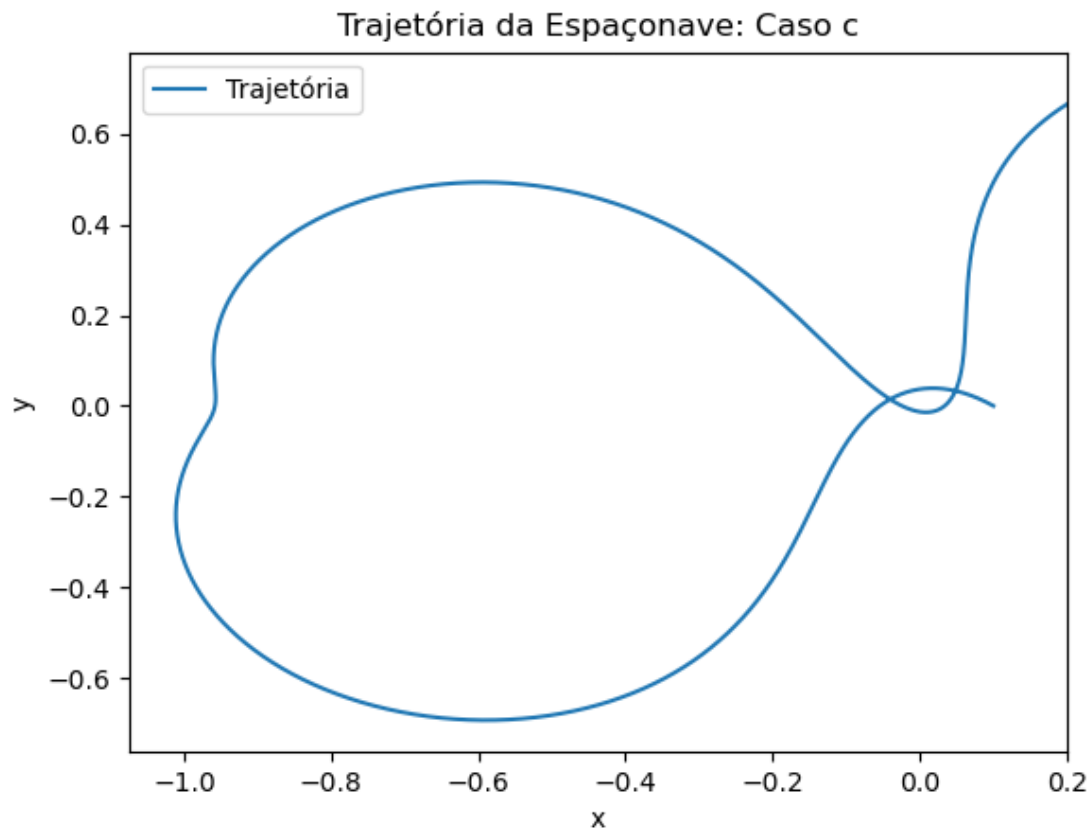
Figura 20 – Caso b



Fonte: Autores, 2023

A velocidade inicial do caso (c) é suficientemente grande para uma trajetória de "regresso livre" da Lua para a terra. Neste caso, a nave espacial passa ligeiramente abaixo da órbita da Lua em torno da Terra.

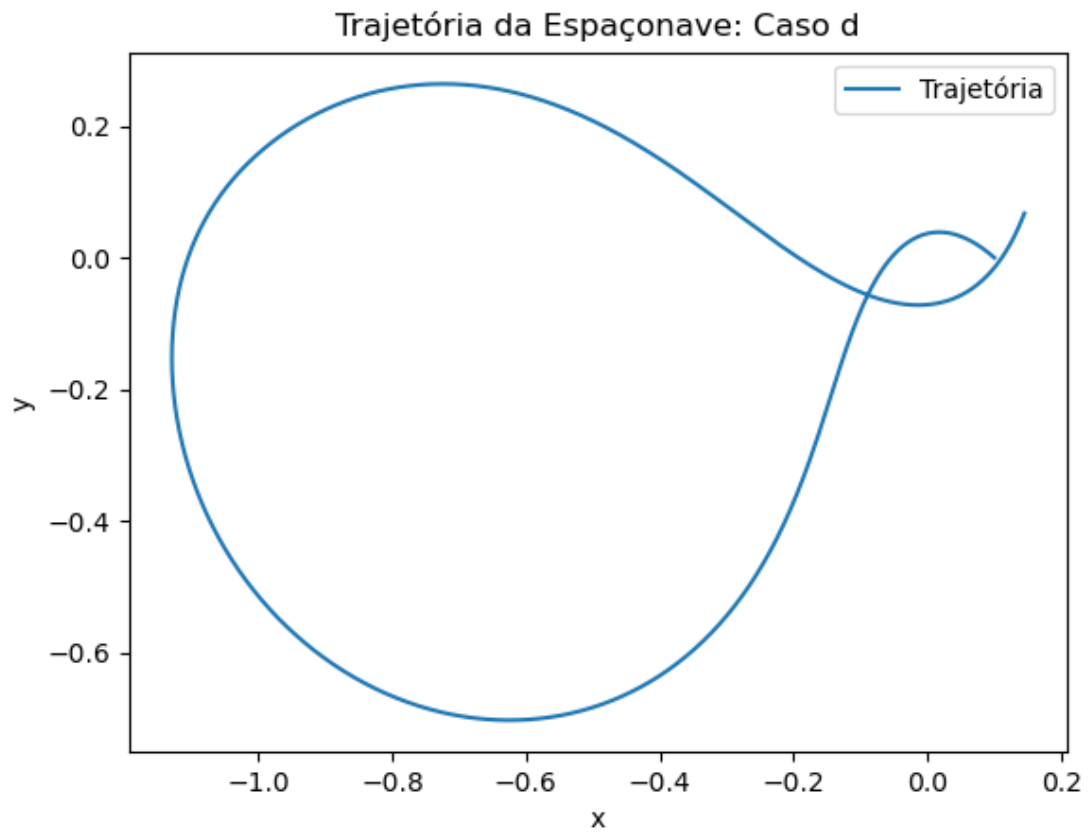
Figura 21



Fonte: Autores, 2023

O tempo total de voo é reduzido significativamente no caso (d) para cerca de  $t = 2,8$ , quando a nave espacial passa no entorno da Lua, entre L1 e L2. No processo, a trajetória de regresso tem uma energia cinética ligeiramente maior devido ao impulso dado pelo "estilingue" lunar. As trajetórias lunares de passagem têm sido utilizadas para para impulsionar várias naves espaciais para os pontos lagrangianos sol-terra.

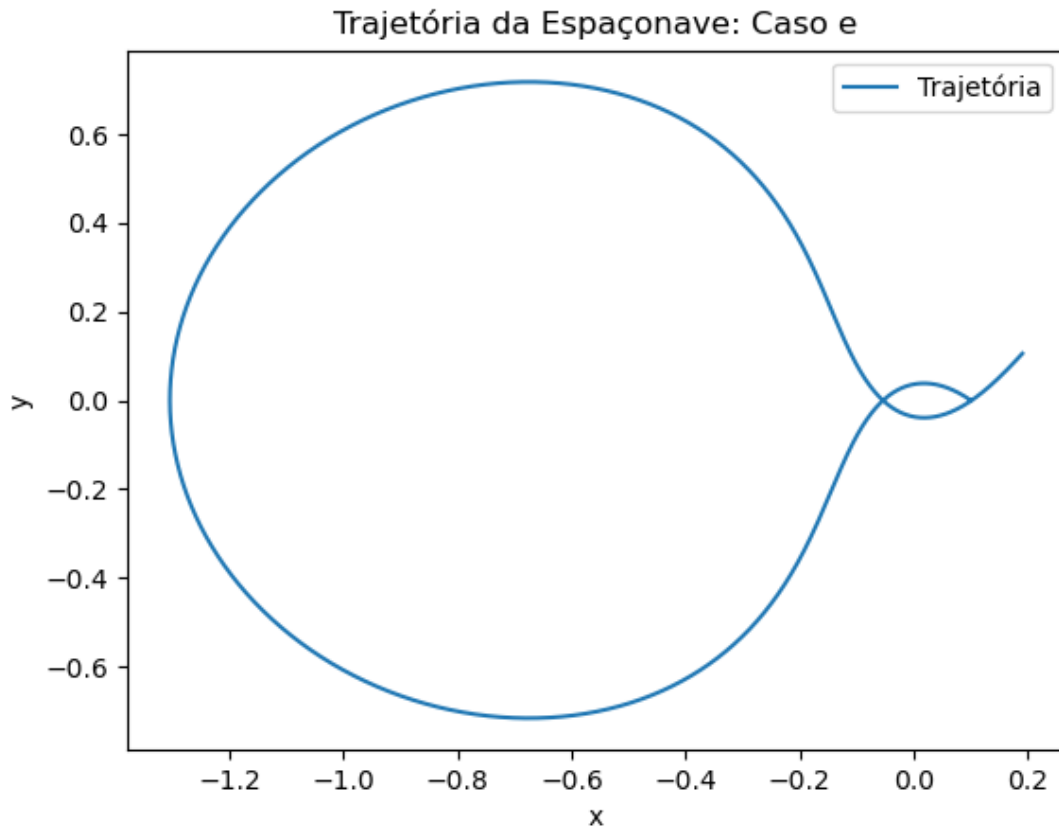
Figura 22 – Caso c



Fonte: Autores, 2023

No caso (e) , o tempo de voo cresce para cerca de  $t = 3.45$  para uma volta completa, uma vez que a espaçonave passa mais longe da lua, passando depois do ponto L1.

Figura 23 – Caso d

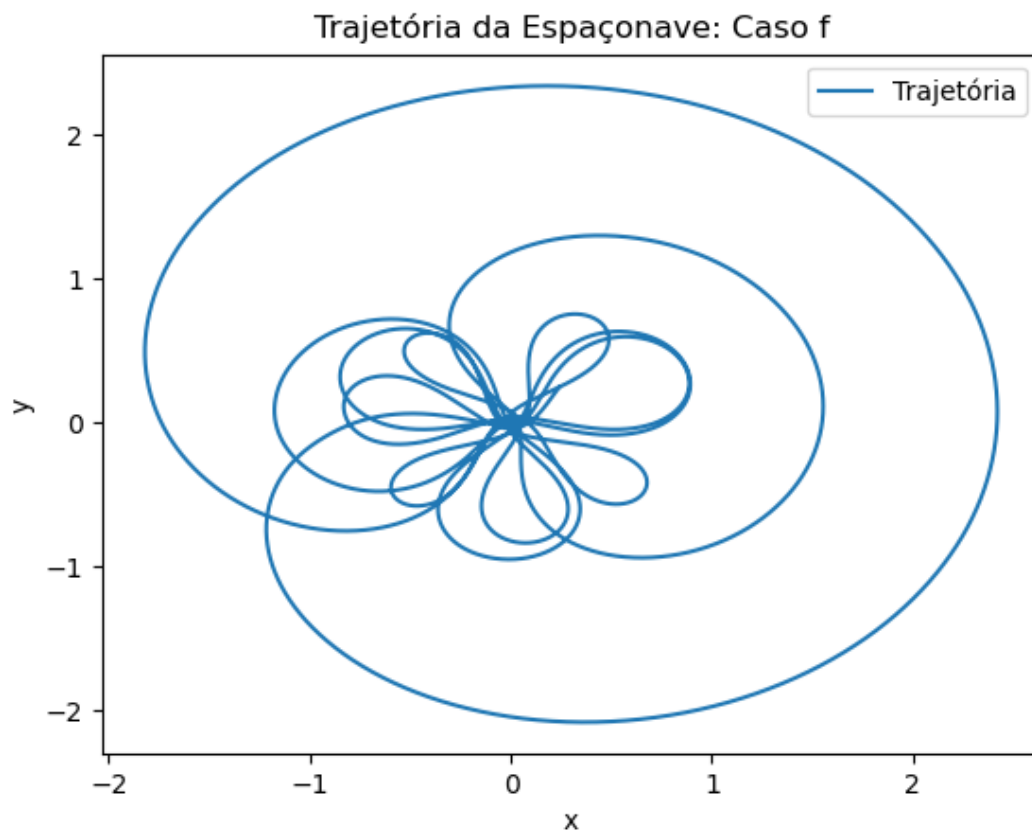


Fonte: Autores, 2023

Para os casos  $f$  e  $g$ , figuras 24 e 25 respectivamente, há diferenças qualitativas nas trajetórias. é observado que para um longo tempo o caso  $f$  demonstra que a espaçonave faz uma passagem pela lua a uma grande distância de  $L_1$ , porém é incapaz de escapar da gravidade terrestre, fazendo se aproximar mais da lua na próxima passagem, conforme mais passagens ocorrem a espaçonave é trazida para a órbita da terra com um decrescimento do raio. O caso  $f$  ilustra um método mais barato para trazer um satélite para uma órbita geossíncrona, através de múltiplas passagens através da lua. Um método similar é encontrado para múltiplas passagens em planetas para diminuir o custo de missões interplanetárias.

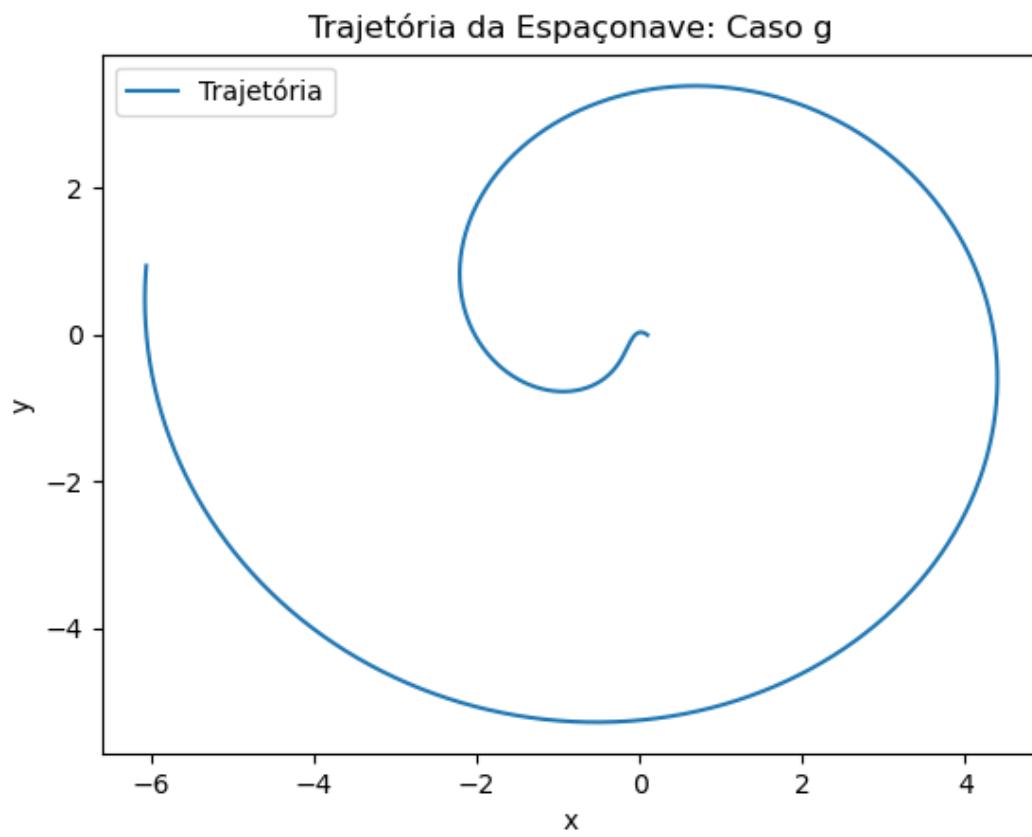
Conforme ocorre o aumento da energia inicial para o caso  $g$ , a espaçonave não retorna para terra e sim embarca em uma trajetória de escape do sistema terra-lua. Nessa trajetória, a vantagem encontra-se na ajuda recebida pela gravidade lunar reduzindo o consumo de combustível e consequentemente o custo de missões interplanetárias.

Figura 24 – Caso f



Fonte: Autores, 2023

Figura 25 – Caso g



Fonte: Autores, 2023

## 5 CONCLUSÃO

Este trabalho proporcionou uma exploração abrangente e prática da mecânica de voo orbital, destacando a importância da modelagem e do cálculo preciso das trajetórias orbitais. Através da utilização de códigos em Python, foi possível demonstrar e validar os conceitos teóricos em um contexto aplicado, mostrando a eficácia e a precisão das soluções proposta

Os resultados obtidos ao longo deste trabalho contribuem significativamente para o entendimento da engenharia aeroespacial, fornecendo uma compreensão aprofundada da mecânica de voo orbital e evidenciando o potencial da programação computacional como uma ferramenta eficaz para resolver problemas complexos na área. A capacidade de modelar e calcular trajetórias orbitais de forma precisa e confiável é fundamental para o desenvolvimento de tecnologias espaciais avançadas, como satélites e veículos espaciais tripulados.

Algumas discrepâncias de resultados foram encontradas, o que torna necessário um aprofundamento dos métodos de solução e um cuidado durante a aplicação desses resultados devido aos erros inerentes ao cálculo numérico. Contudo o trabalho cumpriu sua função no entendimento da mecânica de voo espacial para os tópicos estudados até o momento.



## REFERÊNCIAS

SILVA, A. L. da. **Mecânica de Voo Espacial**. Santa Maria - RS: UFSM, 2023. 14 p.

TEWARI, A. **Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modeling and Simulation with MATLAB<sup>®</sup> and Simulink<sup>®</sup> (Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology)**. [S.l.]: Birkhäuser Boston, 2006. (Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology).