

# MECÂNICA DE VOO ESPACIAL - DEM 1119

## Aula 1

Prof. André Luís da Silva

### 1 Introdução

Tópicos da aula:

- Apresentação geral do curso;
- Lei da gravitação de Newton;
- Gravidade de um planeta axissimétrico.

Referência da aula [1]: TEWARI, A. Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modelling and simulation with MATLAB and Simulink. Boston: Birkhauser, 2007. **Capítulo 3.**

### 2 Apresentação Geral do Curso

O curso, como seu nome diz, trata da mecânica de voo espacial. Este assunto será tratado segundo dois temas:

- Voo orbital;
- Voo de transferência.

O voo orbital pode ser caracterizado, genericamente, como o movimento sob a ação da força gravitacional, com efeitos atmosféricos nulos ou desprezíveis. Já o voo de transferência ocorre na atmosfera planetária, tendo por objetivo inserir algum veículo em voo orbital.

Para desenvolver o conteúdo do voo de transferência, é desejável conhecer o voo orbital, visto que o primeiro deve gerar, ao seu final, as condições que garantam o segundo. Por tal razão, o curso começa pelo assunto de voo orbital.

O voo orbital será dividido em duas partes: 1 e 2. A parte 1 trata de assuntos mais básicos, tais como: modelo gravitacional, enunciado do problema gravitacional de  $N$  corpos, a solução do problema de 2 dois corpos e suas trajetórias, elementos orbitais e determinação de órbita. A parte 2 desenvolve assuntos mais aplicados e adiciona perturbações, abordando temas tais como: aceleração perturbativa, problema de 3 corpos restrito e manobras orbitais.

O estudo do voo de transferência será dividido em 3 partes:

- Revisão de motor foguete e aplicações da equação de foguete;
- Modelagem de mecânica de voo de foguete;
- Simulação do voo de sondagem e voo de inserção orbital.

O assunto de motor foguete é estudado detalhadamente no curso de propulsão aeroespacial, por tal razão, não serão tratados detalhes construtivos de foguetes. Ao invés disso, serão lembrados os tipos básicos de foguete, com o intuito de avaliar as características que impactam na mecânica de voo. A equação de foguete de Tsiolkovsky será desenvolvida, sendo esta uma solução bastante aproximada, mas muito útil para estudos analíticos e projeto conceitual. As aplicações desta equação envolverão a análise e o projeto conceitual de foguete de múltiplos estágios, para atender o objetivo de maximização de carga útil ou de impulso de velocidade.

A modelagem da mecânica de voo de foguete envolve diversos aspectos: escolha de referenciais, leis de Newton, representação da atmosfera, campo gravitacional, aerodinâmica, estruturas e propulsão. Os referenciais de Terra esférica e girante serão apresentados, a segunda lei de Newton será desenvolvida para corpos de massa variável e aplicada a tais referenciais, modelos de atmosfera padrão e de campo gravitacional padrão serão apresentados. Ao final, um modelo de veículo lançador de múltiplos estágios específico será desenvolvido, levantando suas características aerodinâmicas, propulsivas e estruturais a partir de dados de foguetes semelhantes.

Os modelos serão implementados em software para a produção de simulações numéricas. As missões simuladas envolverão voo de sondagem e voo de inserção orbital. Para torná-los possíveis, condições iniciais e de contorno devem ser estabelecidas adequadamente. Por isso, serão apresentados algoritmos para encontrar as condições iniciais e de contorno adequadas a cada tipo de voo pretendido, principalmente o caso de voo de inserção orbital.

A guiagem do voo de sondagem ou de inserção orbital será simplificada, onde desprezar-se-á a presença de vento e somente a mecânica de translação será adotada, assumindo-se que uma malha interna de controle de atitude encontra-se operacional.

### 3 Lei da Gravitação Universal para Massas Pontuais

A figura 1 mostra duas massas pontuais  $m_1$  e  $m_2$ . Elas têm vetores posição  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  com respeito a ponto  $O$ . O vetor posição de  $m_2$  com respeito a  $m_1$  é  $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ .

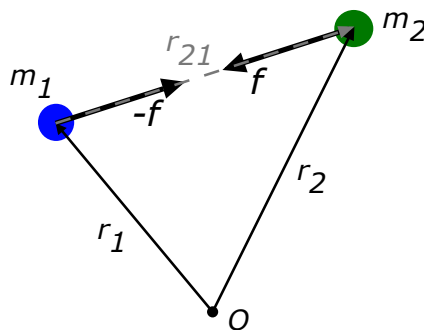


Figura 1: Interação gravitacional entre massas pontuais  $m_1$  e  $m_2$ .

Sobre a massa  $m_2$  atua uma força gravitacional  $\mathbf{f}$  exercida por  $m_1$ . A força sobre  $m_1$  provocada por  $m_2$  possui mesmo módulo, mesma direção e sentido contrário. Na equação 1, é apresentada a formulação da força  $\mathbf{f}$  pela lei da gravitação universal de Newton:

$$\mathbf{f} = -m_2 m_1 G \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3} \quad (1)$$

onde  $G$  é a constante gravitacional universal ( $G = 6,67259(\pm 0,0003) \times 10^{-11}$ ). O módulo da força  $\mathbf{f}$  é inversamente proporcional ao quadrado da distância  $r_{21}$ , que é o módulo de  $\mathbf{r}_{21}$  ( $r_{21} = ||\mathbf{r}_{21}||$ ).

A força gravitacional também pode ser escrita em termos da aceleração da gravidade  $\mathbf{g}$  da massa  $m_2$  (com respeito ao espaço inercial):

$$\mathbf{f} = m_2 \mathbf{g} \quad (2)$$

Onde:

$$\mathbf{g} = -m_1 G \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3} \quad (3)$$

## 4 Gravidade de um Corpo Contínuo

A seção anterior mostrou o resultado elementar da lei da gravitação universal de Newton para o caso de massas pontuais. No entanto, existem diversas situações práticas onde a aproximação de massa pontual causa erros. Por exemplo, ao tratar do voo de inserção em órbita de um foguete, ou da órbita de um satélite por longos períodos de tempo, o formato da distribuição de massa do planeta gera variações na magnitude ou direção da gravidade, que afetam a precisão da trajetória.

Para tratar a força gravitacional gerada por um corpo contínuo, com distribuição genérica de massa, considere o esquema da figura 2. É representado um corpo de massa  $M$  com uma distribuição de massa qualquer. Deseja-se determinar a força gravitacional que ele exerce sobre uma partícula de massa  $m$ .

A equação da força gravitacional entre massas pontuais pode ser aplicada, desde que o corpo contínuo possa ser aproximado por uma discretização de  $N$  massas pontuais:  $m_1, m_2, \dots m_i, \dots m_N$ , como mostra a figura 2. Quanto maior o número  $N$  de partículas, menor o tamanho de cada uma e mais precisa é a aproximação.

Considere a massa discreta genérica  $m_i$  da figura 2. Da equação 2, a força que ela exerce sobre a massa pontual  $m$  é:

$$\mathbf{f}_i = m \mathbf{g}_i \quad (4)$$

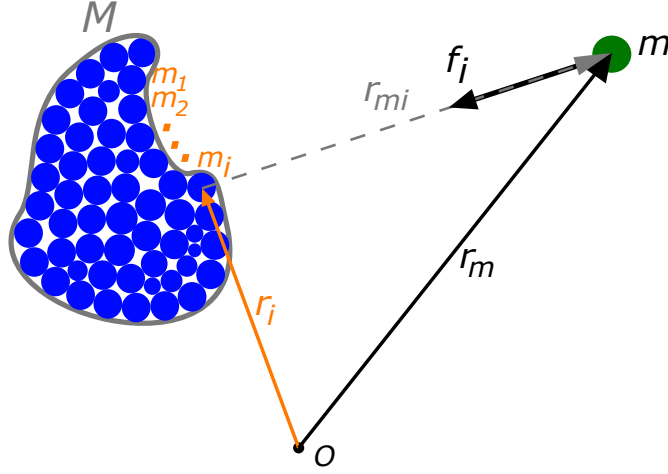


Figura 2: Força gravitacional de um corpo contínuo  $M$  sobre uma massa pontual  $m$ .

Onde  $\mathbf{g}_i$  é a aceleração da gravidade provocada pela massa  $m_i$  sobre  $m$ :

$$\mathbf{g}_i = -m_i G \frac{\mathbf{r}_{mi}}{r_{mi}^3} \quad (5)$$

Como mostra a figura 2,  $\mathbf{r}_{mi} = \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_i$  é o vetor posição da massa  $m$  com respeito a  $m_i$ . A distância  $r_{mi}$  é a magnitude de  $\mathbf{r}_{mi}$ :  $r_{mi} = \|\mathbf{r}_{mi}\|$

A força resultante que o corpo contínuo  $M$  exerce sobre a massa pontual  $m$  é a soma vetorial das forças provocadas por todas as massas discretas  $m_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ :

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i = m \sum_{i=1}^N \mathbf{g}_i \quad (6)$$

A equação 6 é uma soma vetorial. Se o cálculo da força resultante for desenvolvido a partir disso, é preciso calcular 3 somatórios, um para cada componente da aceleração  $\mathbf{g}_i$ . Uma forma de simplificar substancialmente este problema, sem qualquer perda de generalidade, consiste em transformar o problema de campo vetorial para campo escalar. Isto é possível graças ao fato do **campo gravitacional** ser **conservativo**, o que leva à definição do **potencial gravitacional**:

$$\Phi_i = \frac{Gm_i}{r_{mi}} \quad (7)$$

Onde  $\Phi_i$  é o potencial gravitacional da massa  $m_i$  sobre a massa  $m$ .

A aceleração da gravidade  $\mathbf{g}_i$  provocada pelo corpo  $m_i$  sobre  $m$  é dada pelo gradiente do potencial gravitacional  $\Phi_i$ :

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial \mathbf{r}_{mi}} \quad (8)$$

Abaixo, demonstra-se a propriedade da equação 8:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \mathbf{r}_{mi}} = Gm_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_{mi}} \frac{1}{r_{mi}} = Gm_i \left( \frac{\partial}{\partial r_{mi}} \frac{1}{r_{mi}} \right) \frac{\partial r_{mi}}{\partial \mathbf{r}_{mi}} = Gm_i \left( -\frac{1}{r_{mi}^2} \right) \frac{\mathbf{r}_{mi}}{r_{mi}} = -Gm_i \frac{\mathbf{r}_{mi}}{r_{mi}^3} \quad (9)$$

O resultado do desenvolvimento acima é idêntico à equação 5, sendo o que queria se demonstrar.

O passo mais importante na dedução acima é:  $\frac{\partial r_{mi}}{\partial \mathbf{r}_{mi}} = \frac{\mathbf{r}_{mi}}{r_{mi}}$ . O aluno pode verificar isso facilmente definindo um vetor genérico  $\mathbf{r}_{mi} = [x, y, z]^T$  e calculando  $\frac{\partial r_{mi}}{\partial \mathbf{r}_{mi}}$  a partir da definição de gradiente.

Das equações 8 e 6, a aceleração da gravidade  $\mathbf{g}$  resultante sobre o corpo de massa  $m$  é dada por:

$$\mathbf{g} = \sum_{i=1}^N \mathbf{g}_i = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \Phi_i}{\partial \mathbf{r}_{mi}} \quad (10)$$

A equação 10 é uma soma discreta envolvendo o potencial escalar  $\Phi_i$ . Trabalhar com somas discretas é adequado quando existem poucos termos, ou quando o sistema de partículas é realmente discreto. No entanto, no caso aqui tratado, as partículas são uma discretização de um corpo contínuo. Nesta situação, pode-se tomar o limite de  $N \rightarrow \infty$ , que corresponde a transformar as massas pontuais  $m_i$  em elementos infinitesimais de massa  $dm$ . Neste cenário, o somatório discreto da equação 10 converge para uma integral de volume sobre toda a matéria do corpo  $M$ :

$$\mathbf{g} = \int_M d\mathbf{g} \quad (11)$$

Onde  $d\mathbf{g}$  é a aceleração da gravidade provocada pelo elemento de massa  $dm$  sobre a massa  $m$ .

A integral da equação 11 está apresentada de maneira bastante abstrata e conceitual. Para que ela possa ser desenvolvida matematicamente, é necessário aprofundar a modelagem do problema.

O primeiro passo é estabelecer uma geometria de referência. Tomando como base a figura 3, assumamos um sistema de eixos de referência  $X, Y, Z$ , com origem no centro de massa (cm) do corpo de massa  $M$ .

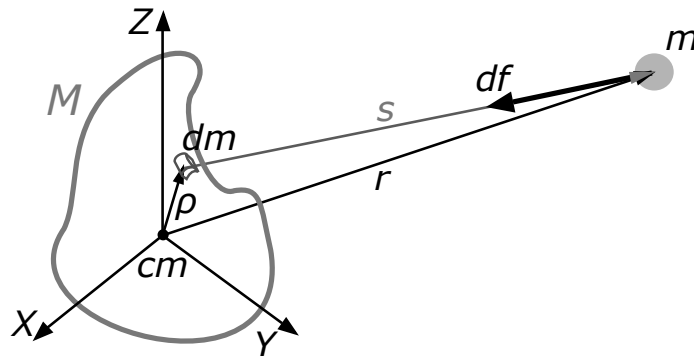


Figura 3: Sistema de referência com origem no centro de massa do corpo  $M$ .

A figura 3 mostra um elemento de massa infinitesimal  $dm$ . O vetor posição  $\mathbf{r}_i$  do elemento discreto  $m_i$  da figura 2 é substituído pelo vetor posição  $\boldsymbol{\rho}$  de  $dm$  na figura 3. A posição da massa pontual  $m$  com respeito ao novo referencial é o vetor  $\mathbf{r}$ . A posição da massa discreta

com respeito ao elemento  $dm$ , por sua vez, é:  $\mathbf{s} = \mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}$ .

Fazendo as substituições acima na equação 7, o potencial gravitacional do elemento  $dm$  sobre a massa  $m$  é:

$$d\Phi = \frac{Gdm}{s} \quad (12)$$

onde  $s = ||\mathbf{s}||$  é a magnitude do vetor  $\mathbf{s}$ .

A aceleração da gravidade  $\mathbf{g}_i$  provocada pela massa  $m_i$  da equação 8 é convertida na aceleração  $d\mathbf{g}$  do elemento  $dm$ :

$$d\mathbf{g} = \frac{\partial d\Phi}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\partial \frac{Gdm}{s}}{\partial \mathbf{s}} = G \frac{\partial \frac{1}{s}}{\partial \mathbf{s}} dm \quad (13)$$

Substituindo-se  $d\mathbf{g}$  na equação 11:

$$\mathbf{g} = \int_M G \frac{\partial \frac{1}{s}}{\partial \mathbf{s}} dm = G \int_M \frac{\partial \frac{1}{s}}{\partial \mathbf{s}} dm \quad (14)$$

A integral da equação 14 é tomada sobre toda a massa  $M$ . Ao longo da varredura, o vetor  $\mathbf{s}$  varia em função da posição  $\boldsymbol{\rho}$  do elemento  $dm$ . Como o gradiente é calculado com respeito a  $\mathbf{s}$ , a equação 14 é a integral de um campo vetorial, que varia em função de  $\boldsymbol{\rho}$ , o que elimina a simplicidade que era trazida pelo potencial escalar  $\Phi$ .

Mas, segundo a referência [1], uma simplificação bastante importante resulta da escolha da origem do referencial no  $cm$  do corpo  $M$ . Esta referência afirma que: se o  $cm$  do corpo  $M$  estiver suficientemente longe da massa  $m$ , a força gravitacional resultante atuará na direção do centro de massa. Assim, o gradiente com respeito ao vetor  $\mathbf{s}$  pode ser substituído pelo gradiente com respeito a  $\mathbf{r}$ <sup>1</sup>, resultando na seguinte alteração na equação 14:

$$\mathbf{g} = G \int_M \frac{\partial \frac{1}{s}}{\partial \mathbf{r}} dm \quad (15)$$

A transformação da equação 15 parece sutil, mas é muito forte, pois permite “retirar a derivada para fora” da integral:

$$\mathbf{g} = G \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int_M \frac{1}{s} dm = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} G \int_M \frac{1}{s} dm \quad (16)$$

Então, da equação 16 e da definição de potencial, o potencial gravitacional sobre a massa  $m$ , resultante do efeito do corpo  $M$ , é:

$$\Phi = G \int_M \frac{1}{s} dm \quad (17)$$

---

<sup>1</sup>Desafio: procure a demonstração matemática formal deste resultado.

Onde:

$$\mathbf{g} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} \quad (18)$$

## 5 Gravidade de um Corpo Axissimétrico

A seção anterior apresentou uma abordagem genérica para o cálculo do campo gravitacional de um corpo contínuo: método do potencial baseado na integral da equação 17.

O desenvolvimento da integral da equação 17 costuma não ser fácil, dependendo do tipo de distribuição de massa do corpo.

A referência [1] apresenta a solução deste problema para o caso de um corpo **axissimétrico**. Para isso, considere a representação da figura 4.

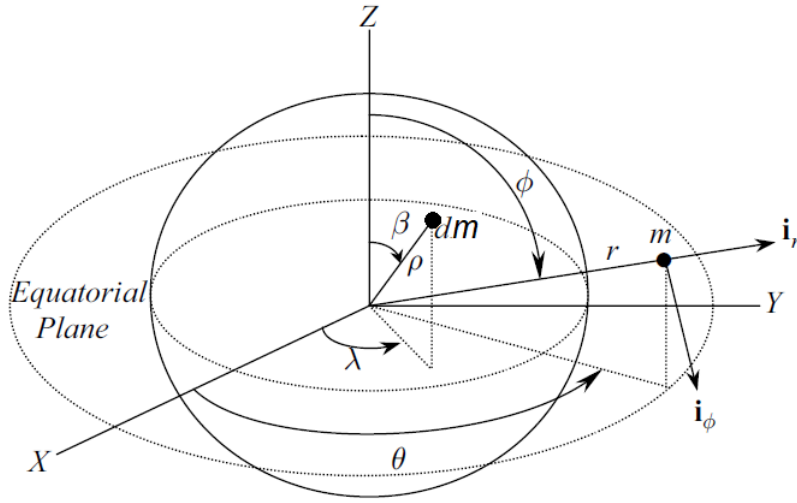


Figura 4: Modelo de corpo axissimétrico e sistema de coordenadas esféricas. Referência: [1]

Na figura 4, eixo  $Z$  é alinhado com o eixo de simetria do corpo  $M$ . Os eixos  $X$  e  $Y$  estão contidos no seu plano equatorial: plano normal ao eixo de simetria, com máxima área de seção transversal do corpo.

Como se tem um problema de simetria axial, são escolhidas as coordenadas esféricas. As coordenadas da massa  $dm$  são: distância radial  $\rho$ , colatitude  $\beta$  e longitude  $\lambda$ . As coordenadas análogas da massa  $m$  são  $r$ ,  $\phi$  e  $\theta$ .

Associado à massa pontual  $m$ , é definido um **sistema de referência horizontal local**, onde:  $\mathbf{i}_r$  é um vetor diretor na direção radial;  $\mathbf{i}_\phi$  é um vetor diretor normal a  $\mathbf{i}_r$ , contido no plano  $Z - \mathbf{i}_r$  e apontando para baixo;  $\mathbf{i}_\theta$  completa a tríade ortonormal dextrógira, sendo paralelo ao plano equatorial, apontando no sentido horário do arco associado ao ângulo  $\theta$ .

## Referências

- [1] A. TEWARI. *Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modelling and simulation with MATLAB and Simulink*. Birkhauser, Boston, 2007.