MECÂNICA DE VOO ESPACIAL - DEM 1119
Aula 18

Prof. André Luís da Silva

1 Introdução

- *Trade-off* de missão: derivadas da carga útil com respeito às massas estruturais ou de propelente de cada estágio;
- Otimização de foguete: cálculo da distribuição de massa ótima entre estágios;
- Introdução aos métodos de otimização multivariável com restrições.

Referência da aula [1]: TEWARI, A. Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modelling and simulation with MATLAB and Simulink. Boston: Birkhauser, 2007. **Seções 8.3.4 e 8.4**.

Modificações no projeto de um foguete podem alterar significativamente seu desempenho e eficiência. Tais mudanças podem ocorrer naturalmente no processo de projeto, sendo que uma das mais comuns é a alteração da carga útil, que tende a crescer tanto em massa quanto em volume, devido à atualização da missão.

Mudanças significativas também podem ocorrer no projeto dos estágios ao longo da vida útil do foguete, devido a melhorias na tecnologia (menores razões estruturais e maiores impulsos específicos).

No exemplo 8.3 da referência [1], uma ilustração de rearranjo de um foguete foi apresentada, onde adicionou-se *boosters* para propiciar um aumento na carga útil sem reduzir o impulso de velocidade. Isto atendeu ao objetivo, mas com consequente perda de eficiência.

Se a perda de eficiência deve ser minimizada, é necessário estudar como as mudanças de massa estrutural e de propelente afetam a massa de carga útil. Uma forma de fazer isso é realizando um estudo de sensibilidade, onde avalia-se o impacto de pequenas variações dessas massas, sem redesenhar completamente um veículo.

O processo de absorver pequenas mudanças de projeto, balanceando desempenho e eficiência, é chamado de ***trade-off* de missão**, o qual é discutido a seguir.

2 Avaliação de Sensibilidade às Variações de Massa

Um dos parâmetros mais importantes usados no *trade-off* são as mudanças na carga útil causadas por variações das massas estruturais e de propelente de cada estágio, *sem qualquer mudança* *no impulso de velocidade.* Este estudo é importante porque o impulso total de velocidade é o objetivo primário de uma missão, definido pela órbita alvo; então, nenhuma mudança do mesmo é tolerada.

Este estudo é desenvolvido abaixo a partir da equação do impulso de velocidade ideal de um foguete de N estágios em série, onde o primeiro pode ter foguetes em paralelo, como visto na aula anterior.

2.1 Variação da carga útil com respeito às massas estruturais

O impulso total de velocidade pode ser expresso em termos da massa inicial e final dos estágios conforme segue:

$$\Delta v = \sum_{k=0}^{N} v_{e_k} \ln \frac{m_{0_k}}{m_{f_k}} \tag{1}$$

onde:

$$m_{0_k} = m_L + m_{p_k} + m_{s_k} + \sum_{n=k+1}^{N} m_{s_n} + m_{p_n} \tag{2}$$

$$m_{f_k} = m_{0_k} - m_{p_k} = m_L + m_{s_k} + \sum_{n=k+1}^{N} m_{s_n} + m_{p_n} \tag{3}$$

O primeiro parâmetro de *trade-off*, que define a mudança da carga útil devido a uma variação na massa estrutural do k-ésimo estágio é a derivada parcial $\frac{\partial m_L}{\partial m_{s_k}}$. Ela é obtida diferenciando-se a equação 1 com respeito a m_{s_k} e tomando $\frac{\partial \Delta v}{\partial m_{s_k}} = 0$. A seção 5.1 apresenta o processo de cálculo desse parâmetro, que resulta em:

$$\frac{\partial m_L}{\partial m_{s_k}} = -\frac{\sum_{i=0}^{k} v_{e_i} \left(\frac{1}{m_{0_i}} - \frac{1}{m_{f_i}} \right)}{\sum_{i=0}^{N} v_{e_i} \left(\frac{1}{m_{0_i}} - \frac{1}{m_{f_i}} \right)} \tag{4}$$

Para o estágio final, $k = N \;\; \rightarrow \;\; \frac{\partial m_L}{\partial m_{s_N}} = -1$, o que implica que um aumento na massa estrutural do estágio final é igual a uma redução na massa de carga útil, com mesma magnitude, o que é, de certa forma, óbvio. O decréscimo da massa da carga útil é menor que o aumento da massa estrutural para estágios mais baixos. Ou seja, tolera-se aumentos da massa estrutural em estágios baixos do foguete, mas o aumento de massa estrutural no último estágio é praticamente proibido.

2.2 Variação da carga útil com respeito às massas de propelente

O segundo parâmetro de *trade-off* é a derivada parcial $\frac{\partial m_L}{\partial m_{p_k}}$, obtida pela diferenciação da equação 1 com respeito a m_{p_k} e fazendo $\frac{\partial \Delta v}{\partial m_{p_k}} = 0$. A seção 5.2 apresenta o processo de cálculo desse parâmetro, que resulta em:

$$\frac{\partial m_L}{\partial m_{p_k}} = -\frac{\frac{v_{e_k}}{m_{0_k}} + \sum_{i=0}^{k-1} v_{e_i}\left(\frac{1}{m_{0_i}} - \frac{1}{m_{f_i}}\right)}{\sum_{i=0}^{N} v_{e_i}\left(\frac{1}{m_{0_i}} - \frac{1}{m_{f_i}}\right)} \tag{5}$$

É de se esperar que o parâmetro $\frac{\partial m_L}{\partial m_{p_k}}$ seja sempre positivo, visto que o aumento da massa de propelente de qualquer estágio, para um Δv constante, levaria a um aumento de carga útil. No entanto, isso não fica claro pela equação 5 e um exemplo pode ajudar a perceber. Isso é feito a seguir.

2.3 Exemplo

Reprodução do **exemplo 8.4** da referência [1]: Calcule os parâmetros de *trade-off* para o veículo de três estágios com *boosters* do exemplo 8.3, projetado para a missão de lançamento da carga útil de $1134,2061$ kg para órbita geosíncrona, com um impulso total de velocidade de 13 km/s.

Resolução: foi desenvolvido um programa em Python para resolução do problema. Usando os dados dos exemplos 8.2 e 8.3, foi gerada a tabela 1.

k	v_{e_k} (km/s)	m_{0_k} (kg)	m_{f_k} (kg)	$\frac{\partial m_L}{\partial msk}$	$\frac{\partial m_L}{\partial m_{p_k}}$
0	2,3633	109426,68	54426,68	-0.008295	0.008209
1	2,8449	52847,73	23869,02	-0.033136	0.012165
2	2,8449	19806,11	7010,05	-0.132791	0.021458
3	4,4636	6046,91	1478,10	-1	0.147768

Tabela 1: Parâmetros de *trade-off*.

Da tabela 1, é evidente que a massa estrutural do estágio zero, ou do primeiro estágio, impacta muito pouco na carga útil, comparado com a do terceiro estágio.

A variação ínfima na carga útil causada por mudanças estruturais no estágio zero possibilita uma boa flexibilidade de missão a partir do uso de *boosters*. Pode-se fazer ajustes significativos na massa desses elementos sem que se tenha um impacto perceptível na carga útil. Para que a massa estrutural dos *boosters* afete a carga útil, suas variações precisam ser muito grandes.

Também é aparente pela tabela 1 que a carga útil aumenta com a elevação da massa de propelente, sendo a variação mais significativa associada ao terceiro estágio. As alterações associadas às massas de propelente dos estágios inferiores decrescem de um estágio para outro. Por exemplo:

- Um aumento de 100 kg na massa de propelente do terceiro estágio propicia um acréscimo de 14,77 kg na massa de carga útil;
- O mesmo aumento de propelente do estágio zero provoca uma elevação de apenas 0,82 kg na carga útil.

3 *Trade-off* com Respeito ao Desempenho Δv

Embora os resultados do exemplo acima sejam muito interessantes, principalmente no que se refere ao aumento de massa de carga útil devido a um acréscimo de propelente no terceiro estágio, eles precisam ser avaliados com cuidado. Principalmente, deve-se **comparar qualquer mudança na carga útil com variações do impulso de velocidade**.

A análise anterior, embora preveja **variação nula do impulso de velocidade**, é **válida** para cálculo diferencial, que envolve **pequenas variações das massas** estruturais e de propelente, se as variações forem muito grandes, é necessário ter mais cuidado, pois podem impactar no valor de Δv.

Outra situação em que se deseja verificar o impacto sobre o Δv é aquela onde a massa da carga útil é fixa, mas se deseja melhorar o desempenho de um foguete, de modo a permitir a aquisição de órbitas mais altas, com maior velocidade final ou altitude orbital. Tais situações necessitam de um aumento do Δv.

Para verificar o impacto de mudanças das massas estruturais e de propelente sobre a variação do impulso de velocidade, para massa de carga útil constante, a equação 1 pode ser diferenciada com respeito a m_{s_k} e m_{p_k}. Tal situação é deixada como exercício.

Um exemplo de aplicação disso é quando se pretende adaptar um foguete de sondagem para lançamento orbital de CubeSat. Em tal situação, é necessário aumentar o seu Δv, para uma massa de carga útil constante. Portanto, é desejável verificar quais mudanças de projeto são mais significativas para tal.

4 Otimização da Distribuição de Massa

Os **tamanhos relativos entre os estágios de um foguete têm profundo impacto na sua eficiência e desempenho**. Para um dado Δv e tipo de propelente de cada estágio, é possível obter o arranjo de estágios que provê a mais alta eficiência, ou seja, a máxima razão de carga útil total λ_T.

Tal foguete no qual a razão de carga útil é máxima, sujeito a um dado impulso de velocidade total, é dito **ótimo**.

A seguir duas formas são apresentadas para resolver o problema de foguete ótimo. A primeira é um método "semi-analítico" apresentado na referência [1], onde o processo de solução é exclusivo ao caso. A segunda alternativa é a solução de um problema geral de minimização multivariável restrita, implementado por algum pacote de matemática computacional.

4.1 Algoritmo de otimização "semi analítico"

O problema posto por um foguete de múltiplos estágios ótimo pode ter uma única solução, dadas as razões estruturais de cada estágio e impulsos específicos. Isto geralmente é o caso, porque as especificações de missão incluem o tipo de propelente, assim como a resistência estrutural e requisitos de materiais.

Neste sentido, considere um foguete com um impulso total de velocidade desejado, para o qual os impulsos específicos e razões estruturais de cada estágio são conhecidas, mas **as massas relativas entre os estágios são abertas para ajustes**.

Um método *semi-analítico* proveniente da referência [1] é apresentado abaixo para resolver o problema. Nesta formulação, as razões de carga útil e velocidades de exaustão são adimensionalizadas com respeito aos respectivos parâmetros do primeiro estágio (ou estágio zero, conforme o caso).

Velocidades de exaustão normalizadas:

$$\beta_k \equiv \frac{v_{e_k}}{v_{e_1}} \tag{6}$$

onde v_{e_k} é a velocidade de exaustão do estágio k, $k = 1,\ 2,\ \ldots\ N$

Razões de carga útil normalizadas:

$$\alpha_k \equiv \frac{\lambda_k}{\lambda_1} \tag{7}$$

onde λ_k é a razão de carga útil do estágio k.

A partir das definições acima, o impulso total de velocidade normalizado em função das razões de carga útil normalizadas é dado na equação 8; enquanto que a razão de carga útil total em função das razões de carga útil normalizadas é dada na equação 9 (Os resultados abaixo têm correções em relação àqueles mostrado na referência [1]). As demonstrações estão apresentadas na seção 5.3.

Impulso de velocidade normalizado:

$$\frac{\Delta v}{v_{e1}} = -\sum_{k=1}^{N} \beta_k \ln\left[\sigma_k + (1-\sigma_k)\alpha_k\lambda_1\right] \tag{8}$$

Razão de carga útil total em função das razões de carga útil normalizadas:

$$\lambda_T = \lambda_1^N \prod_{k=2}^{N} \alpha_k \tag{9}$$

O problema de otimização pode ser escrito conforme segue:

- Determine as razões de carga útil normalizadas α_k ($k = 2, \ldots N$), tais que a razão de carga útil total, λ_T da equação 9 seja maximizada, sujeita à equação de foguete 8.

Geralmente, a solução deste problema de otimização restrita requer métodos de programação não linear. Neste sentido, a seção 4.2 apresenta uma introdução a tais métodos, considerando funções já implementadas em MATLAB e Python.

O método “semi analítico” da referência [1] é basicamente uma varredura dos parâmetros independentes, os quais são poucos. Esta ideia é factível pois foguetes práticos só têm 3 ou 4 estágios.

O processo é baseado em duas etapas. (1) A equação do foguete é resolvida em termos de λ_1, para um dado conjunto de parâmetros α_k. (2) Os valores de α_k são gerados de forma a varrer um espaço de busca, o qual é verificado para saber onde encontra-se o máximo.

Os passos detalhados são:

1 Selecione um conjunto de α_k $(k = 2, \dots N)$;

2 Usando alguma rotina de cálculo de zero de função, encontre λ_1 que satisfaça a equação 8 para os parâmetros α_k do item [1];

3 Calcule a razão de carga útil total λ_T, de acordo com a equação 9;

4 Repita os passos 2 e 3 para diferentes conjuntos de α_k, até que uma região significativa no espaço $(\mathbb{R}^{N-1})$ seja coberta;

5 Faça o gráfico dos valores de λ_T obtidos em cada iteração do passo 3, em função dos parâmetros α_k da iteração;

6 Procure pelo máximo de λ_T no gráfico ou pela comparação dos seus valores armazenados nos diferentes pontos. No Python, essa última etapa pode ser feita com a função `max` do pacote Numpy;

7 Os valores de α_k correspondendo ao máximo de λ_T são a solução ótima das razões de carga útil do foguete;

8 Verifique se o valor de λ_1 associado à solução é factível, ou seja, se $0 < \lambda_1 < 1$. Caso isso não se verifique, retorne ao passo 1, limitando o espaço de busca para uma região que garanta soluções fisicamente possíveis $(0 < \lambda_1 < 1)$.

A busca apresentada acima é relativamente simples, a carga computacional depende da quantidade de pontos escolhida para o espaço de busca. Isso pode ser ajustado de acordo com a visualização dos gráficos gerados, iniciando com uma discretização mais grosseira, que vai sendo refinada caso necessário.

A seguir, outra forma de solução é apresentada, a qual introduz conceitos mais gerais de otimização.

4.2 Otimização com restrições por métodos numéricos genéricos

A otimização acima pode ser colocada como a maximização de uma função $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ou seja, a maximização do resultado escalar y em função da escolha de um vetor de parâmetros $\mathbf{x}$.

A função $\mathbf{f}$ é uma função multivariável com n entradas reais e uma saída real: $y = f(\mathbf{x})$, $y \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. A saída y é chamada de **variável otimizada**, enquanto que os n elementos do vetor $\mathbf{x}$ são chamados de **parâmetros de decisão**.

Geralmente, o problema não é formulado como de maximização, mas de minimização. Isso é um mero formalismo para padronizar a literatura e os softwares de otimização, visto que maximizar uma variável y é o mesmo que minimizar $-y$. Ou seja, para converter um problema de maximização em um de minimização, basta multiplicar a variável otimizada por -1.

Abaixo, descreve-se a estrutura geral de um problema de minimização com restrições, pois é assim que os softwares sugeridos para solução os apresentam.

O problema de minimização da função multivariável "f" consiste em encontrar o vetor $\mathbf{x}$ que determina o menor valor de $y = f(\mathbf{x})$, sendo denotado da seguinte maneira:

$$\min_{\mathbf{x}} y = f(\mathbf{x}) \tag{10}$$

Em geral, as funções possuem diversos mínimos locais, propiciando múltiplas soluções. Além disso, algumas funções crescem ou decrescem sem limite, sem a presença de pontos de inflexão, o que faz com que os pontos de mínimo ou máximo estejam no infinito. Além disso, em situações práticas, existem limitações na escolha do vetor de decisão $\mathbf{x}$, além de existirem "regiões proibidas", ou proibitivas, para o parâmetro otimizado y. Assim sendo, o problema de otimização genérico acima pode ser complementado para incluir **restrições**.

As restrições de um problema de otimização podem envolver:

- Limites mínimos e máximos nos elementos do vetor de decisão $\mathbf{x}$;
- Relações lineares envolvendo $\mathbf{x}$;
- Relações não lineares envolvendo $\mathbf{x}$.

Os limites máximos e mínimos do vetor de decisão $\mathbf{x}$ são escritos da seguinte maneira:

$$\mathbf{lb} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{ub} \tag{11}$$

onde $\mathbf{lb}$ e $\mathbf{ub}$ são vetores de mesma dimensão de $\mathbf{x}$ contendo os limites mínimos e máximos, respectivamente, que o vetor $\mathbf{x}$ deve respeitar durante a busca do mínimo da função.

Os vetores $\mathbf{lb}$ e $\mathbf{ub}$ são escolhidos pelo analista/projetista de modo a obedecerem limitações oriundas dos requisitos e características físicas do problema tratado.

As restrições lineares possuem diversas maneiras de serem escritas, a mais geral é apresentada abaixo:

$$\mathbf{A}_{eq}\mathbf{x} + \mathbf{B}_{eq} = \mathbf{0} \tag{12}$$

$$\mathbf{A}_{un}\mathbf{x} + \mathbf{B}_{un} < \mathbf{0} \tag{13}$$

onde as matrizes $\mathbf{A}_{eq}$, $\mathbf{B}_{eq}$, $\mathbf{A}_{un}$, $\mathbf{B}_{un}$ possuem dimensões compatíveis com o vetor $\mathbf{x}$. Os subscritos "eq" e "un" são abreviaturas das palavras em inglês *equality* e *unequality* (é nessa língua que os softwares de otimização contém suas documentações).

A equação 12 é dita **restrição de igualdade linear**, enquanto que 13 é chamada de **restrição de desigualdade linear**.

As matrizes $\mathbf{A}_{eq}$ e $\mathbf{A}_{des}$ não precisam ser quadradas. Por exemplo, se $\mathbf{A}_{eq}$ tiver somente uma linha, haverá somente uma restrição linear de igualdade a ser satisfeita. Outro exemplo: se $\mathbf{A}_{des}$ tiver 2 linhas, haverão duas restrições lineares de desigualdade.

As restrições não lineares são escritas por funções genéricas do vetor $\mathbf{x}$. Assim como no caso das restrições lineares, estas podem ser de igualdade e/ou desigualdade, sendo escritas da seguinte forma:

$$\mathbf{g}_{eq}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{14}$$

$$\mathbf{g}_{un}(\mathbf{x}) < \mathbf{0} \tag{15}$$

onde $\mathbf{g}_{eq}$ e $\mathbf{g}_{un}$ são as funções de restrição de igualdade e desigualdade não linear, respectivamente.

O número de "saídas" das funções $\mathbf{z}_{eq} = \mathbf{g}_{eq}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{z}_{un} = \mathbf{g}_{un}(\mathbf{x})$ refletem a quantidade de restrições identificada pelo analista/projetista. Assim, as variáveis de saída $\mathbf{z}_{eq}$ e $\mathbf{z}_{un}$ podem ser escalares ou vetores.

Importante: **a escolha de restrições é uma etapa crucial do problema de otimização**. Dependendo das decisões tomadas, a solução muda radicalmente. Inclusive, dependendo do caso, o problema pode nem admitir soluções. Em especial, a soma da restrições de igualdade linear e não linear deve ser menor que a quantidade de parâmetros de decisão. Pois, caso contrário, existirão mais equações que variáveis.

Incluindo as restrições, o problema de otimização multivariável é resumido como:

$$\min_{\mathbf{x}} y = f(\mathbf{x}) \tag{16}$$

sujeito a:

$$\mathbf{lb} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{ub} \tag{17}$$

$$\mathbf{A}_{eq}\mathbf{x} + \mathbf{B}_{eq} = \mathbf{0} \tag{18}$$

$$\mathbf{A}_{un}\mathbf{x} + \mathbf{B}_{un} < \mathbf{0} \tag{19}$$

$$\mathbf{g}_{eq}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{20}$$

$$\mathbf{g}_{un}(\mathbf{x}) < \mathbf{0} \tag{21}$$

4.3 Algoritmos de otimização

Encontrar uma solução analítica para um problema de otimização multivariável com restrições é muito difícil, e, em alguns casos, impossível para o conhecimento matemático atual. Sendo assim, uma das formas mais difundidas de solução destes problemas é o cálculo numérico.

Existem diversos métodos numéricos para solução de problemas de minimização restrita, incluindo (mas não se limitando a):

- método simplex;

- busca por gradiente;
- programação linear;
- heurísticas: redes neurais, algoritmos genéticos, colônia de formigas, cozimento anilhado.

Nesta disciplina, não se tem o objetivo de discutir como os métodos numéricos funcionam, nem de desenvolver um algoritmo próprio. Mas sim: **utilizar métodos implementados em softwares consolidados e com facilidade de acesso**. Neste sentido, serão adotadas funções de otimização bem conhecidas e com vasta documentação.

Abaixo, citam-se funções de otimização multivariável restrita presentes no MATLAB e no Python.

MATLAB: no pacote *optimization toolbox*, existe a função `fmincon`. Ela é uma função de minimização multivariável com restrições lineares, não lineares e de parâmetros. Permite a declaração de restrições de igualdade e desigualdade linear e não linear. As restrições de parâmetros são limites mínimos e máximos. Mais informações em: `https://www.mathworks.com/help/optim/ug/fmincon.html`.

Python: no módulo `optimize` da biblioteca `SciPy`, existe a função: `minimize`. Ela é análoga à função `fmincon`, mas com limitações. Esta é uma função de minimização multivariável com restrições lineares, não lineares e de parâmetros. Permite a declaração de restrições de igualdade e desigualdade linear e não linear. As restrições de parâmetros são limites mínimos e máximos. Mais informações em: `https://realpython.com/python-scipy-cluster-optimize/#minimizing-a-function-with-many-variables`.

Tanto a `fmincon` do MATLAB, quanto a `minimize` do Python utilizam diversos algoritmos internos para resolver o problema de minimização restrita. O algoritmo pode ser escolhido pelo usuário ao selecionar as opções de cada função. No entanto, este não é o objetivo mais importante da programação. O foco deve ser em fornecer para os programas o seguinte:

- Função objetivo: a função que calcula a variável que deve ser minimizada. A saída é o parâmetro otimizado, a entrada é o vetor de parâmetros de decisão;
- Limites mínimo e máximo dos parâmetros de decisão;
- Chute inicial do cálculo iterativo;
- Matrizes das restrições de igualdade e desigualdade lineares (opcionais);
- Funções das restrições de igualdade e desigualdade não lineares (opcionais).

Os conceitos apresentados serão usados para resolver o problema de otimização de foguete. Como já feito em outras aulas, será utilizado o Python para implementação.

Mas, a lógica geral de escrita do programa independe da plataforma de programação. A seguir, é mostrado como traduzir o problema de otimização da seção 4.1.

4.4 Resolução do problema de otimização de foguete

Para utilizar a formulação genérica de um problema de otimização multivariável com restrições para resolver o problema de foguete aqui tratado, basta seguir o procedimento abaixo:

- Parâmetros de decisão: razões de carga útil $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \ldots\ \lambda_N$ do foguete de N estágios;
- Função objetivo: razão de carga útil total com sinal negativo $y = -\lambda_T = -\prod_{k=0}^{N} \lambda_k$;
- Função de restrições não lineares: a equação de foguete associada ao Δv desejado, $z_{eq} = -\Delta v - \sum_{k=0}^{N} v_{e_k} \ln(\sigma_k + (1-\sigma_k)\lambda_k)$. Quando $z_{eq} = 0$, o Δv desejado é atingido;
- Limites dos parâmetros de decisão: a forma mais simples é definir que eles devem ser positivos e menos que 1, $\mathbf{lb} = [0\ 0\ \ldots\ 0]^T$, $\mathbf{ub} = [1\ 1\ \ldots\ 1]^T$.

Resumindo: a formulação acima reflete o problema enunciado na seção 4.1. Nele, o objetivo é encontrar a relação de massa entre os estágios (expressa pelas razões de carga útil λ_k), de modo a maximizar a razão de carga útil total, para um certo impulso de velocidade desejado Δv. A solução deve respeitar λ_k fisicamente realizáveis.

O problema supõe que os seguintes parâmetros do foguete são conhecidos:

- Razões estruturais σ_k;
- Velocidades de exaustão v_{e_k}.

A solução ótima obtida será específica para o impulso de velocidade, razões estruturais e tipos de propelente estabelecidos.

4.5 Exemplo de foguete ótimo de 2 estágios

Seguindo o método de otimização semi analítico apresentado anteriormente, para o caso de um foguete de dois estágios, somente uma variável de otimização está disponível: α_2. Ao passo que λ_1 é determinado para satisfazer a equação de foguete.

A razão de carga útil λ_1 é calculada para um valor estimado de α_2, sendo isto repetido para um determinado intervalo de variação de α_k, com cada ponto do intervalo distanciado por certo passo de variação.

Para ilustrar este caso, é resolvido o exemplo 8.5 da referência [1].

Exemplo 8.5: Projete um foguete ótimo de dois estágios para lançar uma carga útil de 5.000 kg, em órbita terrestre baixa, a qual requer um impulso total de velocidade de 9,5 km/s. A razão estrutural do primeiro estágio é $0,07$, enquanto que a do segundo é $0,05$. O primeiro estágio emprega um propelente sólido com impulso específico de 200 s. Examine dois propelentes como candidatos para o segundo estágio: UDMH/NO4 (Dimetil hidrazina assimétrica com óxido nitroso) e querosene/LO2, para os quais $\beta_2 = 1,5$ e $\beta_2 = 1,75$, respectivamente.

O exemplo foi resolvido por meio de um programa em Python desenvolvido pelo professor, o qual é apresentado no Moodle.

Forma alternativa de solução: O professor também resolveu o problema usando funções genéricas de otimização, tal como descrito na seção 4.2. Para isso, foi usada a função `optimize` da biblioteca `SciPy` do Python. O programa é apresentado no Moodle.

4.6 Exemplo de foguete ótimo de 3 estágios

Com três estágios, o algoritmo de otimização semi analítico trata duas variáveis de otimização: α_2 e α_3.

Quando comparado ao foguete de dois estágios, é um pouco mais difícil escolher os valores iniciais e a faixa de variação destas variáveis, mas um bom ponto de partida é geralmente $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$, isto é, razões de carga útil iguais para os três estágios. Depois de algumas tentativas, a faixa factível de valores ótimos pode ser encurtada para uma pequena região bidimensional.

Para ilustrar a aplicação do algoritmo de otimização para um foguete de 3 estágios, é desenvolvido o exemplo 8.6 da referência [1].

Exemplo 8.6: Projete um foguete de 3 estágios ótimo que cumpra os requisitos apresentados no exemplo 8.5, tal que o primeiro estágio utilize propelente sólido com $I_{sp1} = 200$ s, o segundo empregue $UDMH/NO_4$, enquanto o terceiro tenha querosene/LO_2 ($\beta_2 = 1,5$ e $\beta_3 = 1,75$). As razões estruturais dos estágios são $\sigma_1 = 0,07$ e $\sigma_2 = \sigma_3 = 0,05$.

O exemplo foi resolvido por meio de um programa em Python desenvolvido pelo professor, o qual é apresentado no Moodle.

Forma alternativa de solução: O professor também resolveu o problema usando funções genéricas de otimização, tal como descrito na seção 4.2. Para isso, foi usada a função `optimize` da biblioteca `SciPy` do Python. Este também é apresentado no Moodle.

Referências

[1] A. TEWARI. *Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modelling and simulation with MATLAB and Simulink.* Birkhauser, Boston, 2007.

5 Deduções

5.1 Derivada da carga útil com respeito às massa estruturais m_{s_k}

Abaixo, desenvolve-se a expressão analítica da derivada da massa de carga útil para impulso de velocidade constante com respeito à massa estrutural do k-ésimo estágio de um foguete de N estágios.

Primeiro encontra-se uma relação que representa $\frac{\partial \Delta v}{\partial m_{s_k}} = 0$. Soma-se com respeito a i para depois derivar com relação a m_{s_k} para qualquer k:

$$\Delta v = \sum_{i=0}^{N} v_{e_i} \ln \frac{m_{0_i}}{m_{f_i}} \tag{22}$$

$$\frac{\partial \Delta v}{\partial m_{s_k}} = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = \frac{\partial}{\partial m_{s_k}} \sum_{i=0}^{N} v_{e_i} \ln \frac{m_{0_i}}{m_{f_i}} \tag{23}$$

Desenvolvendo a última expressão:

$$\frac{\partial}{\partial m_{s_k}} \sum_{i=0}^{N} v_{e_i} \left(\ln m_{0_i} - \ln m_{f_i} \right) = \frac{\partial}{\partial m_{s_k}} \left(\sum_{i=0}^{N} v_{e_i} \ln m_{0_i} - \sum_{i=0}^{N} v_{e_i} \ln m_{f_i} \right) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial m_{s_k}} \sum_{i=0}^{N} v_{e_i} \ln m_{0_i} = \frac{\partial}{\partial m_{s_k}} \sum_{i=0}^{N} v_{e_i} \ln m_{f_i}$$

Como v_{e_i} não depende de m_{s_k}:

$$\sum_{i=0}^{N} v_{e_i} \frac{\partial}{\partial m_{s_k}} \ln m_{0_i} = \sum_{i=0}^{N} v_{e_i} \frac{\partial}{\partial m_{s_k}} \ln m_{f_i}$$

$$\sum_{i=0}^{N} v_{e_i} \frac{1}{m_{0_i}} \frac{\partial m_{0_i}}{\partial m_{s_k}} = \sum_{i=0}^{N} v_{e_i} \frac{1}{m_{f_i}} \frac{\partial m_{f_i}}{\partial m_{s_k}} \tag{24}$$

As derivadas $\frac{\partial m_{0_i}}{\partial m_{s_k}}$ e $\frac{\partial m_{f_i}}{\partial m_{s_k}}$ são desenvolvidas a seguir.

$$\frac{\partial m_{0_i}}{\partial m_{s_k}} = \frac{\partial}{\partial m_{s_k}} \left(m_L + \sum_{n=i}^{N} m_{s_n} + m_{p_n} \right) = \frac{\partial m_L}{\partial m_{s_k}} + \frac{\partial}{\partial m_{s_k}} \left(\sum_{n=i}^{N} m_{s_n} + m_{p_n} \right) \tag{25}$$

Desenvolvendo a derivada do somatório na última equação:

$$\frac{\partial}{\partial m_{s_k}} \left(\sum_{n=i}^{N} m_{s_n} + m_{p_n} \right) = \sum_{n=i}^{N} \frac{\partial m_{s_n}}{\partial m_{s_k}} + \frac{\partial m_{p_n}}{\partial m_{s_k}} = \sum_{n=i}^{N} \frac{\partial m_{s_n}}{\partial m_{s_k}} \tag{26}$$

Pois $\frac{\partial m_{p_n}}{\partial m_{s_k}} = 0$ para $\forall k$ e $\forall n$, uma vez que a massa de propelente é assumida constante, dado que a redução de massa estrutural será convertida em massa de carga útil.

A derivada
$frac \partial m_{s_n} \partial m_{s_k}$ é zero ou um, de acordo com a seguinte lógica:

$$\frac{\partial m_{s_n}}{\partial m_{s_k}} = \begin{cases} 1, \ n = k \\ 0, \ n \neq k \end{cases} \tag{27}$$

O condicional da equação 27 pode ser escrito em função do **Delta de Kronecker**, que é definido por:

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases} \tag{28}$$

Assim:

$$\frac{\partial m_{s_n}}{\partial m_{s_k}} = \delta_{nk} \tag{29}$$

Substituindo o resultado acima na equação 26 e este na equação 25 obtém-se:

$$\frac{\partial m_{0_i}}{\partial m_{s_k}} = \frac{\partial m_L}{\partial m_{s_k}} + \sum_{n=i}^{N} \delta_{nk} \tag{30}$$

Quanto ao último somatório, verifica-se o seguinte resultado:

$$\sum_{n=i}^{N} \delta_{nk} = \begin{cases} 1, & i \leq k \\ 0, & i > k \end{cases} \tag{31}$$

Derivada $\frac{\partial m_{f_i}}{\partial m_{s_k}}$:

$$\frac{\partial m_{f_i}}{\partial m_{s_k}} = \frac{\partial}{\partial m_{s_k}} \left(m_{0_i} - m_{p_i} \right) = \frac{\partial}{\partial m_{s_k}} m_{0_i} - \frac{\partial}{\partial m_{s_k}} m_{p_i} = \frac{\partial}{\partial m_{s_k}} m_{0_i} \tag{32}$$

Substituindo o resultado das equações 32 e 30 na equação 24:

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{v_{e_i}}{m_{0_i}} \frac{\partial m_L}{\partial m_{s_k}} + \sum_{i=0}^{N} \frac{v_{e_i}}{m_{0_i}} \sum_{n=i}^{N} \delta_{nk} = \sum_{i=0}^{N} \frac{v_{e_i}}{m_{f_i}} \frac{\partial m_L}{\partial m_{s_k}} + \sum_{i=0}^{N} \frac{v_{e_i}}{m_{f_i}} \sum_{n=i}^{N} \delta_{nk}$$

Usando o resultado da equação 31, a relação acima resulta em:

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{v_{e_i}}{m_{0_i}} \frac{\partial m_L}{\partial m_{s_k}} + \sum_{i=0}^{k} \frac{v_{e_i}}{m_{0_i}} = \sum_{i=0}^{N} \frac{v_{e_i}}{m_{f_i}} \frac{\partial m_L}{\partial m_{s_k}} + \sum_{i=0}^{k} \frac{v_{e_i}}{m_{f_i}} \tag{33}$$

A partir da última equação, é possível, explicitar a derivada $\frac{\partial m_L}{\partial m_{s_k}}$:

$$\frac{\partial m_L}{\partial m_{s_k}} \sum_{i=0}^{N} \frac{v_{e_i}}{m_{0_i}} + \sum_{i=0}^{k} \frac{v_{e_i}}{m_{0_i}} = \frac{\partial m_L}{\partial m_{s_k}} \sum_{i=0}^{N} \frac{v_{e_i}}{m_{f_i}} + \sum_{i=0}^{k} \frac{v_{e_i}}{m_{f_i}}$$

$$\frac{\partial m_L}{\partial m_{s_k}} \left(\sum_{i=0}^{N} \frac{v_{e_i}}{m_{0_i}} - \sum_{i=0}^{N} \frac{v_{e_i}}{m_{f_i}} \right) = \sum_{i=0}^{k} \frac{v_{e_i}}{m_{f_i}} - \sum_{i=0}^{k} \frac{v_{e_i}}{m_{0_i}}$$

$$\frac{\partial m_L}{\partial m_{s_k}} \sum_{i=0}^{N} \frac{v_{e_i}}{m_{0_i}} - \frac{v_{e_i}}{m_{f_i}} = - \sum_{i=0}^{k} \frac{v_{e_i}}{m_{0_i}} - \frac{v_{e_i}}{m_{f_i}}$$

Então, a derivada da massa de carga útil com respeito à massa estrutural do estágio k é:

$$\frac{\partial m_L}{\partial m_{s_k}} = -\frac{\sum_{i=0}^{k} v_{e_i}\left(\frac{1}{m_{0_i}} - \frac{1}{m_{f_i}}\right)}{\sum_{i=0}^{N} v_{e_i}\left(\frac{1}{m_{0_i}} - \frac{1}{m_{f_i}}\right)} \tag{34}$$

5.2 Derivada da carga útil com respeito às massas de propelente m_{p_k}

Abaixo, desenvolve-se a expressão analítica da derivada da massa de carga útil para impulso de velocidade constante com respeito à massa de propelente do k-ésimo estágio de um foguete de N estágios.

A relação da equação 24, que representa a derivada nula de Δv, pode ser reescrita para o caso da derivada com respeito a m_{p_k}. Basta trocar a derivada relativa a m_{s_k} por m_{p_k}:

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{v_{e_i}}{m_{0_i}} \frac{\partial m_{0_i}}{\partial m_{p_k}} = \sum_{i=0}^{N} \frac{v_{e_i}}{m_{f_i}} \frac{\partial m_{f_i}}{\partial m_{p_k}} \tag{35}$$

As derivadas $\frac{\partial m_{0_i}}{\partial m_{p_k}}$ e $\frac{\partial m_{f_i}}{\partial m_{p_k}}$ são desenvolvidas a seguir.

$$\frac{\partial m_{0_i}}{\partial m_{p_k}} = \frac{\partial}{\partial m_{p_k}}\left(m_L + \sum_{n=i}^{N} m_{s_n} + m_{p_n}\right) = \frac{\partial m_L}{\partial m_{p_k}} + \frac{\partial}{\partial m_{p_k}}\left(\sum_{n=i}^{N} m_{s_n} + m_{p_n}\right)$$

$$\frac{\partial m_{0_i}}{\partial m_{p_k}} = \frac{\partial m_L}{\partial m_{p_k}} + \sum_{n=i}^{N} \frac{\partial m_{p_n}}{\partial m_{p_k}} \tag{36}$$

Pois $\frac{\partial m_{s_n}}{\partial m_{p_k}} = 0$ para $\forall k$ e $\forall n$, uma vez que a massa estrutural é assumida constante, dado que a redução de massa de propelente será convertida em massa de carga útil.

A derivada $\frac{\partial m_{p_n}}{\partial m_{p_k}}$ é expressa pelo Delta de Kronecker:

$$\frac{\partial m_{p_n}}{\partial m_{p_k}} = \delta_{nk} \tag{37}$$

Substituindo na equação 36:

$$\frac{\partial m_{0_i}}{\partial m_{p_k}} = \frac{\partial m_L}{\partial m_{p_k}} + \sum_{n=i}^{N} \delta_{nk} \tag{38}$$

Derivada $\frac{\partial m_{f_i}}{\partial m_{p_k}}$:

$$\frac{\partial m_{f_i}}{\partial m_{p_k}} = \frac{\partial}{\partial m_{p_k}}\left(m_{0_i} - m_{p_i}\right) = \frac{\partial m_{0_i}}{\partial m_{p_k}} - \frac{\partial m_{p_i}}{\partial m_{p_k}}$$

Dos resultados anteriores:

$$\frac{\partial m_{f_i}}{\partial m_{p_k}} = \frac{\partial m_L}{\partial m_{p_k}} + \sum_{n=i}^{N} \delta_{nk} - \delta_{ik}$$

$$\frac{\partial m_{f_i}}{\partial m_{p_k}} = \frac{\partial m_L}{\partial m_{p_k}} - \delta_{ik} + \sum_{n=i}^{N} \delta_{nk} \tag{39}$$

A relação acima envolvendo o delta de Kronecker estabelece a seguinte lógica:

$$-\delta_{ik} + \sum_{n=i}^{N} \delta_{nk} = \begin{cases} 0, \ i \geq k \\ 1, \ i < k \end{cases} \tag{40}$$

Substituindo 38 e 39 na equação 35:

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{v_{e_i}}{m_{0_i}} \frac{\partial m_L}{\partial m_{p_k}} + \sum_{i=0}^{N} \frac{v_{e_i}}{m_{0_i}} \sum_{n=i}^{N} \delta_{nk} = \sum_{i=0}^{N} \frac{v_{e_i}}{m_{f_i}} \frac{\partial m_L}{\partial m_{p_k}} + \sum_{i=0}^{N} \frac{v_{e_i}}{m_{f_i}} \left(-\delta_{ik} + \sum_{n=i}^{N} \delta_{nk} \right) \tag{41}$$

A relação da equação 40 é usada para determinar o lado direito da equação 41, enquanto que a relação 31 é aplicada no lado esquerdo, resultando em:

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{v_{e_i}}{m_{0_i}} \frac{\partial m_L}{\partial m_{p_k}} + \sum_{i=0}^{k} \frac{v_{e_i}}{m_{0_i}} = \sum_{i=0}^{N} \frac{v_{e_i}}{m_{f_i}} \frac{\partial m_L}{\partial m_{p_k}} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{v_{e_i}}{m_{f_i}} \tag{42}$$

Então, basta explicitar $\frac{\partial m_L}{\partial m_{p_k}}$ na equação 42:

$$\frac{\partial m_L}{\partial m_{p_k}} \sum_{i=0}^{N} \frac{v_{e_i}}{m_{0_i}} + \sum_{i=0}^{k} \frac{v_{e_i}}{m_{0_i}} = \frac{\partial m_L}{\partial m_{p_k}} \sum_{i=0}^{N} \frac{v_{e_i}}{m_{f_i}} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{v_{e_i}}{m_{f_i}}$$

$$\frac{\partial m_L}{\partial m_{p_k}} \left(\sum_{i=0}^{N} \frac{v_{e_i}}{m_{0_i}} - \sum_{i=0}^{N} \frac{v_{e_i}}{m_{f_i}} \right) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{v_{e_i}}{m_{f_i}} - \sum_{i=0}^{k} \frac{v_{e_i}}{m_{0_i}} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{v_{e_i}}{m_{f_i}} - \left(\frac{v_{e_k}}{m_{0_k}} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{v_{e_i}}{m_{0_i}} \right)$$

$$\frac{\partial m_L}{\partial m_{p_k}} \sum_{i=0}^{N} \frac{v_{e_i}}{m_{0_i}} - \frac{v_{e_i}}{m_{f_i}} = -\frac{v_{e_k}}{m_{0_k}} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{v_{e_i}}{m_{f_i}} - \frac{v_{e_i}}{m_{0_i}}$$

$$\frac{\partial m_L}{\partial m_{p_k}} \sum_{i=0}^{N} v_{e_i} \left(\frac{1}{m_{0_i}} - \frac{1}{m_{f_i}} \right) = -\left(\frac{v_{e_k}}{m_{0_k}} + \sum_{i=0}^{k-1} v_{e_i} \left(\frac{1}{m_{0_i}} - \frac{1}{m_{f_i}} \right) \right)$$

Então, a derivada da massa de carga útil com respeito à massa de propelente do estágio k é:

$$\frac{\partial m_L}{\partial m_{p_k}} = -\frac{\frac{v_{e_k}}{m_{0_k}} + \sum_{i=0}^{k-1} v_{e_i} \left(\frac{1}{m_{0_i}} - \frac{1}{m_{f_i}} \right)}{\sum_{i=0}^{N} v_{e_i} \left(\frac{1}{m_{0_i}} - \frac{1}{m_{f_i}} \right)} \tag{43}$$

5.3 Relações normalizadas

Abaixo, mostra-se o desenvolvimento do impulso total de velocidade normalizado com razões de carga útil normalizadas, bem como da razão de carga útil total em função das razões de carga útil normalizadas.

Equação de foguete ($k = 1$ pode significar o primeiro estágio de um veículo sem *boosters* ou o estágio zero de um veículo com *boosters*).

$$\Delta v = -\sum_{k=1}^{N} v_{e_k} \ln\left(\sigma_k + (1 - \sigma_k)\lambda_k\right) \tag{44}$$

Velocidades de exaustão normalizadas:

$$\beta_k = \frac{v_{e_k}}{v_{e_1}} \quad \rightarrow \quad v_{e_k} = \beta_k v_{e_1} \tag{45}$$

Razões de carga útil normalizadas:

$$\alpha_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_1} \quad \rightarrow \quad \lambda_k = \alpha_k \lambda_1 \tag{46}$$

Reescrevendo o impulso de velocidade em função de β_k e α_k:

$$\Delta v = -\sum_{k=1}^{N} \beta_k v_{e_1} \ln\left(\sigma_k + (1 - \sigma_k)\alpha_k \lambda_1\right)$$

$$\Delta v = -v_{e_1} \sum_{k=1}^{N} \beta_k \ln\left(\sigma_k + (1 - \sigma_k)\alpha_k \lambda_1\right)$$

$$\frac{\Delta}{v_{e_1}} v = -\sum_{k=1}^{N} \beta_k \ln\left(\sigma_k + (1 - \sigma_k)\alpha_k \lambda_1\right) \tag{47}$$

Reescrevendo a razão de carga útil total em função de β_k e α_k:

$$\lambda_T = \prod_{k=1}^{N} \lambda_k = \prod_{k=1}^{N} \alpha_k \lambda_1 = \prod_{k=1}^{N} \alpha_k \prod_{k=1}^{N} \lambda_1$$

$$\lambda_T = \lambda_1^N \prod_{k=1}^{N} \alpha_k \tag{48}$$