

MECÂNICA DE VOO ESPACIAL - DEM 1119

Aula 22

Prof. André Luís da Silva

1 Introdução

Modelo atmosférico:

- Atmosfera planetária;
- Modelo de atmosfera padrão;
- Constantes associadas ao modelo atmosférico aplicáveis à modelagem de cargas aerotérmicas;
- Modelo atmosférico aproximado exponencial.

Referência da aula [3]: TEWARI, A. Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modelling and simulation with MATLAB and Simulink. Boston: Birkhauser, 2007. **Capítulo 9**.

Nos primórdios da aviação, existia pequena necessidade de modelar a atmosfera acima de 30 km de altitude, devido ao teto de voo limitado das aeronaves operacionais da época. Entretanto, depois da segunda guerra mundial, houve um crescimento rápido nas altitudes de operação das aeronaves, mísseis balísticos, veículos lançadores e satélites. Então, modelos de atmosfera padrão, depois da década de 1950, expandiram-se bem além dos 100 km de altitude considerados suficientes para muitos veículos.

Entretanto, existe uma grande incerteza nas propriedades modeladas em altitudes acima de 100 km, devido aos efeitos de radiação solar e atividade de manchas solares. Estas influências externas implicam que a atmosfera não está mais em equilíbrio térmico. Felizmente, muitas aeronaves, mísseis e veículos lançadores, assim como veículos de reentrada, não são afetados por tais incertezas. Por outro lado, a vida útil de um satélite em baixa órbita é fortemente influenciada, mesmo por pequenas variações da densidade.

Segundo o *help* do MATLAB, o modelo de atmosfera padrão ISA (*international standard atmosphere*), bastante usado nas disciplinas de desempenho de aeronaves e mecânica de voo, é válido desde o nível do mar até 20 km. O modelo COESA (Committee on Extension to the Standard Atmosphere) é válido desde o nível do mar até 84.852 m; acima desse valor, a temperatura é extrapolada linearmente e a pressão logaritmicamente. Já o modelo modelo

CIRA (COSPAR International Reference Atmosphere 1986) limita a altitude geopotencial para valores de zero a 120 km, com validade para as regiões de 80° sul e 80° norte na Terra.

Os modelos ISA, COESA e CIRA são implementados no MATLAB e sua utilização é bastante intuitiva. São muito úteis nas aplicações de voo aeronáutico, que dificilmente ultrapassam os limites estipulados. Por exemplo, o Concorde, a aeronave comercial de maior teto de voo já operada, voava até 18.300 m de altitude (60.000 pés). Mesmo aeronaves militares estão dentro destes limites, por exemplo, o SR71 (*blackbird*) possuía teto de voo de 25.900 m (85.000 ft). Por outro lado, no que tange ao voo espacial, dos modelos citados, somente o CIRA admite altitudes acima da **Linha de Kármán**: o limite convencionado entre a atmosfera terrestre e o espaço exterior, consistindo em uma altitude de 100 km acima do nível do mar.

Neste sentido, esta aula apresenta um modelo atmosférico mais geral, com as seguintes características:

- Inclui parâmetros aerodinâmicos adimensionais para modelagem da força, momento e transferência de calor aerotermodinâmica;
- Possui 21 camadas para o modelo atmosférico da Terra, com altitude variando de zero até 700 km, capaz de ser usado em todas as simulações de voo atmosférico e trans atmosférico deste curso;
- Admite uma representação exponencial, que é útil para obter modelos analíticos para algumas situações especiais.

2 Fundamentos dos Modelos Atmosféricos

O modelo atmosférico básico visto na disciplina de desempenho de aeronaves se baseia em duas hipóteses fundamentais: equilíbrio hidrostático e gás ideal. Para os modelos mais genéricos apresentados nesta aula, estas também serão as hipóteses consideradas.

2.1 Gás Ideal

Os modelos de atmosfera padrão consideram o ar como um gás perfeito, com a seguinte equação de estado, que relaciona as variáveis termodinâmicas básicas:

$$p = \rho RT \quad (1)$$

onde R é a constante específica do gás, relacionada a um determinado gás ou mistura de gases. A constante específica de gás é relacionada à constante universal de gás, $\bar{R} = 8.314,32$ J/kg.mol.K, por:

$$R = \frac{\bar{R}}{m} \quad (2)$$

onde m é a massa molecular (de 1 Mol) do gás. A massa molecular varia com a composição química do gás.

Uma forma alternativa da equação de estado para um gás perfeito é:

$$\frac{p}{\rho^n} = k \quad (3)$$

onde n , o expoente politrópico, é uma constante desde que o gás esteja em equilíbrio térmico. k é uma constante qualquer.

Quando não existe transferência de calor, a condição adiabática é satisfeita, para a qual $n = \gamma$, a razão de calores específicos.

2.2 Altitude Geopotencial

No modelo atmosférico apresentado na disciplina de desempenho de aeronaves, adota-se o conceito de **altitude geopotencial**, h_g , ao invés da **geométrica** h , a qual é definida como segue:

$$g_0 dh_g \doteq g dh \quad (4)$$

onde g_0 é a aceleração da gravidade padrão ao nível do mar ($h = 0$).

A definição de altitude geopotencial é feita de modo que o trabalho realizado pelo campo gravitacional uniforme g_0 associado a tal altitude, seja igual ao realizado pelo campo gravitacional variável (real) ao longo da altitude geométrica.

Na disciplina de desempenho de aeronaves, foi determinada a relação algébrica entre as duas altitudes:

$$h_g = \frac{r_0}{r_0 + h} h \quad (5)$$

onde: $r_0 = 6.371$ km é o raio médio da Terra.

Como visto na disciplina de desempenho de aeronaves, a diferença entre essas duas altitudes é pequena para voo de aeronaves (somente 0,29% para $h = 18,3$ km - teto de voo do Concorde), sendo geralmente ignorada. Por outro lado, no voo de foguetes ou satélites, é necessário levar em conta a distinção.

2.3 Equilíbrio Hidrostático

Independentemente de equilíbrio térmico, que fornece valores constantes de R e γ , pode-se assumir que a atmosfera está em equilíbrio na direção vertical. Esta consideração é equivalente a ignorar correntes de ar verticais que são responsáveis pelos fenômenos climáticos convectivos. Esta condição é chamada de **equilíbrio hidrostático**.

Uma coluna vertical de gás em equilíbrio hidrostático tem sua pressão equilibrada por seu peso por unidade de área. Então, a partir da figura 1, é possível escrever a seguinte relação

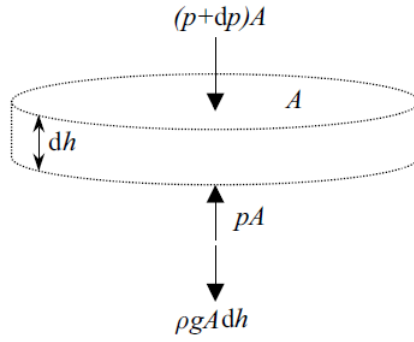


Figura 1: Uma tira estreita da atmosfera em equilíbrio hidrostático. Fonte: referência [3]

de equilíbrio hidrostático para uma fina camada atmosférica de altitude dh e seção transversal unitária:

$$dp = -\rho g dh \quad (6)$$

onde g denota a aceleração da gravidade, a qual varia com a altitude.

A altitude geopotencial serve para simplificar a equação 6. Utilizando este conceito, a equação do equilíbrio hidrostático se torna:

$$dp = -\rho g_0 dh_g \quad (7)$$

3 Atmosfera Padrão

Uma atmosfera padrão é modelada por camadas consecutivas. Estas camadas são definidas em função do perfil de variação de temperatura. Em **baixas altitudes**, o equilíbrio térmico e hidrostático prevalente pode ser representado por camadas com **variação linear da temperatura com a altitude**, enquanto que os efeitos de **desequilíbrio em altas altitudes** geralmente requerem um **modelo não linear de temperatura**.

Na Terra, convencionou-se a nomenclatura de camadas segundo a figura 2.

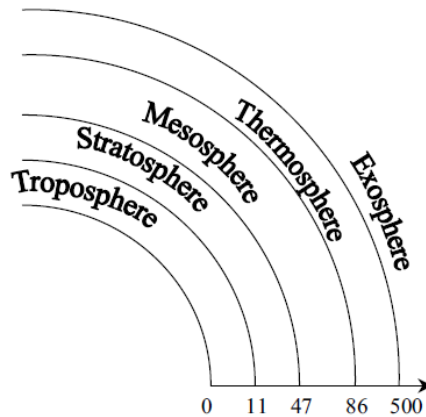


Figura 2: Estratos atmosféricos. Fonte: referência [3].

Descrição das camadas (os limites de altitude são aproximados):

- **Troposfera:** estende-se do nível padrão do mar até $h = 11$ km (tropopausa). Caracteriza-se por um decaimento linear da temperatura com a altitude;
- **Estratosfera:** faixa de altitude $11 < h \leq 47$ km, consistindo de 3 segmentos. O primeiro tem temperatura constante (isotérmica) e os outros dois com variação linear crescente em diferentes taxas;
- **Mesosfera:** intervalo $47 < h \leq 86$ km. Possui 3 sub camadas, a primeira é isotérmica, as próximas duas têm decaimento de temperatura a diferentes taxas;
- **Termosfera:** intervalo $86 < h \leq 500$ km. Apresenta comportamento não linear da temperatura em função da altitude;
- **Exosfera:** acima de 500 km. Camada de difícil descrição do comportamento da temperatura, sendo dependente do clima espacial.

A operação de muitas aeronaves é limitada à troposfera e às faixas mais baixas da estratosfera. Uma ilustração das variações de temperatura na estratosfera e das demais camadas é mostrada na figura 3.

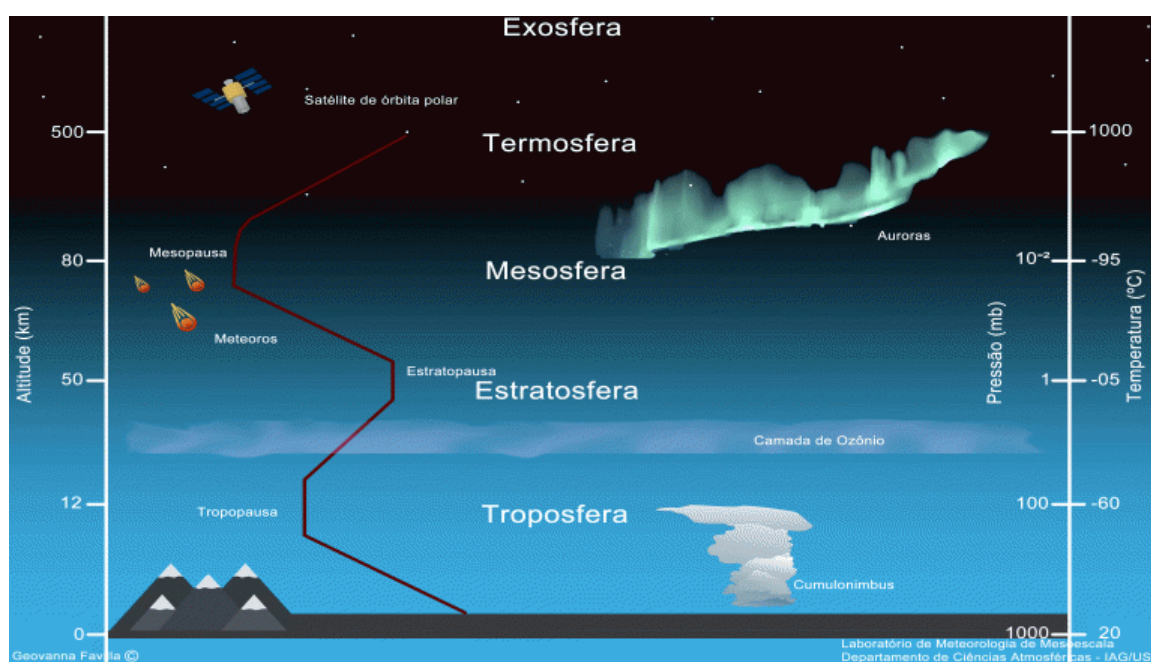


Figura 3: Ilustração das camadas da atmosfera terrestre com variação de temperatura. Fonte: http://www.jovemexplorador.iag.usp.br/?p=blog_estrutura-vertical

Apesar da mesosfera ser modelada por 3 gradientes lineares de temperatura, nesta faixa a variação é não linear, devido ao desequilíbrio térmico e reações químicas associadas.

Na termosfera, as propriedades termodinâmicas são fortes funções da radiação solar, especialmente seus fenômenos periódicos associados, tais como a atividade de manchas solares.

Acima da termosfera, situa-se a exosfera, que é uma região indefinida, dominada por efeitos eletromagnéticos de um gás ionizado pela interação entre o vento solar e o campo magnético

terrestre. Para uma ilustração deste fenômeno, apresenta-se a figura 4. A temperatura na exosfera é usualmente considerada constante, mas seu valor varia severamente em diferentes modelos.

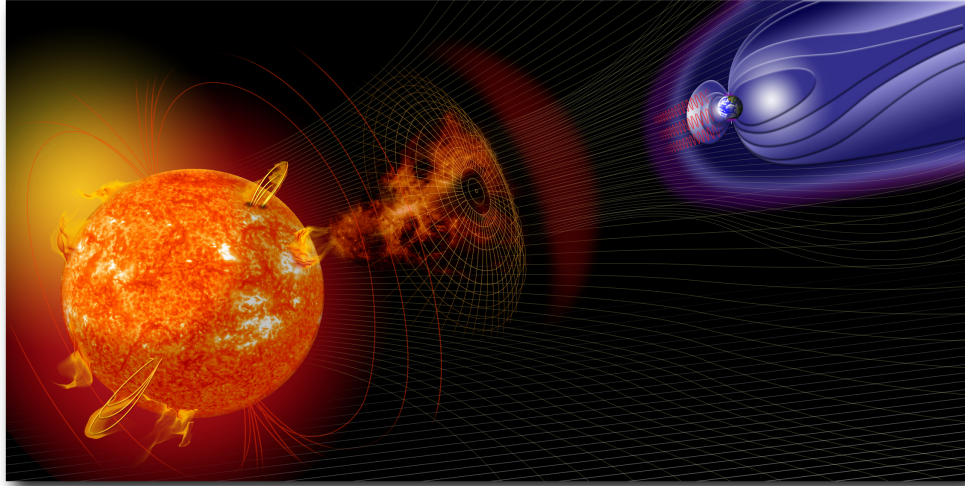


Figura 4: Ilustração da interação do vento solar com o campo magnético terrestre. Fonte: <http://lilith.fisica.ufmg.br/~cristina/climaespacial/2pag.html>

Antes de considerar um modelo específico, serão apresentadas representações para as variáveis atmosféricas básicas. Nas camadas com equilíbrio termodinâmico, a variação linear da temperatura é expressa como:

$$T = T_i + a(h - h_i) \quad (8)$$

Onde o subscrito i refere-se às quantidades na base da camada

A grandeza “ a ” é a taxa de lapso termal:

$$a \doteq \frac{dT}{dh} \quad (9)$$

A derivada $\frac{dT}{dh}$ pode ser escrita a partir da regra da cadeia:

$$\frac{dT}{dh} = \frac{dp}{dh} \frac{dT}{dp} \quad (10)$$

A derivada $\frac{dp}{dh}$ é obtida pela relação de equilíbrio hidrostático da equação 6:

$$\frac{dp}{dh} = -\rho g \quad (11)$$

A derivada $\frac{dT}{dp}$ é obtida a partir da relação dos gases ideais da equação 1:

$$T = \frac{p}{\rho R} \rightarrow \frac{dT}{dp} = \frac{1}{R} \frac{d}{dp} \frac{p}{\rho}$$

$$\frac{dT}{dp} = \frac{1}{R} \frac{\rho - p \frac{d\rho}{dp}}{\rho^2} \quad (12)$$

A derivada $\frac{d\rho}{dp}$ é determinada a partir da relação de gás ideal da equação 3:

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho^n} &= k \Rightarrow \rho = k^{-\frac{1}{n}} p^{\frac{1}{n}} \\ \frac{d\rho}{dp} &= k^{-\frac{1}{n}} \frac{dp^{\frac{1}{n}}}{dp} = k^{-\frac{1}{n}} \frac{1}{n} p^{\frac{1}{n}-1} = k^{-\frac{1}{n}} p^{\frac{1}{n}} \frac{1}{n} p^{-1} \\ \frac{d\rho}{dp} &= \frac{1}{n} \frac{\rho}{p} \end{aligned} \quad (13)$$

Agora, substitui-se o resultado da equação 13 na equação 12:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dp} &= \frac{1}{R} \frac{\rho - p \frac{1}{n} \frac{\rho}{p}}{\rho^2} = \frac{1}{R} \frac{\rho - \frac{1}{n} \rho}{\rho^2} \\ \frac{dT}{dp} &= \frac{1}{R} \frac{\frac{n-1}{n} \rho}{\rho^2} \end{aligned} \quad (14)$$

Substituindo os resultados das equações 11 e 14 na equação 10:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dh} &= -\rho g \frac{1}{R} \frac{\frac{n-1}{n} \rho}{\rho^2} \\ \frac{dT}{dh} &= -g \frac{1}{R} \frac{n-1}{n} \end{aligned} \quad (15)$$

Então, da definição da equação 9, a taxa de lapso termal é:

$$a = \frac{dT}{dh} = -g \frac{1}{R} \frac{n-1}{n} \quad (16)$$

O resultado da equação 16 relaciona diretamente a taxa de lapso ao expoente politrópico. *A taxa de lapso é crucial para determinar a estabilidade do equilíbrio hidrostático de uma camada atmosférica.*

Uma taxa de lapso negativa implica um resfriamento do ar quente, na medida que ele sobe devido a uma pequena perturbação da condição de equilíbrio; então o volume de ar ascendente torna-se mais pesado e desce de volta para seu nível de equilíbrio. Assim sendo, uma camada atmosférica com $a < 0$ é **termicamente estável**. Por outro lado, uma camada com $a > 0$ é **instável**.

De modo a determinar a variação da densidade e pressão com a altitude, é necessário integrar a equação hidrostática 6. No passado, expressões analíticas foram obtidas com o uso da altitude geopotencial h_g . Entretanto, com a disponibilidade de computadores digitais, não há nenhuma vantagem particular em fazer isso atualmente. Então, a seguir, **será considerada a altitude geométrica h** como a variável independente, resultando um modelo mais significativo fisicamente.

Supondo que a massa do planeta é esfericamente distribuída, a aceleração da gravidade g é

dada por:

$$g = \frac{GM}{r^2} = \frac{\mu}{r^2} \quad (17)$$

onde $\mu = GM$ é a constante gravitacional do planeta e r é a distância radial ao seu centro de massa. Por definição, a relação entre r e h é:

$$r = r_0 + h \quad (18)$$

Por definição, g_0 é a aceleração da gravidade para $h = 0$:

$$g_0 = \frac{\mu}{r_0^2} \quad (19)$$

Das equações 17, 18 e 19, a aceleração da gravidade é escrita como:

$$g = g_0 \frac{r_0^2}{(r_0 + h)^2} \quad (20)$$

Para pequenas altitudes, onde $h \ll r_0$, g pode ser aproximada como:

$$g = g_0 \frac{r_0^2}{(r_0 + h)^2} \approx g_0 \left(1 - \frac{2h}{r_0} \right) \quad (21)$$

O resultado acima é proveniente dos dois primeiros termos da expansão em série de Taylor de $\frac{r_0^2}{(r_0+h)^2}$ em torno de $h_0 = 0$: $\frac{r_0^2}{(r_0+h)^2} \approx \frac{r_0^2}{(r_0+h)^2} \Big|_{h=0} + \frac{d}{dh} \frac{r_0^2}{(r_0+h)^2} \Big|_{h=0} h$.

A substituição do resultado da equação 21 na equação 6 resulta em:

$$dp = -\rho g_0 \left(1 - \frac{2h}{r_0} \right) dh \quad (22)$$

A densidade ρ pode ser substituída na equação 22 a partir da relação de gás ideal 1

$$dp = -\frac{p}{RT} g_0 \left(1 - \frac{2h}{r_0} \right) dh \quad (23)$$

Na equação 23, a temperatura pode ser substituída pelo modelo da equação 8:

$$dp = -\frac{p}{R(T_i + a(h - h_i))} g_0 \left(1 - \frac{2h}{r_0} \right) dh \quad (24)$$

Para simplificar a equação 24, define-se a constante: $\beta = 2/r_0$:

$$dp = -\frac{p}{R(T_i + a(h - h_i))} g_0 (1 - \beta h) dh \quad (25)$$

Para resolver a equação 25, ela é escrita na forma separável:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g_0(1 - \beta h)}{R(T_i + a(h - h_i))} dh \quad (26)$$

Para resolver a equação 26 integra-se um lado de p_i até p e o outro de h_i até h , como segue. Integral da pressão:

$$\int_{p_i}^p \frac{dp}{p} = \ln p - \ln p_i = \ln \frac{p}{p_i} \quad (27)$$

Para resolver a integral envolvendo altitude (lado direito da equação 26), primeiro o integrando é reescrito de uma maneira mais geral:

$$-\frac{g_0(1 - \beta h)}{R(T_i + a(h - h_i))} = \frac{bh + c}{dh + e} \quad (28)$$

onde: $b = g_0\beta$, $c = -g_0$, $d = Ra$, $e = RT_i - Rah_i$.

Então, é utilizada a regra de integração da equação 29, proveniente de [2]:

$$\int \frac{bx + c}{dx + e} dx = \frac{bx}{d} + \frac{cd - be}{d^2} \ln(dx + e) \quad (29)$$

Este resultado é válido somente para $d \neq 0$, ou seja: para $a \neq 0$.

Substituindo e desenvolvendo, obtém-se a integração em função de h nas camadas de temperatura variável:

$$\begin{aligned} \int_{h_i}^h -\frac{g_0(1 - \beta h)}{R(T_i + a(h - h_i))} dh &= \left[\frac{bh}{d} + \frac{cd - be}{d^2} \ln(dh + e) \right]_{h_i}^h \\ &= \left[\frac{g_0\beta h}{Ra} + \frac{-g_0Ra - g_0\beta(RT_i - Rah_i)}{(Ra)^2} \ln(Rah + RT_i - Rah_i) \right]_{h_i}^h \\ &= \left[\frac{g_0\beta h}{Ra} + \left(-\frac{g_0}{Ra} - \frac{g_0\beta}{Ra^2}(T_i - ah_i) \right) \ln(R(a(h - h_i) + T_i)) \right]_{h_i}^h \\ &= \left[\frac{g_0\beta h}{Ra} - \frac{g_0}{Ra} \left(1 + \beta \left(\frac{T_i}{a} - h_i \right) \right) \ln(R(T_i + a(h - h_i))) \right]_{h_i}^h \\ &= \frac{g_0\beta(h - h_i)}{Ra} - \frac{g_0}{Ra} \left(1 + \beta \left(\frac{T_i}{a} - h_i \right) \right) \ln \frac{R(T_i + a(h - h_i))}{R(T_i + a(h_i - h_i))} \end{aligned}$$

$$\int_{h_i}^h -\frac{g_0(1 - \beta h)}{R(T_i + a(h - h_i))} dh = \frac{g_0\beta(h - h_i)}{Ra} - \frac{g_0}{Ra} \left(1 + \beta \left(\frac{T_i}{a} - h_i \right) \right) \ln \left(1 + \frac{a(h - h_i)}{T_i} \right) \quad (30)$$

Usando a regra do logaritmo de uma potência, o resultado da equação 30 é escrito como:

$$\int_{h_i}^h -\frac{g_0(1 - \beta h)}{R(T_i + a(h - h_i))} dh = \frac{g_0\beta(h - h_i)}{Ra} + \ln \left(1 + \frac{a(h - h_i)}{T_i} \right)^{-\frac{g_0}{Ra}(1 + \beta(\frac{T_i}{a} - h_i))} \quad (31)$$

Substituindo os resultados das equações 27 e 31 na equação 26, tem-se:

$$\ln \frac{p}{p_i} = \frac{g_0 \beta (h - h_i)}{Ra} + \ln \left(1 + \frac{a(h - h_i)}{T_i} \right)^{-\frac{g_0}{Ra} \left(1 + \beta \left(\frac{T_i}{a} - h_i \right) \right)} \quad (32)$$

Calculando $\exp(\cdot)$ de ambos os lados da equação 32:

$$\begin{aligned} \frac{p}{p_i} &= \exp \left(\frac{g_0 \beta (h - h_i)}{Ra} + \ln \left(1 + \frac{a(h - h_i)}{T_i} \right)^{-\frac{g_0}{Ra} \left(1 + \beta \left(\frac{T_i}{a} - h_i \right) \right)} \right) \\ \frac{p}{p_i} &= \exp \left(\frac{g_0 \beta (h - h_i)}{Ra} \right) \exp \left(\ln \left(1 + \frac{a(h - h_i)}{T_i} \right)^{-\frac{g_0}{Ra} \left(1 + \beta \left(\frac{T_i}{a} - h_i \right) \right)} \right) \\ \frac{p}{p_i} &= \exp \left(\frac{g_0 \beta (h - h_i)}{Ra} \right) \left(1 + \frac{a(h - h_i)}{T_i} \right)^{-\frac{g_0}{Ra} \left(1 + \beta \left(\frac{T_i}{a} - h_i \right) \right)} \end{aligned} \quad (33)$$

Assim, a pressão em função da **altitude geométrica** nas camadas **não isotérmicas** ($a \neq 0$) com **equilíbrio térmico** (relação linear entre T e h) é:

$$p = p_i \left(1 + \frac{a(h - h_i)}{T_i} \right)^{-\frac{g_0}{Ra} \left(1 + \beta \left(\frac{T_i}{a} - h_i \right) \right)} \exp \left(\frac{g_0 \beta}{Ra} (h - h_i) \right) \quad (34)$$

Para os casos em que $a = 0$, camada isotérmica, a resolução da integral do lado direito da equação 26 é bem mais simples:

$$\begin{aligned} \int_{h_i}^h -\frac{g_0 (1 - \beta h)}{RT_i} dh &= \left[-\frac{g_0}{RT_i} h + \frac{g_0 \beta}{2RT_i} h^2 \right]_{h_i}^h = -\frac{g_0}{RT_i} \left[h \left(1 - \frac{\beta}{2} h \right) \right]_{h_i}^h \\ &= -\frac{g_0}{RT_i} \left(h \left(1 - \frac{\beta}{2} h \right) - h_i \left(1 - \frac{\beta}{2} h_i \right) \right) = -\frac{g_0}{RT_i} \left(h - \frac{\beta}{2} h^2 - h_i + \frac{\beta}{2} h_i^2 \right) \\ &= -\frac{g_0}{RT_i} \left(h - h_i - \frac{\beta}{2} (h^2 - h_i^2) \right) = -\frac{g_0}{RT_i} \left(h - h_i - \frac{\beta}{2} (h + h_i)(h - h_i) \right) \\ \int_{h_i}^h -\frac{g_0 (1 - \beta h)}{RT_i} dh &= -\frac{g_0}{RT_i} (h - h_i) \left(1 - \frac{\beta}{2} (h + h_i) \right) \end{aligned} \quad (35)$$

Substituindo os resultados das equações 27 e 35 na equação 26, tem-se:

$$\ln \frac{p}{p_i} = -\frac{g_0}{RT_i} (h - h_i) \left(1 - \frac{\beta}{2} (h + h_i) \right) \quad (36)$$

Calculando $\exp(\cdot)$ de ambos os lados da equação 36:

$$\frac{p}{p_i} = \exp \left(-\frac{g_0}{RT_i} (h - h_i) \left(1 - \frac{\beta}{2} (h + h_i) \right) \right) \quad (37)$$

Então, a pressão em função da **altitude geométrica** nas camadas **isotérmicas** ($a = 0$) é dada por:

$$p = p_i \exp \left(-\frac{g_0}{RT_i} (h - h_i) \left(1 - \frac{\beta}{2} (h + h_i) \right) \right) \quad (38)$$

Uma vez determinada a pressão, a densidade pode ser facilmente calculada a partir da temperatura pela equação de gás ideal:

$$\rho = \frac{p}{RT} \quad (39)$$

As expressões analíticas determinadas aqui podem ser facilmente programadas em um código para calcular a temperatura, pressão e densidade, em qualquer ponto para $h < 86\text{km}$, onde o equilíbrio hidrostático é uma consideração válida.

3.1 Dados da Atmosfera Padrão

Existem diferentes modelos de atmosfera padrão, tendo como base os parâmetros adotados, sendo a taxa de lapso térmico o principal.

Para obter um modelo, vamos seguir a convenção da referência [3], que mescla dois modelos:

- Na faixa de $0 \leq h \leq 86\text{ km}$, será adotado o modelo da atmosfera padrão norte americana de 1976 (**1976 U.S. Standard Atmosphere-USSA 1976**). Este modelo possui duas camadas acima de 86 km, as quais possuem variação não linear de temperatura *versus* altitude e certa incerteza;
- Para altitudes acima de 86 km, a referência [3] opta por usar outro modelo: atmosfera padrão norte americano de 1962 (**1962 U.S. Standard Atmosphere-1962 USSA**). Este segundo modelo modela representa camadas até a altitude $h = 2000\text{ km}$, todas com **temperatura linearmente variável**. Esta escolha torna o modelo mais simples e permite usar as equações anteriores, também para altitudes acima de 86km.

De acordo com a referência [1], o modelo 1962 USSA descreve dois tipos de temperatura: temperatura de escala molecular T_M e temperatura cinética T , as quais estão relacionadas por:

$$T_M = \frac{M_0}{M} T \quad (40)$$

sendo que $\frac{M_0}{M}$ é a **razão de peso molecular**.

A referência [1] afirma que seu **modelo 1962 USSA é desenvolvido a partir da temperatura de escala molecular**. Para altitudes abaixo de 90 km, razão de peso molecular é aproximadamente unitária $\frac{M_0}{M} \approx 1$ e as temperaturas cinética e de escala molecular são praticamente as mesmas $T \approx T_M$. No entanto, acima desta altitude $\frac{M_0}{M} > 1$ e a temperatura T_M é maior que T : $T_M > T$.

Por outro lado, a referência [3] apresenta a tabela de dados da atmosfera padrão para a temperatura cinética da referência [1], o que está **errado**. Deste modo, a tabela 1 foi corrigida, inserindo-se os dados de temperatura de escala molecular da referência [1]. Esta tabela também contém os dados de peso molecular M utilizados para converter temperatura T_m em T a partir da equação 40.

A composição das atmosferas padrão norte americanas de 1976 e 1962 resulta num modelo de 21 camadas (contando as subcamadas), que é tabulado na tabela 1.

Tabela 1: Combinação de atmosfera padrão norte americana de 1976 e 1962. Fonte: ref. [3].

	i	h_i (km)	T_i (K)	R (J/kg.K)	a (K/km)	M
Troposfera	1	0	288,15	287,0	-6,5	28,9644
	2	11,0191	216,65	287,0	0,0	28,9644
Estratosfera	3	20,0631	216,65	287,0	1,0	28,9644
	4	32,1619	228,65	287,0	2,8	28,9644
Mesosfera	5	47,3501	270,65	287,0	0,0	28,9644
	6	51,4125	270,65	287,0	-2,8	28,9644
	7	71,8020	214,65	287,02	-2,0	28,9644
	8	86	186,946	287,02	1,693	28,9644
Termosfera	9	100	210,65	287,84	5,0	28,88
	10	110	260,65	291,06	10,0	28,56
	11	120	360,65	308,79	20,0	28,07
	12	150	960,65	311,80	15,0	26,92
	13	160	1.110,65	313,69	10,0	26,66
	14	170	1.210,65	321,57	7,0	26,4
	15	190	1.350,65	336,68	5,0	25,85
	16	230	1.550,65	366,84	4,0	24,7
	17	300	1.830,65	416,88	3,3	22,66
	18	400	2.160,65	463,36	2,6	19,94
	19	500	2420,65	493,63	1,7	17,94
Exosfera	20	600	2.590,65	514,08	1,1	16,84
	21	700	2.700,65	514,08	0,0	16,17

Enquanto os dois modelos norte americanos (de 1976 e 1962) têm uma correspondência bastante alta para altitudes na faixa $0 \leq h \leq 86$ km, existe uma diferença significativa entre os dois na região exosférica, a qual é de pouca importância para veículos atmosféricos.

Na prática, para uma maior precisão nas temperaturas exosféricas, modelos estatísticos são empregados, os quais levam em conta fenômenos como explosões e manchas solares. Tais modelos são úteis para prever o arrasto sobre satélites em órbitas baixas e, conseqüentemente, a sua vida em órbita. Tal tipo de procedimento não será adotado no curso.

3.2 Parâmetros Calculados pelo Modelo

Além das variáveis termodinâmicas básicas, os seguintes parâmetros adicionais, que são úteis em determinar cargas aerotérmicas, podem ser determinados a partir do modelo atmosférico:

- (a) Velocidade do som, $a_{\text{inf}} \doteq \sqrt{\gamma RT}$;

- (b) Número de Mach, $M \doteq \frac{v}{a_{\text{inf}}}$, onde v denota a velocidade do veículo relativa à atmosfera;
- (c) O coeficiente de viscosidade dinâmica, μ , com a lei de Sutherland:

$$\mu = 1,458 \times 10^{-6} \frac{T^{\frac{3}{2}}}{T + 110,4} \quad (41)$$

- (d) Número de Prandtl:

$$Pr = \frac{\mu c_p}{k_T} \quad (42)$$

onde k_T é o coeficiente de condutividade térmica do gás perfeito, enquanto c_p é o seu calor específico de pressão constante, que pode ser calculado por:

$$c_p = \frac{R\gamma}{\gamma - 1} \quad (43)$$

Para o ar perfeito, a condutividade térmica é calculada usando a seguinte fórmula empírica:

$$k_T = \frac{2,64638 \times 10^{-3} T^{\frac{3}{2}}}{T + 245,4 \left(10^{-\frac{12}{T}}\right)} \text{ J/m.s.K} \quad (44)$$

- (e) Número de Knudsen, $Kn \doteq \frac{\lambda}{l_c}$, onde λ é o *caminho livre médio* do escoamento não perturbado de moléculas e l_c é um comprimento característico. O caminho livre médio é baseado no diâmetro de colisão, σ , sendo calculado por:

$$\lambda = \frac{m}{\sqrt{2}\pi\sigma^2\rho N_a} \quad (45)$$

onde m é a massa molecular em kg/Mol, e $N_a = 6,0220978 \times 10^{23}$ é o número de Avogadro.

- (f) O parâmetro de regime de escoamento, d , é baseado no número de Knudsen.
- Se $d = 1$, o escoamento é livre molecular. Para $Kn \geq 10$;
 - Se $d = 2$, o escoamento é contínuo. Para $Kn \leq 0,01$;
 - Quando $d = 3$, o escoamento é de transição entre os dois regimes. $0,01 < Kn < 10$.

- (g) Número de Reynolds, $Re \doteq \frac{\rho v l_c}{\mu}$.

3.3 Exemplo 9.1

Reprodução do exemplo 9.1 da referência [3]. Consiste em implementar a função de modelo atmosférico, desenvolvida segundo os dados e conceitos desta seção, traçando o gráfico de densidade e pressão, em função da altitude, na faixa $0 \leq h \leq 200\text{km}$. A densidade e a pressão são plotadas em escala logarítmica para enfatizar sua variação quase exponencial.

O professor desenvolveu uma função em MATLAB para implementar o modelo de atmosfera padrão em questão. Usando esta função, os gráficos solicitados foram obtidos. O programa desenvolvido também traça o gráfico do perfil de temperatura em função da altitude.

4 Modelo Exponencial para Atmosferas Planetárias

Como visto no exemplo 9.1 da referência [3], a complexa variação de temperatura, densidade e pressão na atmosfera padrão pode ser simplificada empregando-se uma aproximação isotérmica em regiões selecionadas de altitude, com temperaturas médias devidamente ajustadas. Tal modelo exponencial de variação de densidade é útil para determinar as propriedades de atmosferas planetárias e também habilita uma análise rápida e razoavelmente precisa.

Em um modelo isotérmico, a equação 38 foi determinada para expressar a pressão em função da altitude. A densidade é obtida a partir da mesma usando a equação 39. Assim, a densidade em função da altitude, em uma camada isotérmica de temperatura T_i , pode ser representada como:

$$\rho = \frac{p_i}{RT_i} \exp \left(-\frac{g_0}{RT_i} (h - h_i) \left(1 - \frac{\beta}{2} (h + h_i) \right) \right) \quad (46)$$

Veja que $\frac{p_i}{RT_i} = \rho_i$ é a densidade no início da camada isotérmica.

Por definição $\beta = 2/r_0$. Então, se $h + h_i \ll r_0$, a seguinte aproximação pode ser feita $1 - \frac{\beta}{2}(h + h_i) \approx 1$. Logo, o modelo de densidade em função da altitude numa camada isotérmica pode ser dado por:

$$\rho = \rho_i \exp \left(-\frac{g_0}{RT_i} (h - h_i) \right) \quad (47)$$

Supondo que qualquer camada da atmosfera possa ser aproximada por um modelo isotérmico, é escolhida a função abaixo para descrever a variação da densidade com a altitude, a qual é análoga à função da equação 47 com alguns ajustes:

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{h}{H}} \quad (48)$$

onde ρ_0 é a densidade base (não necessariamente o valor ao nível do mar, nem ao menos o valor da densidade no início da camada aproximada), e H é uma altitude escalonada, que depende do valor selecionado de temperatura isotérmica média. Tanto ρ_0 quanto H são escolhidos tais que um bom ajuste é obtido entre a atmosfera padrão e a aproximação da equação 48 em uma dada faixa de altitude.

Exemplo 9.2: Na referência 2, é apresentada uma aproximação exponencial para a faixa $5 \leq h \leq 120$ km, comparando o resultado com o modelo de atmosfera padrão. O exemplo fornece previamente os valores da função de ajuste: $\rho_0 = 1.752 \text{ kg/m}^3$ e $H = 6,7$ km.

Um programa em MATLAB foi elaborado pelo professor onde este exemplo é resolvido. Além de usar os valores previamente dados pelo livro, no programa, também é feito o cálculo

de ρ_0 e H usando o modelo de atmosfera padrão e a equação 47.

No exemplo 9.2, segundo os dados fornecidos pelo livro, a comparação entre a densidade fornecida pela atmosfera padrão e a aproximação mostra uma excelente correspondência na faixa $5 \leq h \leq 50\text{km}$. Entretanto, em altitudes mais elevadas, ocorre um desvio significativo, especialmente na faixa $50 < h \leq 100\text{ km}$, que é crucial para muitos veículos de reentrada atmosférica. Então, o modelo de aproximação exponencial dado é bom somente para modelar o voo abaixo de 50 km de altitude, que é suficiente para a maioria das aeronaves. Isto também é adequado para a estimativa analítica do pico de cargas aerotérmicas encaradas por veículos de reentrada e ascendentes, visto que tais picos ocorrem para $h < 50\text{km}$.

Mesmo com as limitações do modelo apresentado no exemplo, outros valores de ρ_0 e H podem ser escolhidos para melhorar a aproximação em outras faixas de altitude.

A aproximação exponencial é frequentemente empregada em sondas planetárias, para determinar um modelo atmosférico aproximado de planetas distantes. Tais sondas são usualmente equipadas com acelerômetros para medir a desaceleração causada pelo arrasto atmosférico, a qual pode ser dada por:¹

$$-\dot{v} = \frac{1}{2} \left(\rho_0 e^{-\frac{h}{H}} \right) v_e^2 \frac{SC_D}{m} \quad (49)$$

onde v_e é a velocidade conhecida de entrada, C_D é um coeficiente de arrasto previamente determinado com base na área de referência S e m é a massa do veículo. Plotando a desaceleração contra a altitude (que é medida por radar), em escala logarítmica, as constantes ρ_0 e H podem ser determinadas. Exemplos de sondas atmosféricas planetárias incluem a *Galileo*, *Viking*, *Pioneer* e *Huygens*, para as atmosferas de Júpiter, Marte, Vênus e a lua Titan de Saturno, respectivamente.

5 Resumo

As cargas aerotérmicas em um veículo de voo atmosférico dependem das propriedades termodinâmicas dos gases atmosféricos. Então, um modelo cuidadoso é crucial para a análise e projeto de veículos aeroespaciais. Modelos de atmosfera padrão são baseados em equilíbrio hidrostático e equilíbrio térmico, consistindo de diversas camadas, cada uma com diferentes variações de temperatura com a altitude. Uma variação linear de temperatura com a altitude geopotencial é uma aproximação padrão empregada em muitos modelos atmosféricos. Entretanto, em camadas atmosféricas mais altas (termosfera e exosfera), o equilíbrio térmico e químico não se verifica, com essas camadas possuindo variação de temperatura inerentemente não linear com a altitude. Um modelo exponencial apropriado pode ser empregado para ajustar a variação de densidade com a altitude, em uma faixa específica e limitada de altitude. Tal modelo é interessante para a avaliação analítica de trajetórias de reentrada, bem como picos de cargas aerotérmicas em veículos ascendentes.

¹Este modelo é adequado para comparar com as medições de acelerômetros, visto que tais dispositivos medem a aceleração total do corpo **menos** a aceleração gravitacional.

Referências

- [1] COESA. Standard atmosphere 1962. Technical report, U.S. Government Printing Office, Washington, DC, 1962.
- [2] Murray R. Spiegel, Seymour Lipschutz, and John Liu. *Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas*. Coleção Schaum. Bookman, New York, 3^a edition, 2011.
- [3] A. TEWARI. *Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modelling and simulation with MATLAB and Simulink*. Birkhauser, Boston, 2007.