MECÂNICA DE VOO ESPACIAL - DEM 1119
Aula 17

Prof. André Luís da Silva

1 Introdução

Desempenho de foguetes:

- Foguete de um estágio;
- Foguete de múltiplos estágios;
- Foguete de estágios em paralelo.

Referência da aula [1]: TEWARI, A. Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modelling and simulation with MATLAB and Simulink. Boston: Birkhauser, 2007.
Seção 8.3.

2 Foguete de um estágio

Esta aula visa adaptar a equação de foguete para a representação de foguetes de um ou mais estágios. Para isso, desmembra-se a massa total de um foguete em:

- Massa de propelente;
- Massa estrutural;
- Massa de carga útil.

Neste sentido, considere um foguete de um estágio com massa de carga útil m_L, massa estrutural m_s, e massa de propelente m_p. Então, a massa inicial é $m_0 = m_L + m_s + m_p$, e a massa final depois de consumir todo o propelente é $m_f = m_L + m_s$. A razão da massa final para a inicial é escrita como:

$$
\begin{aligned}
\frac{m_f}{m_0} &= \frac{m_L + m_s}{m_0} = \frac{(m_s + m_p)(m_L + m_s)}{(m_s + m_p)\, m_0} = \frac{m_s m_L + m_s m_s + m_p m_L + m_p m_s}{(m_s + m_p)\, m_0} \\
\frac{m_f}{m_0} &= \frac{m_s(m_L + m_s + m_p) + m_p m_L}{(m_s + m_p)\, m_0} = \frac{m_s(m_L + m_s + m_p)}{(m_s + m_p)\, m_0} + \frac{m_p m_L}{(m_s + m_p)\, m_0} \\
\frac{m_f}{m_0} &= \frac{m_s}{m_s + m_p} + \frac{m_p m_L}{(m_s + m_p)\, m_0} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

A equação 1 pode ser simplificada a partir da definição de importantes razões associadas às frações de massa do foguete.

Define-se σ como a **razão estrutural**:

$$\sigma = \frac{m_s}{m_s + m_p} \tag{2}$$

Define-se λ como a **razão de carga útil**:

$$\lambda = \frac{m_L}{m_0} \tag{3}$$

Assim, a equação 1 é escrita como:

$$\frac{m_f}{m_0} = \sigma + (1 - \sigma)\lambda \tag{4}$$

A massa da carga útil não é incluída na definição de razão estrutural, isso porque um foguete é geralmente capaz de carregar diferentes cargas úteis, com a mesma estrutura.

Da equação de foguete e do resultado na equação 4, o impulso total de velocidade $\Delta v = v_f - v_0$, para um foguete de um estágio no espaço, com ação da gravidade desprezível ao longo da direção da velocidade, é dada por:

$$\Delta v = v_e \ln \frac{m_0}{m_f} = -v_e \ln \frac{m_f}{m_0}$$

$$\Delta v = -v_e \ln\left(\sigma + (1 - \sigma)\lambda\right) \tag{5}$$

Quanto maior for a razão da **carga útil**, para um dado valor de impulso de velocidade, melhor é a **eficiência** do foguete. Para um dado propelente (v_e constante), uma maior razão de carga útil, para o mesmo impulso de velocidade, só é possível a partir da redução da razão estrutural σ. Mas, como um foguete deve ter uma estrutura forte para armazenar os propelentes e a carga útil, bem como para resistir a cargas externas, σ não pode ser reduzido abaixo de certo limite. Usualmente, o peso das tubeiras, sistema de guiagem e controle, bem como de outros acessórios, é incluído no peso estrutural, o que restringe o valor prático de σ para não menos que $0,05$.

O **desempenho** de um foguete é usualmente medido em termos da fração $\frac{\Delta v}{v_e}$ associada ao **impulso de velocidade**. Naturalmente, o maior valor de desempenho é possível com uma razão de carga útil nula. Por outro lado, para a mesma massa inicial m_0, conforme a razão de carga útil é elevada, o desempenho diminui, tornando-se zero quando $\lambda = 1$. Então, *desempenho e eficiência são requisitos conflitante*s para um foguete de um estágio (assim como em qualquer veículo).

Usualmente, o desempenho é especificado em termos do raio orbital para um dado local de lançamento. De modo a atender tal requisito da maneira mais eficiente, a razão de carga útil deve ser maximizada.

A variação da razão de carga útil de um foguete de um estágio, em função do parâmetro de desempenho $\frac{\Delta v}{v_e}$, para algumas razões estruturais, é mostrada na figura 1. Para os casos apresentados na figura, o máximo desempenho possível ocorre para a razão estrutural $\sigma = 0,05$, sendo limitada a $\frac{\Delta v}{v_e} \approx 3$, sendo este valor verificado para $\lambda \to 0$.

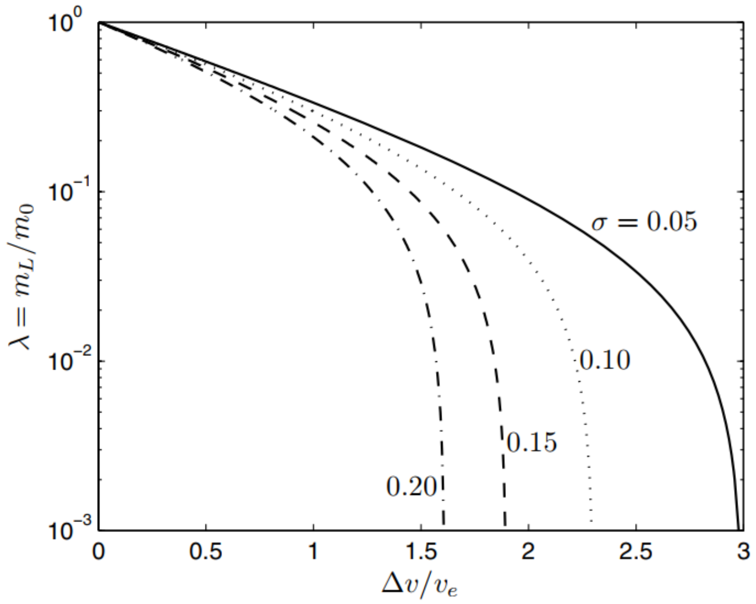

Figura 1: Variação da razão de carga útil de um foguete de um estágio com respeito ao parâmetro de desempenho $\frac{\Delta v}{v_e}$ Fonte: referência [1].

A referência [1] afirma que a menor eficiência prática é $\lambda = 0,01$, pois, abaixo disso, torna-se economicamente inviável. Então, para este valor prático, o melhor desempenho cai para $\frac{\Delta v}{v_e} = 2,82$, que é insuficiente para lançar uma carga útil em órbita baixa terrestre, a menos que se use propelentes criogênicos (LH_2/LO_2), como explicado abaixo.

Para a combinação LH_2/LO_2, o I_{sp} ideal é 455 s, que implica no máximo valor de $v_e = 455 \times 9,80665 = 4.462,02$ m/s. Para $\frac{\Delta v}{v_e} = 2,82$, o Δv ideal é, então 12,58 km/s. Supondo uma margem de 1,5 km/s devido a perdas até órbita baixa, esse foguete ideal de 1 estágio poderia prover 11,08 km/s, que é mais que suficiente para adquirir uma órbita baixa (o seu valor mínimo de Δv é da ordem de 7,5 km/s). Por outro lado, para uma mistura de querosene com LO_2, o máximo I_{sp} é 350 s, que provê um v_e ideal de 3.432,3 m/s. Com $\frac{\Delta v}{v_e} = 2,82$, o valor máximo de Δv seria 9,68 km/s, descontando a margem de 1,5 km/s para órbita baixa, o máximo Δv imposto por esse foguete de um estágio seria 8,18 km/s, que ainda é capaz de sustentar uma órbita baixa. Mas, supondo um propelente sólido, com um valor ideal de $I_{sp} = 270$s, o maior v_e seria 2.647,8 m/s, provendo $\Delta v = 7,45$ km/s para o desempenho $\frac{\Delta v}{v_e} = 2,82$, o que é insuficiente para adquirir órbita baixa, pois, após reduzir a margem de $1,5$ km/s restam somente 5,96 km/s.

Como propelentes criogênicos são difíceis de fabricar e armazenar, seu uso em um foguete de um estágio, para uma baixa razão de carga útil, torna-se muito caro. Também é inviável, atualmente, construir tanques suficientemente grandes para armazenar, com segurança, a quantidade de propelente necessária para uma operação de um estágio. Estes resultados foram demonstrados pelo programa cancelado da NASA X-33, o qual visava produzir um veículo de um estágio com capacidade de voo orbital. A figura 2 mostra a imagem de um tanque de hidrogênio liquido com dano estrutural. Uma ilustração artística do veículo do programa X-33 é mostrada na figura 3. Esse veículo era chamado de SSTO, acrônico de *Single Stage to Orbit*. Além dos enormes tanques de propelente, este programa também testou com motores Aerospike, discutidos na aula anterior, que visavam otimizar a eficiência propulsiva ao longo de qualquer altitude.

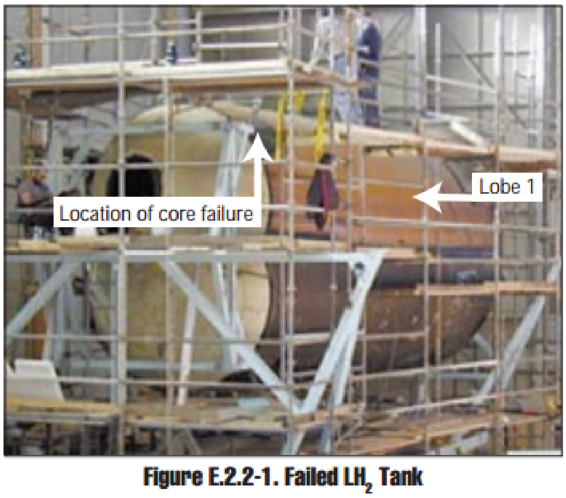

Figura 2: Problema de micro rachaduras descoberto no tanque hidrogênio liquido (LH_2) por cientistas da NASA no Goddard Space Flight Center, o que levou, em última análise, ao cancelamento do programa X-33. Fonte: `https://en.wikipedia.org/wiki/Lockheed_Martin_X-33`.

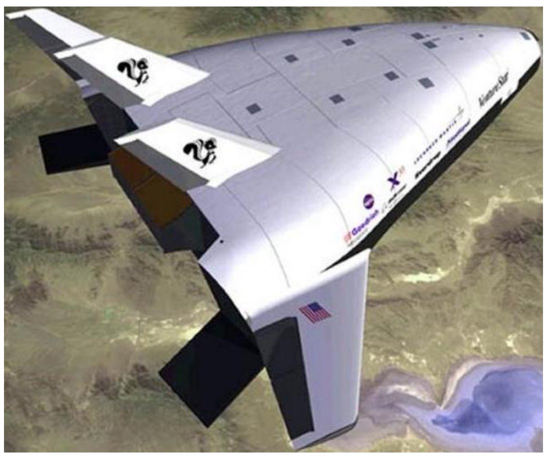

Figura 3: Simulação da visão em voo do X-33. Fonte: `https://en.wikipedia.org/wiki/Lockheed_Martin_X-33`.

3 Foguete de Múltiplos Estágios

O uso de estágios é necessário para superar a deficiência de desempenho de um foguete de um estágio.

O foguete é montado a partir do acoplamento de N segmentos. Cada segmento tem seu próprio propelente e estrutura, sendo esta composta pelos motores, tanques, revestimentos, elementos estruturais, sistemas embarcados, etc.

As massas estrutural e de propelente de cada segmento são denotadas por m_{s_k} e m_{p_k}, respectivamente, sendo $k = 1,\ 2,\ \dots\ N$. A massa de carga útil m_L está acoplada ao último segmento.

A massa total do foguete é a soma da massa de todos os segmentos e da carga útil:

$$m_0 = m_L + \sum_{k=1}^{N} m_{s_k} + m_{p_k} \tag{6}$$

No processo chamado de acionamento de **estágios em série**, somente um dos estágios está queimando em dado tempo, sendo que cada estágio é descartado imediatamente depois que o propelente é consumido.

A massa do foguete após o descarte de $k-1$ estágios, antes de iniciar a queima do estágio k, é dada por:

$$m_{0_k} = m_L + \sum_{j=k}^{N} m_{s_j} + m_{p_j} = m_0 - \sum_{j=1}^{k-1} m_{s_j} + m_{p_j} \tag{7}$$

Desta definição: $m_0 = m_{0_1}$

São definidas razões de carga útil intermediárias. Cada estágio terá uma razão de carga útil associada. Elas são definidas de modo que a massa $m_{0_{k+1}}$ seja a carga útil do estágio prévio k. Ou seja, o foguete do segmento k tem como função deslocar toda a carga acima do mesmo, constituída da própria carga útil mais a estrutura e propelente dos estágios superiores. Assim, matematicamente, a razão de carga útil do k-ésimo estágio é:

$$\lambda_k = \frac{m_{0_{k+1}}}{m_{0_k}} \tag{8}$$

Nesta definição, a massa do estágio $N+1$ é a massa da carga útil $m_{N+1} = m_L$.

A razão de carga útil do foguete completo, assim como no caso do foguete de um estágio, é a razão da massa de carga útil com a massa inicial do veículo:

$$\lambda_T = \frac{m_L}{m_0}$$

Que pode ser escrita em função da definição de razão de carga útil intermediária:

$$\lambda_T = \frac{m_{0_2}}{m_{0_1}} \frac{m_{0_3}}{m_{0_2}} \dots \frac{m_L}{m_{0_N}} = \prod_{k=1}^{N} \lambda_k$$

$$\lambda_T = \prod_{k=1}^{N} \lambda_k \tag{9}$$

A razão estrutural do estágio k é simplesmente a sua massa estrutural dividida pela soma desta e respectiva massa de propelente:

$$\sigma_k = \frac{m_{s_k}}{m_{s_k} + m_{p_k}} \tag{10}$$

Das definições apresentadas anteriormente e da equação do impulso de velocidade ideal do foguete de 1 estágio, equação 5, a equação de foguete para um foguete de N estágios em série é:

$$\Delta v = -\sum_{k=1}^{N} v_{e_k} \ln\left(\sigma_k + (1-\sigma_k)\lambda_k\right) \tag{11}$$

onde cada estágio possui velocidade de exaustão v_{e_k}.

Isto é simplesmente a soma dos impulsos de velocidade de cada estágio, onde toda a massa acima dele é vista como massa de carga útil.

3.1 Benefícios de Estágios em Série

Para ver os benefícios de desempenho oferecidos pela operação em estágios, considere o caso simples de N estágios com a mesma velocidade de exaustão, razão estrutural e razão de carga útil, isto é: $v_{e_1} = v_{e_2} = \ldots = v_{e_N} = v_e$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_N = \sigma$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_N = \lambda$. A relação entre a razão de carga útil total λ_T e o parâmetro de desempenho $\frac{\Delta v}{v_e}$ deste foguete, para algumas quantidades de estágios, é mostrada na figura 4, gerada para $\sigma = 0,05$.

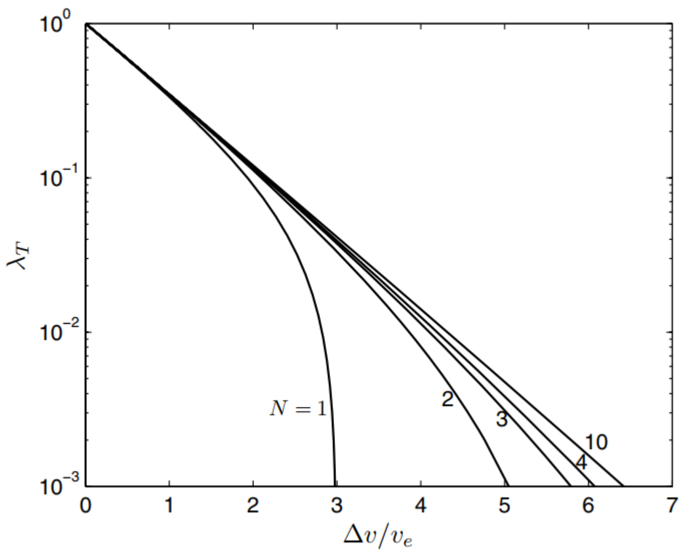

Figura 4: Variação da razão de carga útil total de um foguete de N estágios com respeito ao parâmetro de desempenho $\frac{\Delta v}{v_e}$ Fonte: referência [1].

Pela figura 4, fica evidente que para uma dada razão de carga útil λ_T, a razão de desempenho $\frac{\Delta v}{v_e}$ aumenta na medida que se incrementa o número de estágios. Por exemplo: com $N = 2$ e $\lambda_T = 0,01$, um desempenho $\frac{\Delta v}{v_e} = 3,86$ é possível. Já para $N = 3$ obtém-se $\frac{\Delta v}{v_e} = 4,1$.

Então, o sequenciamento de estágios oferece um destacável aumento de desempenho comparado ao foguete de um estágio. Entretanto, a melhoria de desempenho é pequena para $N > 3$.

Desta forma, até mesmo os foguetes de grande porte tais como o Saturno V, são limitados a três estágios, dado o pequeno ganho de desempenho em face do grande aumento na complexidade envolvida.

Em um projeto prático, cada estágio emprega um propelente diferente. O primeiro estágio em geral usa propelentes sólidos ou hidrocarbonetos, provendo um impulso específico menor. Isto resulta em uma massa de propelente elevada para o estágio inicial, que requer uma elevada tração para superar a gravidade no lançamento. Este estágio também possui grandes tubeiras, capazes de suportar uma vazão mássica adequada.

A vazão mássica requerida pelos estágios superiores é muito inferior, pois o requisito de tração é menor para velocidades próximas da orbital. Isso possibilita o uso de propelentes de maior impulso específico, os quais são mais caros, limitando-se ao uso em menores quantidades. O emprego de propelentes criogênicos nos estágios superiores (de menor volume) aumenta a eficiência sem um custo enorme. Então, muitos veículos lançadores, especialmente os de órbita média e alta, empregam propelentes criogênicos nos estágios superiores.

Quando os estágios têm diferentes impulsos específicos, é mais eficiente empregar razões de carga útil distintas para cada estágio, como será visto nas aulas seguintes.

4 Foguetes com Estágio em Paralelo

Nesta seção, é visto o **foguete com estágios em paralelo**, onde alguns estágios são queimados simultaneamente.

Estágios em paralelo oferecem a vantagem de livrar-se da massa de propelente mais rapidamente, deste modo, aumentando a eficiência total quando comparada ao acionamento em série. Neste sentido, todos os veículos de lançamento modernos empregam estágios paralelos em certo sentido, usualmente no início da fase de lançamento, quando a massa de propelente é maior.

Figura 5: Ônibus espacial Atlantis (STS-43). Fonte: `https://www.nasa.gov/audience/forstudents/k-4/stories/nasa-knows/what-is-the-space-shuttle-k4.html`

Um dos exemplos mais notáveis de estágios em paralelo é o ônibus espacial, figura 5, que tinha dois foguetes *boosters* de combustível sólido, os quais queimavam simultaneamente com o motor principal de propelente criogênico.

Estágios em paralelo também propiciam a capacidade de modificar o desempenho de um foguete pela simples adição ou remoção de *boosters*, acoplados externamente ao veículo primário, chamado de *veículo núcleo* (*core vehicle* em inglês). Os *boosters* agregados queimam simultaneamente com o primeiro estágio do veículo núcleo.

A simplicidade estrutural e a flexibilidade de estágios paralelos os torna uma opção de projeto em veículos lançadores, podendo serem vistos por exemplo nos foguetes: Delta, Atlas e Titan dos EUA (figura 6), Ariane 5 da Europa (figura 7), Soyuz, e Proton da Rússia (figura 8), H-2 do Japão (figura 9), e PSLV e GSLV da Índia, figura 10. O famigerado veículo lançador brasileiro VLS, que foi descontinuado antes de alcançar êxito, também é um exemplo de foguete com estágios em paralelo (figura 11).

Figura 6: Da esquerda para a direita: Delta IV, Atlas V e Titan IV. Fontes `https://en.wikipedia.org/wiki/Delta_IV_Heavy`, `https://br.pinterest.com/pin/59250551324620557`, `https://www.lockheedmartin.com/en-us/news/features/history/titan.html`

Figura 7: Ariane V. Fonte: `https://pt.wikipedia.org/wiki/Ariane_5`

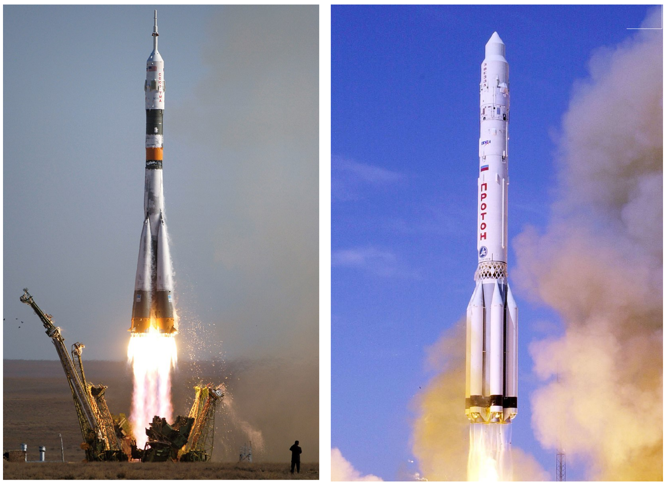

Figura 8: Da esquerda para a direita: Soyuz-FG, Proton K. Fonte: `https://pt.wikipedia.org/wiki/Soyuz-FG` e `https://en.wikipedia.org/wiki/Proton_(rocket_family)`

Figura 9: Lançador japonês H2-A. Fonte: `https://en.wikipedia.org/wiki/H-IIA`.

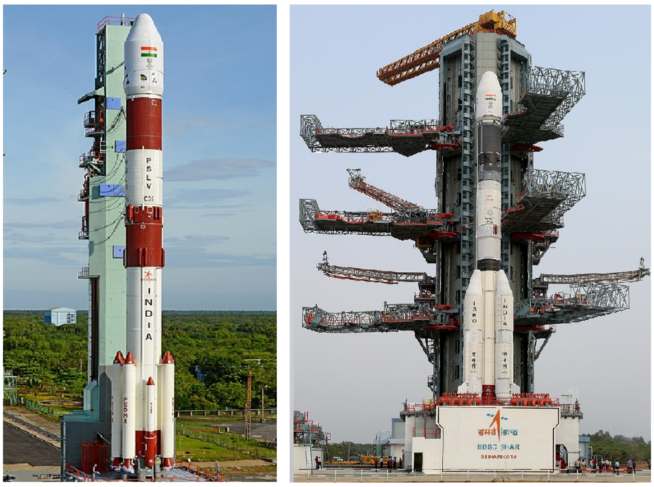

Figura 10: Lançadores indianos. Da esquerda para a direita: PSLV e GSLV. Fonte: `https://en.wikipedia.org/wiki/Geosynchronous_Satellite_Launch_Vehicle`

Figura 11: Veículo Lançador de Satélites (VLS), programa brasileiro descontinuado. Fonte: `https://pt.wikipedia.org/wiki/Veículo_Lançador_de_Satélites`.

A análise de um foguete com estágios em paralelo é bem similar àquela apresentada anteriormente para um veículo de estágios em série. A principal diferença estando na nomenclatura dos estágios e definições das suas razões estruturais e de carga útil.

Quando os *boosters* paralelos e o primeiro estágio do veículo núcleo estão queimando simultaneamente, eles são agrupados conjuntamente e chamados de *estágio zero*. Após o descarte dos *boosters*, o propelente restante no primeiro estágio do veículo núcleo define o *primeiro estágio* do foguete. A tração do estágio zero é dada por:

$$f_T = -v_{eb}\frac{dm_b}{dt} - v_{e_1}\frac{dm_1}{dt} = -v_{e0}\frac{dm_0}{dt} \tag{12}$$

onde os subscritos b e 1 referem-se às quantidades relativas aos *boosters* paralelos e ao primeiro estágio do veículo núcleo, respectivamente; enquanto que v_{e0} e m_0 são a velocidade de exaustão média e massa total, respectivamente, do estágio zero do foguete. Tais quantidades médias são definidas como:

$$\dot{m}_0 = \frac{\dot{m}_b + \dot{m}_1}{2} \tag{13}$$

$$v_{e0} = v_{eb}\frac{\dot{m}_b}{\dot{m}_0} + v_{e1}\frac{\dot{m}_1}{\dot{m}_0} \tag{14}$$

Para continuar com a analogia com o foguete de estágios em série, é necessário definir as razões estruturais e de carga útil equivalentes. Assuma que o veículo núcleo tenha uma massa total inicial m_{0_1} antes da queima do primeiro estágio, sendo sua massa estrutural m_{s_1}. A massa total de propelente do primeiro estágio é m_{p_1}, desta somente $m_{p_{1_0}}$ é queimada em paralelo com os *boosters*.

Os *boosters* queimam uma massa total de propelente, m_{p_b}, possuindo uma massa estrutural m_{s_b}. Então, as razões estrutural e de carga útil equivalentes a um foguete série são:

$$\sigma_0 = \frac{m_{s_b} + m_{s_1}}{m_{s_b} + m_{s_1} + m_{p_b} + m_{p_{1_0}}} \tag{15}$$

$$\lambda_0 = \frac{m_{0_1} - m_{p_{1_0}}}{m_{0_0}} \tag{16}$$

onde $m_{0_0} = m_{0_1} + m_{s_b} + m_{p_b}$ é a massa inicial antes da queima do estágio zero (o mesmo que a massa do foguete completo). Similarmente, as razões equivalentes para o primeiro estágio modificado são:

$$\sigma_1 = \frac{m_{s_1}}{m_{s_1} + m_{p_1} - m_{p_{1_0}}} \tag{17}$$

$$\lambda_1 = \frac{m_{0_2}}{m_{0_1} - m_{p_{1_0}}} \tag{18}$$

onde a massa inicial no primeiro estágio modificado $(m_{0_1} - m_{p_{1_0}})$ é relacionada a massa no início da queima do segundo estágio (m_{0_2}) por: $m_{0_1} - m_{p_{1_0}} = m_{0_2} + m_{s_1} + m_{p_1} - m_{p_{1_0}}$, ou $m_{0_1} = m_{0_2} + m_{s_1} + m_{p_1}$, que é a relação entre o primeiro e segundo estágios do veículo série.

Com base nas definições acima, a equação de foguete para o veículo de estágio paralelo é:

$$\Delta v = -\sum_{k=0}^{N} v_{ek} \ln\left(\sigma_k + (1 - \sigma_k)\lambda_k\right) \tag{19}$$

Esta é a mesma equação do veículo série (eq. 19), mas com o somatório começando em $k = 0$.

5 Exemplos

Abaixo, são apresentados dois exemplos da referência [1]. Um trata de foguete com estágios em série, o outro de foguete com arranjo paralelo.

5.1 Exemplo 8.2

Um foguete lançador de 3 estágios utiliza propelente liquido a base de hidrocarbonetos nos primeiros dois estágios, com impulso específico de 290 s. O terceiro estágio tem propelente criogênico LH_2/LO_2 com impulso específico de 455 s. Todos os estágios têm a mesma razão estrutural $\sigma = 0,07$. As razões de carga útil do segundo e terceiro estágios são $\lambda_2 = 1,2\lambda_1$ e $\lambda_3 = 0,65\lambda_1$, onde λ_1 é a razão de carga útil do primeiro estágio.

Calcule a massa de propelente necessária para lançar uma carga útil de 1.000 kg para órbita geosíncrona, para a qual um impulso de velocidade corrigido de 13 km/s é requerido (já considerando perdas gravitacionais, de arrasto e propulsivas).

Resolução: Necessário resolver uma equação algébrica para encontrar λ_1. Um *script* foi feito em Python e apresentado no Moodle.

5.2 Exemplo 8.3

O veículo lançador de 3 estágios do exemplo 8.2 é modificado pela adição de 4 foguetes *booster* em paralelo, os quais são de propelente sólido com impulso específico de 200 s, a massa de propelente total é 30.000 kg, a razão estrutural é 0,05. Se 25.000 kg de propelente do primeiro estágio do veículo núcleo são queimados em paralelo com os foguetes *booster*, calcule:

- O novo impulso de velocidade admitindo a mesma carga útil;
- A nova carga útil supondo o mesmo impulso de velocidade.

Resolução: foi desenvolvido um *script* em Python o qual implementa as equações do foguete com estágios em paralelo da seção 4. Os dados deste exemplo foram complementados com os resultados e dados do exemplo 8.2.

Referências

[1] A. TEWARI. *Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modelling and simulation with MATLAB and Simulink*. Birkhauser, Boston, 2007.