

MECÂNICA DE VOO ESPACIAL - DEM 1119

Aula 10

Prof. André Luís da Silva

1 Introdução

Manobras Orbitais:

- Manobra Multi-impulsiva;
- Transferência de Hohmann.

Referência da aula:

Referência [1]: TEWARI, A. Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modelling and simulation with MATLAB and Simulink. Boston: Birkhauser, 2007. **Seção 5.6.**

2 Manobras Multi Impulsivas

Em uma manobra mono impulsiva, as órbitas inicial e final se interceptam, isso ocorre no ponto de aplicação do impulso. Assim, ao se utilizar a técnica de manobra impulsiva, se for desejada uma nova **órbita que não intercepta a primeira**, é necessário aplicar **mais de um impulso**.

Manobras orbitais que aplicam mais de um impulso de velocidade para atingir o objetivo são chamadas de **manobras multi impulsivas**.

Além da técnica multi impulsiva, existem outras formas de obter órbitas inicial e final que não se interceptam. Uma delas é a **transferência de baixo empuxo**. Ela tem se tornado importante principalmente nos últimos anos, devido ao crescimento das missões de pequenos satélites. Nestas manobras, ao invés de aplicar-se um pulso de tração curto e de elevada amplitude, um propulsor de tração relativamente baixa é acionado continuamente, por longo período de tempo.

Apesar de ser um assunto muito interessante, manobras de baixo empuxo não são abordadas no curso, a sequência trata das manobras multi impulsivas.

A figura 1 apresenta o diagrama de velocidades em uma manobra multi impulsiva, o qual havia sido discutido na aula anterior.

Do diagrama da figura 1, a maior magnitude da velocidade final \mathbf{v}_f , para o mesmo Δv , é obtida para $\alpha = 0$. Assim como a menor magnitude acontece para $\alpha = \pi$ rad. Ou seja, quando

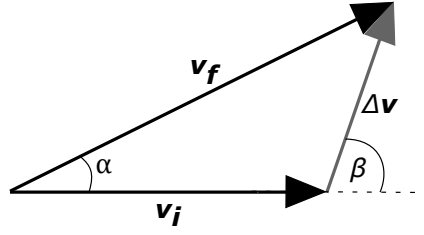


Figura 1: Diagrama de velocidades em uma manobra impulsiva.

o vetor impulso de velocidade $\Delta \mathbf{v}$ é colinear com a velocidade inicial, a mudança na magnitude da velocidade é máxima ou mínima, implicando no máximo “levantamento” ou “abaixamento” de órbita para mesma quantidade de propelente.

Devido a propriedade descrita acima, **manobras impulsivas com impulso colinear** à velocidade são consideradas **ótimas**.

Manobras impulsivas ótimas são feitas aplicando-se múltiplos impulsos colineares, em diferentes pontos da órbita. Em órbitas elípticas, no geral, os pontos de aplicação são o periastro ou apoastro, por possuírem, por si só, velocidade de magnitude máxima ou mínima e serem tangentes à trajetória.

Como manobras multi impulsivas raramente são feitas com impulso não colinear à velocidade. Para se referir a manobras com múltiplos impulsos colineares ao vetor velocidade, utiliza-se simplesmente o termo **manobra multi impulsiva**.

Manobras multi impulsivas promovem órbitas final e inicial **coplanares**, ou seja, não se aplicam a mudanças de plano. Ou seja, esta técnica é usada para alterar a geometria da órbita, não sua inclinação

As **órbitas inicial e final** envolvidas nas manobras multi impulsivas **podem se interceptar ou não**, dependendo da técnica adotada.

Em manobras multi impulsivas, existe um conceito muito importante, chamado de **elipse de transferência**. Trata-se de uma órbita intermediária seguida entre a aplicação de dois impulsos. Este conceito, bem como a técnica de manobra com dois impulsos, chamada de bi impulsiva, é explorado por meio de um exemplo.

2.1 Manobra bi Impulsiva e Elipse de Transferência

Exemplo 5.8 da referência [1]: Calcule o menor impulso total requerido, em uma manobra de transferência orbital bi impulsiva, de uma órbita circular terrestre de 500 km de altitude, para a órbita elíptica vista no exemplo 5.7 que intercepta a circular.

As manobras ótimas de transferência entre órbitas elípticas (sendo as circulares casos particulares) coplanares são feitas pela aplicação de impulsos tangenciais à trajetória, ou seja, colineares com a velocidade.

Os impulsos de velocidade devem ser aplicados nos pontos em que o *ângulo de trajetória* é nulo. Sendo assim, em **órbitas circulares**, **qualquer ponto** pode ser escolhido. Já nas **elípticas**, os impulsos podem ser aplicados somente no **periastro ou apoastro**.

A figura 2 ilustra o processo de manobra orbital bi impulsiva para o exemplo em questão:

- O primeiro impulso é aplicado em qualquer ponto da órbita circular;
- O primeiro impulso vai alterar a órbita e gerar uma **órbita de transferência** elíptica;
- O segundo impulso é aplicado no apogeu ou perigeu da órbita de transferência, que irá coincidir com o apogeu ou perigeu da órbita final, que é a desejada.

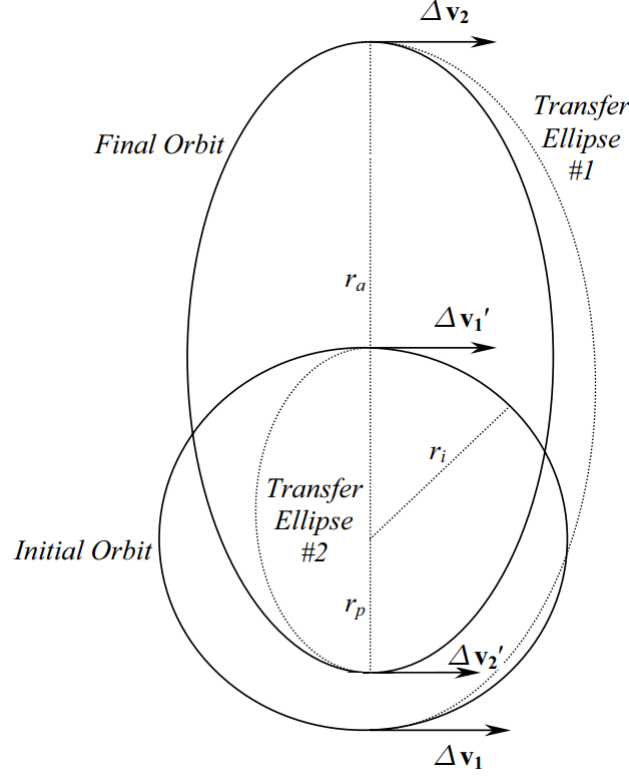


Figura 2: Transferência bi impulsiva entre órbitas elípticas. Fonte: ref. [1]

Como a figura 2 mostra, existem duas opções de órbita de transferência:

- 1 : Apogeu da órbita de transferência coincide com o apogeu da órbita final;
- 2 : Perigeu da órbita de transferência coincide com o perigeu da órbita final.

Dados e cálculos preliminares

- Raio equatorial terrestre: $R_e = 6.378,137 \text{ km}$;
- Constante gravitacional da Terra: $\mu = 3,986 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$;
- Altitude da órbita inicial: $h_i = 500 \text{ km}$;
- Distância radial da órbita inicial: $r_i = R_e + h_i = 6.378,137 \text{ km} + 500 \text{ km}$, $r_i = 6,878137 \times 10^6 \text{ m}$;
- Semi eixo maior da órbita final: $a_f = 6.900 \text{ km}$;

- Excentricidade da órbita final: $e_f = 0,6$;
- Distância radial de perigeu da órbita final: $r_{p_f} = (1 - e_f)a_f = 0,4 \times 6.900$, $r_{p_f} = 2,760 \times 10^6$ m;
- Distância radial de apogeu da órbita final: $r_{a_f} = (1 + e_f)a_f = 1,6 \times 6.900$, $r_{a_f} = 11,04 \times 10^6$ m.

Escolha da elipse de transferência

Ambas as elipses de transferência da figura 2 são viáveis do ponto de vista matemático. No entanto, uma delas é impossível do ponto de vista físico. A elipse de transferência 2 promove o abaixamento da órbita circular. Como a órbita circular é baixa, isso resulta na reentrada do veículo espacial na atmosfera terrestre antes que ele chegue no perigeu da órbita desejada.

Portanto, escolhe-se a elipse de transferência 1.

Cálculos usando a elipse de transferência 1

A elipse de transferência 1 é obtida aplicando-se um impulso na direção progressiva da órbita circular, provocando o “levantamento” da órbita. Quando a elipse de transferência chega no seu apogeu, aplica-se um impulso no sentido oposto à velocidade (retro foguete), propiciando o “abaixamento” da órbita. O perigeu da órbita de transferência será o perigeu da órbita final.

- $r_{p_t} = r_i = 6,878137 \times 10^6$ m. Perigeu da órbita de transferência coincidente com o raio da órbita circular;
- $r_{a_t} = r_{a_f} = 11,04 \times 10^6$ m. Apogeu da órbita de transferência coincidente com o apogeu da órbita elíptica desejada.

Semi eixo maior da elipse de transferência:

$$a_t = \frac{r_{p_t} + r_{a_t}}{2} = \frac{6,878137 \times 10^6 + 11,04 \times 10^6}{2}, \quad a_t = 8,95907 \times 10^6 \text{ m}$$

Velocidades de apogeu e perigeu da órbita de transferência:

$$v_{a_t} = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_{a_t}} - \frac{1}{a_t} \right)} = \sqrt{3,986 \times 10^{14} \left(\frac{2}{11,04 \times 10^6} - \frac{1}{8,95907 \times 10^6} \right)}$$

$$v_{a_t} = 5,264876 \times 10^3 \text{ m/s}$$

$$v_{p_t} = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_{p_t}} - \frac{1}{a_t} \right)} = \sqrt{3,986 \times 10^{14} \left(\frac{2}{6,878137 \times 10^6} - \frac{1}{8,95907 \times 10^6} \right)}$$

$$v_{p_t} = 8,450574 \times 10^3 \text{ m/s}$$

Velocidades nos pontos de aplicação de impulso das órbitas inicial e final:

$$v_i = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_i} - \frac{1}{a_i} \right)} = \sqrt{3,986 \times 10^{14} \left(\frac{2}{6,878137 \times 10^6} - \frac{1}{6,878137 \times 10^6} \right)}$$

$$v_i = 7,6126 \times 10^3 \text{ m/s}$$

$$v_f = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_{af}} - \frac{1}{a_f} \right)} = \sqrt{3,986 \times 10^{14} \left(\frac{2}{11,04 \times 10^6} - \frac{1}{6,9 \times 10^6} \right)}$$

$$v_f = 3,80027 \times 10^3 \text{ m/s}$$

Primeiro impulso de velocidade tangente à órbita circular:

$$\Delta v_1 = v_{pt} - v_i = 8,450574 \times 10^3 - 7,6126 \times 10^3$$

$$\Delta v_1 = 0,837974 \times 10^3 \text{ m/s}$$

Segundo impulso de velocidade tangente ao apogeu da órbita de transferência:

$$\Delta v_2 = v_f - v_{at} = 3,80027 \times 10^3 - 5,264876 \times 10^3$$

$$\Delta v_2 = -1,464606 \times 10^3 \text{ m/s}$$

O sinal negativo indica que o impulso de velocidade é no sentido oposto ao da trajetória.

O impulso total, que tem relação com a quantidade de propelente necessária, é:

$$\Delta v_t = |\Delta v_1| + |\Delta v_2| = 0,837974 \times 10^3 + 1,464606 \times 10^3$$

$$\Delta v_t = 2,30258 \times 10^3 \text{ m/s}$$

Agora, o processo será repetido para segunda elipse de transferência da figura 2.

Exercício: faça os cálculos usando a elipse de transferência 2.

3 Transferência de Hohmann

Quando as órbitas inicial e final são circulares, a manobra ótima bi impulsiva é chamada de **transferência de Hommann**.

Uma transferência de Hommann consiste na aplicação de dois impulsos tangentes como ilustrado na figura 3.

A figura ilustra as órbitas circulares inicial e final, bem como a elipse de transferência. Na ilustração, almeja-se transferir de uma órbita circular de menor para outro de maior raio (levantamento de órbita). O processo contrário, de uma órbita circular maior para uma menor, é análogo.

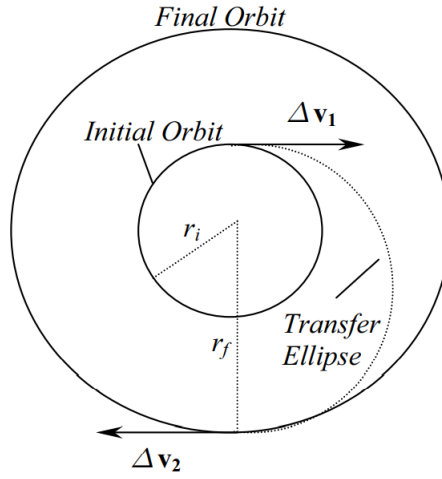


Figura 3: Transferência de Hohmann. Fonte: ref. [1]

No caso esquematizado, o primeiro impulso é aplicado no periastro da elipse de transferência, que coincide com o raio da primeira órbita circular. O segundo impulso é impresso no apogeu da elipse de transferência, que vai coincidir com o raio da órbita circular desejada.

Assim, tem-se que as distâncias de periastro e apoastro da órbita de transferência são os raios das órbitas inicial e final, respectivamente:

$$r_{pH} = r_i \quad (1)$$

$$r_{aH} = r_f \quad (2)$$

Logo, o semi eixo maior da órbita de transferência é:

$$a_H = \frac{r_i + r_f}{2} \quad (3)$$

A magnitude dos dois impulsos de velocidade é:

$$\begin{aligned} \Delta v_1 &= v_{pH} - v_i = \sqrt{\frac{2\mu}{r_i} - \frac{\mu}{a_H}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_i}} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_i} - \frac{2\mu}{r_i + r_f}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_i}} \\ \Delta v_1 &= \sqrt{\frac{2\mu(r_i + r_f) - 2\mu r_i}{r_i(r_i + r_f)}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_i}} = \sqrt{\frac{2\mu r_f}{r_i(r_i + r_f)}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_i}} \\ \Delta v_1 &= \sqrt{\frac{\mu}{r_i}} \left(\sqrt{\frac{2r_f}{r_i + r_f}} - 1 \right) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
\Delta v_2 &= v_f - v_{a_H} = \sqrt{\frac{\mu}{r_f}} - \sqrt{\frac{2\mu}{r_f} - \frac{\mu}{a_H}} = \sqrt{\frac{\mu}{r_f}} - \sqrt{\frac{2\mu}{r_f} - \frac{2\mu}{r_i + r_f}} \\
\Delta v_2 &= \sqrt{\frac{\mu}{r_f}} - \sqrt{\frac{2\mu(r_i + r_f) - 2\mu r_f}{r_f(r_i + r_f)}} = \sqrt{\frac{\mu}{r_f}} - \sqrt{\frac{2\mu r_i}{r_f(r_i + r_f)}} \\
\Delta v_2 &= \sqrt{\frac{\mu}{r_f}} \left(1 - \sqrt{\frac{2r_i}{r_i + r_f}} \right) \tag{5}
\end{aligned}$$

Nas equações 4 e 5, ambos os impulsos de velocidade são positivos para $r_f > r_i$, o que está coerente com a figura 3. Ou seja, no levantamento de órbita circular por transferência de Hommann, ambos os impulsos são aplicados na direção progressiva da órbita.

Se o processo de transferência for de uma órbita de maior raio (mais alta) para uma de menor (mais baixa), as equações dos impulsos de velocidade são:

$$\Delta v_1 = v_{a_H} - v_i = \sqrt{\frac{2\mu}{r_i} - \frac{\mu}{a_H}} - \frac{\mu}{r_i} = \sqrt{\frac{\mu}{r_i}} \left(\sqrt{\frac{2r_f}{r_i + r_f}} - 1 \right) \tag{6}$$

$$\Delta v_2 = v_f - v_{p_H} = \sqrt{\frac{\mu}{r_f}} - \sqrt{\frac{2\mu}{r_f} - \frac{\mu}{a_H}} = \sqrt{\frac{\mu}{r_f}} \left(1 - \sqrt{\frac{2r_i}{r_i + r_f}} \right) \tag{7}$$

As expressões finais 6 e 7 são exatamente as mesmas do caso de levantamento de órbita (equações 4 e 5). No entanto, o sinal das respostas se altera, pois $r_i > r_f$. Assim sendo, ambos os **impulsos de velocidade** são **negativos**. Ou seja: no abaixamento de órbita circular por transferência de Hommann, ambos os impulsos são aplicados na direção oposta à órbita.

Pela figura 3, verifica-se que a órbita de transferência perdura meio período. Este é o **tempo da transferência de Hommann**. Ele é calculado pela equação 62 da aula 6, dependendo somente do semi eixo maior da órbita de transferência:

$$T_h = \pi \sqrt{\frac{a_H^3}{\mu}}, \text{ ou } T_h = \pi \sqrt{\frac{(r_i + r_f)^3}{8\mu}} \tag{8}$$

Exemplo 5.9: Calcule os impulsos de velocidade e o tempo requerido para uma transferência de Hohmann a partir de uma órbita circular terrestre de altitude 250 km (órbita de estacionamento - *parking orbit*), para uma órbita geosíncrona.

Solução

Raio da órbita inicial: $r_i = R_e + h_i = 6,378137 \times 10^6 + 250 \times 10^3$. $r_i = 6,628137 \times 10^6$ m.

Uma órbita geossíncrona é aquela na qual o período orbital é igual ao período de rotação da Terra, ou seja, a duração do **dia sideral** $T_d = 23 : 56 : 04$ ou $T_d = 86.164$ s. O seu raio é

dado por:

$$T_d = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\mu}} \rightarrow \frac{T_d}{2\pi} = \sqrt{\frac{r^3}{\mu}} \rightarrow \left(\frac{T_d}{2\pi}\right)^2 = \frac{r^3}{\mu}$$

$$r = \sqrt[3]{\mu \left(\frac{T_d}{2\pi}\right)^2}$$

$$r_f = \sqrt[3]{3,986 \times 10^{14} \left(\frac{86.164}{2\pi}\right)^2}, \quad r_f = 42,164124 \times 10^6 \text{ m}$$

Os raios das órbitas circulares inicial e final são as únicas informações necessárias para calcular os impulsos de velocidade e o tempo da transferência. Estas respostas são determinadas pelas equações 4, 5 e 8.

Primeiro impulso de velocidade:

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_i}} \left(\sqrt{\frac{2r_f}{r_i + r_f}} - 1 \right) = \sqrt{\frac{3,986 \times 10^{14}}{6,628137 \times 10^6}} \left(\sqrt{\frac{2 \times 42,164124 \times 10^6}{6,628137 \times 10^6 + 42,164124 \times 10^6}} - 1 \right)$$

$$\Delta v_1 = 2,440082 \times 10^3 \text{ m/s}$$

Segundo impulso de velocidade:

$$\Delta v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_f}} \left(1 - \sqrt{\frac{2r_i}{r_i + r_f}} \right) = \sqrt{\frac{3,986 \times 10^{14}}{42,164124 \times 10^6}} \left(1 - \sqrt{\frac{2 \times 6,628137 \times 10^6}{6,628137 \times 10^6 + 42,164124 \times 10^6}} \right)$$

$$\Delta v_2 = 1,472033 \times 10^3 \text{ m/s}$$

Tempo da transferência:

$$T_h = \pi \sqrt{\frac{(r_i + r_f)^3}{8\mu}} = \pi \sqrt{\frac{(6,628137 \times 10^6 + 42,164124 \times 10^6)^3}{8 \times 3,986 \times 10^{14}}}$$

$$T_h = 18.961,06 \text{ s}, \quad T_h = 5 : 16 : 1.06$$

Referências

- [1] A. TEWARI. *Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modelling and simulation with MATLAB and Simulink*. Birkhauser, Boston, 2007.