

DEM1122 - DINÂMICA E CONTROLE DE VEÍCULOS ESPACIAIS

Aula 5

Prof. André Luís da Silva

1 Introdução

Tópicos da aula:

- Corpo axis simétrico com spin e torque constante em um eixo;
- Exercícios: referentes a aula de hoje bem como da aula anterior (movimento livre de torque).

Referência da aula [1]: Wie, B. Space Vehicle Dynamics and Control. 2 . ed., AIAA Education Series, Reston, VA: AIAA, 2008.

Seções usadas nesta aula:

- 6.8 Spinning Axisymmetric Body with Constant Body-Fixed Torque;
- Seções 6.4 a 6.7, usadas na aula anterior, que servirão como base para exercícios.

2 Corpo Axis Simétrico com Spin e Torque Constante num Eixo

Uma solução simples para o problema de manter uma orientação desejada no espaço é rodar o veículo ao redor do seu eixo de simetria (spin). Isso é particularmente importante durante uma ação de disparo de propulsor, quando pode surgir uma pequena tração transversal que gera um momento perturbativo.

Essa é a mesma ideia adotada ao rotacionar uma bola de futebol americano durante um lançamento, ou bala de fuzil durante um disparo.

Nas aulas anteriores, verificou-se que uma velocidade de rotação ao redor de um eixo principal estabelece uma orientação inercial ao corpo. Se não existem torques externos e a velocidade transversal é nula, o eixo de rotação estará alinhado com a quantidade de movimento angular, que é um vetor constante. Se uma perturbação de velocidade inercial surgir, um desalinhamento vai ocorrer, o ângulo de nutação. Ele será constante para um corpo rígido axis simétrico. Para

um caso genérico, esta perturbação será limitada (estável) ou ilimitada (instável), dependendo do eixo ao redor do qual o corpo gira.

Nesta aula, é agregado um fator à discussão anterior, onde assume-se um momento perturbativo constante sobre um dos eixos do corpo. Este é o caso em que a força propulsiva de um veículo espacial está desalinhada com seu eixo longitudinal que passa pelo centro de massa (cm). A componente transversal a este eixo vai gerar um momento que depende do ângulo de desalinhamento, tração (que geralmente é constante durante o disparo) e braço de alavanca até o cm.

A situação estudada será restrita a um corpo rígido axis simétrico que gira ao redor do seu eixo de simetria. Um torque constante será assumido transversal ao mesmo. Neste caso, o corpo vai assumir um **movimento giroscópico**, caracterizado por ângulos de **precessão e nutação**.

Para realizar a formulação matemática, considere um corpo rígido axis simétrico com um sistema de referência do corpo “B” com vetores diretores **i**, **j** e **k**, com origem em seu centro de massa. Os eixos estão alinhados com os eixos principais de inércia. Assume-se que os eixos x e y são transversais ao eixo de simetria z . Assuma que um momento constante M é aplicado em torno de seu eixo x . Fisicamente, este seria o momento provocado pelo desvio ao longo do eixo y de um vetor de tração alinhado nominalmente com o eixo de simetria z .

As equações do movimento de Euler com $I_{xx} = I_{yy} = J$ são:

$$\begin{aligned} J\dot{\omega}_x - (J - I_{zz})\omega_z\omega_y &= M \\ J\dot{\omega}_y + (J - I_{zz})\omega_z\omega_x &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$I_{zz}\dot{\omega}_z = 0 \quad (2)$$

A equação diferencial da velocidade ω_z mostra que ela é constante:

$$\omega_z = n = \text{constante} \quad (3)$$

Onde assume-se que n seja a velocidade de spin previamente induzida ao redor do eixo de simetria.

As equações diferenciais das componentes transversais da velocidade angular se tornam:

$$\begin{aligned} J\dot{\omega}_x - (J - I_{zz})n\omega_y &= M \rightarrow \dot{\omega}_x = \frac{1}{J}M + \frac{(J - I_{zz})n}{J}\omega_y \\ J\dot{\omega}_y + (J - I_{zz})n\omega_x &= 0 \rightarrow \dot{\omega}_y = -\frac{(J - I_{zz})n}{J}\omega_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_x &= \mu + \lambda\omega_y \\ \dot{\omega}_y &= -\lambda\omega_x \end{aligned} \quad (4)$$

Onde:

- $\lambda = \frac{(J - I_{zz})n}{J}$ é a mesma constante associada ao spin do corpo axis simétrico livre de torque;
- $\mu = \frac{M}{J}$ é uma aceleração perturbativa associada ao torque M e momento de inércia transversal J .

Como visto na aula acerca de spin livre de torque, a constante λ pode ser negativa ou positiva, dependendo do eixo de simetria ser o maior ou menor eixo de inércia.

O sistema de equações diferenciais 4 é linear, o que significa que possui solução analítica. Mas, ao contrário do caso livre de torque, é não homogêneo, apresentando uma resposta não nula para condições iniciais nulas. Na aula sobre rotação de corpo axis simétrico livre de torque, só haveria resposta da velocidade transversal caso existisse uma condição inicial não nula. Agora, isso não é mais necessário, a velocidade angular transversal perturbativa será fruto do momento M .

Antes de apresentar a solução das equações de dinâmica, a modelagem cinemática será feita, para descrever o movimento resultante visto a partir de um referencial inercial.

Na aula sobre rotação de corpo axis simétrico livre de torque, foi definida a atitude em termos da sequência de ângulos de Euler $\mathbf{C}_3(\phi)$, $\mathbf{C}_1(\theta)$ e $\mathbf{C}_3(\psi)$, que orientam o sistema de referência do corpo com respeito ao inercial. Naquela ocasião, os ângulos receberam os seguintes nomes: ϕ (precessão), θ (nutation) e ψ (spin relativo).

Agora, para o movimento com spin e torque transversal constante, considera-se a sequência 123: $\mathbf{C}_1(\theta_1)$, $\mathbf{C}_2(\theta_2)$, $\mathbf{C}_3(\theta_3)$ ilustrada na figura 1. Esta sequência é importante para viabilizar uma solução analítica para o problema.

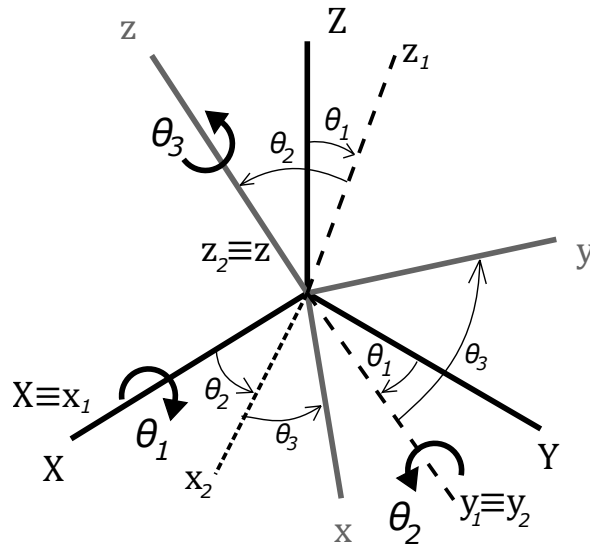


Figura 1: Sequência de ângulos de Euler 123.

A primeira rotação θ_1 ocorre em torno do eixo Z do referencial inercial. A segunda rotação θ_2 ocorre em torno do eixo y_1 do primeiro sistema de referência intermediário. A terceira rotação θ_3 ocorre em torno do eixo z do corpo.

Se $\theta_1 = \theta_2 = 0$, o ângulo θ_3 representa a rotação do corpo com respeito ao referencial inercial devido ao spin. Assim, θ_1 e θ_2 estão associados aos movimentos de precessão e nutação.

Obtendo as matrizes de rotação associadas às sequências $\mathbf{C}_3(\phi)$, $\mathbf{C}_1(\theta)$ e $\mathbf{C}_3(\psi)$ e $\mathbf{C}_1(\theta_1)$, $\mathbf{C}_2(\theta_2)$, $\mathbf{C}_3(\theta_3)$ e igualando-as, após resolver o sistema de equações resultante, obtém-se que a relação entre os ângulos é:

- $\theta = \theta_2$

- $\phi = \theta_1 + \frac{\pi}{2}$

- $\psi = \theta_3 - \frac{\pi}{2}$

Ou seja: o ângulo de θ é igual a θ_2 , os ângulos de precessão ϕ e spin relativo ψ diferem de θ_1 e θ_3 , respectivamente, apenas por constantes.

Para esta sequência de ângulos de Euler, a cinemática de rotação é dada abaixo:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= (\omega_x \cos \theta_3 - \omega_y \sin \theta_3) / \cos \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_x \sin \theta_3 + \omega_y \cos \theta_3 \\ \dot{\theta}_3 &= (-\omega_x \cos \theta_3 + \omega_y \sin \theta_3) \tan \theta_2 + \omega_z\end{aligned}$$

Substituindo $\omega_z = n$:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= (\omega_x \cos \theta_3 - \omega_y \sin \theta_3) / \cos \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_x \sin \theta_3 + \omega_y \cos \theta_3 \\ \dot{\theta}_3 &= (-\omega_x \cos \theta_3 + \omega_y \sin \theta_3) \tan \theta_2 + n\end{aligned}\tag{5}$$

Para obter uma solução analítica, as equações diferenciais 5 de cinemática de rotação serão linearizadas. Isso é feito com base em algumas considerações físicas.

As equações de cinemática não dependem do ângulo θ_1 , que é a primeira rotação. Não é plausível assumir θ_3 pequeno, pois ele está associado com o spin e varia continuamente. Por outro lado, θ_2 está associado com a nutação, que pode ser assumida pequena. Assim, considerando pequena amplitude do ângulo θ_2 , o sistema de equações 5 pode ser aproximado por:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &\approx \omega_x \cos \theta_3 - \omega_y \sin \theta_3 \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_x \sin \theta_3 + \omega_y \cos \theta_3 \\ \dot{\theta}_3 &\approx (-\omega_x \cos \theta_3 + \omega_y \sin \theta_3) \theta_2 + n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \omega_x \cos \theta_3 - \omega_y \sin \theta_3 \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_x \sin \theta_3 + \omega_y \cos \theta_3 \\ \dot{\theta}_3 &= -\dot{\theta}_1 \theta_2 + n\end{aligned}$$

A terceira equação do sistema 6 pode ser simplificada ainda mais. Foi assumido que θ_2 é um ângulo pequeno, assim, a quantidade não linear $\dot{\theta}_1 \theta_2$ não possui valor elevado. Além disso,

assume-se uma velocidade de spin n suficientemente grande, de modo que $n \gg \theta_2 \dot{\theta}_1$. Neste sentido:

$$\dot{\theta}_3 \approx n = \text{constante} \quad (6)$$

Assim, supondo que $\theta_3 = 0$ em $t = 0$, sua solução é: $\theta_3 = nt$. Portanto, o sistema linearizado é:

$$\dot{\omega}_x = \mu + \lambda \omega_y \quad (7)$$

$$\dot{\omega}_y = -\lambda \omega_x \quad (8)$$

$$\dot{\theta}_1 = \omega_x \cos nt - \omega_y \sin nt \quad (9)$$

$$\dot{\theta}_2 = \omega_x \sin nt + \omega_y \cos nt \quad (10)$$

As equações 7 e 8 são desacopladas das duas outras. A solução é a resposta da equação homogênea do caso sem torque externo, somada a uma solução particular do caso não homogêneo com $\mu = \text{constante}$, explicitamente:

$$\begin{aligned} \omega_x(t) &= \omega_x(0) \cos \lambda t + \omega_y(0) \sin \lambda t + \frac{\mu}{\lambda} \sin \lambda t \\ \omega_y(t) &= \omega_y(0) \cos \lambda t - \omega_x(0) \sin \lambda t - \frac{\mu}{\lambda} (1 - \cos \lambda t) \end{aligned} \quad (11)$$

A solução das equações 9 e 10 é obtida substituindo as respostas de ω_x e ω_y . As expressões são simplificadas assumindo $\omega_x(0) = \omega_y(0) = 0$. Fisicamente, isso significa que o efeito de perturbações em condições iniciais da velocidade angular transversal é desprezando, obtendo-se a solução somente para o efeito do torque perturbativo.

Ao fazer a substituição e simplificação comentada acima, obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \frac{\mu}{\lambda} \sin \lambda t \cos nt + \frac{\mu}{\lambda} (1 - \cos \lambda t) \sin nt \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{\mu}{\lambda} \sin \lambda t \sin nt - \frac{\mu}{\lambda} (1 - \cos \lambda t) \cos nt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \frac{\mu}{\lambda} \sin \lambda t \cos nt + \frac{\mu}{\lambda} \sin nt - \frac{\mu}{\lambda} \cos \lambda t \sin nt = -\frac{\mu}{\lambda} \sin (nt - \lambda t) + \frac{\mu}{\lambda} \sin nt \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{\mu}{\lambda} \sin \lambda t \sin nt - \frac{\mu}{\lambda} \cos nt + \frac{\mu}{\lambda} \cos \lambda t \cos nt = \frac{\mu}{\lambda} \cos (nt - \lambda t) - \frac{\mu}{\lambda} \cos nt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= -\frac{\mu}{\lambda} \sin \frac{I_{zz}}{J} nt + \frac{\mu}{\lambda} \sin nt \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{\mu}{\lambda} \cos \frac{I_{zz}}{J} nt - \frac{\mu}{\lambda} \cos nt \end{aligned} \quad (12)$$

Pois:

$$n - \lambda = n - \frac{(J - I_{zz})n}{J} = n - n + \frac{I_{zz}n}{J} = \frac{I_{zz}}{J}n$$

Integrando-se as equações 12 de 0 a t , obtém-se:

$$\theta_1(t) = -\frac{\mu J}{\lambda n I_{zz}} \left(1 - \cos \frac{I_{zz}}{J} nt \right) + \frac{\mu}{\lambda n} (1 - \cos nt) \quad (13)$$

$$\theta_2(t) = \frac{\mu J}{\lambda n I_{zz}} \sin \frac{I_{zz}}{J} nt - \frac{\mu}{\lambda n} \sin nt \quad (14)$$

A solução acima é a soma de duas funções harmônicas com certa amplitude e frequência:

$$A_p = \frac{\mu J}{\lambda n I_{zz}}, \quad A_n = \frac{\mu}{\lambda n} \quad (15)$$

$$\omega_p = \frac{I_{zz}}{J}n, \quad \omega_n = n \quad (16)$$

Em função destas, as equações 13 e 14 são escritas como:

$$\theta_1(t) = -A_p (1 - \cos \omega_p t) + A_n (1 - \cos \omega_n t) \quad (17)$$

$$\theta_2(t) = A_p \sin \omega_p t - A_n \sin \omega_n t \quad (18)$$

As amplitudes A_p e A_n recebem os nomes de **amplitude de precessão** e **amplitude de nutação**, respectivamente. As frequências ω_p e ω_n recebem os nomes de **frequência de precessão** e **frequência de nutação**, respectivamente.

Os nomes amplitude ou frequência de nutação ou precessão não significam que estas variáveis vão se manifestar só nas respostas dos respectivos ângulos. Na equação 18, verifica-se que a resposta do ângulo de nutação $\theta = \theta_2$ depende de ambas as amplitudes e frequências. Da mesma forma, a equação 17 mostra que a resposta do ângulo de precessão $\phi = \theta_1 + \frac{\pi}{2}$ também depende das duas frequências e amplitudes.

A frequência de nutação é simplesmente igual à velocidade de spin n . Já a frequência de precessão pode ser maior ou menor que a de nutação. Para um corpo prolato, $I_{zz} < J$ e $\omega_p < \omega_n$. Para um corpo oblato, $I_{zz} > J$ e $\omega_p > \omega_n$.

Para avaliar as amplitudes de precessão e nutação, substitui-se as expressões de μ e λ :

$$A_n = \frac{\mu}{\lambda n} = \frac{M}{J} \frac{1}{n} \frac{1}{\frac{(J - I_{zz})n}{J}} = \frac{M}{J} \frac{1}{n} \frac{J}{(J - I_{zz})n}$$

$$A_n = \frac{M}{(J - I_{zz})n^2} \quad (19)$$

$$A_p = \frac{\mu J}{\lambda n I_{zz}} = \frac{M J}{J n I_{zz}} \frac{J}{(J - I_{zz})n} = \frac{M}{(J - I_{zz})n^2} \frac{J}{I_{zz}}$$

$$A_p = A_n \frac{J}{I_{zz}} \quad (20)$$

Ambas as amplitudes são diretamente proporcionais ao momento transversal M e inversamente proporcionais ao quadrado da velocidade de spin n . Então, fica evidente que o spin ao redor do eixo de simetria é uma forma de reduzir o impacto do momento perturbativo transversal. Quanto maior for esta velocidade, maior será a **rigidez giroscópica**, reduzindo o desvio entre o eixo z do corpo e o eixo Z inercial.

Ambas as amplitudes também são inversamente proporcionais à diferença $J - I_{zz}$. Quanto mais próximos forem estes momentos de inércia, maiores serão os desvios entre o eixo de spin e o eixo inercial. Então, para o fim de estabilização do apontamento por spin, o corpo precisa ser bastante alongado ou bastante achatado.

A equação 20 fornece a relação entre as amplitudes de precessão e nutação. Se o corpo for prolato, $I_{zz} < J$, a amplitude de precessão é maior que a de nutação. Se o corpo for oblato, $I_{zz} > J$, a amplitude de precessão é menor que a de nutação.

Se todas as outras grandezas envolvidas tiverem os valores mantidos, o ideal é maximizar a diferença $|J - I_{zz}|$. Isso reduz a amplitude A_n e indiretamente contribui para reduzir A_p . Como A_p é diretamente proporcional a J , o ideal é escolher a diferença $|J - I_{zz}|$ com $J < I_{zz}$. Ou seja, mantidos todos os outros parâmetros constantes, a configuração que vai **minimizar** ambas as amplitudes de **perturbação** é a de um corpo **oblato**.

Referências

- [1] B. Wie. *Space Vehicle Dynamics and Control*. AIAA Education Series. AIAA, Reston, VA, 2008.