# Aula 9

# Funções exponenciais e logarítmicas
# Uma revisão e o número $e$

Nesta aula faremos uma pequena revisão sobre as funções $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$, sendo $a$ uma constante real, $a > 0$ e $a \neq 1$. Faremos ainda uma apresentação do número $e$, uma constante importante da matemática universitária.

## 9.1 Pequena revisão de potências

Sabemos que, sendo $a$ um número real positivo,

$$\boxed{a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \text{ e } a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}}$$

se $m, n \in \mathbb{Z}$, e $n > 0$. Assim define-se a *potência de base* $a$ *e expoente* $p$, $a^p$ (lê-se "$a$ *elevado a* $p$"), para todo $p \in \mathbb{Q}$.

Se $\alpha$ é um número irracional, existe uma sequência de números racionais que tende a $\alpha$ (uma sequência de aproximações de $\alpha$ por números racionais), ou seja, existe uma sequência de números racionais

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \alpha$.

Por exemplo, se $\alpha = \sqrt{2} \approx 1{,}414213562$, existe uma seqüência de aproximações de $\sqrt{2}$, cujos cinco primeiros termos são dados na primeira coluna da tabela abaixo:

| | | |
|---|---|---|
| $\alpha_1 = 1{,}4$ | $(\alpha_1^2 = 1{,}96)$ | $\lvert\alpha_1 - \alpha\rvert \approx 0{,}014213562 < 0{,}1$ |
| $\alpha_2 = 1{,}41$ | $(\alpha_2^2 = 1{,}9881)$ | $\lvert\alpha_2 - \alpha\rvert \approx 0{,}004213562 < 0{,}01$ |
| $\alpha_3 = 1{,}414$ | $(\alpha_3^2 = 1{,}999396)$ | $\lvert\alpha_3 - \alpha\rvert \approx 0{,}000213562 < 0{,}001$ |
| $\alpha_4 = 1{,}4142$ | $(\alpha_4^2 = 1{,}99996164)$ | $\lvert\alpha_4 - \alpha\rvert \approx 0{,}000013562 < 0{,}0001$ |
| $\alpha_5 = 1{,}41421$ | $(\alpha_5^2 = 1{,}99998992)$ | $\lvert\alpha_5 - \alpha\rvert \approx 0{,}000003562 < 0{,}00001$ |

Uma calculadora nos fornece uma aproximação de $\sqrt{2}$ com 12 casas decimais: $\sqrt{2} \approx 1{,}414213562373$. A sequência acima, de aproximações sucessivas de $\sqrt{2}$, é tal que $|\alpha_n - \sqrt{2}| < 10^{-n}$, e assim $\lim\limits_{n\to+\infty} |\alpha_n - \sqrt{2}| = 0$, e então $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \sqrt{2}$ (a segunda coluna da tabela acima sugere que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^2 = 2$).

Sendo $a \in \mathrm{R}$, $a > 0$, e sendo $\beta$ um número irracional, e $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ uma sequência de racionais com limite $\beta$, $a^\beta$ é definido como o limite da sequência[1]

$$a^{\beta_1}, a^{\beta_2}, a^{\beta_3}, a^{\beta_4}, \ldots$$

Por exemplo, $2^{\sqrt{2}}$ é o limite da seqüência

$$2^1, 2^{1,4}, 2^{1,41}, 2^{1,414}, \ldots$$

Uma calculadora nos fornece as aproximações:

$$\begin{aligned}
2^1 &= 2 \\
2^{1,4} &= 2^{14/10} = \sqrt[10]{2^{14}} && \approx 2,6390 \\
2^{1,41} &= 2^{141/100} = \sqrt[100]{2^{141}} && \approx 2,6574 \\
2^{1,414} &= 2^{1414/1000} && \approx 2,6647 \\
2^{1,4142} &= 2^{14142/10000} && \approx 2,6651
\end{aligned}$$

No que diz respeito a potências de base real positiva e expoente real, temos as seguintes boas propriedades, que aceitaremos sem demonstração:

Se $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$ e $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
a^x \cdot a^y &= a^{x+y} \\
(a^x)^y &= a^{xy} \\
a^{-x} &= \frac{1}{a^x}, \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \quad a^0 = 1 \\
a^x \cdot b^x &= (ab)^x
\end{aligned}$$

[1] A existência do limite da sequência $a^{\beta_n}$, quando $n \to +\infty$, pode ser demonstrada num tratamento teórico de fundamentos do Cálculo.

## 9.2 A função exponencial

Sendo $a$ um número real, positivo, $a \neq 1$, define-se a função exponencial de base $a$ por

$$f(x) = a^x, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}$$

Tomamos $a \neq 1$ pela simples razão de que $1^x = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o que torna $a^x$ constante no caso em que $a = 1$ (funções constantes não são classificadas como funções exponenciais). Além disso, tomamos $a > 0$ porque, se $a < 0$, $a^x$ não se define para uma infinidade de valores reais de $x$. Por exemplo, se $a = -4$ então, para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $a^{1/2n} = (-4)^{1/2n} = \sqrt[2n]{-4}$ não se define como número real.

Assumiremos que, se $a > 0$ e $a \neq 1$, a função exponencial dada por $f(x) = a^x$, é contínua em $\mathbb{R}$, isto é,

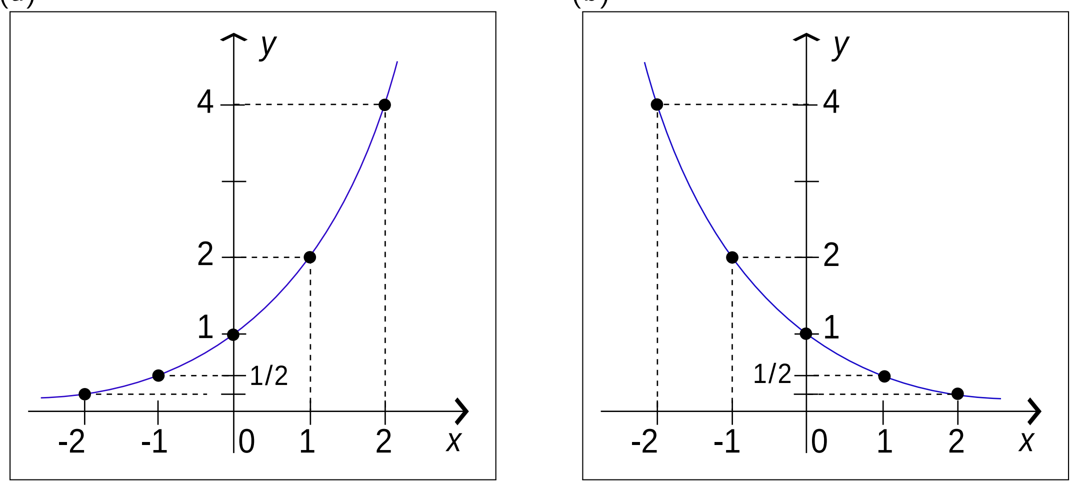
$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}, \quad \text{para cada } x_0 \in \mathbb{R}$$

Assumiremos também que se $a > 1$, a função $f(x) = a^x$ é crescente, com $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$, e se $0 < a < 1$ a função é decrescente, com $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0^+ (= 0)$.

Na figura 9.1 temos esboços dos gráficos de $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Figura 9.1. Esboços dos gráficos de (a) $y = 2^x$, (b) $y = (1/2)^x$.

(a) (b)




Temos agora as seguintes novidades na *álgebra de limites*:

Se $a > 1$, $a^{+\infty} = +\infty$, $a^{-\infty} = \dfrac{1}{a^{+\infty}} = \dfrac{1}{+\infty} = 0^+ \, (= 0)$

Se $0 < a < 1$, $a^{+\infty} = 0^+ \, (= 0)$, $a^{-\infty} = \dfrac{1}{a^{+\infty}} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

Por exemplo,

$$\lim_{x \to +\infty} 2^x = 2^{+\infty} = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} 2^x = 2^{-\infty} = 0$$
$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$$
$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = 2^{+\infty} = +\infty$$

## 9.3 Logaritmos e funções logarítmicas

Se $a > 0$, $a \neq 1$, e $x > 0$, o *logaritmo de $x$ na base $a$*, denotado por $\log_a x$, é o expoente ao qual devemos elevar $a$ para obtermos $x$, ou seja

$$\log_a x = y \quad \text{se e somente se} \quad a^y = x$$

Assim sendo,

$$\boxed{a^{\log_a x} = x}$$

Por exemplo,

$\log_2 8 = 3$, pois $2^3 = 8$;

$\log_9 27 = \frac{3}{2}$, pois $9^{3/2} = \sqrt{9^3} = 3^3 = 27$;

$\log_2 \frac{1}{4} = -2$, pois $2^{-2} = 1/4$;

$\log_{1/2} 16 = -4$, pois $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$;

$\log_2 5 \approx 2{,}3219$, pois $2^{2{,}3219} \approx 4{,}9999$.

$\log_2 5$ não é um número racional, pois se $\log_2 5 = \frac{m}{n}$, com $m$ e $n$ inteiros positivos, então $2^{m/n} = 5$. Daí, $2^m = (2^{m/n})^n = 5^n$, o que é impossível pois $2^m$ é par e $5^n$ é ímpar.

Listamos aqui, sem dedução, algumas propriedades elementares dos logaritmos:

Sendo $x$ e $y$ reais positivos, $z$ real, e $a > 0, a \neq 1$,

$$\begin{aligned}
\log_a(xy) &= \log_a x + \log_a y \\
\log_a \frac{x}{y} &= \log_a x - \log_a y \\
\log_a x^z &= z \cdot \log_a x \\
\log_a x^{1/z} &= \frac{\log_a x}{z} \qquad (\text{se } z \neq 0) \\
\log_a x &= \frac{\log_b x}{\log_b a}, \qquad (\text{se } b > 0, b \neq 1) \qquad\qquad (\text{mudança de base})
\end{aligned}$$

Assim, por exemplo, a passagem dos logaritmos decimais (base 10) para os logaritmos de base 2 é dada por

$$\log_2 x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} 2} = \frac{\log x}{\log 2}$$

Sendo a função $f(x) = a^x$ contínua e crescente quando $a > 0$, e decrescente quando $0 < a < 1$, temos que $\log_a x$ é definida para todo $x > 0$.

Por exemplo, $f(x) = 2^x$ é crescente, $2^2 = 4$ e $2^3 = 8$. Pela continuidade de $f$, a imagem do intervalo $[2, 3]$, pela função $f$, é o intervalo[2] $[4, 8]$. Existe então $x_0 \in [2, 3]$ tal que $2^{x_0} = 5$. Assim, $\log_2 5 = x_0$. Portanto, realmente existe o número real $\log_2 5$.

Além disso, se $a > 0$, $\log_a$ é crescente, e se $0 < a < 1$, $\log_a$ é decrescente.

Na figura 9.2, temos esboços dos gráficos de $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \log_{1/2} x$.

Admitiremos que $f(x) = \log_a x$ é contínua no seu domínio $]0, +\infty[$, ou seja,

$$\text{se } x_0 > 0 \text{ então } \lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0$$

Além disso, temos ainda (observe os gráficos da figura 9.2).

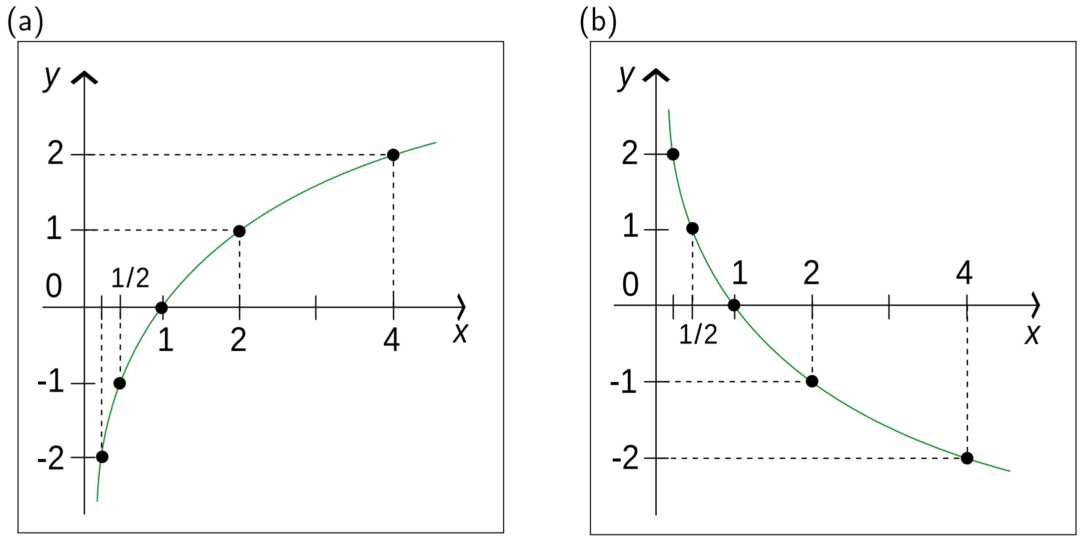
[2]Um teorema sobre funções contínuas é o *Teorema do Valor Intermediário*: *Se* $f$ *é uma função contínua em* $[a, b] \subset D(f)$, *então a imagem do intervalo* $[a, b]$ *pela função* $f$, *que é o conjunto* $f([a, b]) = \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ *é o intervalo fechado* $[m, M]$ *sendo* $m$ *e* $M$ *os valores mínimo e máximo de* $f$ *em* $[a, b]$.

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = \log_a(0^+) = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 0 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

bem como também (confira observando os gráficos da figura 9.2)

$$\lim_{x\to +\infty} \log_a x = \log_a(+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Figura 9.2. Esboços dos gráficos de (a) $y = \log_2 x$, (b) $y = \log_{1/2} x$.




## 9.4 O número $e$

Na matemática universitária, há duas constantes numéricas muito importantes. São elas o número *pi*, $\boxed{\pi \approx 3,14159}$, e o número $e$, $\boxed{e \approx 2,71828}$.

O número $e$ é definido como sendo o limite

$$\boxed{e = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ n\in\mathbb{N}}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

Pode ser demonstrado que o número $e$ é irracional.

Observe a tabela 9.1, de valores (aproximados) de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, para $n = 1$, 10, 100, 1000, 10000, 100000.

Note que $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{+\infty} = 1$.

Tabela 9.1.

| $n$ | $1/n$ | $1+\frac{1}{n}$ | $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | $2^1 = 2$ |
| 10 | $0,1$ | $1,1$ | $(1,1)^{10} \approx 2,59374$ |
| 100 | $0,01$ | $1,01$ | $(1,01)^{100} \approx 2,70481$ |
| 1000 | $0,001$ | $1,001$ | $(1,001)^{1000} \approx 2,71692$ |
| 10000 | $0,0001$ | $1,0001$ | $(1,0001)^{10000} \approx 2,71815$ |
| 100000 | $0,00001$ | $1,00001$ | $(1,00001)^{100000} \approx 2,71828$ |

Assim, podemos enganosamente intuir que, quando $n$ é muito grande, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 1^n = 1$ (mesmo calculadoras de boa qualidade podem nos induzir a este erro). Neste caso, nossa intuição é falha, pois pode ser demonstrado que o número $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cresce à medida que $n$ cresce, sendo $a_1 = 2$, e $2 < a_n < 3$ para cada $n \geq 2$. Na tabela 9.1, ilustramos o fato de que

$$\text{para valores de } n \text{ muito grandes, } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2,71828$$

Assim sendo, temos $\boxed{\text{um novo símbolo de indeterminação: } 1^{\pm\infty}}$.

Vamos admitir, sem demonstração, que também, para $x$ real

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Neste caso, podemos deduzir:

**Proposição 9.1.**

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

*Demonstração.* De fato, fazendo a mudança de variável

$$x = -(y+1)$$

temos $y = -x-1$, e portanto $x \to -\infty$ se e somente se $y \to +\infty$.

Assim, sendo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} &= \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y+1}\right)^{-(y+1)} \\
&= \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y+1}\right)^{-(y+1)} \\
&= \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y+1}{y}\right)^{y+1} \\
&= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+1} \\
&= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\cdot\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right) \\
&= e\cdot 1 = e
\end{aligned}$$

□

Como consequência, temos também

**Proposição 9.2.**

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

*Demonstração.* Mostraremos que

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \text{e} \lim_{x\to 0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Pondo $\alpha = 1/x$, temos que $x \to 0^+$ se e somente se $\alpha \to +\infty$. Daí

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{\alpha\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} = e$$

Além disso, $x \to 0^-$ se e somente se $\alpha \to -\infty$. Daí, pela proposição 9.1,

$$\lim_{x\to 0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{\alpha\to-\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} = e$$

□

Se $x > 0$, chama-se *logaritmo natural* ou *logaritmo neperiano* de $x$ ao logaritmo

$$\ln x = \log_e x$$

Como $e \approx 2{,}71828 > 1$, a função $f(x) = \ln x$ é crescente e seu gráfico tem, qualitativamente, a forma do gráfico de $g(x) = \log_2 x$, figura 9.2 a.

A passagem dos logaritmos naturais para os logaritmos decimais (base 10) é dada por

$$\log_{10} x = \frac{\log_e x}{\log_e 10} = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

## 9.5 Levantando indeterminações da forma $1^{\pm\infty}$

Mostraremos com um exemplo simples um procedimento habitual para se calcular um limite do tipo $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ quando este é indeterminado na forma $1^{\pm\infty}$. Em outras palavras, nesta indeterminação estamos supondo que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ (com $f(x) \neq 1$ quando $x$ está nas proximidades de $a$) e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$.

**Exemplo 9.1.** *Calcular* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-2x}{5-2x}\right)^{2-x}$

Um cálculo elementar nos dá $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-2x}{5-2x} = 1$, e portanto o limite é indeterminado na forma $1^{-\infty}$.

Para "levantar" a indeterminação, podemos recorrer a uma mudança de variável escrevendo

$$\frac{1-2x}{5-2x} = 1 + \frac{1}{y}$$

Isolando $\frac{1}{y}$ temos

$$\frac{1}{y} = \frac{1-2x}{5-2x} - 1 = \frac{-5}{5-2x}$$

e chegamos a

$$y = \frac{5-2x}{-5} = -1 + \frac{2x}{5}$$

Neste momento deduzimos que se $x \to +\infty$ então também $y \to +\infty$.

Isolando $x$ a partir da última igualdade, temos $\dfrac{2x}{5} = y + 1$ e então $x = \dfrac{5y}{2} + \dfrac{5}{2}$. Voltamos então ao limite proposto inicialmente usando a nova variável $y$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-2x}{5-2x}\right)^{2-x} &= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2-\left(\frac{5y}{2}+\frac{5}{2}\right)} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-\frac{5y}{2}-\frac{1}{2}} \\
&= \lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-\frac{5y}{2}}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \\
&= \lim_{y\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right)^{\frac{-5}{2}} \cdot \lim_{y\to+\infty}\cancelto{1}{\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-\frac{1}{2}}} = e^{-5/2}\cdot 1
\end{aligned}$$

Portanto $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-2x}{5-2x}\right)^{2-x} = \dfrac{1}{\sqrt{e^5}} = \dfrac{1}{e^2\sqrt{e}}$.

**Observação 9.1.** *Em um procedimento mais geral, porém não mais facilitador, se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ *(com* $f(x) \neq 1$ *quando* $x$ *está nas proximidades de* $a$*) e* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, *para levantar a indeterminação da forma* $1^{\pm\infty}$ *no limite* $\lim_{x\to\alpha} f(x)^{g(x)}$, *podemos tomar* $\varphi(x) = f(x) - 1$, *e tendo em conta que* $\lim_{x\to\alpha}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}} = \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e$, *obter*

$$\lim_{x\to\alpha} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to\alpha}\left[(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}\right]^{\varphi(x)g(x)} = e^L$$

*com* $L = \lim_{x\to\alpha}(\varphi(x)g(x))$, *este limite sendo indeterminado da forma* $0\cdot(\pm\infty)$, *pois* $\lim_{x\to\alpha}\varphi(x) = \lim_{x\to\alpha}(f(x)-1) = 0$.

## 9.6 Problemas

1. Calcule os seguintes limites. Lembre-se que $1^{\pm\infty}$ é um símbolo de indeterminação.

   (a) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$

   *Sugestão.* Para contornar a indeterminação $1^{+\infty}$, faça $1+\frac{2}{x} = 1+\frac{1}{y}$

   (b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$

   *Sugestão.* Para contornar a indeterminação $1^{+\infty}$, faça $\frac{x}{1+x} = 1+\frac{1}{y}$

   (c) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$ (d) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{2x+3}\right)^x$

   (e) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x+1}{2x+3}\right)^x$ (f) $\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{3x}\right)^{2x}$

   *Respostas.* (a) $e^2$ (b) $1/e$ (c) $e$ (d) $+\infty$ (e) $0$ (f) $1/\sqrt[3]{e^2}$

2. Mostre que, sendo $a>0$, $\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = \ln a$.

   *Sugestão:* Trate o caso $a=1$ em separado. Para $a\neq 1$, faça a mudança de variável $a^h - 1 = z$, e então $h = \ln(z+1)/\ln a$.

3. Usando o resultado do problema anterior, calcule

   (a) $\lim_{n\to+\infty} n\cdot(a^{1/n}-1)$ (sendo $a>0$, $a\neq 1$)

   (b) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{x}$

   *Sugestão.* $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{x} = \lim_{x\to 0}(a\cdot\frac{e^{ax}-1}{ax}) = a\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax}$

   (c) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$

   *Sugestão.* $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^{ax}-1)-(e^{bx}-1)}{x}$

   (d) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{e^{bx}-1}$

   *Respostas.* (a) $\ln a$ (b) $a$ (c) $a-b$ (d) $a/b$

4. Sendo $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$, calcule os limites laterais $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x)$.

   *Resposta.* $+\infty$ e $0$, respectivamente.

5. Sendo
$$g(x) = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-a}}}$$
calcule os limites laterais $\lim\limits_{x \to a^+} g(x)$ e $\lim\limits_{x \to a^-} g(x)$.
*Resposta.* 0 e 1, respectivamente.