Aula 4

Limites. Uma introdução intuitiva

4.1 Conceituando limites através de exemplos

Nos capítulos anteriores, fizemos uso de um limite especial para calcular derivadas, a saber o limite $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Neste capítulo veremos os limites como ferramentas de estudo do comportamento de funções reais, provendo informações importantes sobre seus gráficos.

A definição formal de *limite* é matematicamente sofisticada, requerendo muitas horas de estudo para ser entendida. O leitor interessado poderá encontrá-la em bons livros-textos de Cálculo[1]. Ocorre porém que, em um primeiro curso de Cálculo, a definição de limite tem pouca ou nenhuma serventia quando queremos calcular limites. Faremos uma exploração intuitiva do conceito de limite e de suas propriedades, através de exemplos e interpretações gráficas.

Exemplo 4.1. *Considere a função $f(x) = 2x + 3$. Quando x assume uma sequência de valores aproximando-se mais e mais de 0, o número $f(x) = 2x + 3$ assume uma sequência de valores aproximando-se de $2 \cdot 0 + 3 = 3$. Por exemplo, suponhamos que x assume sucessivamente os valores da sequência*

$$0,1; \quad 0,01; \quad 0,001; \quad 0,0001; \quad 0,00001; \quad \ldots$$

aproximando-se mais e mais do número 0. Então a função $f(x)$ assumirá sucessivamente os valores da sequência

$$3,2; \quad 3,02; \quad 3,002; \quad 3,0002; \quad 3,00002; \quad \ldots$$

aproximando-se mais e mais do número 3.

[1] Para o leitor interessado, uma referência recomendada é Hamilton Luiz Guidorizzi. Um curso de cálculo: volume 1. 6ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.

Dizemos então que o limite de $f(x)$*, quando* x *tende a* 0*, é igual a* 3*, e escrevemos*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 3$$

Suponhamos que $f(x)$ é uma função real definida em uma reunião de intervalos, e que x_0 é um ponto no interior ou no extremo de um desses intervalos. Os matemáticos dizem que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ ($L \in \mathbb{R}$) quando podemos fazer $f(x)$ *arbitrariamente próximo de* L, tomando x *suficientemente próximo de* x_0, mantendo $x \neq x_0$. No exemplo em que $f(x) = 2x+3$, podemos fazer $f(x)$ próximo de 3 o quanto quisermos, bastando tomar x bem próximo de 0.

Exemplo 4.2. *Aqui temos uma lista de exemplos intuitivos, em que fazemos uso de propriedades intuitivas do cálculo de limites.*

1. $\lim_{x\to a} x = a \quad (a \in \mathbb{R})$
2. $\lim_{x\to a} x^n = a^n \quad (n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R})$
3. *Sendo* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $(n \in \mathbb{N},\ a_n, \ldots, a_0$ *todos reais*$)$,

   $\lim_{x\to x_0} p(x) = a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = p(x_0)$
4. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-3}{x^2+1} = \dfrac{\lim_{x\to 2}(x^3-3)}{\lim_{x\to 2}(x^2+1)} = \dfrac{8-3}{4+1} = 1$

Definição 4.1 (Continuidade de $f(x)$ em x_0). *Nos exemplos anteriores, de limites com* x *tendendo a* x_0*, tivemos sempre* x_0 *no domínio de* f *e* $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$*. Quando isto ocorre, dizemos que* f *é* contínua no ponto x_0*.*

No próximo exemplo, é proposto o cálculo de um limite em que $x \to x_0$, mas x_0 não está no domínio de f.

Exemplo 4.3. *Calcular* $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$.

Solução. Note que, sendo $f(x) = \dfrac{x^3-8}{x-2}$, temos que $2 \notin D(f)$. Quando x se aproxima de 2, x^3 se aproxima de 8. Um cálculo direto nos dá então

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \frac{8-8}{2-2} = \frac{0}{0}$$

Este resultado, 0/0, é muito comum no cálculo de limites, e não tem significado como valor de um limite. A expressão 0/0 é um exemplo de um *símbolo de indeterminação* ocorrendo em uma tentativa de cálculo de um limite. A ocorrência desta expressão significa que o limite ainda não foi calculado.

Para evitar o símbolo de indeterminação 0/0, neste exemplo fazemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} &= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{x-2}} \\
&= \lim_{x\to 2}(x^2+2x+4) \qquad \text{(pois } x \neq 2\text{)} \\
&= 2^2+2\cdot 2+4 = 12
\end{aligned}$$

Exemplo 4.4 (Cálculo de um limite com mudança de variável).

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} = ?$$

Um cálculo direto nos dá 0/0, uma *indeterminação*.

Podemos fazer a mudança de variável. $y = \sqrt[3]{x+1}$.

Temos então $y^3 = x+1$, e portanto $x = y^3-1$.

Quando x tende a 0, y tende a 1 (em símbolos: se $x \to 0$, então $y \to 1$). E aí temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} &= \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{y^3-1} \\
&= \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{(y-1)(y^2+y+1)} \\
&= \lim_{y\to 1} \frac{1\cdot\cancel{(y-1)}}{\cancel{(y-1)}(y^2+y+1)} \\
&= \lim_{y\to 1} \frac{1}{y^2+y+1} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

4.2 Limites infinitos. Limites no infinito

Consideremos agora a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Temos que o domínio de f é o conjunto dos números reais diferentes de 0, simbolicamente $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. Observe a tabela 4.1. Ali fizemos uso do fato de que f é uma função *par*: $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in D(f)$.

Na primeira coluna da tabela 4.1, temos valores de x (positivos e negativos) cada vez mais próximos de 0. Na última coluna, vemos que os valores correspondentes de $f(x)$

tornam-se cada vez maiores. Neste exemplo, podemos fazer $f(x)$ maior que qualquer número real positivo, tomando x suficientemente próximo de 0. Dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a 0 é "+ *infinito*", e escrevemos

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

ou seja,

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty}$$

Tabela 4.1.

x	x^2	$f(x) = \frac{1}{x^2}$
± 1	1	1
$\pm 0,5$	$0,25$	4
$\pm 0,2$	$0,04$	25
$\pm 0,1$	$0,01$	100
$\pm 0,01$	$0,0001$	10000
$\pm 0,001$	$0,000001$	1000000

A interpretação geométrica de $\lim_{x\to 0}(1/x^2) = +\infty$ pode ser visualizada na figura 4.1, em que temos um esboço do gráfico da curva $y = 1/x^2$.

Agora observe a tabela 4.2. Notamos agora que, à medida que x cresce indefinidamente, assumindo valores positivos cada vez maiores, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ torna-se cada vez mais próximo de 0. Isto também é sugerido pela figura 4.1. Neste caso, dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a "+ *infinito*", é igual a 0, e escrevemos

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0}$$

Nas tabelas 4.1 e 4.2 também ilustramos:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x^2 = 0 \qquad\qquad \lim_{x\to +\infty} x^2 = +\infty}$$

Também podemos facilmente inferir

$$\boxed{\lim_{x\to -\infty} x^2 = +\infty \qquad\qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0}$$

Figura 4.1. $\lim\limits_{x \to 0} 1/x^2 = +\infty$, ou seja, à medida que x se aproxima de 0, $y = f(x)$ torna-se cada vez maior. Também $\lim\limits_{x \to +\infty} 1/x^2 = 0$, ou seja, à medida que x cresce, tomando valores cada vez maiores, $f(x)$ aproxima-se de 0. E ainda $\lim\limits_{x \to -\infty} 1/x^2 = 0$.

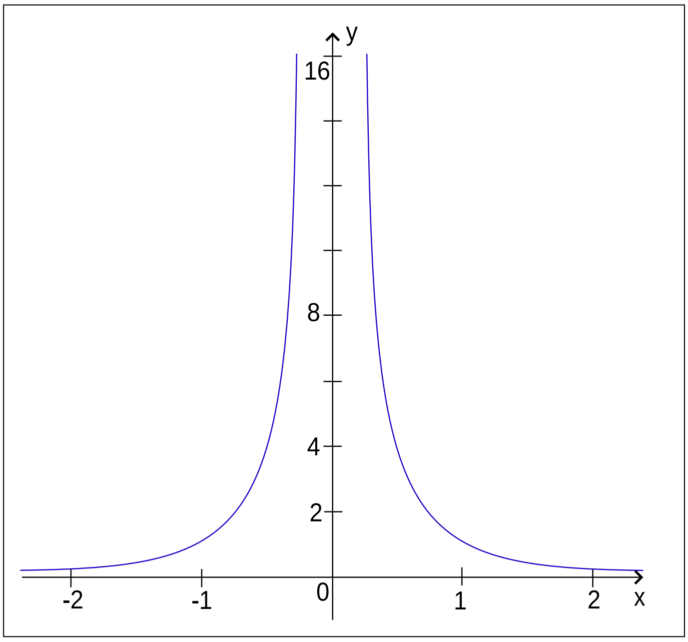


Tabela 4.2.

x	x^2	$f(x) = \frac{1}{x^2}$
1	1	1
2	4	$\frac{1}{4} = 0,25$
5	25	$\frac{1}{25} = 0,04$
10	100	$0,01$
100	10000	$0,0001$
10^3	10^6	10^{-6}

Com estes exemplos simples iniciamos uma *álgebra de limites com o símbolo* ∞:

$$
\begin{array}{ll}
(+\infty) + (+\infty) = +\infty & (-\infty) + (-\infty) = -\infty \\
(\pm\infty)^2 = +\infty & (+\infty)(-\infty) = -\infty \\
(+\infty)^3 = +\infty & (-\infty)^3 = -\infty
\end{array}
$$

$(-\infty)^{(\text{inteiro positivo par})} = +\infty$

$(\pm\infty)^{-n} = \dfrac{1}{(\pm\infty)^n} = \dfrac{1}{\pm\infty} = 0 \ (n > 0, n \in \mathbb{Z})$

$+\infty + c = +\infty$ (c constante)

$(-\infty)^{(\text{inteiro positivo ímpar})} = -\infty$

$\dfrac{c}{\pm\infty} = 0$ (c constante)

$-\infty + c = -\infty$ (c constante)

$$c \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \\ -\infty & \text{se } c < 0 \end{cases} \qquad c \cdot (-\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c < 0 \\ -\infty & \text{se } c > 0 \end{cases}$$

$$\frac{+\infty}{c} = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \\ -\infty & \text{se } c < 0 \end{cases} \qquad \frac{-\infty}{c} = \begin{cases} +\infty & \text{se } c < 0 \\ -\infty & \text{se } c > 0 \end{cases}$$

Mas atenção! Cautela com essa nova "aritmética"! Os "resultados"

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty} \qquad (+\infty) - (+\infty) \qquad (-\infty) + (+\infty) \qquad 0 \cdot (\pm\infty)$$

são novos símbolos de indeterminação. Nada significam como valores de limites. Se chegarmos a algum deles no cálculo de um limite, temos que repensar o procedimento de cálculo.

Exemplo 4.5. *Calcular* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 + 4}$

Solução. Uma substituição direta nos dá

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 + 4} = \frac{+\infty - (+\infty) - 1}{+\infty + 4}$$

Para evitarmos símbolos de indeterminação, fazemos

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 + 4} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(3 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2})}{x^3(1 + \frac{4}{x^3})} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{3 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{x(1 + \frac{4}{x^3})} = \frac{3 - \frac{2}{+\infty} - \frac{1}{+\infty}}{+\infty(1 + \frac{4}{+\infty})} \\ &= \frac{3 - 0}{+\infty \cdot (1 + 0)} = \frac{3}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

Exemplo 4.6. *Calcular* $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (x^5 - x^3)$

Temos

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (x^5 - x^3) = (-\infty)^5 - (-\infty)^3 = (-\infty) - (-\infty) = (-\infty) + (+\infty)$, portanto chegamos a um símbolo de indeterminação.

Podemos no entanto fazer

$$\lim_{x\to-\infty}(x^5 - x^3) = \lim_{x\to-\infty} x^5(1 - \tfrac{1}{x^2}) = (-\infty)^5 \cdot (1 - \tfrac{1}{+\infty}) = (-\infty)\cdot(1-0) = -\infty.$$

Nos limites da forma $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{p(x)}{q(x)}$, em que $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios em x, prevalecem os termos de maior grau de ambos os polinômios, ou seja, se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

então $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$.

Deixamos a dedução disto para o leitor, como um exercício.

Por exemplo, no exemplo 4.5 estudado anteriormente, poderíamos ter feito

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 + 4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

Mas atenção. Isto só vale para limites de quocientes de polinômios, em que $x \to \pm\infty$.

Exemplo 4.7. *Calcular* $\lim_{x\to0} \dfrac{1}{x}$.

Solução. Aqui podemos ser induzidos a dizer, tal como no exemplo do limite $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2}$, que $\lim_{x\to0} \frac{1}{x}$ é infinito. Ok, mas qual "infinito"? $+\infty$ ou $-\infty$? A resposta é, neste caso, nenhum dos dois!

Se x se aproxima de 0 por valores positivos, então $1/x$ tende a $+\infty$. Porém se x se aproxima de 0 assumindo somente valores negativos, então $1/x$ tende a $-\infty$ ($|1/x|$ fica cada vez maior, porém $1/x$ mantém-se sempre < 0).

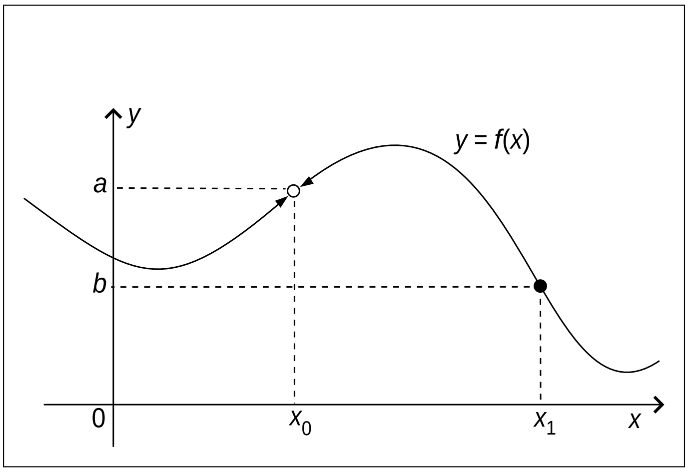
Neste caso, dizemos que não existe o limite $\lim_{x\to0} \dfrac{1}{x}$.

O comportamento da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$, nas proximidades de $x = 0$, será melhor estudado na próxima aula, quando introduziremos o conceito de limites laterais.

4.3 Ilustrações geométricas da ocorrência de alguns limites

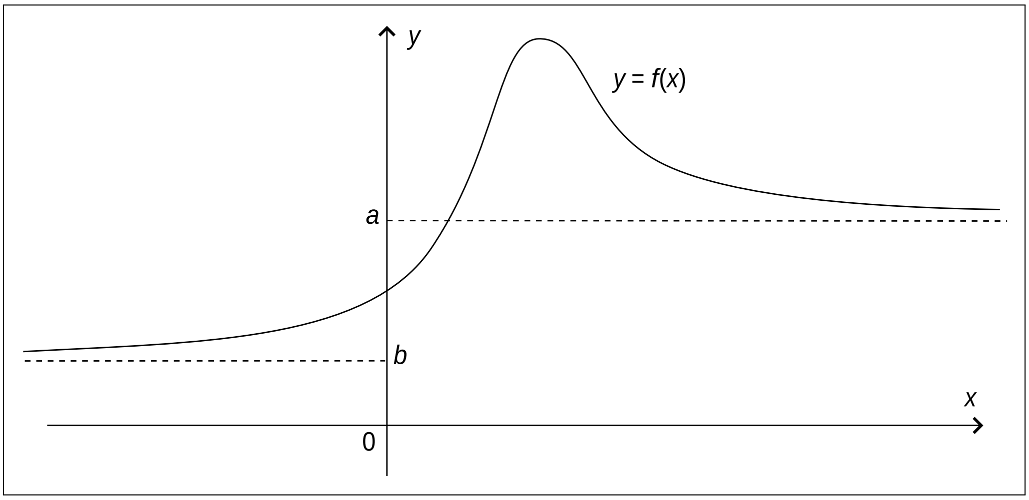
Na figura 4.2 temos um exemplo de esboço de um gráfico de uma função definida no conjunto $\mathbb{R} - \{x_0\}$, para a qual $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ e $\lim_{x \to x_1} f(x) = b = f(x_1)$.

Figura 4.2. x_0 não está no domínio de f, $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$, e $\lim_{x \to x_1} f(x) = b = f(x_1)$.



Na figura 4.3 temos um exemplo de esboço de um gráfico de uma função definida em todo o conjunto $\mathbb{R}$, para a qual $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$.

Figura 4.3. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$, e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$.



Na figura 4.4, página 42, temos um exemplo de esboço de um gráfico de uma função definida em $\mathbb{R} - \{a\}$, para a qual $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Na figura 4.5, página 42, temos um exemplo de esboço de um gráfico de uma função definida em $\mathbb{R} - \{a\}$, para a qual $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Na figura 4.6, página 42, ilustramos um exemplo de esboço de um gráfico de uma função definida em $\mathbb{R}-\{a\}$, para a qual $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = b$ e $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$.

4.4 Problemas

1. Calcule os limites.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{2x^2+5x-7}$

(c) $\displaystyle\lim_{k\to 4} \frac{k^2-16}{\sqrt{k}-2}$

(d) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

(e) $\displaystyle\lim_{h\to -2} \frac{h^3+8}{h+2}$

(f) $\displaystyle\lim_{z\to 10} \frac{1}{z-10}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^4}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{2}} (x^2+3)(x-4)$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{2}} 15$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 1/2} \frac{2x^2+5x-3}{6x^2-7x+2}$

(k) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^4-16}$

(l) $\displaystyle\lim_{s\to 4} \frac{6s-1}{2s-9}$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{1}{x-1}\right)$

(n) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{4-\sqrt{16+h}}{h}$

(o) $\displaystyle\lim_{t\to -1} \frac{(4t^2+5t-3)^3}{(6t+5)^4}$

(p) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^{-2}-2^{-2}}{h}$

2. Demonstre que se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \text{ e}$$
$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

sendo $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n$ números reais com $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$, então

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$

Figura 4.4. $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

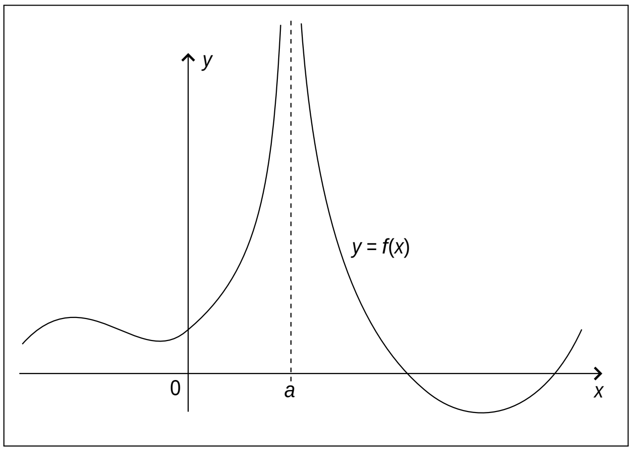


Figura 4.5. $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

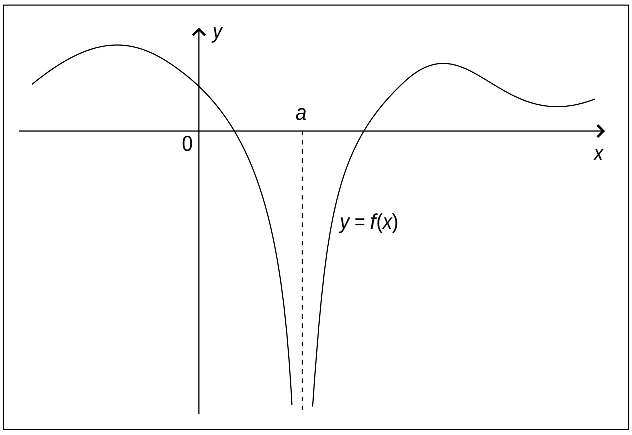
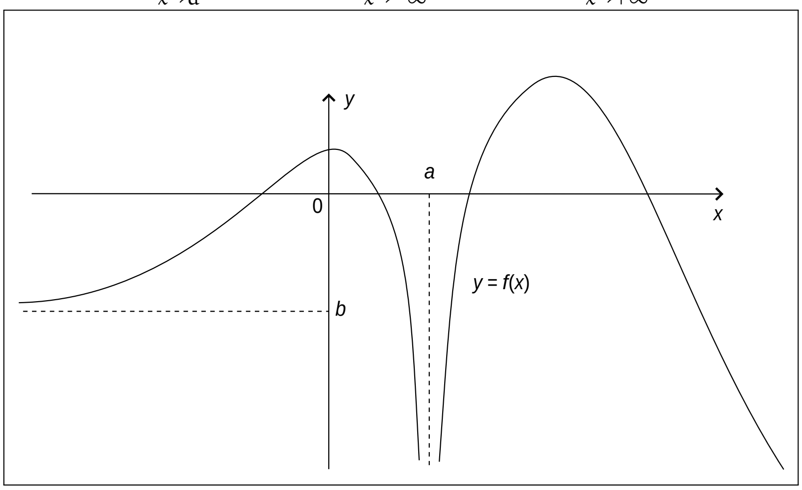


Figura 4.6. $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$, e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.



3. Calcule os limites.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-x+3}{x^3-8x-5}$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^2+1}}$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2x+3)^3(2-3x)^2}{x^5+5}$

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+ax}-x)$

(h) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+\sqrt[3]{1-x^3})$

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x+8x^3}-2x)$

(j) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$

4. Considerando as duas primeiras colunas da tabela 4.1, de valores para a função $g(x)=x^2$, Joãozinho argumentou que, quanto mais próximo de 0 é o valor de x, mais próximo de -1 fica $g(x)$. Explique por que Joãozinho está certo. Isto quer dizer que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -1$? Explique.

4.4.1 Respostas e sugestões

1. (a) 4 (b) 1/9 (c) 32 (d) $3x^2$ (e) 12 (f) não existe (g) $+\infty$ (h) $5\sqrt{2}-20$ (i) 15 (j) -7 (k) $-3/8$ (l) -23 (m) 2 (n) $-1/8$ (o) -64 (p) $-1/4$

2. (b)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty}\frac{p(x)}{q(x)} &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_nx}+\cdots+\frac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\frac{a_0}{a_nx^n}\right)}{b_mx^m\left(1+\frac{b_{m-1}}{b_mx}+\cdots+\frac{b_1}{b_mx^{m-1}}+\frac{b_0}{b_mx^m}\right)}\\
&= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}\cdot\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{a_{n-1}}{a_nx}+\cdots+\frac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\frac{a_0}{a_nx^n}}{1+\frac{b_{m-1}}{b_mx}+\cdots+\frac{b_1}{b_mx^{m-1}}+\frac{b_0}{b_mx^m}}\\
&= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}\cdot\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{a_{n-1}}{\pm\infty}+\cdots+\frac{a_1}{\pm\infty}+\frac{a_0}{\pm\infty}}{1+\frac{b_{m-1}}{\pm\infty}+\cdots+\frac{b_1}{\pm\infty}+\frac{b_0}{\pm\infty}}\\
&= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}\cdot\frac{1+0+\cdots+0}{1+0+\cdots+0} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}
\end{aligned}$$

3. (a) 2 (b) 0 (c) 0
(d) $+\infty$.
Sugestão. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$.
Agora, como $x\to-\infty$, temos $x<0$, e então $|x|=-x$.
(e) 72
(f) 0.
Sugestão. $\displaystyle\sqrt{x+a}-\sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}$.
(g) $a/2$ (h) 0.
Sugestão. Para contornar a indeterminação $+\infty-\infty$, faça
$\displaystyle x+\sqrt[3]{1-x^3} = \frac{(x+\sqrt[3]{1-x^3})[x^2-x\cdot\sqrt[3]{1-x^3}+(\sqrt[3]{1-x^3})^2]}{x^2-x\cdot\sqrt[3]{1-x^3}+(\sqrt[3]{1-x^3})^2}$, e use a identidade $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$.
(i) 0.
Sugestão. Aproveite a idéia usada na solução do problema anterior, agora fazendo uso da identidade $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.
(j) 1/2

4. Joãozinho está certo, pois x^2, sendo positivo, ao se tornar cada vez mais próximo de 0 fica também cada vez mais próximo de -1. Podemos notar que a sequência de quadrados que aparece na tabela 4.1 é a sequência $1 \quad 0,25 \quad 0,04 \quad 0,01 \quad 0,0001 \quad 0,000001\ldots$ Cada termo a partir do segundo está mais próximo de -1 que seu antecessor! Mas isto não quer dizer que o limite de x^2 quando x tende a 0 seja -1. "Cada vez mais próximo" não quer dizer "arbitrariamente próximo", que é o termo correto no contexto de limites.