Aula 12

Derivando funções trigonométricas

Nesta aula estaremos deduzindo derivadas de funções trigonométricas. Estaremos também apresentando as funções trigonométricas inversas e deduzindo suas derivadas.

Admitiremos que as seis funções trigonométricas são contínuas nos pontos onde estão definidas.

Recordemo-nos de que, pela proposição 11.1, aula 11, temos o *primeiro limite fundamental*,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$$

Como consequência, deduziremos agora as derivadas das funções seno e cosseno.

Teorema 12.1.

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$$

Demonstração. Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$. Consideremos então, fazendo $\Delta x = h$,

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \\ &= \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \operatorname{sen} h \cos x - \operatorname{sen} x}{h} \\ &= \operatorname{sen} x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\operatorname{sen} h}{h}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}
\end{aligned}
$$

Agora, temos $\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$, e

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} = \lim_{h\to 0} \frac{(\cos^2 h - 1)}{h(\cos h + 1)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2 h}{h(\cos h + 1)} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{-\operatorname{sen} h}{\cos h + 1} = 1 \cdot \frac{0}{2} = 0
\end{aligned}
$$

Portanto, $f'(x) = (\operatorname{sen} x) \cdot 0 + (\cos x) \cdot 1 = \cos x$.

Assim $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Agora, $\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Por derivação em cadeia,

$$
\begin{aligned}
(\cos x)' &= \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = (\operatorname{sen} x) \cdot (-1) = -\operatorname{sen} x
\end{aligned}
$$

□

Proposição 12.1.

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{tg} x)' &= \sec^2 x \\
(\operatorname{cotg} x)' &= -\operatorname{cosec}^2 x \\
(\sec x)' &= \sec x \ \operatorname{tg} x \\
(\operatorname{cosec} x)' &= -\operatorname{cosec} x \ \operatorname{cotg} x
\end{aligned}
$$

Demonstração. Para deduzir estas novas fórmulas, basta fazer uso das relações

$$
\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}
$$

e aplicar a regra de derivação de um quociente, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. Deixamos o prazer da descoberta para o leitor. □

12.1 Funções trigonométricas inversas e suas derivadas

A função arco-seno. Para cada número real a, $-1 \leq a \leq 1$, existe um único arco orientado α, $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$, tal que $\operatorname{sen} \alpha = a$.

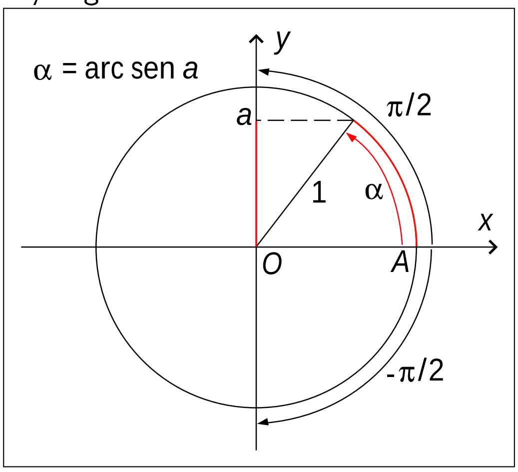
Dizemos que α *é o arco cujo seno é* a, ou que α é o *arco-seno de* a, e denotamos isto por

$$\alpha = \operatorname{arcsen} a$$

Sumarizando,

$$\alpha = \operatorname{arcsen} a \quad \text{se e somente se} \quad \begin{cases} \operatorname{sen} \alpha = a \\ -\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2 \end{cases}$$

Figura 12.1. Interpretação geométrica de $\alpha = \operatorname{arcsen} a$ no círculo trigonométrico.



Assim, por exemplo (confira),

$$\operatorname{arcsen} 1 = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}, \quad \operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}, \quad \operatorname{arcsen}(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

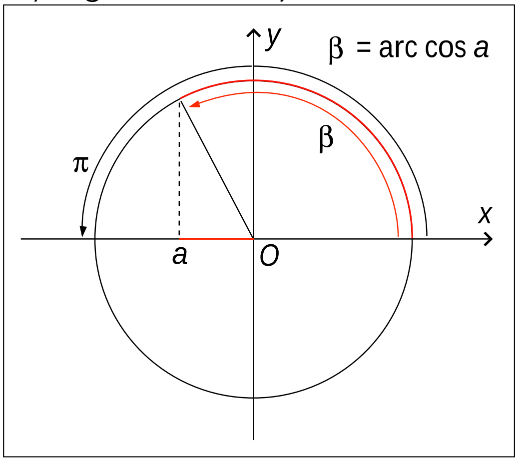
A função arco-cosseno. Para cada número real a, $-1 \leq a \leq 1$, existe um único arco orientado β, $0 \leq \beta \leq \pi$, tal que $\cos \beta = a$.

Dizemos que β *é o arco cujo cosseno é* a, ou que β é o *arco-cosseno de* a, e denotamos isto por

$$\beta = \arccos a$$

Sumarizando,

Figura 12.2. Interpretação geométrica de $\beta = \arccos a$ no círculo trigonométrico.



$$\beta = \arccos a \quad \text{se e somente se} \quad \begin{cases} \cos\beta = a \\ 0 \leq \beta \leq \pi \end{cases}$$

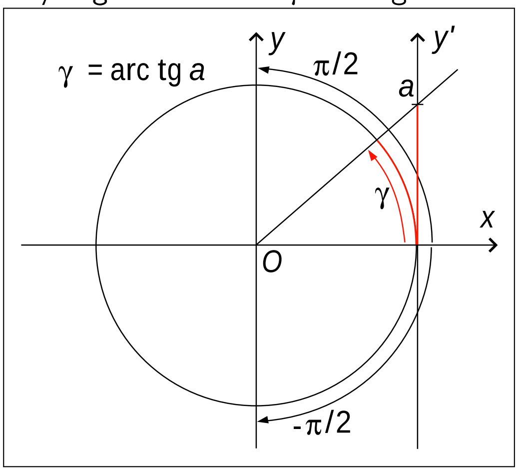
Assim, por exemplo, $\arccos 1 = 0$, $\arccos(\sqrt{2}/2) = \pi/4$, $\arccos(-1/2) = 2\pi/3$, $\arccos(-1) = \pi$.

A função arco-tangente. Para cada número real a, $-\infty < a < +\infty$, existe um único arco orientado γ, $-\pi/2 < \gamma < \pi/2$, tal que $\operatorname{tg}\gamma = a$.

Dizemos que γ *é o arco cuja tangente é* a, ou que γ é o *arco-tangente de* a, e denotamos isto por

$$\gamma = \operatorname{arctg} a$$

Figura 12.3. Interpretação geométrica de $\gamma = \operatorname{arctg} a$ no círculo trigonométrico.



Sumarizando,

$$\gamma = \operatorname{arctg} a \quad \text{se e somente se} \quad \begin{cases} a = \operatorname{tg}\gamma \\ -\pi/2 < \gamma < \pi/2 \end{cases}$$

Assim, definem-se as funções $\operatorname{arcsen} x$ e $\arccos x$, para cada x tal que $-1 \leq x \leq 1$, e $\operatorname{arctg} x$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Algumas calculadoras científicas chamam essas funções pelas teclas $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{SIN}}$, $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{COS}}$, $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{TAN}}$, e às vezes pelas teclas $\boxed{\text{SIN}^{-1}}$, $\boxed{\text{COS}^{-1}}$, $\boxed{\text{TAN}^{-1}}$.

Vamos então às derivadas das funções trigonométricas inversas. Chama a atenção o fato de que essas funções tem funções algébricas como derivadas.

Proposição 12.2.

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$$
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$$
$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad -\infty < x < +\infty$$

Demonstração. Sendo $-1 < x < 1$,

$$y = \operatorname{arcsen} x \quad \text{se e somente se} \quad \operatorname{sen} y = x, \text{ e } -\pi/2 < y < \pi/2$$

A partir da igualdade $\operatorname{sen} y = x$, por derivação implícita em relação a x , temos

$$\begin{aligned}(\operatorname{sen} y)' = 1 &\Rightarrow (\cos y)\cdot y' = 1 \\ &\Rightarrow y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

Portanto $(\operatorname{arcsen} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Para $-1 < x < 1$, $y = \arccos x$ se e somente se $\cos y = x$, e $0 < y < \pi$.

Por derivação implícita em relação a x temos

$$\begin{aligned}(\cos y)' = 1 &\Rightarrow -(\operatorname{sen} y)\cdot y' = 1 \\ &\Rightarrow y' = -\frac{1}{\operatorname{sen} y} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

Portanto $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Finalmente, para $x \in \mathbb{R}$,

$$y = \operatorname{arctg} x \quad \text{se e somente se} \quad \operatorname{tg} y = x, \text{ e } -\pi/2 < y < \pi/2$$

Por derivação implícita temos

$$(\operatorname{tg} y)' = 1 \Rightarrow (\sec^2 y) \cdot y' = 1$$
$$\Rightarrow y' = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}$$

Portanto $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$. □

Observação 12.1 (Derivação em cadeia envolvendo funções trigonométricas, diretas e inversas). *Combinando a regra de derivação 3.1 (regra da cadeia) com os resultados estabelecidos no teorema 12.1 e nas proposições 12.1 e 12.2, podemos imediatamente estabelecer que se $u = u(x)$ é uma função derivável, então, em cada item, desde que se defina a função composta, vale a regra de derivação dada pela igualdade.*

1. $(\operatorname{sen} u)' = (\cos u) \cdot u'$
2. $(\cos u)' = -(\operatorname{sen} u) \cdot u'$
3. $(\operatorname{tg} u)' = (\sec^2 u) \cdot u'$
4. $(\operatorname{cotg} u)' = -(\operatorname{cosec}^2 u) \cdot u'$
5. $(\sec u)' = (\sec u)(\operatorname{tg} u) \cdot u'$
6. $(\operatorname{cosec} u)' = -(\operatorname{cosec} u)(\operatorname{cotg} u) \cdot u'$
7. $(\operatorname{arcsen} u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
8. $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
9. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1 + u^2}$

12.2 Problemas

1. Sendo $f(x) = \operatorname{sen} x$, mostre que $f'(x) = \cos x$, fazendo uso da fórmula

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p - q}{2} \cos \frac{p + q}{2}$$

para calcular o limite de

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\operatorname{sen}(x+\Delta x) - \operatorname{sen} x}{\Delta x}$$

quando $\Delta x \to 0$.

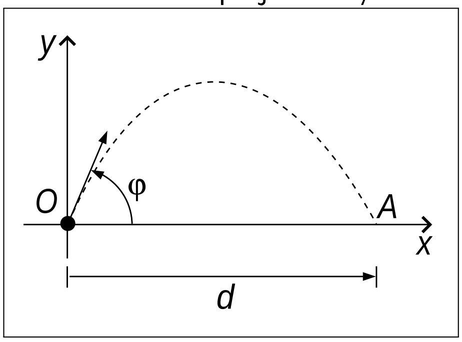
2. A distância $d = OA$ (veja figura 12.4) que um projétil alcança, quando disparado de um canhão com velocidade inicial v_0, por um cano inclinado com um ângulo de elevação φ em relação ao chão (horizontal), é dada pela fórmula

$$d = \frac{v_0}{g} \operatorname{sen} 2\varphi$$

sendo g a aceleração da gravidade local.

Qual é o ângulo φ que proporciona alcance máximo? *Resposta.* 45°.

Figura 12.4. Trajetória e alcance de um projétil lançado com ângulo de elevação φ.



3. Calcule as derivadas das seguintes funções.

(a) $y = \sec\sqrt{x-1}$ (b) $y = \operatorname{cosec}(x^2+4)$
(c) $y = \operatorname{cotg}(x^3 - 2x)$ (d) $f(x) = \cos 3x^2$
(e) $y = \dfrac{\cos 4x}{1 - \operatorname{sen} 4x}$ (f) $g(x) = \cos^2 3x$ ($\cos^2 a$ significa $(\cos a)^2$)
(g) $y = \operatorname{tg}^2 x \sec^3 x$ (h) $f(x) = \operatorname{tg}^3(3x+1)$
(i) $y = x^2 \sec^2 5x$ (j) $f(x) = \ln|\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotg} x|$
(k) $y = e^{-3x} \operatorname{tg}\sqrt{x}$ (l) $g(x) = \ln(\ln \sec 2x)$
(m) $y = x^{\operatorname{sen} x}$ (n) $f(x) = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|$

Respostas. (a) $\frac{\sec\sqrt{x-1}\,\operatorname{tg}\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}$ (b) $-2x \operatorname{cosec}(x^2+4)\operatorname{cotg}(x^2+4)$
(c) $-(3x^2-2)\operatorname{cosec}^2(x^3-2x)$ (d) $-6x \operatorname{sen} 3x^2$ (e) $\frac{4}{1-\operatorname{sen} 4x}$ (f) $-3\operatorname{sen} 6x$
(g) $3\operatorname{tg}^3 x \sec^3 x + 2\operatorname{tg} x \sec^5 x$ (h) $9\operatorname{tg}^2(3x+1)\sec^2(3x+1)$
(i) $2x\sec^2 5x + 10x^2 \sec^2 5x \operatorname{tg} 5x$ (j) $-\operatorname{cosec} x$ (k) $\frac{e^{-3x}\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - 3e^{-3x}\operatorname{tg}\sqrt{x}$
(l) $\frac{2\operatorname{tg} 2x}{\ln\sec 2x}$ (m) $x^{\operatorname{sen} x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$ (n) $\sec x$

4. Calcule as derivadas das seguintes funções.

(a) $y = \operatorname{arcsen}\sqrt{x}$ (b) $f(x) = (1 + \arccos 3x)^3$
(c) $f(x) = \ln \operatorname{arctg} x^2$ (d) $y = 3^{\operatorname{arcsen} x^3}$
(e) $g(x) = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{arctg} x}$

Respostas. (a) $1/(2\sqrt{x}\sqrt{1-x})$ (b) $-9(1 + \arccos 3x)^2/\sqrt{1-9x^2}$
(c) $\frac{2x}{(1+x^4)\operatorname{arctg} x^2}$ (d) $(3\ln 3)x^2 \cdot 3^{\operatorname{arcsen} x^3}/\sqrt{1-x^6}$
(e) $(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{arctg} x}[\operatorname{cotg} x \sec^2 x \operatorname{arctg} x + (\ln \operatorname{tg} x)/(1 + x^2)]$

5. Determine y' por derivação implícita.

(a) $y = x \operatorname{sen} y$

(b) $e^x \cos y = x e^y$

(c) $x^2 + x \operatorname{arcsen} y = ye^x$

Respostas. (a) $y' = \frac{\operatorname{sen} y}{1 - x\cos y}$ (b) $y' = \frac{e^x \cos y - e^y}{e^x \operatorname{sen} y + xe^y}$
(c) $y' = \dfrac{\sqrt{1-y^2}(ye^x - \operatorname{arcsen} y - 2x)}{x - e^x\sqrt{1-y^2}}$

6. Esboce os gráficos das funções dadas, analisando-as previamente através de derivadas e limites apropriados.

(a) $y = x + \operatorname{sen} x$

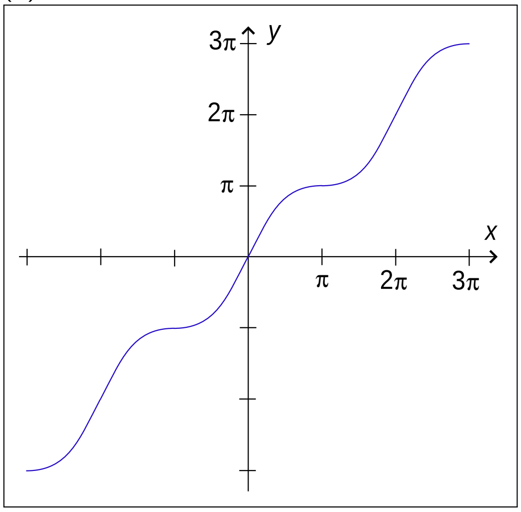
(b) $y = \operatorname{arctg} x$

(c) $y = x + \operatorname{arctg} x$

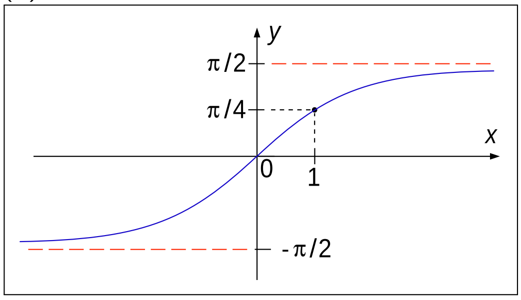
Respostas. (Daremos as derivadas como suporte às soluções.)
(a) $y' = 1 + \cos x$, $y'' = -\operatorname{sen} x$. Ao pesquisar retas assíntotas do gráfico, você vai se deparar com os limites $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$. Use o seguinte raciocínio. Como $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $\frac{-1}{x} \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \frac{1}{x}$, para todo $x > 0$. Daí, usando o teorema do confronto, teorema 11.1, temos $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$. Calcule também $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.
(b) $y' = \frac{1}{1+x^2}$, $y'' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ (c) $y' = 1 + \frac{1}{1+x^2}$, $y'' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

Esboços dos gráficos. Retas assíntotas do gráfico são indicadas em tracejado.

(a)



(b)



(c)