Aula 2

Derivadas e retas tangentes
Novas regras de derivação

2.1 A derivada como inclinação de uma reta tangente ao gráfico da função

Na aula anterior, o conceito de derivada foi apresentado através do conceito de velocidade instantânea. Veremos agora uma interpretação geométrica da derivada, em relação ao gráfico da função $y = f(x)$. Esta é uma idéia de Fermat[1].

Fixado um valor x_0, sendo definido $f(x_0)$, seja $\Delta x \neq 0$ um acréscimo (ou decréscimo) dado a x_0. Sendo $x_1 = x_0 + \Delta x$, temos que a razão

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

é o coeficiente angular da reta r, secante ao gráfico da curva $y = f(x)$, passando pelos pontos $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P = (x_1, f(x_1))$.

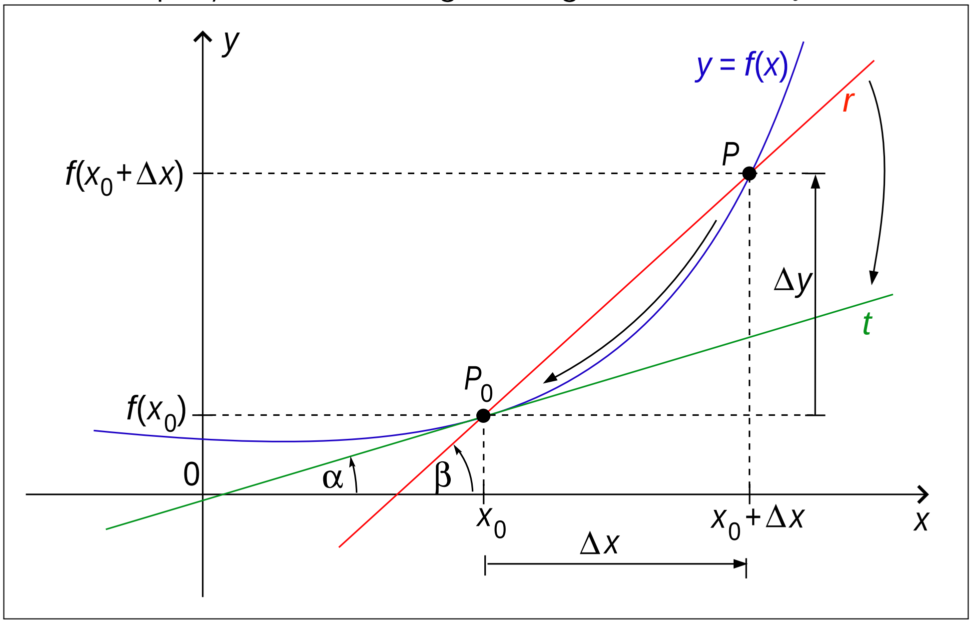
Observando os elementos geométricos da figura 2.1, temos que quando Δx tende a 0, o ponto P tem como posição limite o ponto P_0, e a reta secante P_0P terá como posição limite a reta t, tangente ao gráfico de f no ponto P_0.

Na figura, temos ainda, da geometria analítica elementar,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \textit{tangente do ângulo } \beta \\ &= \textit{coeficiente angular } (\text{ou } \textit{inclinação}) \textit{ da reta secante } P_0P \\ &= \frac{\Delta y}{\Delta x}. \end{aligned}$$

[1] Pierre de Fermat, século XVII, um dos criadores da moderna Teoria dos Números e também do Cálculo Diferencial e Integral.

Figura 2.1. A derivada da função f, em x_0, é a inclinação da reta t, tangente ao gráfico de f em P_0. Quando Δx tende a 0, o ponto P tende a ocupar a posição P_0, e a reta secante r tende à posição da reta t, tangente ao gráfico de f em P_0.



$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \textit{tangente do ângulo } \alpha \\ &= \textit{coeficiente angular da reta } t\textit{, tangente ao gráfico de } f\textit{, no ponto } P_0. \end{aligned}$$

Note aqui diferentes empregos (com diferentes significados) da palavra *tangente*: a *tangente* (trigonométrica) do ângulo α, nos dá a *inclinação*, ou *declividade*, ou *coeficiente angular*, da reta t, que é (geometricamente) *tangente ao gráfico de* f (ou que *tangencia o gráfico de* f) no ponto P_0.

Quando Δx tende a 0, β tende a α, e então $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\beta$ tende a $\operatorname{tg}\alpha$.

Daí, $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha$.

Assim, com este argumento geométrico e intuitivo, interpretamos $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$ como sendo o coeficiente angular (ou a inclinação) da reta t, tangente ao gráfico de f (ou seja, tangente à curva $y = f(x)$) no ponto $P_0 = (x_0, f(x_0))$.

Sabemos que a equação de uma reta, de coeficiente angular m, passando por um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$, é dada por

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Assim sendo, temos que a equação da reta t, tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $P_0 = (x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ é dada por

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Em geral, se queremos aproximar a função $f(x)$, nas proximidades de x_0, por uma função da forma $g(x) = ax + b$, tomamos $g(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$. O gráfico de g será então a reta tangente ao gráfico de f no ponto P_0. Dizemos que $g(x)$ é uma *linearização* de $f(x)$ nas proximidades de x_0.

A *reta normal* à curva $y = f(x)$, no ponto P_0 dessa curva, é a reta que passa por P_0 *perpendicularmente* à curva. Melhor dizendo, r é normal à curva $y = f(x)$, no ponto P_0, quando r passa por P_0 e é perpendicular à reta tangente à curva nesse ponto.

Lembre-se que se duas retas são perpendiculares, tendo coeficientes angulares m e m', então $m' = -1/m$.

Assim, se $f'(x_0) \neq 0$, a equação da reta r, normal à curva $y = f(x)$ no ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ tem equação

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Exemplo 2.1. *Qual é a equação da reta t, que tangencia a parábola $y = x^2$, no ponto $P = (-1, 1)$? Qual é a equação da reta r, normal à parábola nesse ponto?*

Solução. *Sendo $y = x^2$, temos $\frac{dy}{dx} = 2x$. Em P, temos $x_0 = -1$. O coeficiente angular da reta t é dado por*

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1} = 2 \cdot (-1) = -2.$$

Assim, a reta t, tangente à curva $y = x^2$ no ponto P, tem equação

$$y - 1 = (-2)(x - (-1))$$

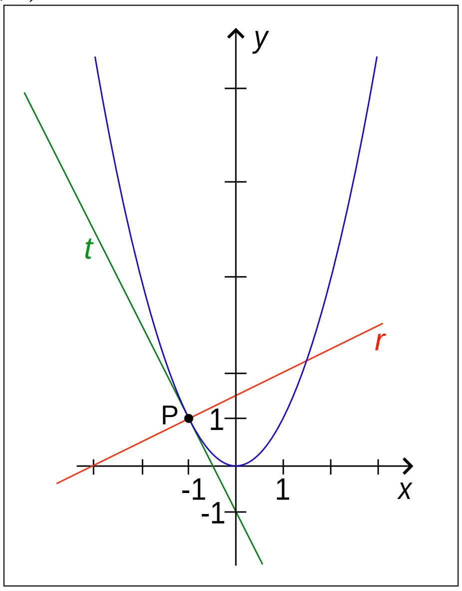
ou seja, $y = -2x - 1$.

Para escrever a equação da reta r, normal à curva no ponto P, fazemos uso do fato de que a declividade da reta r é $m_r = -\frac{1}{m_t} = \frac{1}{2}$.

Portanto, r tem equação $y - 1 = \frac{1}{2}(x + 1)$, ou ainda $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

Na figura 2.2 temos a representação da curva $y = x^2$ e das retas t e r, respectivamente tangente e normal à curva no ponto $P = (-1, 1)$.

Figura 2.2. Representação gráfica da curva $y = x^2$ e das retas t e r, tangente e normal à curva no ponto $P = (-1, 1)$.



Exemplo 2.2. *Determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de* $y = f(x) = x^2 - 4x$, *no ponto de abscissa (primeira coordenada)* $x_0 = p$, *sendo* p *um número real. Em qual ponto do gráfico a reta tangente ao gráfico é horizontal?*

Solução. *O coeficiente angular da reta tangente à curva* $y = x^2 - 4x$, *no ponto de abscissa* p, *é* $m = f'(p)$. *Como* $f'(x) = 2x - 4$, *temos* $m = 2p - 4$.

No ponto $(p, f(p))$ *em que a reta tangente é horizontal, temos* $m = 0$, *ou seja,* $f'(p) = 0$. *Logo,* $p = 2$. *Assim, o ponto procurado é* $(2, -4)$.

2.2 Novas regras de derivação

Regra 2.1 (Derivada de um produto de funções). *Sendo* f *e* g *funções que tem derivadas* f' *e* g', *temos*

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Demonstração. Vamos admitir que $D(f) = D(g)$. Para um x no qual existam $f'(x)$ e $g'(x)$, temos

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x), \ \Delta g = g(x + \Delta x) - g(x).$$

Portanto

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f, \ g(x + \Delta x) = g(x) + \Delta g.$$

Assim sendo

$$\begin{aligned}\Delta(fg) &= (fg)(x+\Delta x) - (fg)(x)\\ &= f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)\\ &= (f(x)+\Delta f)(g(x)+\Delta g) - f(x)g(x)\\ &= f(x)g(x) + f(x)(\Delta g) + (\Delta f)g(x) + (\Delta f)(\Delta g) - f(x)g(x)\\ &= f(x)(\Delta g) + (\Delta f)g(x) + (\Delta f)(\Delta g)\end{aligned}$$

Portanto, se $\Delta x \neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\Delta(fg)}{\Delta x} &= f(x)\frac{\Delta g}{\Delta x} + \frac{\Delta f}{\Delta x}g(x) + \frac{\Delta f}{\Delta x}(\Delta g)\\ &= f(x)\frac{\Delta g}{\Delta x} + \frac{\Delta f}{\Delta x}g(x) + \frac{\Delta f}{\Delta x}\frac{\Delta g}{\Delta x}\Delta x\end{aligned}$$

E assim,

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(fg)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(f(x)\frac{\Delta g}{\Delta x} + \frac{\Delta f}{\Delta x}g(x) + \frac{\Delta f}{\Delta x}\frac{\Delta g}{\Delta x}\Delta x\right)\\ &= f(x)g'(x) + f'(x)g(x) + f'(x)g'(x)\cdot 0\\ &= f'(x)g(x) + g'(x)f(x)\end{aligned}$$

Portanto, $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. □

Observação 2.1. *Para um valor específico de x, digamos $x = x_0$, temos*

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Embora não tenhamos ainda mencionado, é fato que se podemos calcular o limite $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0)$, então temos $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f = 0$.

De fato,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot\Delta x = f'(x_0)\cdot 0 = 0.$$

Exemplo 2.3. *Daremos um exemplo para ilustrar a regra da derivada de um produto, que acabamos de deduzir. Considere $p(x) = (x^2+x+2)(3x-1)$*

Expandindo o produto que define $p(x)$, obtemos $p(x) = 3x^3+2x^2+5x-2$, e então $p'(x) = 9x^2+4x+5$.

Por outro lado, se aplicarmos a fórmula da derivada de um produto, obtemos o *mesmo resultado:*

$$\begin{aligned} p'(x) &= (x^2+x+2)'(3x-1)+(x^2+x+2)(3x-1)' \\ &= (2x+1)(3x-1)+(x^2+x+2)\cdot 3 \\ &= 9x^2+4x+5 \end{aligned}$$

Regra 2.2. *Sendo* g *uma função derivável, quando* $g \neq 0$ *temos*

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

Demonstração. Como na dedução da regra 2.1, temos $g(x+\Delta x) = g(x) + \Delta g$.

Sendo $y = \dfrac{1}{g(x)}$, temos

$$\begin{aligned} \Delta y &= \frac{1}{g(x+\Delta x)} - \frac{1}{g(x)} \\ &= \frac{1}{g(x)+\Delta g} - \frac{1}{g(x)} \\ &= \frac{g(x)-(g(x)+\Delta g)}{(g(x)+\Delta g)\cdot g(x)} \\ &= \frac{-\Delta g}{(g(x)+\Delta g)\cdot g(x)} \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta g}{\Delta x}\cdot\frac{1}{(g(x)+\Delta g)g(x)}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta g}{\Delta x}\cdot\frac{1}{(g(x)+\Delta g)g(x)} \\ &= -g'(x)\cdot\frac{1}{(g(x))^2} = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2} \end{aligned}$$

Aqui, fizemos uso da observação 2.1: sendo g derivável, temos $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta g = 0$. □

Exemplo 2.4. *Verifique a seguinte generalização da regra 1.1 para expoentes negativos: sendo* n *um inteiro positivo,* $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$.

Solução. *Aplicando o resultado da propriedade 2.2, temos*

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{(x^n)'}{(x^n)^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$$

Regra 2.3 (Derivada de um quociente).

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Demonstração. Deixamos a dedução desta regra para o leitor. Para deduzi-la, basta escrever $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ e então combinar as regras 2.1 e 2.2. □

Exemplo 2.5. *Calcular* y', *sendo* $y = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$

Solução. *Aplicando a fórmula para a derivada de um quociente, temos*

$$\begin{aligned} y' = \left(\frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}\right)' &= \frac{(x^3 - 1)'(x^3 + 1) - (x^3 + 1)'(x^3 - 1)}{(x^3 + 1)^2} \\ &= \frac{3x^2(x^3 + 1) - 3x^2(x^3 - 1)}{(x^3 + 1)^2} \\ &= \frac{6x^2}{(x^3 + 1)^2} \end{aligned}$$

2.3 Problemas

1. Utilizando regras de derivação previamente estabelecidas, calcule as derivadas das seguintes funções.

   (a) $f(x) = \frac{4x - 5}{3x + 2}$

   (b) $f(z) = \frac{8 - z + 3z^2}{2 - 9z}$

   (c) $f(w) = \frac{2w}{w^3 - 7}$

   (d) $s(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}$

   (e) $f(x) = \frac{1}{1 + x + x^2 + x^3}$

   (f) $f(x) = \frac{x^2 + 9x + 2}{7}$

2. Deduza a seguinte fórmula de derivação:

   $$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$$

   Dê um bom palpite (chute) sobre como seria a fórmula para $(f_1 f_2 \cdots f_{n-1} f_n)'$.

3. Ache as equações das retas tangentes ao gráfico de $y = \dfrac{5}{1+x^2}$, nos pontos $P = (0,5)$, $Q = (1,5/2)$ e $R = (-2,1)$. Esboce (caprichadamente) o gráfico dessa curva, *plotando* pontos com os seguintes valores de x: -3, -2, -1, 0, 1, 2 e 3. No mesmo sistema cartesiano, esboce também as retas tangentes à curva nos pontos P, Q e R.

4. Escreva as equações das retas tangente e normal à curva $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$ no ponto de abcissa $x = 3$.

5. Determine as equações das retas t e n, respectivamente tangente e normal à curva $y = x^2$, no ponto de abcissa p.

6. (Teste sua sensibilidade sobre derivadas) Esboce o gráfico de $y = x^2-4$, plotando os pontos de abcissas (valores de x) -2, -1, 0, 1, 2 e 3. Em cada um desses pontos, esboce a reta tangente ao gráfico, e tente adivinhar o seu coeficiente angular. Marque seu *chute* ao lado do ponto. Em seguida, calcule cada coeficiente angular usando a derivada y'. Compare seu chute com a resposta exata.

2.3.1 Respostas e sugestões

1. (a) $f'(x) = \dfrac{23}{(3x+2)^2}$

   (b) $f'(z) = \dfrac{-27z^2+12z+70}{(2-9z)^2}$

   (c) $f'(w) = \dfrac{-4w^3-14}{(w^3-7)^2}$

   (d) $s'(t) = 2t - \dfrac{2}{t^3}$

   (e) $f'(x) = -\dfrac{1+2x+3x^2}{(1+x+x^2+x^3)^2}$

   (f) $f'(x) = \dfrac{2x+9}{7}$ (Quando c é uma constante, temos a regra $\left(\frac{f}{c}\right)' = \frac{f'}{c}$)

2. $(f_1f_2\cdots f_{n-1}f_n)' = f_1'f_2\cdots f_{n-1}f_n + f_1f_2'\cdots f_{n-1}f_n + \cdots + f_1f_2\cdots f_{n-1}'f_n + f_1f_2\cdots f_{n-1}f_n'$.

3. As equações das três retas são, respectivamente, $y = 5$, $5x+2y-10 = 0$, e $4x-5y+13 = 0$.

4. Reta tangente: $y = 8x-22$. Reta normal: $x+8y-19 = 0$.

5. $t\colon y = 2px - p^2$;

   $n\colon y = -\dfrac{x}{2p} + \dfrac{1}{2} + p^2$ (se $p \neq 0$); $n\colon x = 0$ (se $p = 0$).