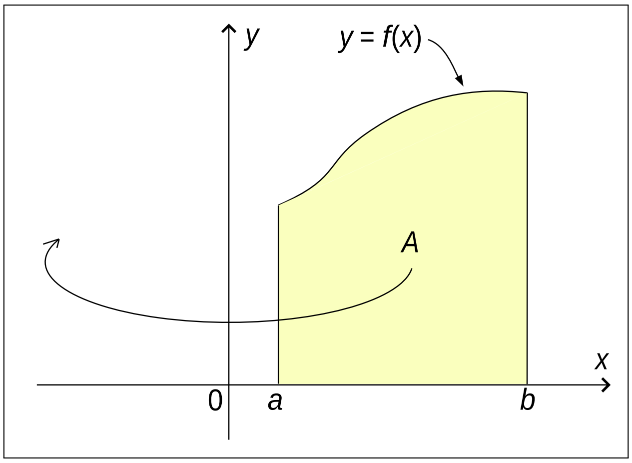
Aula 21

Tópicos adicionais de integração finita

21.1 Volume de um sólido de revolução pelo método das cascas cilíndricas

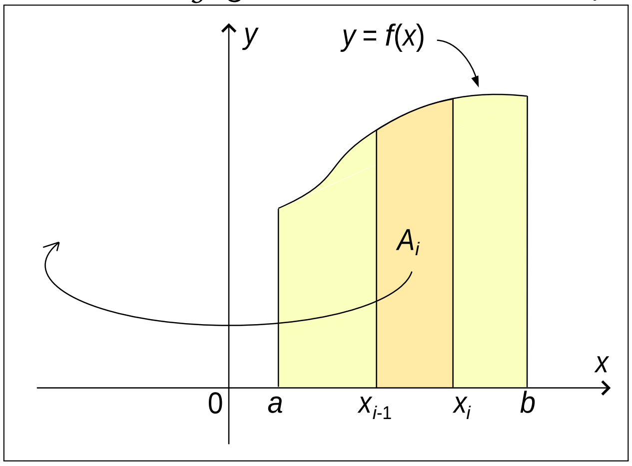
Um sólido é gerado pela revolução da região representada na figura 21.1 em torno do eixo y. O volume do sólido poderia ser calculado pelo método do fatiamento, por fatias horizontais, porém existe um método alternativo que, em algumas situações, é mais fácil de ser aplicado, podendo ser às vezes a única alternativa para o cálculo do volume do sólido. Este método é chamado de *método das cascas cilíndricas*.

Figura 21.1. A região plana A, ao ser rotacionada em torno do eixo y, gerará um sólido de volume V.



Suponhamos $f(x)$ contínua no intervalo $[a, b]$, sendo $f(x) \geq 0$ para cada x em $[a, b]$. Seja A a região do plano dada por $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$. Subdividamos o intervalo $[a, b]$, por pontos $a = x_0$, x_1, ..., x_{n-1}, $x_n = b$ em sub-intervalos de mesmo comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Sobre cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, consideremos a região A_i entre o gráfico de f e o eixo x (compreendida entre as retas verticais $x = x_{i-1}$ e $x = x_i$). Seja V_i o volume do sólido obtido pela revolução de A_i em torno do eixo y. O volume V do sólido gerado pela revolução da região A em torno do eixo y será $V = \sum_{i=1}^{n} V_i$.

Figura 21.2. A sub-região A_i, entre o gráfico de f e o eixo x, no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, ao ser rotacionada em torno do eixo y, gera um sólido de volume V_i.



Consideremos um ponto w_i em $[x_{i-1}, x_i]$, e tomemos o retângulo R_i erguido sobre o intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de altura $f(w_i)$. Para Δx suficientemente pequeno a área de R_i é uma aproximação da área de A_i. Também o cilindro perfurado obtido pela revolução do retângulo R_i tem o volume W_i como uma aproximação de V_i. Quando Δx torna-se pequeno, este cilindro perfurado é o que chamamos de uma *casca cilíndrica* (figura 21.3).

Sabemos que um cilindro circular reto, com base e topo circulares de raio r, e altura h, tem volume $\pi r^2 h$.

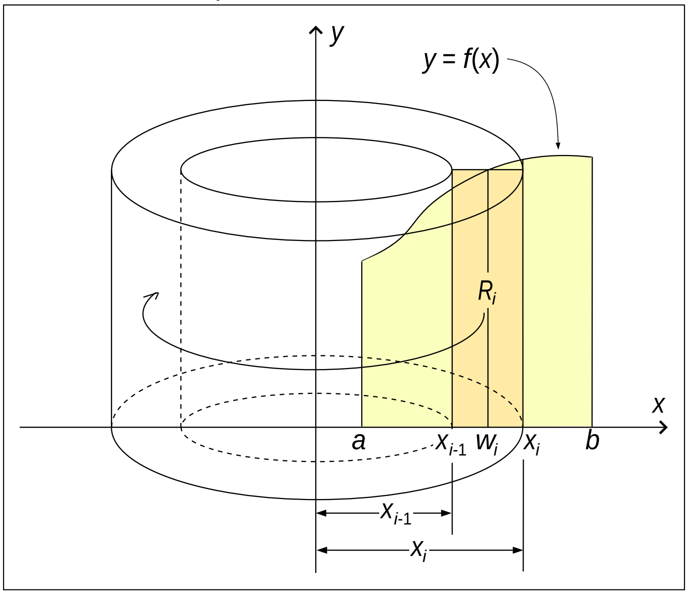
O volume W_i é a diferença de volumes de dois cilindros de altura $h_i = f(w_i)$. Para o cálculo de W_i, o volume de um cilindro "interno", de raio da base x_{i-1} (e altura h_i), é subtraído do volume de um cilindro "externo", de raio da base x_i (e altura h_i). Assim sendo, temos o volume W_i dado por

$$\begin{aligned} W_i &= \pi x_i^2 f(w_i) - \pi x_{i-1}^2 f(w_i) = \pi (x_i^2 - x_{i-1}^2) f(w_i) \\ &= \pi f(w_i)(x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

Tomando w_i como sendo o ponto médio do segmento $[x_{i-1}, x_i]$, teremos $w_i = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$ e então $x_{i-1} + x_i = 2w_i$. Assim sendo, como $x_i - x_{i-1} = \Delta x$, teremos

$$W_i = 2\pi w_i f(w_i) \Delta x$$

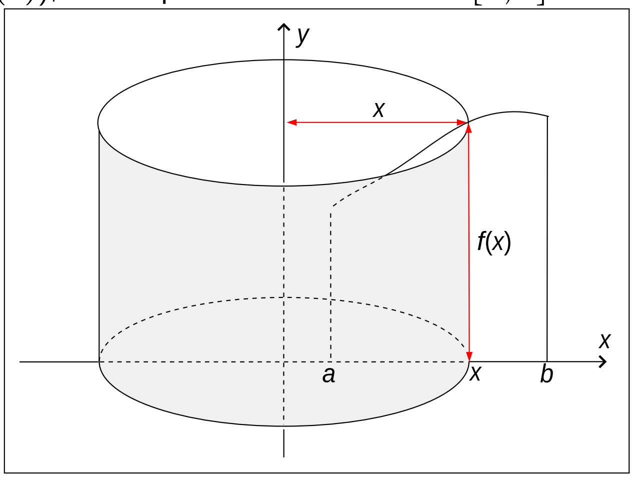
Figura 21.3. A região retangular R_i, ao ser rotacionada em torno do eixo y, gerará um "cilindro perfurado" de volume W_i.



Para Δx torna-se suficientemente pequeno temos

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i \approx \sum_{i=1}^{n} W_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi w_i f(w_i)\Delta x \tag{21.1}$$

Figura 21.4. O sólido de revolução é a reunião de superfícies cilíndricas de raio x e altura $f(x)$ (e área $2\pi x f(x)$), com x percorrendo o intervalo $[a, b]$.



A soma que aparece no somatório à direita em (21.1) é uma soma integral da função $2\pi x f(x)$ no intervalo $[a, b]$, correspondente à partição $x_0, x_1, \dots, x_n$ e pontos intermediários $w_1, w_2, \dots, w_n$.

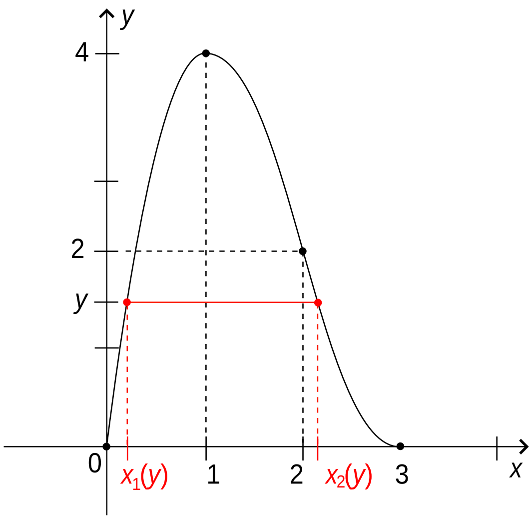
Quando $\Delta x \to 0$, a soma integral tenderá ao volume V, ou seja

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi w_i\, f(w_i)\Delta x = \int_a^b 2\pi x\, f(x)\, dx \qquad (21.2)$$

A ideia principal ao fazer uso do método das cascas cilíndricas é a seguinte. Para cada $x \in [a, b]$, uma superfície cilíndrica de raio x e altura $f(x)$ é considerada (figura 21.4). A área desta superfície é $2\pi x\, f(x)$. A reunião dessas superfícies, quando x percorre o intervalo $[a, b]$ é o sólido de revolução da região A em torno do eixo y. A integral definida dessas áreas no intervalo $[a, b]$ nos dará o volume $V = \int_a^b 2\pi x\, f(x)\, dx$.

Exemplo 21.1. *Calcular o volume obtido pela revolução, em torno do eixo y, da região compreendida entre o gráfico de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ e o eixo x, para $0 \le x \le 3$.*

Solução. O gráfico de f, para x no intervalo $[0, 3]$, é como o esboçado na figura ao lado. Note que se quisermos determinar o volume do sólido de revolução pelo método do fatiamento, teremos que determinar, para cada $y \in [0, 4]$ os valores $x_1 = x_1(y)$ e $x_2 = x_2(y)$ em $[0, 3]$, $x_1 < x_2$, tais que $f(x_1) = f(x_2) = y$, o que não é possível na prática.
Usando então o método das cascas cilíndricas, o volume procurado será dado por $V = \int_0^3 2\pi x\, f(x) dx$, ou seja



$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 2\pi x(x^3 - 6x^2 + 9x)\, dx \\ &= 2\pi \int_0^3 (x^4 - 6x^3 + 9x^2)\, dx = 2\pi \left(\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{2} + 3x^3 \right)\Bigg|_0^3 \\ &= 2\pi \left(\frac{3^5}{5} - \frac{3^5}{2} + 3^4 \right) = 16{,}2\pi \approx 50{,}8938 \ \text{unidades de volume} \end{aligned}$$

Observação 21.1. *Se f e g são funções contínuas em $[a, b]$, sendo $0 \le a < b$ e $f(x) \ge g(x)$ para cada $x \in [a, b]$, e A é a região plana delimitada pelos gráficos de f e g e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, então adaptando a dedução feita para obtenção da fórmula 21.1, podemos deduzir que o volume do sólido obtido pela revolução da região A em torno do eixo y terá volume*

$$V = \int_a^b 2\pi x(f(x) - g(x))\, dx.$$

21.2 Integrais impróprias

21.2.1 Integrais impróprias com funções integrandas descontínuas em um ou ambos os extremos de integração

Definição 21.1. *Sejam* a *e* b *números reais,* $a < b$ *e suponhamos que a função* $f(x)$ *satisfaz uma das seguintes condições*

(i) $f(x)$ *é contínua em* $]a, b]$ *e tem uma descontinuidade infinita em* a*, ou seja,* $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ *ou* $-\infty$

(ii) $f(x)$ *é definida em* $[a, b]$ *mas é descontínua em* a*, ou seja,* $\lim_{x \to a^+} f(x) \neq f(a)$ *ou* $\lim_{x \to a^+} f(x)$ *não existe.*

(iii) $f(x)$ *não é definida em* $x = a$ *mas o limite* $\lim_{x \to a^+} f(x)$ *existe e é finito.*

Então definimos a integral $\int_a^b f(x)\,dx$ *como sendo*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

Se $\lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx = L$*, com* L *real, dizemos que* $\int_a^b f(x)\,dx$ *é* convergente. *Se o limite não existir ou for infinito, dizemos que* $\int_a^b f(x)\,dx$ *é* divergente.

Exemplo 21.2. *Calcular* $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \quad (a > 0).$

Solução. A função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ é definida e contínua no intervalo $]0, +\infty[$, tendo uma descontinuidade infinita no ponto 0.

Sendo $0 < t < a$, $\int_t^a \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_t^a x^{-1/2}\,dx = 2(x^{1/2})\big|_t^a = 2(\sqrt{a} - \sqrt{t})$.

Portanto $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t \to 0+} 2(\sqrt{a} - \sqrt{t}) = 2\sqrt{a}$, sendo portanto convergente a integral $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

Definição 21.2. *Sejam* a *e* b *números reais,* $a < b$ *e suponhamos que a função* $f(x)$ *satisfaz uma das seguintes condições*

(i) $f(x)$ *é contínua em* $[a, b[$ *e tem uma descontinuidade infinita em* b*, ou seja,* $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$ *ou* $-\infty$

(ii) $f(x)$ *é definida em* $[a, b]$ *mas é descontínua em* b*, ou seja,* $\lim_{x \to b^-} f(x) \neq f(b)$ *ou* $\lim_{x \to b^-} f(x)$ *não existe.*

(iii) $f(x)$ *não é definida em* $x = b$ *mas o limite* $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ *existe e é finito.*

Então definimos a integral $\int_a^b f(x)\,dx$ *como sendo*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{s\to b^-} \int_a^s f(x)\,dx$$

Se $\lim\limits_{s\to b^-} \int_a^s f(x)\,dx = L$, *com* L *real, dizemos que* $\int_a^b f(x)\,dx$ *é* convergente. *Se o limite não existir ou for infinito, dizemos que* $\int_a^b f(x)\,dx$ *é* divergente.

Exemplo 21.3. *Calcular* $\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx$

Solução. A função $\sec x$ é contínua no intervalo $[0, \pi/2[$ e $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \sec x = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$.

Agora, sendo $0 \leq s < \pi/2$, $\int_0^s \sec x\,dx = (\ln|\sec x + \operatorname{tg} x|)_0^s = \ln|\sec s + \operatorname{tg} s|$. Assim sendo,

$\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx = \lim\limits_{s\to\frac{\pi}{2}^-} \ln|\sec s + \operatorname{tg} s| = +\infty$ (pois $\sec x \to +\infty$ e $\operatorname{tg} s \to +\infty$ quando $s \to \frac{\pi}{2}^-$), sendo portanto uma integral divergente.

Definição 21.3 (Convenções adicionais).

(i) *As integrais definidas estabelecidas pelas definições 21.1 e 21.2 recebem o nome de* integrais impróprias.

(ii) *Se* $f(x)$ *é contínua em* $]a, b[$ *e tem descontinuidades nos pontos extremos* a *e* b, *convencionamos que* $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, *sendo* $a < c < b$, c *qualquer, e as integrais* $\int_a^c f(x)\,dx$ *e* $\int_c^b f(x)\,dx$ *definidas conforme estabelecido nas definições 21.1 e 21.2.*

Dizemos que a integral $\int_a^b f(x)\,dx$ *é convergente se ambas as integrais impróprias* $\int_a^c f(x)\,dx$ *e* $\int_c^b f(x)\,dx$ *são convergentes. Caso contrário, a integral* $\int_a^b f(x)\,dx$ *será divergente.*

(iii) *Se* $f(x)$ *é contínua em* $[a, b] - \{c\}$, *sendo* $a < c < b$, *tendo* $f(x)$ *uma descontinuidade em* c, *então definimos* $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

Exemplo 21.4. *Calcular* $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Solução. A função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ é definida e contínua no intervalo $]-1, 1[$, tendo descontinuidade infinita nos extremos do intervalo. Conforme estabelecido na definição 21.3, $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Temos $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + C$, e então

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{a\to -1^+} \int_{a}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{a\to -1^+} (\operatorname{arcsen} 0 - \operatorname{arcsen} a) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{b\to 1^-} \int_{0}^{b} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{b\to 1^-} (\operatorname{arcsen} b - \operatorname{arcsen} 0) = \frac{\pi}{2}$$

Portanto

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

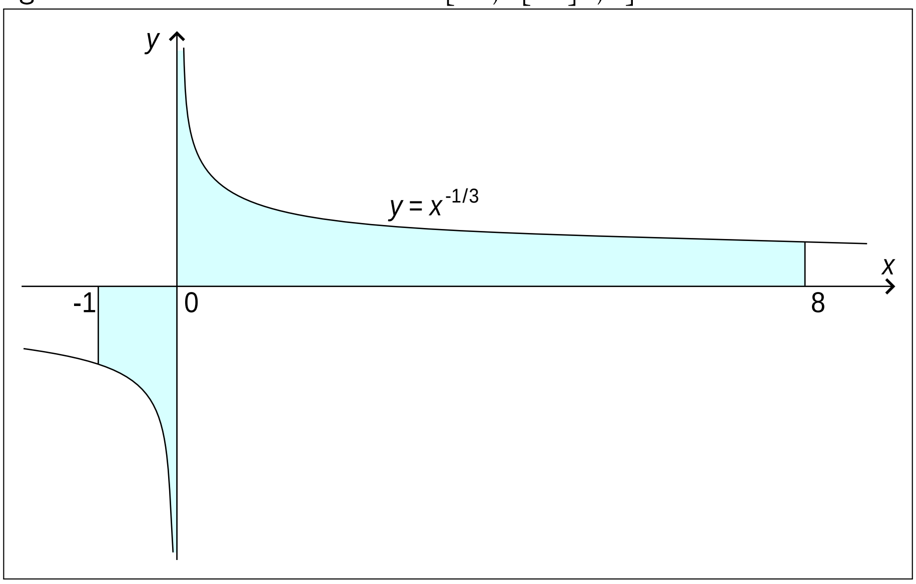
sendo assim uma integral convergente.

Exemplo 21.5. *Calcular* $\displaystyle\int_{-1}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

Solução. A função $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ é contínua em todos os pontos de $\mathbb{R} - \{0\}$, tendo uma descontinuidade infinita em $x = 0$.

A integral $\int_{-1}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ é a soma de integrais impróprias $\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx + \int_{0}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

Figura 21.5. $f(x) = 1/\sqrt[3]{x}$ tem descontinuidade infinita em $x = 0$ mas deixa áreas finitas entre seu gráfico e o eixo x nos intervalos $[-1, 0[$ e $]0, 8]$.



Temos $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int x^{-1/3}\,dx = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$, logo

$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim\limits_{c\to 0^-} \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim\limits_{c\to 0^-} \left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\right)\Big|_{-1}^{c} = \lim\limits_{c\to 0^-} \frac{3}{2}(\sqrt[3]{c^2} - 1) = -\frac{3}{2}.$

$\int_{0}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim\limits_{c\to 0^+} \int_{0}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim\limits_{c\to 0^+} \left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\right)\Big|_{c}^{8} = \lim\limits_{c\to 0^+} \frac{3}{2}(4 - \sqrt[3]{c^2}) = 6.$

Portanto $\int_{-1}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = -\frac{3}{2} + 6 = \frac{9}{2}.$

21.2.2 Integrais tendo limites de integração infinitos

Definição 21.4.

(i) Se a função $f(x)$ *é contínua no intervalo* $[a, +\infty[$, *definimos*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

Se $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx = L$, *com* L *real, dizemos que* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *é* convergente. *Se o limite não existir ou for infinito, dizemos que* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *é* divergente.

(ii) Se a função $f(x)$ *é contínua no intervalo* $]-\infty, b]$, *definimos*

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

Se $\lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx = L$, *com* L *real, dizemos que* $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ *é* convergente. *Se o limite não existir ou for infinito, dizemos que* $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ *é* divergente.

(iii) Se $f(x)$ *é contínua em* $\mathbb{R}$, *definimos*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^b f(x)\,dx + \int_b^{+\infty} f(x)\,dx$$

(sendo b *um número real qualquer) mas apenas se ambas as integrais* $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ *e* $\int_b^{+\infty} f(x)\,dx$ *forem convergentes. Se ao menos uma destas integrais for divergente, diremos que* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ *é divergente.*

Exemplo 21.6. *Calcular* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx.$

Solução. A função $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ é contínua em $\mathbb{R}$ e $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$. Assim sendo,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{a\to+\infty} \int_0^a \frac{1}{x^2+1},dx = \lim_{a\to+\infty} (\operatorname{arctg} x)_0^a = \lim_{a\to+\infty} \operatorname{arctg} a = \pi/2$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{b\to-\infty} \int_b^0 \frac{1}{x^2+1},dx = \lim_{b\to-\infty} (\operatorname{arctg} x)_b^0 = \lim_{b\to-\infty} (-\operatorname{arctg} b) = \pi/2$$

Portanto $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$, sendo portanto uma integral convergente.

21.2.3 Alguns critérios para estabelecer convergência de integrais impróprias

Muitas vezes não somos capaz de estabelecer a convergência de uma integral imprópria pois não a conseguimos calcular diretamente. Mas por comparação (de desigualdade) com a integral imprópria de uma outra função a convergência ou divergência da integral pode ser estabelecida. Na sequência enunciamos alguns desses critérios de comparação e desenvolvemos exemplos de aplicação. São teoremas que apenas enunciaremos, sem fazer demonstrações.

Proposição 21.1. *Suponhamos que* $f(x)$ *e* $g(x)$ *são funções contínuas no intervalo* $]a,b[$, *sendo cada uma delas descontínua apenas em* a, *ou apenas em* b, *ou em ambos os extremos* a *e* b. *Suponhamos ainda que* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *para cada* x *em* $]a,b[$. *Então*

1. *se* $\int_a^b g(x)\,dx$ *converge então* $\int_a^b f(x)\,dx$ *converge.*
2. *se* $\int_a^b f(x)\,dx$ *diverge então* $\int_a^b g(x)\,dx$ *diverge.*

Proposição 21.2. *Suponhamos que* $f(x)$ *é função contínua no intervalo* $]a,b[$, *sendo descontínua apenas em* a, *ou apenas em* b, *ou em ambos os extremos* a *e* b. *Suponhamos ainda que* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *para cada* x *em* $]a,b[$, *sendo* $g(x)$ *uma função contínua em* $[a,b]$. *Então a integral* $\int_a^b f(x)\,dx$ *é convergente.*

Exemplo 21.7. *Estabelecer a convergência ou divergência da integral* $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$.

Solução. Temos $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$ contínua e positiva no intervalo $]-1,1[$, tendo descontinuidade infinita nos extremos -1 e 1.

Agora, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1+x^2)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Como $\sqrt{1+x^2} > 1$, temos $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} < 1$. Logo, para cada $x \in]-1,1[$,

$f(x) < \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot 1 = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Sendo $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, vimos no exemplo 21.4 que $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx$ é convergente. Portanto a integral imprópria $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$ é convergente.

Proposição 21.3. *Suponhamos que* $f(x)$ *é uma função contínua no intervalo* $]a, b[$, *sendo descontínua apenas em* a, *ou apenas em* b, *ou em ambos os extremos* a *e* b.
Se a integral $\int_a^b |f(x)|\,dx$ *é convergente então* $\int_a^b f(x)\,dx$ *é convergente.*

Exemplo 21.8. *Estabelecer a convergência ou divergência da integral* $\displaystyle\int_0^{\pi} x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x}\,dx$

Solução. Sendo $f(x) = x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, temos $f(x)$ descontínua em $x = 0$.

Temos também $|f(x)| = |x^3| \cdot |\operatorname{sen} \frac{1}{x}| \leq |x^3|$.

A função $g(x) = |x^3|$ é contínua em $[0, \pi]$. Pela proposição 21.2, a integral $\int_0^{\pi} |f(x)|\,dx$ é convergente.

Logo, pela proposição 21.3, $\int_0^{\pi} x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x}\,dx = \int_0^{\pi} f(x)\,dx$ é convergente.

Proposição 21.4. *Suponhamos que* $f(x)$ *e* $g(x)$ *são funções definidas e contínuas no intervalo* $[a, +\infty[$.

1. *Se* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *para cada* $x \geq a$, *e* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *é convergente, então* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *é convergente.*
2. *Se* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *para cada* $x \geq a$, *e* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *é divergente, então* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *é divergente.*
3. *Se* $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ *é convergente então* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *é convergente.*
4. *Se* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$, *sendo* L *real e positivo, então as integrais* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *e* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *são ambas convergentes ou ambas divergentes.*

As quatro propriedades enunciadas também são válidas para o caso das integrais impróprias $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ *e* $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$, *se* $f(x)$ *e* $g(x)$ *são definidas e contínuas no intervalo* $]-\infty, b]$ *(neste caso, no limite do item 4, toma-se* $x \to -\infty$*).*

Exemplo 21.9. *Estabelecer convergência ou divergência de cada uma das integrais*

(a) $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ *sendo* $p > 0$ *constante e* $a > 0$.

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^5 - \sqrt[3]{x^2}}\,dx$

Solução.

(a) Se $p \neq 1$, temos $\displaystyle\int \frac{1}{x^p}\,dx = \int x^{-p}\,dx = \frac{x^{-p+1}}{-p+1} + C$. Neste caso teremos

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b \frac{1}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right)_a^b = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{b^{-p+1}}{-p+1} - \frac{a^{-p+1}}{-p+1}\right)$$
$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } p < 1 \text{ (pois } -p+1 > 0) \\ \frac{1}{(p-1)a^{p-1}} & \text{se } p > 1 \text{ (pois } -p+1 = -(p-1) < 0) \end{cases}$$

Se $p = 1$, $\displaystyle\int \frac{1}{x^p}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$. Neste caso,

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \int_a^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} (\ln x)_a^b = \lim_{b\to+\infty} (\ln b - \ln a) = +\infty$$

Concluímos então que a integral $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ é convergente se $p > 1$ e divergente de $0 < p < 1$.

(b) Temos $x^2 > x$ se $x > 1$, portanto $-x^2 < -x$ se $x > 1$. Daí $f(x) = e^{-x^2} < e^{-x} = g(x)$ quando $x > 1$. Sendo $g(x) = e^{-x}$, temos

$\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} (-e^{-x})_1^b = \lim_{b\to+\infty} (-e^{-b} + e^{-1}) = \frac{1}{e}$

Pela proposição 21.4, a integral $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ é convergente.

Daí $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ é convergente.

(c) Sendo $f(x) = \dfrac{1}{x^5 - \sqrt[3]{x^2}}$, consideremos $g(x) = \dfrac{1}{x^5}$. Temos $f(x)$ e $g(x)$ contínuas no intervalo $[2, +\infty[$.

Agora $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5}{x^5 - x^{2/3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1 - x^{-13/3}} = \frac{1}{1-0} = 1.$

Pela proposição 21.4, ambas as integrais $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^5 - \sqrt[3]{x^2}}\,dx$ e $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^5}\,dx$ possuem o mesmo comportamento quanto à convergência ou divergência. Como a segunda integral é convergente, a primeira também o é.

21.3 Problemas

21.3.1 Volumes de sólidos de revolução pelo método das cascas cilíndricas

Calcule o volume do sólido de revolução obtido pela rotação da região dada em torno do eixo y.

1. Região delimitada pela curva $y = x^2$, pelo eixo x, e pelas retas $x = 1$ e $x = 2$. *Resposta.* $15\pi/2$.

2. Região plana delimitada pela curva $y = \operatorname{sen} x$ e pelo eixo x, para $0 \leq x \leq \pi$. *Resposta.* $2\pi^2$.

3. Região limitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2/8$. *Resposta.* $48\pi/5$.

4. Região delimitada pela curva $y = \sqrt{x^2+1}$, pelos eixos x e y, e pela reta $x = \sqrt{3}$. *Resposta.* $14\pi/3$.

5. Região delimitada pelo gráfico de $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - x + 5/2$, pelos eixos x e y, e pela reta $x = 4/3$ (sabendo que $f(x) > 0$ quando $x > 0$). *Resposta.* $8\pi/5$.

6. Região delimitada pela circunferência $(x-b)^2+y^2 = a^2$, sendo $b > a > 0$. *Resposta.* $2\pi^2 a^2 b$.

21.3.2 Integrais impróprias

Calcule ou determine divergência de cada uma das seguintes integrais impróprias.

1. $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$. *Resposta.* Diverge.

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+9}\,dx$. *Resposta.* $\pi/\sqrt{5}$.

3. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{x^2 \ln x}\,dx$. *Resposta.* $1/\ln 2$.

4. $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{ax}{x \ln x}\,dx \quad (a > 0)$. *Resposta.* Diverge.

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}\,dx$. *Resposta.* $\pi/8$.

Para cada uma das integrais, determine se converge ou diverge.

6. $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt[3]{x^4+1}}\,dx$. *Resposta.* Converge.

7. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x + \sqrt[3]{x^2+1} + 5}\,dx$. *Resposta.* Diverge.

8. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\ln x}\,dx$. *Resposta.* Diverge.

9. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx$. *Resposta.* Converge.

10. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx$. *Resposta.* Converge.