Aula 8

Máximos e mínimos

Nesta aula estaremos explorando alguns procedimentos estratégicos para determinar os *valores extremos* de uma função real de variável real $f(x)$, ou seja, o *valor máximo* e o *valor mínimo* de uma função contínua f, em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, no qual f tem derivada exceto possivelmente em um número finito de pontos, sem recorrer a um esboço do gráfico de f nesse intervalo.

Um teorema da Análise Matemática, conhecido na literatura como *Teorema de Weierstrass*, nos garante:

(Teorema de Weierstrass) *Se uma função f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ (sendo a e b números reais), então existem pontos x_0 e x_1 em $[a, b]$ tais que $f(x_0)$ e $f(x_1)$ são, respectivamente, os valores máximo e mínimo de $f(x)$, para x em $[a, b]$.*

Os pontos x_0 e x_1 aos quais se refere o teorema de Weierstrass são chamados *ponto de mínimo de* f e *ponto de máximo de* f, respectivamente, no intervalo $[a, b]$. O teorema é ilustrado na figura 8.1.

Elucidando os conceitos aqui apresentados, sendo $I \subset D(f)$ um intervalo (limitado ou ilimitado), dizemos que

1. $f(x_0)$ é o valor mínimo de f (ou de $f(x)$) em I se

$$f(x_0) \leq f(x), \text{ para cada } x \text{ em } I.$$

2. $f(x_1)$ é o valor máximo de f (ou de $f(x)$) em I se

$$f(x_1) \geq f(x), \text{ para cada } x \text{ em } I.$$

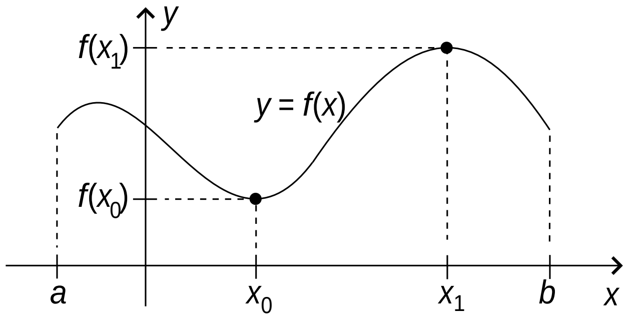


Figura 8.1. A função f, contínua em $[a, b]$, tem x_0 e x_1 como seus pontos de *mínimo* e de *máximo*, respectivamente. $f(x_0)$ e $f(x_1)$ são os valores mínimo de máximo de $f(x)$ em $[a, b]$.

Por exemplo, no intervalo $I = [-1, 3]$, a função dada por $f(x) = x^2$ tem um ponto de mínimo $x_0 = 0$, sendo $f(0) = 0$ seu valor mínimo, pois $x^2 \geq 0$ para todo $x \in I$.

Nesse intervalo, f tem também um ponto de máximo $x_1 = 3$ pois se $-1 \leq x \leq 3$ então $f(x) = x^2 \leq 9$ e $f(x_1) = f(3) = 9$ é o valor máximo de $f(x)$ em I.

Observação 8.1 (Ínfimo e supremo de uma função em um intervalo).

- *No intervalo aberto* $I =]1, +\infty[$ *a função* $g(x) = 3 + \frac{1}{x}$ *não tem valor mínimo e nem valor máximo. Para* $x > 1$ *temos também* $\frac{1}{x} > 0$*, logo* $g(x) = 3 + \frac{1}{x} > 3$ *para todo* $x \in I$*. Além disso,* $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 3$*. Mas* 3 *não é o valor mínimo de* $g(x)$ *em* I*, pois não existe* $x_0 \in I$ *com* $g(x_0) = 3$*. Neste contexto os matemáticos dizem que* 3 *é o valor* ínfimo *da função* g *no intervalo* I*.*

- *Se* $x \in I$*, temos* $x > 1$ *e então* $\frac{1}{x} < 1$*, daí* $g(x) = 3 + \frac{1}{x} < 4$*. Também* $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (3 + \frac{1}{x}) = 4$*. Mas* 4 *não é o valor máximo de* $g(x)$ *no intervalo* I *pois não existe* $x_1 \in I$ *tal que* $g(x_1) = 4$*. Neste contexto os matemáticos dizem que* 4 *é o valor* supremo *da função* g *no intervalo* I*.*

8.1 Estratégias para determinar máximos e mínimos de uma função contínua, em um intervalo

Sendo f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$, derivável exceto possivelmente em um número finito de pontos, como determinar os pontos do intervalo $[a, b]$ nos quais f atinge seus valores máximo e mínimo? Uma solução deste problema seria esboçar o gráfico de f nesse intervalo, conforme as estratégias desenvolvidas nas aulas 6 e 7, e então localizar os valores extremos de f. Mas como determinar os valores máximo e mínimo de f, no intervalo $[a, b]$, sem recorrer ao estudo do esboço de seu gráfico? É isto que trataremos de responder.

Recapitulando um conceito introduzido na aula 6, diremos que x_0 é um *ponto de mínimo local de* f se existe um intervalo aberto $I \subset D(f)$, com $x_0 \in I$, tal que

$$f(x_0) \leq f(x), \text{ para todo } x \text{ em } I$$

E neste caso, $f(x_0)$ é um *valor mínimo local de* f.

Figura 8.2. Pontos de mínimo típicos de uma função contínua no intervalo $[a, b]$.

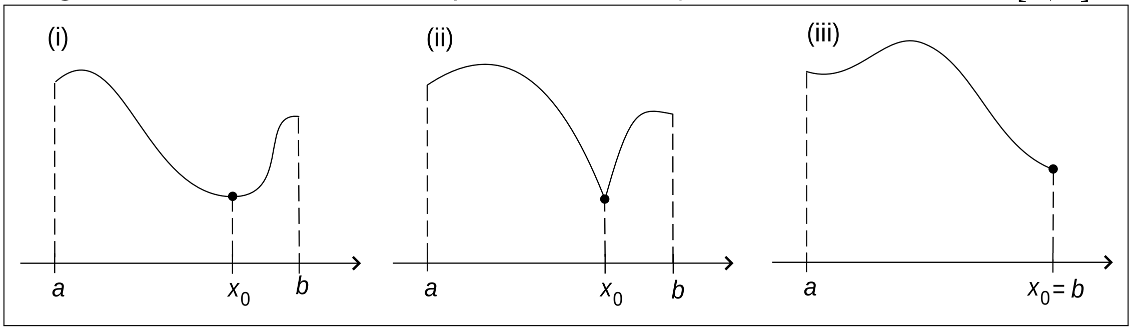
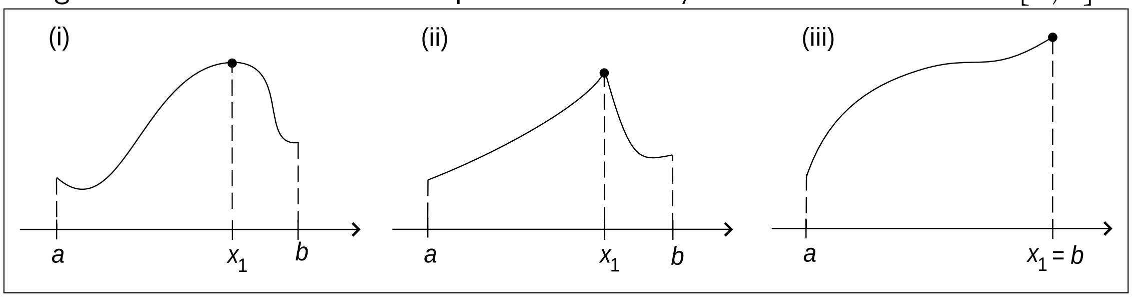


Figura 8.3. Pontos de máximo típicos de uma função contínua no intervalo $[a, b]$.



Analogamente, diremos que x_1 é um *ponto de máximo local de* f, e que $f(x_1)$ é um *valor máximo local de* f, se existe um intervalo aberto $I \subset D(f)$, com $x_1 \in I$, tal que

$$f(x_1) \geq f(x), \text{ para todo } x \text{ em } I$$

Teorema 8.1. *Se* f *tem derivada em um intervalo aberto* I, *e se* $x_0 \in I$ *é ponto de mínimo local de* f, *então* $f'(x_0) = 0$. *Se* $x_1 \in I$ *é ponto de máximo local de* f, *então* $f'(x_1) = 0$.

Demonstração. Suponhamos que x_0 é ponto de mínimo local de f e que existe $f'(x_0)$. Então $f(x_0)$ é o valor mínimo de $f(x)$ para x em um certo intervalo aberto $J \subset I$.

Mostraremos que $f'(x_0) = 0$, usando a definição de derivada.

Tome $\Delta x \neq 0$, com $x_0 + \Delta x \in J$.

Então $f(x_0) \leq f(x_0 + \Delta x)$ e daí $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geq 0$.

Se $\Delta x > 0$, temos $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0$, e se $\Delta x < 0$, temos $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0$.

Temos $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Neste caso, $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Mas $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0$ e $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0$.

Logo, $f'(x_0) \geq 0$ e $f'(x_0) \leq 0$, e portanto $f'(x_0) = 0$.

Deixamos ao leitor a dedução do resultado para pontos de máximo locais. □

Observação 8.2. *Observemos que se x_0 é um ponto de mínimo (absoluto) de f, então x_0 tem uma das seguintes características:*

(i) x_0 é também um ponto de mínimo local de f, e f tem derivada em x_0. Neste caso, conforme o teorema 8.1, $f'(x_0) = 0$.

(ii) x_0 é um ponto de mínimo local de f, mas f não tem derivada no ponto x_0.

(iii) x_0 é um dos extremos do intervalo $[a, b]$, ou seja, $x_0 = a$ ou $x_0 = b$.

Os casos (i), (ii) e (iii) são ilustrados na figura 8.2.

Observação 8.3. *Analogamente, se x_1 é um ponto de máximo de f, então x_1 tem uma das três seguintes características:*

(i) x_1 é também um ponto de máximo local de f, e f tem derivada em x_1. Neste caso, conforme o teorema 8.1, $f'(x_1) = 0$.

(ii) x_1 é um ponto de máximo local de f, mas f não tem derivada no ponto x_1.

(iii) x_1 é um dos extremos do intervalo $[a, b]$, ou seja, $x_1 = a$ ou $x_1 = b$.

Esses casos são ilustrados na figura 8.3.

Definição 8.1. *Um número real* x *é chamado um* ponto crítico de f *quando* $f'(x) = 0$ *ou quando* f *é contínua em* x *mas não existe* $f'(x)$.

Assim, um ponto de máximo ou de mínimo de uma função f, em um intervalo $[a, b]$, é um ponto crítico de f ou uma das extremidades do intervalo, conforme a definição 8.1 e as observações 8.2 e 8.3 feitas anteriormente.

Exemplo 8.1. *Determinar os valores máximo e mínimo de* $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$, *no intervalo* $[-3, 3]$.

Solução. A função f é contínua no intervalo $[-3, 3]$.

Temos $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2)$.

As soluções de $f'(x) = 0$ são $x_1 = -2$ e $x_2 = 1$. Estes são os pontos críticos de f no intervalo $[-3, 3]$.

Calculando os valores de f nos extremos do intervalo e nos pontos críticos, temos:

$f(x_1) = f(-2) = 20$, $f(x_2) = f(1) = -7$, $f(-3) = 9$ e $f(3) = 45$.

Assim sendo, por comparação dos valores obtidos, o ponto de mínimo de f, para $-3 \leq x \leq 3$, é $x_{min} = x_2 = 1$, sendo $f(1) = -7$ o valor mínimo de f nesse intervalo.

Já o ponto de máximo de f, para $-3 \leq x \leq 3$, é $x_{max} = 3$, sendo $f(3) = 45$ o valor máximo de f nesse intervalo. Como ilustração, temos um esboço do gráfico de f, no intervalo $[-3, 3]$, na figura 8.4.

Exemplo 8.2. *Determinar os valores máximo e mínimo de* $f(x) = \sqrt[3]{x^2} \cdot (x - 2)^2$, *no intervalo* $-1 \leq x \leq 1$.

Solução. A função f é contínua no intervalo $[-1, 1]$. $f'(x) = \dfrac{4(2x^2 - 5x + 2)}{3\sqrt[3]{x}}$.

Temos $f'(x) = 0$ se e somente se $x = 2$ ou $x = 1/2$.

Agora, 0 também é um ponto crítico de f, uma vez que f é contínua no ponto 0, mas não se define $f'(0)$.

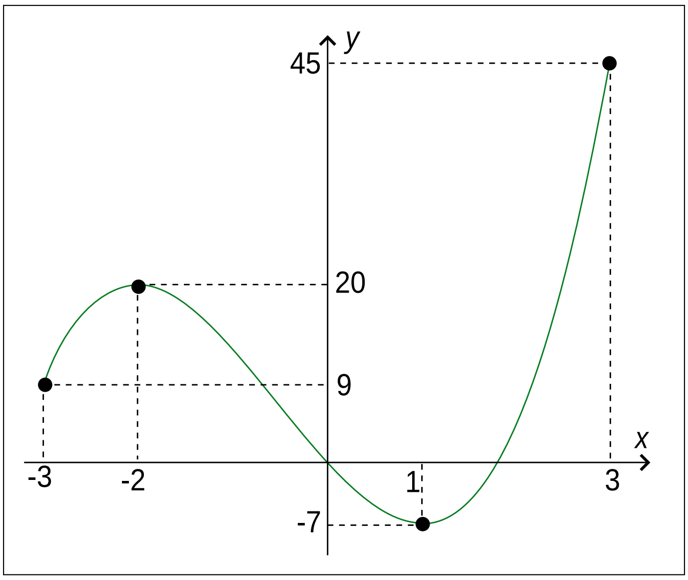
Assim, Como $2 \notin [-1, 1]$, os pontos críticos de f são $x_1 = 1/2$ e $x_2 = 0$.

Calculando os valores de f nos extremos do intervalo e nos pontos críticos, temos:

$f(x_1) = f(1/2) = \frac{9}{4\sqrt[3]{4}} \approx 1,4 \quad (\sqrt[3]{4} \approx 1,6)$, $f(0) = 0$, $f(-1) = 9$ e $f(1) = 1$.

Portanto, $f(0) = 0$ é o valor mínimo de f, enquanto que $f(-1) = 9$ é seu valor máximo.

Figura 8.4. No intervalo $[-3,3]$, -2 é ponto de máximo local de f e 3 é o ponto de máximo absoluto. O ponto 1 é ponto de mínimo local e absoluto de f. $f(1) = -7$ e $f(3) = 45$ são os valores mínimo e máximo de f no intervalo.



Questão Como determinar os pontos de um intervalo $I \subset D(f)$, nos quais f atinge seus valores máximo e mínimo, se I é um intervalo aberto ou ilimitado, e f é contínua em I?

Para esta pergunta a resposta é:
Sendo f contínua em um intervalo I, comparamos os valores de f nos extremos que efetivamente pertencem ao intervalo com os valores de f nos seus pontos críticos desse intervalo. Comparamos ainda esses valores com os limites de $f(x)$ quando x tende a extremos que não pertencem ao intervalo.

Como reforço estratégico na pesquisa de máximos e mínimos locais, temos também o seguinte teorema.

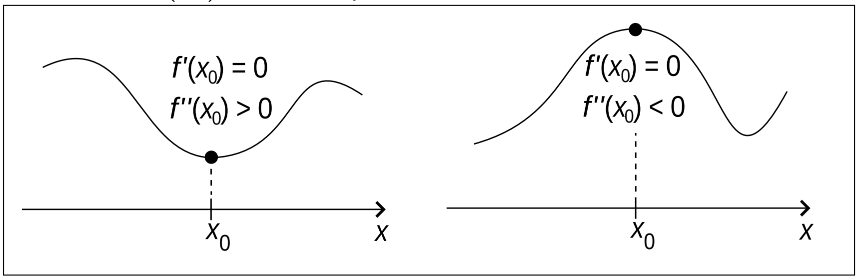
Teorema 8.2. *Sendo f uma função contínua, com f' também contínua, em um intervalo aberto I, e x_0 um ponto de I,*

1. *se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$, então x_0 é um ponto de mínimo local de f;*

2. *se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$, então x_0 é um ponto de máximo local de f;*

Não faremos a demonstração do teorema 8.2 aqui, mas faremos a seguinte observação geométrica, que o torna intuitivamente óbvio.

Figura 8.5. O teste da segunda derivada quando $f'(x_0) = 0$. Se $f''(x_0) > 0$, x_0 é ponto de mínimo local. Se $f''(x_0) < 0$, x_0 é ponto de máximo local.



Se $f'(x_0) = 0$, a reta tangente ao gráfico de f, em $P = (x_0, f(x_0))$, é horizontal.

Se, além disso, $f''(x_0) > 0$, temos a concavidade do gráfico de f, em P, voltada para cima, e assim x_0 é um ponto de mínimo local de f. Se $f''(x_0) < 0$, a concavidade do gráfico de f, em P, é voltada para baixo, e x_0 é então um ponto de máximo local de f. Estas duas possibilidades são ilustradas na figura 8.5.

Exemplo 8.3. *Determinar os valores máximo e mínimo de* $f(x) = x + \frac{1}{x}$, *para* $x > 0$.

Solução. Estamos procurando os valores máximo e mínimo de f no intervalo $]0, +\infty[$. Temos $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, e portanto $f'(x) = 0$ (com $x > 0$) se e somente se $x = 1$.

Agora, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 + \frac{1}{0^+} = +\infty$ e $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. Portanto, f não tem valor máximo em $]0, +\infty[$.

Temos ainda $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ e $f''(1) > 0$. Assim, $x_1 = 1$ é ponto de mínimo local de f. Como f não tem outros pontos críticos, 1 é o ponto de mínimo global de f, sendo $f(1) = 2$ o valor mínimo de f no intervalo $]0, +\infty[$.

8.2 Aplicações a problemas de otimização

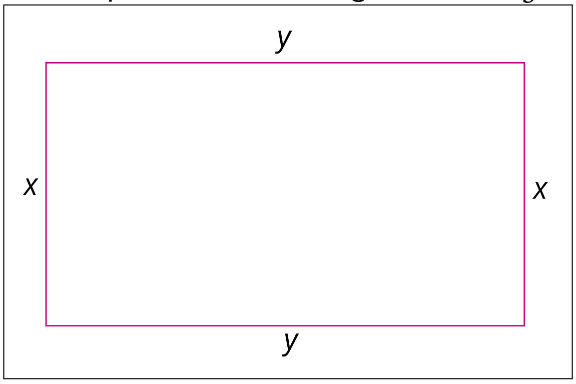
Exemplo 8.4. *Qual é a maior área retangular que pode ser cercada com 200 m de tela de arame?*

Solução.

(Passo 1) *Analisamos o problema, e desenhamos um diagrama incluindo toda a informação. Introduzimos variáveis.*

Fazemos isto na figura 8.6.

Figura 8.6. O perímetro do retângulo é $2x + 2y = 200\,\text{m}$.



(Passo 2) *Expressamos a quantidade a ser otimizada como uma função de uma variável. Determinamos o domínio dessa função a partir das condições do problema.*

A área A do retângulo deve ser maximizada, sob a condição de que o perímetro é

$$2x + 2y = 200 \text{ metros}$$

Essa área é dada por $A = xy$. Como $y = 100 - x$, temos

$$A = A(x) = x(100 - x)$$

e, nas condições do problema, temos $0 \leq x \leq 100$.

(Passo 3) *Determinamos o ponto de máximo e o valor máximo da função, no intervalo em que ela está definida.*

Usando os procedimentos discutidos anteriormente, sendo $A(x) = 100x - x^2$, temos $A'(x) = 100 - 2x$.

$A'(x) = 0$ se e somente se $x = 50$. Temos $A(50) = 50 \cdot (100 - 50) = 50^2 = 2500$. Temos ainda $A(0) = A(100) = 0$ (valor mínimo da área).

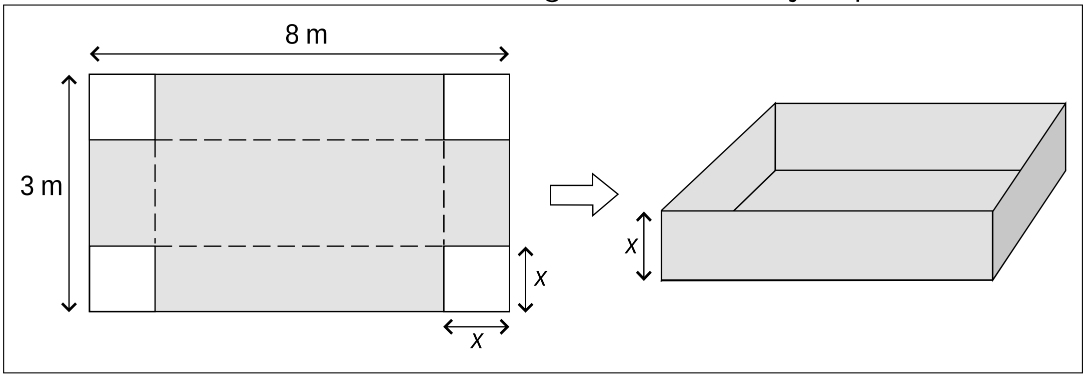
Assim, o valor máximo de $A(x)$ é atingido quando $x = 50\,\text{m}$. Assim, o retângulo de perímetro $200\,\text{m}$, com área máxima, é um quadrado de $50\,\text{m}$ de lado.

Exemplo 8.5. *Uma grande caixa deve ser construída cortando-se quadrados iguais dos quatro cantos de uma folha retangular de zinco, de 3 m por 8 m, dobrando-se os quatro lados (abas laterais) para cima e soldando-se as arestas verticais que ficaram justapostas. Encontre o maior volume possível para esta caixa.*

Solução.

(1) Um diagrama contendo todas as informações do problema, bem como a introdução de uma variável, é mostrado na figura 8.7

Figura 8.7. Um quadrado de lado x será recortado de cada canto da folha retangular. A parte remanescente da folha será dobrada segundo a linha tracejada para formar a caixa.



(2) O volume da caixa ilustrada no diagrama da figura 8.7 é dado por

$$V = V(x) = x(8-2x)(3-2x), \text{ para } 0 \leq x \leq 3/2$$

Note que o lado x do quadrado recortado não pode exceder a metado do lado menor do retângulo, daí a condição $x \leq 3/2$. A rigor deveríamos considerar x no intervalo $]0, 3/2[$, mas vamos tomar o intervalo fechado para descomplicar.

(3) $V'(x) = 0$ se e somente se $x = 2/3$ ou $x = 3$ (esta última solução está descartada, pois $3 \notin [0, 3/2]$).

O único ponto crítico de V é $2/3$. Nas extremidades do intervalo $[0, 3/2]$ temos $V = 0$. Como $V \geq 0$, o ponto crítico só pode ser um ponto de máximo local, e portanto de máximo absoluto.

Assim, $x_0 = 2/3$ é ponto de máximo de V, e as dimensões da caixa de volume máximo são $8 - x_0 = 20/3$, $3 - 2x_0 = 5/3$ e $x_0 = 2/3$ m, tendo ela volume $200/27\,\text{m}^3$.

Exemplo 8.6. *Deseja-se construir uma lata cilíndrica totalmente fechada, de volume v, gastando-se, em sua confecção, a menor quantidade de material possível. Determine a razão entre a altura e o diâmetro dessa lata.*

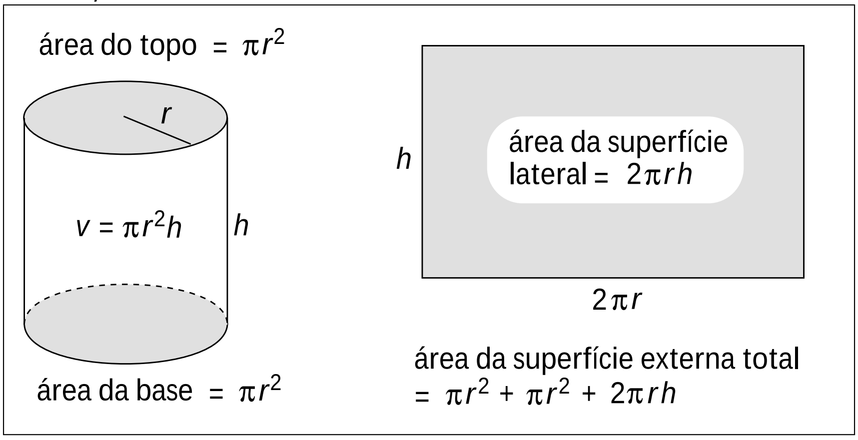
Solução.

(1) Diagramas contendo todas as informações do problema, bem como a introdução de uma variável, estão na figura 8.8.

(2) A superfície externa total da lata cilíndrica, ilustrada na figura 8.8, é dada por

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

Figura 8.8. Dedução da área externa total de um cilindro de raio da base r e altura h.



Como $\pi r^2 h = v$, temos $h = \dfrac{v}{\pi r^2}$, e então

$$S = S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2v}{r}$$

sendo $S(r)$ definida somente para $r > 0$.

(3) $S'(r) = 4\pi r - \dfrac{2v}{r^2}$.

$S' = 0$ se e somente se $r = \sqrt[3]{\dfrac{v}{2\pi}}$, e este é o único ponto crítico de S no intervalo $r > 0$.

Temos também que $\lim\limits_{r \to 0} S(r) = +\infty$ e $\lim\limits_{r \to +\infty} S(r) = +\infty$. Assim, $S(r)$ não tem valor máximo, e seu único ponto crítico só pode ser ponto de mínimo local. Isto é confirmado observando-se que $S''(r) = 4\pi + \dfrac{4v}{r^3} > 0$ para todo $r > 0$. Portanto, o gráfico de $S = S(r)$ tem convavidade voltada para cima, o que confirma $r = \sqrt[3]{\dfrac{v}{2\pi}}$ como seu ponto de mínimo local, e também ponto de mínimo absoluto da função S.

Sendo $r = \sqrt[3]{v/(2\pi)}$, temos

$$\frac{h}{r} = \frac{v}{\pi r^3} = \frac{v}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}\right)^3} = \frac{v}{\pi\left(\frac{v}{2\pi}\right)} = 2$$

Portanto, $h = 2r$, ou seja, a altura da lata deve ser igual ao diâmetro da base se quisermos minimizar o material a ser gasto em sua confecção.

Este é o padrão, ao menos aproximado, de algumas latas de conservas, tais como latas de creme de leite e latas de compotas de frutas. Por questões de praticidade, muitas latas fogem deste padrão, como por exemplo as latas de óleo comestível.

8.3 Problemas

Encontre os pontos de máximo (x_{max}) e de mínimo (x_{min}), bem como os valores $f(x_{max})$ e $f(x_{min})$, máximo e mínimo, de cada função $f(x)$ dada, no intervalo indicado.

1. $f(x) = \sqrt[3]{x}(x+4)$, $x \in [-4, 2]$

   Resposta. $x_{min} = -1$, $x_{max} = 2$, $f(-1) = -3$, $f(2) = 6\sqrt[3]{2} \approx 7,6$.

2. $f(x) = x^2 + 2x - 4$, $x \in [-2, 2]$.

   Resposta. $x_{min} = -1$, $x_{max} = 2$, $f(-1) = -5$, $f(2) = 4$.

3. $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

   Resposta. $x_{min} = -1$, $x_{max} = 1$, $f(-1) = -1/2$, $f(1) = 1/2$.

4. $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$, $x \neq \pm 1$.

   Resposta. f não tem valor máximo e nem mínimo.

Resolva os seguintes problemas de otimização.

1. Um recipiente de lata, de forma cilíndrica e aberto no topo, deve ter capacidade de v litros. Determine a razão entre a altura h e o diâmetro d da base de modo que a quantidade de lata usada na sua fabricação seja a menor possível.

   Resposta. $h/d = 1/2$.

2. Um estudante quer construir um viveiro retângular para seu hamster, usando parte de uma parede como um dos lados e cercando os demais três lados com 3 metros de tela disponíveis, obtendo a maior área retangular possível. Quais devem ser as dimensões de seu viveiro?

   Resposta. O viveiro deve ter 1,5 m na frente e 0,75 m nos lados.

3. Determine as dimensões de um cilindro, de volume máximo, inscrito em uma esfera de raio R. Determine então a razão entre o diâmetro da base e a altura do cilindro.

   Sugestão. Faça um desenho visualizando o cilindro de perfil dentro da esfera. No desenho, você terá um retângulo dentro de um círculo. Demarque a altura h do cilindro, e diâmetro da sua base, $2r$. Demarque também o raio R da esfera dentro do retângulo. Use o teorema de Pitágoras obter uma relação entre h e r. O volume do cilindro é dado por $V = (\textit{área da base}) \cdot (\textit{altura}) = \pi r^2 \cdot h$.

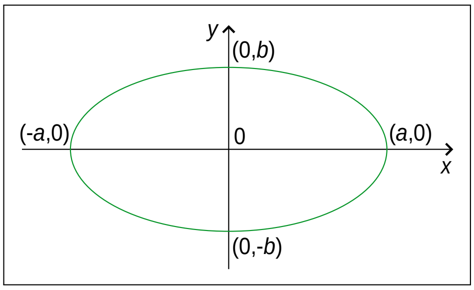
   Resposta. r = raio da base = $\sqrt{\frac{2}{3}}R$, h = altura do cilindro = $\sqrt{2}r$. $2r/h = \sqrt{3}/2$.

4. Determine as dimensões de um cilindro, inscrito em uma esfera de raio R, cuja área da superfície externa total é a máxima possível. Determine então a razão entre o diâmetro da base e a altura do cilindro.

   Resposta. r = raio da base = $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}R$, h = altura do cilindro = $2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}R$. $2r/h = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (esta é a *razão área maior*[1]).

   Sugestão. Uma atenção necessária. Escolhendo r como variável, em algum momento serão buscadas soluções da equação $r\sqrt{R^2 - r^2} = 2r^2 - R^2$. Quadrando ambos os membros chegaremos a $r^2 = \frac{5\pm\sqrt{5}}{10}R^2$. Mas se $r^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}R^2$ então $2r^2 - R^2 < 0$, o que descarta um dos valores de r^2.

5. Determine as dimensões de um retângulo inscrito na elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, de área máxima, com dois de seus lados paralelos ao eixo x (e os outros dois paralelos ao eixo y).

   *S*ugestão. Os quatro vértices do retângulo, todos pertencentes à elipse, serão pontos (x, y), $(-x, y)$, $(x, -y)$ e $(-x, -y)$.

   Resposta. O retângulo tem dimensões $\sqrt{2}a$ e $\sqrt{2}b$.

6. Quer-se construir um tanque de aço para armazenar gás propano, com a forma de um cilindro circular reto, com um hemisfério (semi-esfera) em cada extremidade. Se a capacidade desejada para o tanque é 100 decímetros cúbicos (litros), quais as dimensões que exigem a menor quantidade de aço? (Despreze a espessura das paredes do tanque).

   Resposta. O tanque deve ser esférico, de raio $\sqrt[3]{75/\pi} \approx 2,88$ metros.

7. Qual ponto da parábola $y = x^2 + 1$ está mais próximo do ponto $A = (3, 1)$?
   Sugestão. A distância de um ponto qualquer $P = (x, y)$ ao ponto A é dada por $d = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2}$. Se P é um ponto da parábola, temos $y = x^2 + 1$, e então $d = \sqrt{(x-3)^2 + x^4}$. Como $d \geq 0$, temos que d terá seu valor mínimo quando d^2 assumir seu valor mínimo. Assim, basta procurarmos o valor mínimo de $f(x) = (x-3)^2 + x^4$. *Resposta.* $(1, 2)$.

8. Um veterinário tem 100 m de tela de arame. Com isto deseja construir seis canis, primeiro cercando uma região retangular e depois subdividindo essa região em seis retângulos menores, através de cinco cercas divisórias internas, paralelas a um dos lados. Que dimensões externas, dessa região retangular, maximizam sua área total, se o veterinário gasta os 100 m de tela nessa construção?

   Resposta. 25 m por $50/7 \approx 7,14$ m.

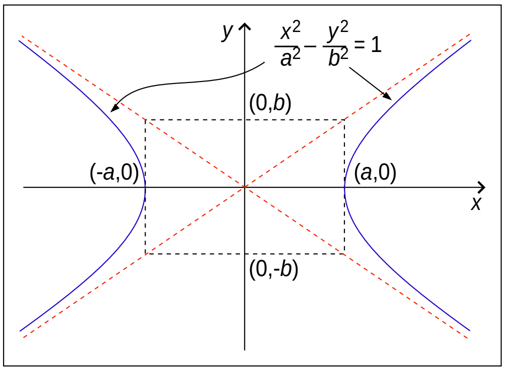
---

[1] O número $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, chamado *razão áurea maior* aparece em geometria como a razão entre a diagonal e o lado de um pentágono regular. Seu inverso $\phi^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \phi - 1$ é a *razão áurea menor.*

9. Ao procurar o ponto da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ mais próximo da origem, Joãozinho raciocinou da seguinte maneira.

   Temos que procurar, dentre os pontos da hipérbole, aquele para o qual $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ *tem valor mínimo. Como* $d \geq 0$, d *será mínimo quando* d^2 *for mínimo. Agora, sendo* $P = (x, y)$ *um ponto da hipérbole, temos* $y^2 = x^2 - 1$, *logo* $d^2 = x^2 + y^2 = 2x^2 - 1$.

   Procurando o valor mínimo de $d^2 = f(x) = 2x^2 - 1$, *calculamos* $f'(x) = 4x$. *Temos* $f'(x) = 0$ *se e somente se* $x = 0$. *Para* $x = 0$ *porém, temos* $y^2 = 0^2 - 1 = -1$, *uma impossibilidade. Logo, não há nenhum ponto da hipérbole cuja distância à origem seja mínima.*

   Explique o erro no raciocínio de Joãozinho, já que um esboço da hipérbole (faça-o) revela que os pontos $(\pm 1, 0)$ são seus pontos mais próximos da origem.
   Sugestão. Analisando-se a equação da hipérbole, em quais intervalos de valores de x define-se a coordenada y? Isto define o domínio da função d.