

Aula 11

Funções trigonométricas e o “primeiro limite fundamental”

Nesta aula estaremos fazendo uma pequena revisão de funções trigonométricas e apresentando um limite que lhes determina suas derivadas.

11.1 Pequena revisão de trigonometria

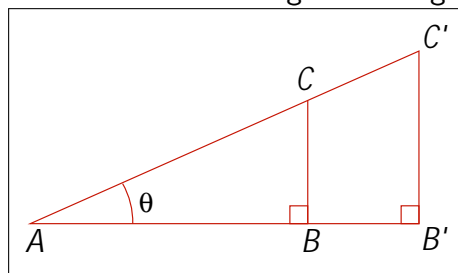
11.1.1 Trigonometria geométrica

Consideremos os triângulos ABC e $A'B'C'$ da figura 11.1. Os dois triângulos são semelhantes, pois seus ângulos internos são iguais (congruentes). Assim, temos

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}, \quad \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'}, \quad \frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'}$$

Assim, sendo ABC um triângulo retângulo, como na figura 11.1 as razões $\frac{AB}{AC}$, $\frac{BC}{AC}$ e $\frac{BC}{AB}$ dependem somente da abertura $\theta = \hat{A}$.

Figura 11.1. ABC e $AB'C'$ são triângulos retângulos semelhantes.



Chamamos

$$\begin{aligned}\text{cosseno de } \theta &= \cos \theta = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo } \theta}{\text{hipotenusa}} \\ \text{seno de } \theta &= \sin \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{hipotenusa}} \\ \text{tangente de } \theta &= \tan \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{cateto adjacente ao ângulo } \theta}\end{aligned}$$

Deduz-se imediatamente que $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$.

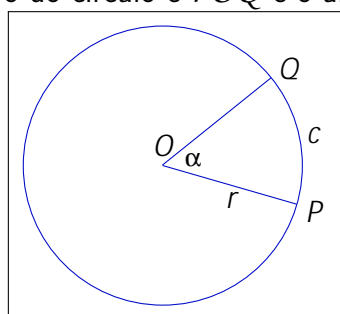
Da trigonometria do ensino médio, são bem conhecidos os valores

θ	$\cos \theta$	$\sin \theta$	$\tan \theta$
0	1	0	0
30°	$\sqrt{3}/2$	1/2	$1/\sqrt{3}$
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$
90°	0	1	não se define

Se \widehat{PQ} é um arco de um círculo de raio r , correspondente a um ângulo central de abertura α , o comprimento c de \widehat{PQ} é dado por

$$c = r \cdot (\text{medida de } \alpha \text{ em radianos})$$

Figura 11.2. O é o centro do círculo e \widehat{POQ} é o ângulo central do arco \widehat{PQ} .



Assim, o comprimento c do arco \widehat{PQ} é diretamente proporcional a r e a α . Quando $\alpha = 360^\circ$, temos

$$c = \text{comprimento da circunferência} = 2\pi \cdot r$$

Assim sendo,

$$360^\circ = 360 \text{ graus} = 2\pi \text{ radianos, ou seja } 180^\circ = \pi$$

Se $r = 1 = \text{uma unidade de comprimento}$, o comprimento c do arco \widehat{PQ} é simplesmente a medida de α em radianos.

A área do setor circular de ângulo central α também é proporcional a α . Quando $\alpha = 2\pi$, temos a área de um círculo de raio r : $A = \pi r^2$. Assim, um setor circular de abertura α , tem área $A_\alpha = \frac{\alpha}{2} \cdot r^2$ (α em radianos).

11.1.2 Trigonometria analítica

Para definir as funções trigonométricas de variável real, consideramos um sistema cartesiano ortogonal de coordenadas no plano. Nele, consideramos a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$ (de centro em $(0,0)$ e raio 1). Esta circunferência é o que chamaremos de *círculo trigonométrico*.

Dado um número real α , tomamos $A = (1,0)$ e demarcamos, no círculo trigonométrico, um ponto P_α tal que a medida do percurso de A a P_α , sobre o círculo trigonométrico, é igual a $|\alpha|$ (figura 11.3). Teremos o percurso AP_α passando uma ou várias vezes pelo ponto A , quando $|\alpha| > 2\pi$.

A partir do ponto A , o percurso \widehat{AP}_α é feito no sentido *anti-horário* (contrário ao sentido do movimento dos ponteiros do relógio) se $\alpha > 0$, e é feito no sentido *horário* (no mesmo sentido do movimento dos ponteiros do relógio) se $\alpha < 0$. Tal percurso é um *arco orientado*. Dizemos que α é a medida algébrica do arco orientado AP_α .

Assim, por exemplo, $P_\pi = P_{-\pi} = (-1,0)$, $P_{\pi/2} = (0,1)$, $P_{-\pi/2} = (0,-1)$, $P_{\pi/4} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $P_{\pi/3} = (\sqrt{3}/2, 1/2)$, e $P_0 = (1,0) = P_{2\pi} = P_{2n\pi}$, para cada inteiro n .

Sendo $\alpha \in \mathbb{R}$, consideremos $P_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha)$, definido como acima. Definimos

$$x_\alpha = \cos \alpha = \text{cosseno de } \alpha,$$

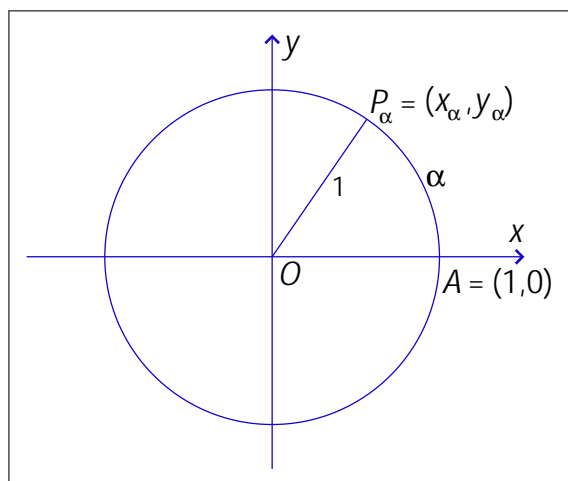
$$y_\alpha = \sin \alpha = \text{seno de } \alpha$$

Para estendermos a definição de *tangente de* α a arcos orientados α , tomamos um eixo y' , paralelo ao eixo y , de origem $O' = A$, orientado positivamente “para cima”, no qual usaremos a mesma escala de medidas do eixo y . Sendo $\alpha \in \mathbb{R}$, consideramos a reta OP_α . Se $\alpha \neq \frac{\pi}{2} \pm n\pi$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, esta reta intercepta o eixo y' em T_α .

Sendo t_α a abscissa de T_α no eixo y' , ou alternativamente a ordenada do ponto $P_\alpha = (1, t_\alpha)$ no sistema Oxy , definimos

$$t_\alpha = \operatorname{tg} \alpha = \text{tangente de } \alpha$$

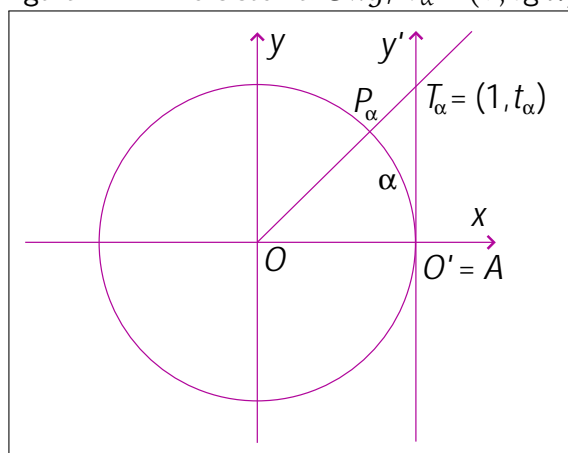
Figura 11.3. Sendo α a medida algébrica do arco orientado AP_α , temos $x_\alpha = \cos \alpha$, $y_\alpha = \sin \alpha$.



Assim sendo, como $\frac{t_\alpha}{1} = \frac{y_\alpha}{x_\alpha}$, temos $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Se $0 < \alpha < \pi/2$, os valores $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, e $\operatorname{tg} \alpha$ coincidem com aqueles das definições geométricas de cosseno, seno e tangente, dadas na seção 11.1.1.

Figura 11.4. No sistema Oxy, $T_\alpha = (1, \operatorname{tg} \alpha)$.



Também definem-se as funções trigonométricas

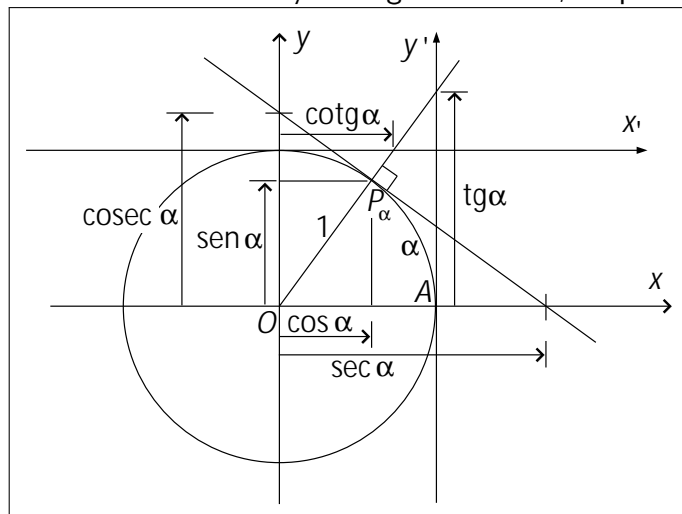
$$\text{cotangente de } \alpha = \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\alpha \neq n\pi, \forall n \in \mathbb{Z})$$

$$\text{secante de } \alpha = \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \quad (\alpha \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \forall n \in \mathbb{Z})$$

$$\text{cossecante de } \alpha = \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \quad (\alpha \neq n\pi, \forall n \in \mathbb{Z})$$

Na figura 11.5, ilustramos geometricamente as seis funções trigonométricas de um arco α no primeiro quadrante, isto é, satisfazendo $0 < \alpha < \pi/2$.

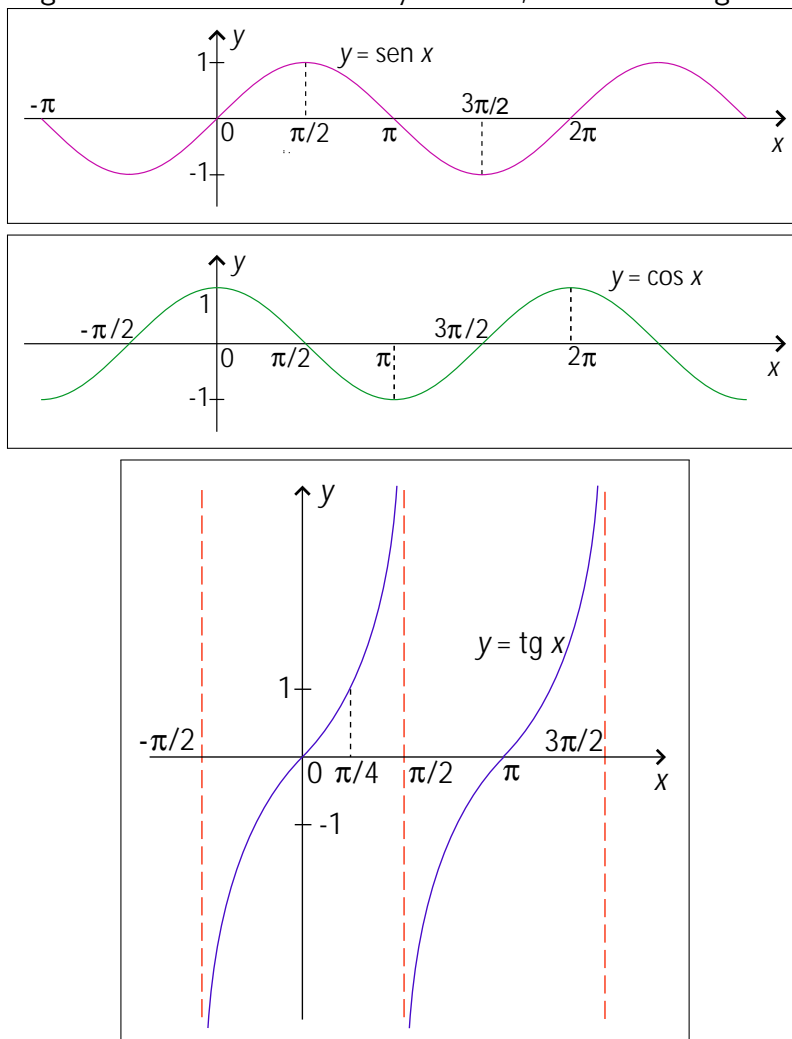
Figura 11.5. Geometria das seis funções trigonométricas, no primeiro quadrante.



Listamos abaixo algumas fórmulas úteis, envolvendo as funções trigonométricas. Aqui e sempre, $\cos^2 \alpha = (\cos \alpha)^2$, $\sin^2 \alpha = (\sin \alpha)^2$, $\tan^2 \alpha = (\tan \alpha)^2$, etc.

1. $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ (isto porque $x_a^2 + y_a^2 = 1$)
2. $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$ (dividindo-se ambos os membros da equação 1 por $\cos^2 \alpha$)
 $1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$ (dividindo-se ambos os membros da equação 1 por $\sin^2 \alpha$)
3. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$
 $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$
 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
4. $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$, $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
 $\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\tan \alpha$
5. $\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
 $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
6. $\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, $\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

Figura 11.6. Gráficos das funções seno, cosseno e tangente.



11.2 O “primeiro limite fundamental”

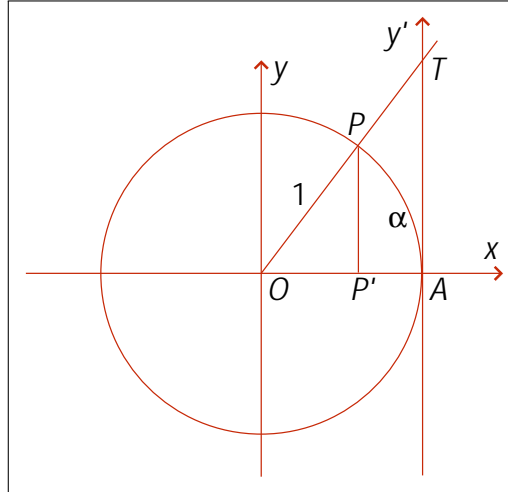
Vamos admitir que as seis funções trigonométricas são contínuas nos pontos em que estão definidas.

Na próxima aula estaremos definindo as funções trigonométricas inversas e calculando as derivadas de todas as funções trigonométricas. Para calcular a derivada de $\sin x$, e então calcular as derivadas das demais funções trigonométricas, deduziremos primeiramente o seguinte resultado, chamado na literatura do cálculo de *primeiro limite fundamental*.

Proposição 11.1 (Primeiro limite fundamental).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Figura 11.7. Diagrama para a demonstração da proposição 11.1.



Demonstração. Seja α um número real, $0 < \alpha < \pi/2$, e consideremos, no primeiro quadrante do círculo trigonométrico, o arco \widehat{AP} de comprimento α , sendo $A = (1, 0)$ e $P = P_\alpha$.

Sejam P' a projeção ortogonal do ponto P no eixo x ($PP' \perp Ox$), e T a interseção da reta OP com o eixo y' das tangentes, tal como esboçado no diagrama da figura 11.7.

Temos então $PP' < \widehat{AP}$, ou seja $\operatorname{sen} \alpha < \alpha$.

Além disso, a área do setor circular AOP é dada por $A_\alpha = \frac{\alpha}{2} r^2 = \frac{\alpha}{2}$.

A área do triângulo OAT é dada por $\Delta = \frac{1}{2} OA \cdot AT = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2}$.

Obviamente $A_\alpha < \Delta$, daí $\frac{\alpha}{2} < \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2}$, e portanto $\alpha < \operatorname{tg} \alpha$.

Sumarizando, sendo $0 < \alpha < \pi/2$,

$$\operatorname{sen} \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha$$

Como $\operatorname{sen} \alpha > 0$, temos então $1 < \frac{\alpha}{\operatorname{sen} \alpha} < \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$. Comparando os inversos dos três termos, obtemos

$$\cos \alpha < \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} < 1$$

Para $-\pi/2 < \alpha < 0$ também valem as desigualdades acima, já que, se $0 < \alpha < \pi/2$, $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ e $\frac{\operatorname{sen}(-\alpha)}{-\alpha} = \frac{-\operatorname{sen} \alpha}{-\alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$.

Agora faremos uso de um teorema sobre limites (que só pode ser demonstrado a partir de um tratamento formal da teoria de limites), o *teorema do confronto* ou *teorema do sanduíche*:

Teorema 11.1 (Teorema do confronto, ou teorema do sanduíche). *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, sendo $a \in I$, e f , g e h funções definidas para $x \in I$, $x \neq a$, se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in I$, $x \neq a$, e se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$, então $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$. Vale o mesmo resultado para limites laterais (neste caso, a pode ser o extremo inferior ou superior do intervalo I). Vale o mesmo resultado se $a = +\infty$ ou $-\infty$.*

No nosso caso, temos $f(\alpha) = \cos \alpha$, $g(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ e $h(\alpha) = 1$, todas definidas para $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$, $\alpha \neq 0$, satisfazendo $f(\alpha) < g(\alpha) < h(\alpha)$.

Temos $\lim_{\alpha \rightarrow 0} f(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \cos \alpha = 1$, e $\lim_{\alpha \rightarrow 0} h(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} 1 = 1$.

Portanto $\lim_{\alpha \rightarrow 0} g(\alpha) = 1$, ou seja,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

□

Veremos adiante que o resultado $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, *primeiro limite fundamental*, é imprescindível para a dedução da derivada da função seno e das demais funções trigonométricas. Note que as desigualdades $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, empregadas no cálculo desse limite, só fazem sentido se $x \in \mathbb{R}$, quando então $|x|$ é a medida de um arco orientado (em radianos), em um círculo trigonométrico.

O *segundo limite fundamental* é aquele já visto na aula 9, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Vamos agora a um exemplo de cálculo de um limite em que aplicamos o primeiro limite fundamental.

Exemplo 11.1. Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{x}$

Solução. Temos o limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{x}$ indeterminado na forma $\frac{0}{0}$.

Fazemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 4x}{\cos 4x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 4x}{x} \cdot \frac{1}{\cos 4x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin 4x}{4x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 4x} = 4 \cdot \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 4x} = 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1} = 4 \end{aligned}$$

Portanto $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{x} = 4$.

11.3 Problemas

Calcule os seguintes limites, lembrando-se de que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x/3)}{x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } ax}{bx}$

(c) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2 2t}{t^2}$

(d) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\text{sen } x}{x - \pi}$

(e) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2 t}{1 - \cos t}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cotg x$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{bx}$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 3x}{\text{sen } 5x}$

(i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \text{sen } \frac{2}{x}$

(j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{sen } x}{x}$

(k) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cos(1/x)$

Respostas.

(a) $1/3$. *Sugestão.* Faça $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x/3)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \cdot \frac{\text{sen}(x/3)}{x/3}$ (b) a/b

(c) 4 (d) -1 . *Sugestão.* Faça primeiramente a mudança de variável $x - \pi = y$.

(e) 2 . *Sugestão.* $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2 t}{1 - \cos t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2 t(1 + \cos t)}{(1 - \cos t)(1 + \cos t)}$ (f) 1 (g) 0 (h) $3/5$ (i) 2

(j) 0 . *Sugestão.* Se $x > 0$, $-\frac{1}{x} \leq \frac{\text{sen } x}{x} \leq \frac{1}{x}$

(k) 0 . *Sugestão.* Mostre que $\lim_{x \rightarrow 0} |x \cos(1/x)| = 0$, considerando que $|x \cos(1/x)| \leq |x|$, e use o teorema do confronto (teorema 11.1).

