

## Aula 3

# Derivação em cadeia e derivação implícita

### 3.1 A regra da cadeia para derivar uma composição de funções

A *regra da cadeia* é uma regra de derivação que nos permite calcular a derivada de uma *composição* (ou um *encadeamento*) de funções, tais como  $f(g(x))$  ou  $f(g(h(x)))$ , conhecendo-se as derivadas  $f'(x)$ ,  $g'(x)$  e  $h'(x)$ .

Começaremos com um exemplo. Quando temos uma função composta, tal como a função definida por  $y = (x^3 + x - 1)^{10}$ , podemos decompô-la como composição de funções *elementares*. Simplesmente escrevemos

$$y = u^{10}, \quad u = x^3 + x - 1.$$

Na notação usada por Leibniz<sup>1</sup>, a regra da cadeia nos diz que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

No caso, teremos então

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= 10u^9 \cdot (3x^2 + 1) \\ &= 10(x^3 + x - 1)^9(3x^2 + 1) \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Gottfried Leibniz, século XVII, dividiu com Newton a descoberta do Cálculo Diferencial e Integral.

Repetindo tudo, passando da notação de Leibniz para a notação criada por Lagrange<sup>2</sup>, temos

$$y = f(u), \quad u = g(x)$$

e então

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= f'(u) \cdot g'(x) \\ &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

**Regra 3.1** (Derivação em cadeia). Se  $y = f(u)$  e  $u = g(x)$  (sendo deriváveis ambas as funções) então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Em outras palavras, sendo  $y = f(g(x))$ , tem-se

$$y' = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

**Observação 3.1.** A ideia intuitiva que inspira a regra da cadeia é a seguinte: sendo  $y = f(u)$  e  $u = g(x)$ , temos  $\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$  e,  $\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$

Assumindo, para simplificar, que  $\Delta u \neq 0$  sempre que  $\Delta x \neq 0$  (o que nem sempre ocorre!), temos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Quando  $\Delta x$  tende a 0,  $\Delta u$  também tende a 0 (observação 2.1), e assim

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

e portanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Nos dispensaremos da tarefa de fazer uma dedução mais rigorosa da regra da cadeia, um procedimento possível mas um pouco mais sofisticado.

**Exemplo 3.1.** Calcular  $\frac{dy}{dx}$ , sendo  $y = ((x^2 + 1)^{10} + 1)^8$ .

Solução. Escrevemos

$$y = u^8, \quad u = v^{10} + 1, \quad v = x^2 + 1$$

<sup>2</sup>Joseph-Louis Lagrange, matemático francês do século XVIII.

Assim, estamos compondo (encadeando) três funções. Aplicando a regra da cadeia temos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \\ &= 8u^7 \cdot 10v^9 \cdot 2x \\ &= 160(v^{10} + 1)^7 (x^2 + 1)^9 x \\ &= 160x((x^2 + 1)^{10} + 1)^7 (x^2 + 1)^9\end{aligned}$$

### 3.2 Derivadas de funções dadas implicitamente

Muitas vezes, duas variáveis  $x$  e  $y$  são tais que, em um certo intervalo de valores de  $x$ ,  $y$  depende de  $x$ , ou seja,  $y$  é uma função da variável  $x$ , mas em lugar de uma fórmula  $y = f(x)$ , temos uma equação  $F(x, y) = c$ , inter-relacionando ambas as variáveis, tal como nos dois exemplos abaixo.

$$(1) \ x^2 + y^2 = 2$$

$$(2) \ x^3 + y^3 = x + y + xy$$

Às vezes, é possível resolver a equação dada em  $y$ , ou seja, “isolar”  $y$  no primeiro membro da equação, expressando *explicitamente*  $y$  como variável dependente de  $x$ . Por exemplo, no caso da equação (1), podemos fazer

$$y^2 = 2 - x^2$$

e então

$$y = \pm\sqrt{2 - x^2}$$

Neste caso, deduzimos então que as funções

$$y = f_1(x) = \sqrt{2 - x^2} \quad \text{e} \quad y = f_2(x) = -\sqrt{2 - x^2}$$

ambas satisfazem a equação  $x^2 + y^2 = 2$ .

No caso da equação (2), podemos verificar que, por exemplo, o par  $(x_0, y_0) = (1, 0)$  satisfaz a equação, mas não nos parece óbvio como resolver a equação em  $y$  e obter uma função  $y = f(x)$  satisfazendo  $f(1) = 0$  e  $x^3 + (f(x))^3 = x + f(x) + xf(x)$ .

No entanto, em ambos os casos, é possível obter a derivada  $\frac{dy}{dx}$ , em um determinado ponto  $x_0$ , se conhecemos também o valor correspondente  $y_0$ .

Para obter a derivada  $\frac{dy}{dx}$ , a partir de uma equação  $F(x, y) = 0$ , derivamos ambos os membros desta equação em relação à variável  $x$ , considerando  $y$  como função de  $x$ , e usamos as regras de derivação, bem como a regra da cadeia.

**Exemplo 3.2.** Obtendo  $\frac{dy}{dx}$ , a partir da equação  $x^2 + y^2 = 2$ , por derivação implícita.

Denotaremos por  $(*)'$  a derivada em relação a  $x$  da expressão  $*$  (a expressão que estiver entre parênteses). Inicialmente notamos que, sendo  $y$  uma função de  $x$ , temos, pela regra da cadeia,  $(y^2)' = 2y \cdot y'$ .

Para obtermos  $\frac{dy}{dx}$  (ou  $y'$ ) no caso da equação  $x^2 + y^2 = 2$ , fazemos o seguinte desenvolvimento passo a passo.

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 2 \\(x^2 + y^2)' &= (2)' \\(x^2)' + (y^2)' &= 0 \\2x + 2yy' &= 0 \\yy' &= -x \\y' &= -\frac{x}{y}\end{aligned}$$

Isto quer dizer que, se  $y$  é função de  $x$  satisfazendo  $x^2 + y^2 = 2$ , então  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ .

Como vimos, as funções  $y = f_1(x) = \sqrt{2 - x^2}$  e  $y = f_2(x) = -\sqrt{2 - x^2}$  ambas satisfazem  $x^2 + y^2 = 2$ . Pela derivação “implícita” efetuada acima, temos

1. Se  $y = f_1(x)$ , então  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{f_1(x)}$ . Neste caso,  $y' = -\frac{x}{\sqrt{2 - x^2}}$ ;

2. Se  $y = f_2(x)$ , então  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{f_2(x)}$ . Neste caso,  $y' = \frac{x}{\sqrt{2 - x^2}}$

**Exemplo 3.3.** Obtendo  $\frac{dy}{dx}$ , a partir da equação  $x^3 + y^3 = x^2y^2 + x + y$ , por derivação implícita.

Para obtermos  $\frac{dy}{dx}$  (ou  $y'$ ) no caso da equação  $x^3 + y^3 = x^2y^2 + x + y$ , fazemos

$$\begin{aligned}
x^3 + y^3 &= x^2y^2 + x + y \\
(x^3 + y^3)' &= (x^2y^2 + x + y)' \\
3x^2 + 3y^2y' &= (x^2y^2)' + 1 + y' \\
3x^2 + 3y^2y' &= (x^2)'y^2 + x^2(y^2)' + 1 + y' \\
3x^2 + 3y^2y' &= 2xy^2 + x^2 \cdot 2yy' + 1 + y'
\end{aligned}$$

Obtemos então  $y'$ , primeiramente deixando no primeiro membro somente os termos com  $y'$  e então colocando  $y'$  em evidência:

$$\begin{aligned}
3y^2y' - 2x^2yy' - y' &= 1 + 2xy^2 - 3x^2 \\
(3y^2 - 2x^2y - 1)y' &= 1 + 2xy^2 - 3x^2 \\
y' &= \frac{1 + 2xy^2 - 3x^2}{3y^2 - 2x^2y - 1}
\end{aligned}$$

**Exemplo 3.4.** Obter a equação da reta tangente à curva  $x^3 + y^3 = x^2y^2 + x + y$  no ponto  $P = (1, 0)$ .

Note que o problema só faz sentido porque o ponto  $(1, 0)$  de fato pertence à curva:  $1^3 + 0^3 = 1^2 \cdot 0^2 + 1 + 0$ .

Primeiro obtemos  $\frac{dy}{dx}$ , por derivação implícita, a partir da equação  $x^3 + y^3 = x^2y^2 + x + y$ .

Isto já foi feito no exemplo anterior, em que calculamos  $y' = \frac{1 + 2xy^2 - 3x^2}{3y^2 - 2x^2y - 1}$ .

O coeficiente angular da reta tangente procurada é

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = \left. \frac{1 + 2xy^2 - 3x^2}{3y^2 - 2x^2y - 1} \right|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = \frac{1 - 3}{-1} = 2$$

Assim sendo, a reta procurada tem equação  $y - 0 = 2(x - 1)$ , ou seja,  $y = 2x - 2$ .

### 3.3 Derivada da função potência $f(x) = x^r$ , sendo $r$ um número racional

Da álgebra elementar, temos

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \quad (\text{para } x \geq 0)$$

$$x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x} \quad (\text{para } x \text{ real qualquer})$$

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}, \text{ sendo } n > 0 \quad (\text{para } x \geq 0 \text{ se } n \text{ é par, e } x \text{ qualquer se } n \text{ é ímpar})$$

$x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$ , sendo  $q > 0$ ,  $p$  e  $q$  primos entre si ( $x \geq 0$  se  $q$  é par e  $p$  é ímpar positivo;  $x > 0$  se  $q$  é par e  $p$  é ímpar negativo;  $x$  qualquer se  $p$  e  $q$  são ambos ímpares e  $p > 0$ ;  $x \neq 0$  se  $p$  e  $q$  são ambos ímpares e  $p < 0$ )

**Regra 3.2.** Sendo  $n$  um inteiro positivo,

$$(x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$$

ou seja,

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

**Regra 3.3.** Sendo  $p$  e  $q$  inteiros, com  $q > 0$ ,

$$(x^{\frac{p}{q}})' = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}$$

Portanto, se  $r$  é um expoente racional,

$$(x^r)' = rx^{r-1}$$

*Demonstração da regra 3.2.* Se  $y = x^{\frac{1}{n}}$ , então  $y^n = x$ .

Aplicando derivação implícita, calculando derivadas em relação a  $x$ , obtemos

$$ny^{n-1}y' = 1$$

$$\text{Portanto } y' = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot y^{1-n} = \frac{1}{n} \cdot (x^{\frac{1}{n}})^{1-n} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} \quad \square$$

*Demonstração da regra 3.3.* Sendo  $p$  e  $q$  inteiros,  $q > 0$ , se  $y = x^{\frac{p}{q}}$ , então  $y = \sqrt[q]{x^p}$ , ou seja,  $y^q = x^p$ .

Por derivação implícita, derivando ambos os membros desta última igualdade, em relação a  $x$ , obtemos

$$(y^q)' = (x^p)' \text{ ou, equivalentemente } qy^{q-1}y' = px^{p-1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} = \frac{px^p x^{-1}}{qy^q y^{-1}} = \frac{px^p x^{-1}}{qx^p y^{-1}} \\ &= \frac{\cancel{px^p} x^{-1}}{q\cancel{x^p} y^{-1}} = \frac{p}{q} y x^{-1} = \frac{p}{q} x^{p/q} x^{-1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} \end{aligned} \quad \square$$

**Exemplo 3.5.** Calcular a derivada de  $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 + 3x + 5}$

Solução. Temos  $f(x) = (3x^2 + 3x + 5)^{\frac{1}{3}}$ .

Aplicando derivação em cadeia e a regra 3.3, temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= [(3x^2 + 3x + 5)^{\frac{1}{3}}]' \\ &= \frac{1}{3}(3x^2 + 3x + 5)^{-\frac{2}{3}}(3x^2 + 3x + 5)' \\ &= \frac{1}{3}(3x^2 + 3x + 5)^{-\frac{2}{3}}(6x + 3) \\ &= (3x^2 + 3x + 5)^{-\frac{2}{3}}(2x + 1) \\ &= \frac{2x + 1}{(3x^2 + 3x + 5)^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{2x + 1}{\sqrt[3]{(3x^2 + 3x + 5)^2}} \end{aligned}$$

Solução alternativa. Sendo  $y = f(x)$ , temos

$$y = \sqrt[3]{3x^2 + 3x + 5}$$

e portanto

$$y^3 = 3x^2 + 3x + 5$$

Aplicando derivação implícita, obtemos

$$3y^2y' = 6x + 3, \text{ ou seja, } y' = \frac{6x + 3}{3y^2} = \frac{2x + 1}{y^2}$$

de onde

$$y' = \frac{2x + 1}{(\sqrt[3]{3x^2 + 3x + 5})^2} = \frac{2x + 1}{\sqrt[3]{(3x^2 + 3x + 5)^2}}$$

### 3.4 Problemas

1. Calcule  $\frac{dy}{dx}$  em cada item.

$$(a) \ y = \left(\frac{x^3}{3} + 1\right)^5 + \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)^4$$

$$(b) \ y = \frac{((x^3 + 7)^4 + x)^5}{x^2 + 1}$$

$$(c) \ y = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{10}$$

2. Calcule as derivadas das seguintes funções.

(a)  $f(x) = (x^2 - 3x + 8)^3$

(b)  $f(x) = \frac{x}{(x^2 - 1)^4}$

(c)  $F(v) = (17v - 5)^{1000}$

(d)  $s(t) = (4t^5 - 3t^3 + 2t)^{-2}$

(e)  $k(u) = \frac{(u^2 + 1)^3}{(4u - 5)^5}$

3. Determine (i) a equação da reta tangente à curva no ponto indicado e (ii) os pontos da curva dada em que a reta tangente à curva é horizontal, nos casos

(a)  $y = (4x^2 - 8x + 3)^4$ ,  $P = (2, 81)$ .

(b)  $y = (2x - 1)^{10}$ ,  $P = (1, 1)$ .

4. Se  $k(x) = f(g(x))$ , com  $f(2) = -4$ ,  $g(2) = 2$ ,  $f'(2) = 3$  e  $g'(2) = 5$ , calcule  $k'(2)$ .

5. Determine  $y'$  sendo  $y$  uma função de  $x$  dada implicitamente pela equação

(a)  $2x^3 + x^2y + y^3 = 1$

(b)  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$

(c)  $(y^2 - 9)^4 = (4x^2 + 3x - 1)^2$

6. Verifique primeiramente que o ponto  $P$  pertence à curva dada e ache a equação da reta tangente à curva no ponto  $P$ .

(a)  $xy = -16$ ,  $P = (-2, 8)$ ;

(b)  $2x^3 - x^2y + y^3 - 1 = 0$ ,  $P = (2, -3)$ .

7. Calcule as derivadas das seguintes funções.

(a)  $f(x) = \sqrt[3]{8x^3 + 27}$

(b)  $f(x) = (7x + \sqrt{x^2 + 3})^6$

(c)  $f(t) = \frac{4}{(9t^2 + 16)^{2/3}}$

(d)  $g(z) = \frac{\sqrt[3]{2z + 3}}{\sqrt{3z + 2}}$

(e)  $F(v) = \frac{5}{\sqrt[5]{v^5 - 32}}$

8. Calcule  $\frac{dy}{dx}$  se



- (a)  $6x + \sqrt{xy} - 3y = 4$   
 (b)  $3x^2 + \sqrt[3]{xy} = 2y^2 + 20$
9. Uma função é *par* se  $f(-x) = f(x)$  para todo  $x$  em seu domínio, e é *ímpar* se  $f(-x) = -f(x)$  para todo  $x$  em seu domínio. Sendo  $f$  derivável, demonstre que
- (a) Se  $f$  é par, então  $f'$  é ímpar (ou seja, se  $f(-x) = f(x)$  para todo  $x$  no domínio de  $f$ ), então  $f'(-x) = -f'(x)$ ;  
 (b) Se  $f$  é ímpar, então  $f'$  é par.

### 3.4.1 Respostas e sugestões

1. (a)  $\frac{dy}{dx} = 5x^2 \left( \frac{x^3}{3} + 1 \right)^4 + 4x \left( \frac{x^2}{2} + 1 \right)^3$   
 (b)  $\frac{dy}{dx} = \frac{5((x^3 + 7)^4 + x)^4 (12x^2(x^3 + 7)^3 + 1)(x^2 + 1) - 2x((x^3 + 7)^4 + x)^5}{(x^2 + 1)^2}$   
 (c)  $\frac{dy}{dx} = \frac{10x^9}{(x + 1)^{11}}$
2. (a)  $f'(x) = 3(x^2 - 3x + 8)^2(2x - 3)$   
 (b)  $f'(x) = \frac{-(7x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^5}$   
 (c)  $F'(v) = 17000(17v - 5)^{999}$   
 (d)  $s'(t) = -2(4t^5 - 3t^3 + 2t)^{-3}(20t^4 - 9t^2 + 2)$   
 (e)  $k'(u) = \frac{(u^2 + 1)^2(4u^2 - 30u - 20)}{(4u - 5)^6}$
3. (a) (i)  $y - 81 = 864(x - 2)$ , (ii)  $(1, 1)$ ,  $(1/2, 0)$  e  $(3/2, 0)$ .  
 (b) (i)  $y - 1 = 20(x - 1)$ , (ii)  $(1/2, 0)$ .
4.  $k'(2) = 15$ .
5. (a)  $y' = \frac{-(6x^2 + 2xy)}{x^2 + 3y^2}$   
 (b)  $y' = -\frac{y^3}{x^3}$   
 (c)  $y' = \frac{(4x^2 + 3x - 1)(8x + 3)}{4y(y^2 - 9)^3}$
6. (a)  $4x - y + 16 = 0$   
 (b)  $y + 3 = -\frac{36}{23}(x - 2)$
7. (a)  $f'(x) = 8x^2(8x^3 + 27)^{-2/3} = \frac{8x^2}{\sqrt[3]{(8x^3 + 27)^2}}$

$$(b) f'(x) = 6(7x + \sqrt{x^2 + 3})^5 \left( 7 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} \right)$$

$$(c) f'(t) = \frac{-48t}{\sqrt[3]{(9t^2 + 16)^5}}$$

$$(d) g'(z) = \frac{-3\sqrt[3]{2z+3}}{2\sqrt{(3z+2)^3}} + \frac{2}{3\sqrt{3z+2}\sqrt[3]{(2z+3)^2}}$$

$$(e) F'(v) = -5v^4(v^5 - 32)^{-6/5} = \frac{-5v^4}{\sqrt[5]{(v^5 - 32)^6}}$$

$$8. (a) y' = \frac{12\sqrt{xy} + y}{6\sqrt{xy} - x}$$

$$(b) y' = \frac{18x^{5/3}y^{2/3} + y}{12x^{2/3}y^{5/3} - x}$$

9. (a) Se  $f$  é uma função par, temos a igualdade  $f(-x) = f(x)$ . Derivando ambos os membros em relação a  $x$ , temos  $[f(-x)]' = f'(x)$ . Por derivação em cadeia, aplicada ao primeiro membro, temos  $f'(-x) \cdot (-x)' = f'(x)$ , logo  $-f'(-x) = f'(x)$ , ou seja  $f'(-x) = -f'(x)$ . Concluimos então que se  $f$  é função par, sua derivada  $f'$  é função ímpar.