Aula 19

Substituições trigonométricas e funções racionais

19.1 Substituições trigonométricas

As *substituições trigonométricas* são substituições empregadas em integrais envolvendo uma das expressões $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, e $\sqrt{x^2 - a^2}$, nas quais a variável x é substituída (correspondentemente) por uma das funções $a \operatorname{sen} \theta$, $a \operatorname{tg} \theta$, e $a \sec \theta$.

Os três procedimentos de substituições trigonométricas, habitualmente usados, são ilustrados geometricamente nas figuras 19.1 e 19.2.

Figura 19.1. Em (a) $\frac{x}{a} = \operatorname{sen} \theta$, $dx = a \cos \theta \, d\theta$, $\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} = \cos \theta$. Em (b), $\frac{a}{x} = \cos \theta$, ou $\frac{x}{a} = \sec \theta$, $dx = a \sec \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta$, $\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} = \operatorname{tg} \theta$. Em ambos os casos, a raiz quadrada da diferença de quadrados é um cateto.

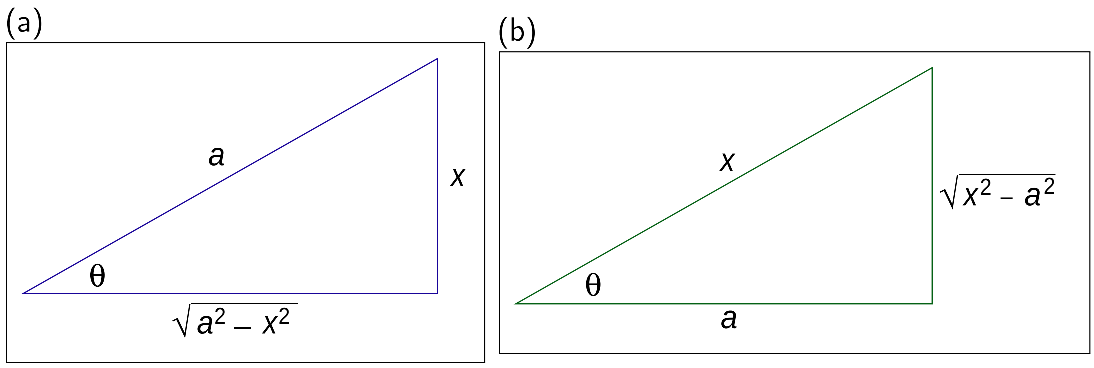
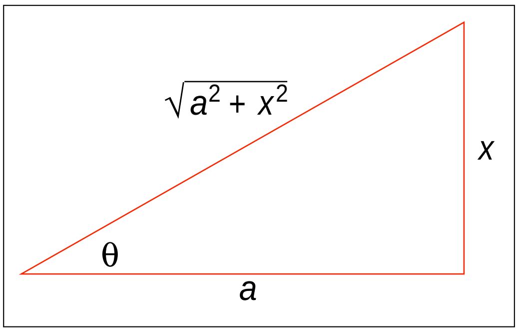


Figura 19.2. A raiz quadrada $\sqrt{a^2+x^2}$ é interpretada geometricamente como sendo a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos x e a. Agora, $\frac{x}{a} = \operatorname{tg}\theta$, $dx = a\sec^2\theta\, d\theta$, e $\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} = \sec\theta$.



Exemplo 19.1. *Calcular* $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx$.

No exemplo 16.5, aula 16, fizemos o cálculo desta integral, usando integração por partes. Refaremos seu cálculo agora, usando uma substituição trigonométrica, baseando-nos no esquema geométrico da figura 19.1 (a).

Observando as relações trigonométricas da figura 19.1 (a), fazemos

$$\frac{x}{a} = \operatorname{sen}\theta, \qquad \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} = \cos\theta, \qquad dx = a\cos\theta\, d\theta$$

Temos então

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \int a^2\cos^2\theta\, d\theta$$

Usando a relação $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$, temos

$$\int a^2\cos^2\theta\, d\theta = \frac{a^2}{2}\int \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta = \frac{a^2\theta}{2} + \frac{a^2}{4}\operatorname{sen} 2\theta + C$$

Agora substituímos

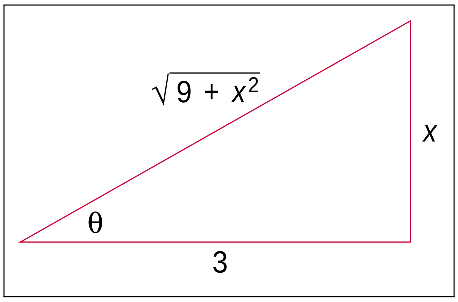
$$\theta = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a}, \qquad \operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{2x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}$$

e obtemos

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$$

No caso de uma integral definida, ao realizar a mudança de variável, podemos também trocar os limites de integração, tal como ilustrado no seguinte exemplo.

Exemplo 19.2. *Calcular* $\int_0^3 \sqrt{9+x^2}\, dx$.



Para desenvolver a estratégia de substituição trigonométrica, lançamos mão do diagrama ao lado. Teremos
$\frac{x}{3} = \operatorname{tg}\theta$, $dx = 3\sec^2\theta\, d\theta$, e
$\frac{3}{\sqrt{9+x^2}} = \cos\theta$, ou seja,
$\sqrt{9+x^2} = 3\sec\theta$.

Sendo $x = 3\operatorname{tg}\theta$, tomamos θ assumindo valores de 0 a $\pi/4$, e teremos x percorrendo os valores de 0 a 3.

Teremos então $\int_0^3 \sqrt{9+x^2}\, dx = \int_0^{\pi/4} 3\sec\theta \cdot 3\sec^2\theta\, d\theta = 9\int_0^{\pi/4} \sec^3\theta\, d\theta$.

Conforme vimos no exemplo 18.5, aula 18,

$$\int \sec^3\theta\, d\theta = \frac{\sec\theta\operatorname{tg}\theta}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + C$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \sqrt{9+x^2}\, dx &= 9\int_0^{\pi/4} \sec^3\theta\, d\theta \\
&= 9\left[\frac{\sec\theta\operatorname{tg}\theta}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta|\right]_0^{\pi/4} \\
&= 9\left[\frac{\sec(\pi/4)\operatorname{tg}(\pi/4)}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sec(\pi/4) + \operatorname{tg}(\pi/4)|\right] \\
&\quad - 9\left[\frac{\sec 0\operatorname{tg} 0}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sec 0 + \operatorname{tg} 0|\right] \\
&= 9\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1)\right] - 9\left[0 + \frac{1}{2}\ln 1\right] = \frac{9\sqrt{2}}{2} + \frac{9}{2}\ln(\sqrt{2}+1)
\end{aligned}$$

19.2 Integração de funções racionais

Nesta seção estudaremos o cálculo de integrais $\int \frac{p(x)}{q(x)}\, dx$, em que $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios em x. Tais funções $p(x)/q(x)$ são chamadas *funções racionais*.

Quando o grau de $p(x)$ é maior que, ou igual ao grau de $q(x)$, devemos primeiramente dividir $p(x)$ por $q(x)$,

$$\begin{array}{r|l} p(x) & q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array}$$

obtendo quociente $Q(x)$ e resto $R(x)$, de forma que

$$p(x) = q(x)Q(x) + R(x)$$

sendo $R(x) = 0$ ou um polinômio de grau menor que o grau do polinômio divisor $q(x)$.

Neste caso,
$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{q(x)Q(x) + R(x)}{q(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{q(x)}$$
e então $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int Q(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{q(x)}\,dx$.

Por exemplo, suponhamos que queremos calcular
$$I = \int \frac{2x^4 + x^3 - 6x^2 + 3x + 1}{x^3 - 3x + 2}\,dx$$
Como o grau do numerador é maior que o grau do denominador, devemos primeiramente proceder à divisão de polinômios abaixo, na qual obteremos $Q(x) = 2x+1$ e $R(x) = 2x-1$.

$$\begin{array}{rl|l}
2x^4 + x^3 - 6x^2 + 3x + 1 & & x^3 - 3x + 2 \\ \cline{3-3}
2x^4 + \quad - 6x^2 + 4x & & 2x + 1 \\ \cline{1-1}
x^3 \qquad - x + 1 & & \\
x^3 \qquad - 3x + 2 & & \\ \cline{1-1}
2x - 1 & &
\end{array}$$

Teremos então
$$I = \int \frac{(x^3 - 3x + 2)(2x + 1) + 2x - 1}{x^3 - 3x + 2}\,dx = \int (2x + 1)\,dx + \int \frac{2x - 1}{x^3 - 3x + 2}\,dx$$

Assim sendo, precisamos apenas estudar integrais de funções racionais próprias, isto é, funções racionais em que o grau do numerador é menor que o grau do denominador.

19.2.1 Decompondo funções racionais em frações parciais

Primeiro caso. O denominador tem raízes reais, distintas entre si.

Suponhamos que na função racional própria $p(x)/q(x)$ o denominador, sendo de grau n, fatora-se em produtos lineares distintos
$$q(x) = (x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$$
ou então
$$q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\cdots(a_nx + b_n)$$
tendo, os n fatores lineares, raízes distintas entre si.

Então aplicamos um resultado da álgebra de frações racionais que diz que, neste caso, existem constantes $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tais que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\cdots(a_nx + b_n)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx + b_n}$$

sendo os coeficientes das *frações parciais*, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, determinados de maneira única.

Neste caso,

$$\begin{aligned}\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx &= \int \frac{A_1}{a_1x + b_1}\,dx + \cdots + \frac{A_n}{a_nx + b_n}\,dx \\ &= \frac{A_1}{a_1}\ln|a_1x + b_1| + \cdots + \frac{A_n}{a_n}\ln|a_nx + b_n| + C\end{aligned}$$

Exemplo 19.3. *Calcular* $\displaystyle\int \frac{x^2 - 3}{(x^2 - 4)(2x + 1)}\,dx$.

Solução. Começamos fazendo

$$\frac{x^2 - 3}{(x^2 - 4)(2x + 1)} = \frac{x^2 - 3}{(x - 2)(x + 2)(2x + 1)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{2x + 1}$$

Para calcular os coeficientes A, B e C, somamos as três frações parciais à direita, igualando a soma à função racional original.

$$\frac{x^2 - 3}{(x^2 - 4)(2x + 1)} = \frac{A(x + 2)(2x + 1) + B(x - 2)(2x + 1) + C(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x + 2)(2x + 1)}$$

Observando que os denominadores são iguais, devemos obter A, B e C de modo a termos a igualdade (identidade) de polinômios

$$x^2 - 3 = A(x + 2)(2x + 1) + B(x - 2)(2x + 1) + C(x - 2)(x + 2)$$

Desenvolvendo o produto à direita e comparando os coeficientes dos termos de mesmo grau, chegaremos a três equações lineares nas incógnitas A, B e C. Mas podemos tomar um atalho. Já que os polinômios à esquerda e à direita são iguais, eles tem o mesmo valor para cada x real.

Tomando $x = -2$, obtemos $B(-2 - 2)(-4 + 1) = 1$, e então $B = 1/12$.

Tomando $x = 2$, obtemos $A \cdot 20 = 1$, e então $A = 1/20$.

Tomando $x = -1/2$, obtemos $C(-\frac{1}{2} - 2)(-\frac{1}{2} + 2) = -15/4$, e então $C = 11/15$.

Repare que os valores de x, estrategicamente escolhidos, são as raízes de $(x^2 - 4)(2x + 1)$.

Assim,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-3}{(x^2-4)(2x+1)}\,dx &= \int \frac{1/40}{x-2}\,dx + \int \frac{1/12}{x+2}\,dx + \int \frac{11/15}{2x+1}\,dx \\ &= \frac{1}{40}\ln|x-2| + \frac{1}{12}\ln|x+2| + \frac{11}{30}\ln|2x+1| + C\end{aligned}$$

Segundo caso. O denominador tem somente raízes reais, mas algumas raízes múltiplas.

No próximo exemplo ilustramos uma decomposição, em frações parciais, de uma função racional própria, cujo denominador tem apenas raízes reais, tendo porém raízes múltiplas.

Exemplo 19.4. *Calcular* $\int \frac{x^2}{(2x-1)(x+1)^3}\,dx$.

Aqui, a raiz -1, do denominador, é de multiplicidade 3. A decomposição, em frações parciais, que funciona neste caso, é da forma

$$\frac{x^2}{(2x-1)(x+1)^3} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{(x+1)^3} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{x+1}$$

na qual teremos A, B, C e D determinados de maneira única.

Como antes, primeiramente somamos as frações parciais:

$$\frac{x^2}{(2x-1)(x+1)^3} = \frac{A(x+1)^3 + B(2x-1) + C(2x-1)(x+1) + D(2x-1)(x+1)^2}{(2x-1)(x+1)^3}$$

Tendo à esquerda e à direita o mesmo denominador, teremos:

$$A(x+1)^3 + B(2x-1) + C(2x-1)(x+1) + D(2x-1)(x+1)^2$$

Quando $x=-1$, temos $-3B=4$, logo $B=-4/3$.

Quando $x=1/2$, temos $A\cdot\frac{27}{8}=\frac{1}{4}$, logo $A=2/27$.

Tendo esgotado, para valores de x, as raízes de $(2x-1)(x+1)^3$, tomamos agora valores de x que não produzam, em nossos cálculos, valores numéricos muito grandes.

Tomando $x=0$, temos $A-B-C-D=0$, e tomando $x=1$, temos

$8A+B+2C+4D=1$. Logo,

$$\begin{cases} C+D = \frac{38}{27} \\ 2C+4D = \frac{52}{27} \end{cases}$$

e então $C=\frac{31}{27}$, $D=\frac{7}{27}$.

Assim,

$$\int \frac{x^2}{(2x-1)(x+1)^3}\,dx = \int \frac{2/27}{2x-1}\,dx + \int \frac{-4/3}{(x+1)^3}\,dx + \int \frac{31/27}{(x+1)^2}\,dx + \int \frac{7/27}{x+1}\,dx$$
$$= \frac{1}{27}\ln|2x-1| + \frac{2}{3(x+1)^2} - \frac{31}{27(x+1)} + \frac{7}{27}\ln|x+1| + C$$

Como um outro exemplo de decomposição em frações parciais, em um caso de raízes reais múltiplas no denominador, se tivermos que calcular

$$\int \frac{x^3-2x+1}{(3x-2)^2(5x+1)^3(1-7x)}\,dx$$

devemos primeiramente fazer

$$\frac{x^3-2x+1}{(3x-2)^2(5x+1)^3(1-7x)} = \frac{A}{(3x-2)^2} + \frac{B}{3x-2} + \frac{C}{(5x+1)^3} + \frac{D}{(5x+1)^2} + \frac{E}{5x+1} + \frac{F}{1-7x}$$

Terceiro caso. O denominador tem raízes complexas não reais.

Um terceiro caso de decomposição, em frações parciais, ocorre quando o denominador tem fatores quadráticos irredutíveis (fatores de grau 2 sem raízes reais), como no exemplo

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{3x^2-x}{(x-2)^3(x^2+x+4)(x^2+1)}$$

em que x^2+x+4 e x^2+1 não tem raízes reais.

Neste caso, devemos fazer

$$\frac{3x^2-x}{(x-2)^2(x^2+x+4)(x^2+1)} = \frac{A}{(x-2)^3} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{Dx+E}{x^2+x+4} + \frac{Fx+G}{x^2+1}$$

e proceder tal como antes, na busca dos coeficientes A a G.

Ou seja, na decomposição em frações parciais, para os fatores lineares no denominador seguimos as regras anteriores, mas sobre cada fator quadrático vai um polinômio do primeiro grau $Mx+N$.

E se tivermos, no denominador, potências de fatores quadráticos irredutíveis, tal como na integral $\displaystyle\int \frac{x^5+3x-5}{(x^2-3x+4)^2(x^2+2)^3(3x-5)}\,dx$?

Neste caso, notando que x^2+3x-5 e x^2+2 não tem raízes reais, fazemos

$$\frac{x^5+3x-5}{(x^2-3x+4)^2(x^2+2)^3(3x-5)} = \frac{Ax+B}{(x^2-3x+4)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-3x+4}$$
$$+ \frac{Ex+F}{(x^2+2)^3} + \frac{Gx+H}{(x^2+2)^2} + \frac{Ix+J}{x^2+2} + \frac{K}{3x-5}$$

Este é um cálculo deveras longo. Na pressa, devemos recorrer a uma boa tábua de integrais ou a um bom aplicativo computacional.

Observação 19.1. *Na verdade, esse tipo de decomposição funciona mesmo se os fatores quadráticos tem raízes reais, desde que estas não sejam raízes de outros fatores do denominador.*

Por exemplo, no cálculo de $\int \frac{x^3-2}{(x^2-4)(2x+1)}\,dx$, *podemos fazer a decomposição*

$$\frac{x^2-3}{(x^2-4)(2x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2-4} + \frac{C}{2x+1}$$

e ir à busca dos coeficientes A, B *e* C, *como anteriormente.*

A integral $\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$

Ainda resta esclarecer como lidar com integrais do tipo $\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$ $(a>0)$, em que o trinômio ax^2+bx+c não tem raízes reais.

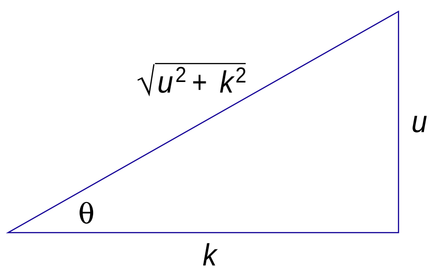
Adotando o procedimento estudado na seção 18.1, aula 18, completamos o quadrado no trinômio ax^2+bx+c, colocando-o na forma $a(x+\alpha)^2+\beta$, e pela mudança de variável $u = x+\alpha$, $du = dx$, chegaremos a

$$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx = \int \frac{\lambda u+\gamma}{(u^2+k^2)^n}\,du = \lambda \int \frac{u\,du}{(u^2+k^2)^n} + \gamma \int \frac{du}{(u^2+k^2)^n}$$

para certos coeficientes λ e γ.

A integral $I = \int \frac{u\,du}{(u^2+k^2)^n}$ é calculada mediante uma mudança de variável simples: $t = u^2+k^2$, $dt = 2u\,du$, $u\,du = \frac{1}{2}dt$, e então $I = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^n}$.

Já o cálculo da integral $J = \int \frac{du}{(u^2+k^2)^n}$ requer uma substituição trigonométrica. Fazemos $u = k\,\mathrm{tg}\,\theta$, $du = k\sec^2\theta\,d\theta$. Teremos $\frac{k}{\sqrt{u^2+k^2}} = \cos\theta$, e então



$$J = \int \frac{\cos^{2n}\theta}{k^{2n}}\sec^2\theta\,d\theta = \frac{1}{a^{2n-1}}\int \cos^{2n-2}\theta\,d\theta$$

e fazemos o uso da fórmula de recorrência

$$\int \cos^m x\,dx = \frac{1}{m}\cos^{m-1}x\,\mathrm{sen}\,x + \frac{m-1}{m}\int \cos^{m-2}x\,dx$$

Fórmulas de recorrência para $\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$

Uma boa tábua de integrais nos fornecerá, para $k > 0$,

$$\int \frac{dx}{(x^2+k^2)^n} = \frac{x}{2k^2(n-1)(x^2+k^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2k^2(n-1)} \int \frac{dx}{(x^2+k^2)^{n-1}} \tag{19.1}$$

bem como também (aqui $\lambda \neq 0$, podendo ser uma constante negativa)

$$\int \frac{dx}{(x^2+\lambda)^n} = \frac{x}{2\lambda(n-1)(x^2+\lambda)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2\lambda(n-1)} \int \frac{dx}{(x^2+\lambda)^{n-1}} \tag{19.2}$$

De um modo mais geral, encontramos também, em uma boa tábua de integrais, o seguinte resultado.

Sendo $a > 0$, $n \geq 2$, e $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$,

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{-(2ax+b)}{\Delta\cdot(n-1)(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{-2a(2n-3)}{\Delta\cdot(n-1)} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} \tag{19.3}$$

Ao final de várias iterações, encontraremos, para $a > 0$, sendo $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$,

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{|\Delta|}} \operatorname{arctg} \frac{2ax+b}{\sqrt{|\Delta|}} + C, & \text{se } \Delta < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{\Delta}}{2ax+b+\sqrt{\Delta}}\right| + C, & \text{se } \Delta > 0 \end{cases}$$

Se $\Delta = 0$, $ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$, sendo x_0 raiz dupla da expressão quadrática.

Temos também a fórmula de recorrência mais geral

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx &= \int \frac{\frac{M}{2a}(2ax+b) + (N - \frac{Mb}{2a})}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx \\ &= \frac{M}{2a}\int \frac{(2ax+b)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} \end{aligned} \tag{19.4}$$

sendo $\int \frac{(2ax+b)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \int \frac{du}{u}$ pela substituição $u = ax^2+bx+c$, $du = (2ax+b)\,dx$.

19.3 Problemas

Substituições trigonométricas

Calcule as seguintes integrais, através de substituições trigonométricas.

1. $\int \dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx$. *Resposta.* $-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + C$.

2. $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$. *Resposta.* $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$.

3. $\int \dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx$. *Resposta.* $\sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\frac{a}{x} + C$.

4. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$. *Resposta.* $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} + C$.

5. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$. *Resposta.* $\frac{x}{4\sqrt{4-x^2}} + C$.

6. $\displaystyle\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{(x^2+1)^2}\,dx$. *Resposta.* $\frac{x}{4(x^2+1)} + \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} + C$.

Integração de funções racionais

Calcule as seguintes integrais de funções racionais. Trabalhe todos os cálculos, evitando usar as fórmulas de recorrência do fechamento da aula.

7. $\int \dfrac{2x-1}{(x-1)(x-2)}\,dx$. *Resposta.* $\ln\left|\frac{(x-2)^3}{x-1}\right| + C$.

8. $\int \dfrac{x\,dx}{(x+1)(x+3)(x+5)}$. *Resposta.* $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x+3)^6}{(x+5)^5(x+1)}\right| + C$.

9. $\int \dfrac{x^4\,dx}{(x^2-1)(x+2)}$. *Resposta.* $\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{(x+1)^3}\right| + \frac{16}{3}\ln|x+2| + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$. *Resposta.* $\frac{1}{x-1} + \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C$.

11. $\int \dfrac{x-8}{x^3-4x^2+4x}\,dx$. *Resposta.* $\frac{3}{x-8} + \ln\frac{(x-2)^2}{x^2} + C$.

12. $\int \dfrac{dx}{x(x^2+1)}$. *Resposta.* $\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + C$.

13. $\int \dfrac{dx}{x^3+1}$. *Resposta.* $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.

14. $\int \dfrac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx$. *Resposta.* $\frac{3x^2-1}{(x-1)(x^2+1)}+\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\operatorname{arctg}x+C$.

Recorrência em integrais de funções racionais

Use as fórmulas de recorrência 19.1 a 19.4 para mostrar que

15. $$\int \frac{2x-1}{(x^2+4)^3}\,dx=\frac{-2x-16}{32(x^2+4)^2}-\frac{3x}{128(x^2+4)}-\frac{3}{256}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$$

16. $$\int \frac{dx}{(x^2-4x+5)^4}$$
$$=\frac{2x-4}{12(x^2-4x+5)^3}+\frac{5(2x-4)}{48(x^2-4x+5)^2}+\frac{5(2x-4)}{32(x^2-4x+5)}+\frac{5}{16}\operatorname{arctg}(x-2)+C$$