

# Aula 18

## Ampliando o repertório de técnicas de integração

### 18.1 Completando quadrados

Da nossa tabela ampliada de integrais imediatas, tabela 15.1, página 164, temos as integrais da tabela 18.1 abaixo.

Tabela 18.1. ( $a > 0$ ,  $\lambda \neq 0$ )

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a^2 + x^2} &= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C & \int \frac{dx}{a^2 - x^2} &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C. \\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + C & \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \lambda}} &= \ln |x + \sqrt{x^2 + \lambda}| + C \end{aligned}$$

Voltaremos nossa atenção agora ao cálculo das integrais indefinidas

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} & I_2 &= \int \frac{(Ax + B)dx}{ax^2 + bx + c} \\ I_3 &= \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} & I_4 &= \int \frac{(Ax + B)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \end{aligned}$$

sendo  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $A$  e  $B$  números reais, e  $a \neq 0$ .

Veremos que, para calcular cada uma das integrais  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ , e  $I_4$ , tudo (ou quase

tudo) que temos a fazer é *completar um quadrado* em  $ax^2 + bx + c$ , e então usar a pequena tabela de integrais 18.1.

Lembramos que *completar um quadrado* em  $ax^2 + bx + c$  é escrever este trinômio do segundo grau na forma  $a(x + m)^2 + n$ .

Para *completar um quadrado* em  $ax^2 + bx + c$ , primeiramente *colocamos o coeficiente a em evidência*:

$$ax^2 + bx + c = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$$

Completamos então o quadrado em  $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ :

$$x^2 + \beta x + \gamma = \left( x + \frac{\beta}{2} \right)^2 + \left( \gamma - \frac{\beta^2}{4} \right)$$

Fazemos então, para o cálculo de uma das integrais  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ , e  $I_4$ , a substituição

$$u = x + \frac{\beta}{2}, \quad du = dx$$

e teremos

$$x^2 + \beta x + \gamma = u^2 \pm k^2$$

$$ax^2 + bx + c = a(u^2 \pm k^2)$$

Agora, a menos de alguns pequenos ajustes, recairemos em integrais da tabela 18.1.

**Exemplo 18.1.** Calcular  $\int \frac{dx}{2x^2 + 3x + 1}$ .

*Solução.* Começamos fazendo

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x + 1 &= 2 \left( x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \right) = 2 \left[ \left( x + \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{1}{2} \right] \\ &= 2 \left[ \left( x + \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{1}{16} \right] = 2 \left[ u^2 - \left( \frac{1}{4} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

sendo  $u = x + 3/4$ .

Como  $du = dx$ ,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{2x^2 + 3x + 1} &= \int \frac{du}{2\left[u^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right]} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{du}{\left(\frac{1}{4}\right)^2 - u^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} \ln \left| \frac{\frac{1}{4} + u}{\frac{1}{4} - u} \right| + C \quad (\text{tabela 18.1}) \\ &= -\ln \left| \frac{1 + 4u}{1 - 4u} \right| + C = -\ln \left| \frac{1 + 4x + 3}{1 - (4x + 3)} \right| + C \\ &= -\ln \left| \frac{4x + 4}{4x + 2} \right| + C = -\ln \left| \frac{2x + 2}{2x + 1} \right| + C = \ln \left| \frac{2x + 1}{2x + 2} \right| + C\end{aligned}$$

**Exemplo 18.2.** Calcular  $\int \frac{x-1}{\sqrt{1-x-x^2}} dx$ .

*Solução.* Começamos fazendo

$$\begin{aligned}1 - x - x^2 &= -(x^2 + x - 1) = -\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1\right] \\ &= -\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right] = -\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] \\ &= \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2\end{aligned}$$

Sendo,  $u = x + 1/2$ ,  $du = dx$ , e  $x = u - 1/2$ ,

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{\sqrt{1-x-x^2}} dx &= \int \frac{x-1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}} dx \\ &= \int \frac{u-3/2}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - u^2}} du \\ &= \int \frac{u}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - u^2}} du - \frac{3}{2} \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - u^2}} du \\ &= I - \frac{3}{2}J\end{aligned}$$

sendo  $I = \int \frac{u}{\sqrt{(\sqrt{5}/2)^2 - u^2}} du$ , e  $J = \int \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{5}/2)^2 - u^2}} du$ .

Para o cálculo de  $I$ , fazemos  $w = (\sqrt{5}/2)^2 - u^2$ , e então  $dw = -2u \, du$ , e temos

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{u}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - u^2}} du = \int \frac{-\frac{1}{2}dw}{\sqrt{w}} = -\sqrt{w} + C \\ &= -\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - u^2} = -\sqrt{1 - x - x^2} + C \end{aligned}$$

Por sua vez,

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - u^2}} du = \arcsen \frac{u}{\sqrt{5}/2} + C \quad (\text{tabela 18.1}) \\ &= \arcsen \frac{2u}{\sqrt{5}} + C = \arcsen \frac{2x+1}{\sqrt{5}} + C \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{\sqrt{1-x-x^2}} dx &= I - \frac{3}{2}J \\ &= -\sqrt{1-x-x^2} - \frac{3}{2} \arcsen \frac{2x+1}{\sqrt{5}} + C \end{aligned}$$

## 18.2 Algumas integrais envolvendo funções trigonométricas

### 18.2.1 Integrais da forma $\int \sen^m x \cos^n x \, dx$ , $m$ e $n$ inteiros não negativos

**Primeiro caso:  $m$  ou  $n$  é um inteiro ímpar**

Consideremos  $J = \int \sen^m x \cos^n x \, dx$ .

Sendo  $m$  e  $n$  inteiros não negativos, no caso em que o expoente  $m$  é ímpar, teremos  $m = 2k + 1$ , e então

$$\begin{aligned} J &= \int \sen^{2k+1} x \cos^n x \, dx \\ &= \int \sen^{2k} x \cos^n x \sen x \, dx \\ &= \int (\sen^2 x)^k \cos^n x \sen x \, dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \sen x \, dx \end{aligned}$$

Agora fazemos  $\cos x = t$ , e então  $dt = -\sin x \, dx$ , obtendo

$$J = \int (1 - t^2)^k t^n (-dt) = - \int (1 - t^2)^k t^n \, dt$$

que é uma integral de um polinômio em  $t$ .

Se  $m$  é par, mas  $n$  é ímpar, transformamos a integral  $J$  em uma integral de um polinômio, por um procedimento análogo.

**Exemplo 18.3.** Calcular  $J = \int \sin^6 x \cos^5 x \, dx$ .

*Solução.*

$$\begin{aligned} J &= \int \sin^6 x \cos^5 x \, dx = \int \sin^6 x \cos^4 x \cos x \, dx \\ &= \int \sin^6 x (\cos^2 x)^2 \cos x \, dx = \int \sin^6 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x \, dx \\ &= \int t^6 (1 - t^2)^2 \, dt, \quad \text{sendo } t = \sin x, \, dt = \cos x \, dx. \end{aligned}$$

Teremos então

$$\begin{aligned} J &= \int t^6 (1 - 2t^2 + t^4) \, dt = \int (t^6 - 2t^8 + t^{10}) \, dt \\ &= \frac{t^7}{7} - \frac{2t^9}{9} + \frac{t^{11}}{11} + C \\ &= \frac{\sin^7 x}{7} - \frac{2\sin^9 x}{9} + \frac{\sin^{11} x}{11} + C \end{aligned}$$

### Segundo caso: $m$ e $n$ são ambos pares

Neste caso, abaixamos os graus das potências de funções trigonométricas, mediante as relações

$$\boxed{\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}} \quad (18.1)$$

ou seja, fazemos

$$\begin{aligned} J &= \int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int \sin^{2k} x \cos^{2\ell} x \, dx \\ &= \int (\sin^2 x)^k (\cos^2 x)^\ell \, dx \\ &= \int \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^k \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^\ell \, dx \end{aligned}$$

**Exemplo 18.4.** Calcular  $I = \int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$ .

*Solução.*  $I = \int \sin^4 x \cos^2 x \, dx = \int (\sin^2 x)^2 \cos^2 x \, dx$

Fazendo uso das relações trigonométricas 18.1, temos

$$\begin{aligned} I &= \int \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx \\ &= \int \left( \frac{1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x}{4} \right) \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{8} \int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x) dx \\ &= \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 2x \, dx - \frac{1}{8} \int \cos^2 2x \, dx + \frac{1}{8} \int \cos^3 2x \, dx \end{aligned}$$

Calculando separadamente as quatro integrais, temos:

$$I_1 = \int dx = x \quad (\text{juntaremos adiante todas as constantes em uma só})$$

$$I_2 = \int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \cos^2 2x \, dx = \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx \quad \left( \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 4x \, dx \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \sin 4x = \frac{x}{2} + \frac{1}{8} \sin 4x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \int \cos^3 2x \, dx \quad (\text{potência de cosseno, de expoente ímpar!}) \\ &= \int \cos^2 2x \cos 2x \, dx = \int (1 - \sin^2 2x) \cos 2x \, dx \\ &= \int (1 - t^2) \cdot \frac{dt}{2} \quad (t = \sin 2x, \, dt = 2 \cos 2x \, dx, \text{ logo } \cos 2x \, dx = \frac{dt}{2}) \\ &= \frac{1}{2} \left( t - \frac{t^3}{3} \right) = \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin^3 2x}{6} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} I &= \int \sin^4 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{8} (I_1 - I_2 - I_3 + I_4) \\ &= \frac{1}{8} x - \frac{1}{16} \sin 2x - \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{16} \sin 2x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C \\ &= \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin^3 2x}{48} + C \end{aligned}$$

### 18.3 Fórmulas de redução (ou de recorrência)

As fórmulas de redução, ou fórmulas de recorrência, frequentemente encontradas em tábuas de integrais, são em geral obtidas através de integração por partes.

Nos exemplos abaixo, deduziremos duas delas e ilustraremos como são usadas.

**Exemplo 18.5.** Sendo  $n \geq 2$ , deduzir a fórmula de redução

$$\int \sec^n x \, dx = \frac{\operatorname{tg} x \sec^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \cdot \int \sec^{n-2} x \, dx \quad (18.2)$$

*Solução.* Seja  $I_n = \int \sec^n x \, dx$ . Temos

$$I_n = \int \sec^n x \, dx = \int \underbrace{\sec^{n-2} x}_u \underbrace{\sec^2 x}_{dv} \, dx = uv - \int v \, du$$

Sendo  $u = \sec^{n-2} x$ , temos

$$\begin{aligned} du &= (n-2) \sec^{n-3} x \cdot (\sec x)' \, dx = (n-2) \sec^{n-3} x \cdot \sec x \operatorname{tg} x \, dx \\ &= (n-2) \sec^{n-2} x \operatorname{tg} x \, dx \end{aligned}$$

Sendo  $dv = \sec^2 x \, dx$ , tomamos  $v = \operatorname{tg} x$ . Daí

$$\begin{aligned} I_n &= uv - \int v \, du \\ &= \operatorname{tg} x \sec^{n-2} x - \int \operatorname{tg} x \cdot (n-2) \sec^{n-2} x \operatorname{tg} x \, dx \\ &= \operatorname{tg} x \sec^{n-2} x - (n-2) \int \sec^{n-2} x \operatorname{tg}^2 x \, dx \end{aligned}$$

Agora, sendo  $J = \int \sec^{n-2} x \operatorname{tg}^2 x \, dx$ , temos

$$\begin{aligned} J &= \int \sec^{n-2} x (\sec^2 x - 1) \, dx = \int (\sec^n x - \sec^{n-2} x) \, dx \\ &= \int \sec^n x \, dx - \int \sec^{n-2} x \, dx = I_n - I_{n-2} \end{aligned}$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned} I_n &= \operatorname{tg} x \sec^{n-2} x - (n-2)J \\ &= \operatorname{tg} x \sec^{n-2} x - (n-2)(I_n - I_{n-2}) \end{aligned}$$

de onde

$$[1 + (n-2)]I_n = \operatorname{tg} x \sec^{n-2} x + (n-2)I_{n-2}$$

e portanto

$$I_n = \frac{\operatorname{tg} x \sec^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$$

ou seja,

$$\int \sec^n x \, dx = \frac{\operatorname{tg} x \sec^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x \, dx$$

**Exemplo 18.6.** Empregando a fórmula de redução 18.2, calcule as integrais  $\int \sec^3 x \, dx$ ,  $\int \sec^4 x \, dx$ , e  $\int \sec^5 x \, dx$ .

Aplicando a fórmula 18.2, que acabamos de deduzir acima, temos, quando  $n = 3$ ,

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x \, dx &= \frac{\operatorname{tg} x \sec x}{2} + \frac{1}{2} \int \sec x \, dx \\ &= \frac{\operatorname{tg} x \sec x}{2} + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C\end{aligned}$$

Aplicando a fórmula 18.2, para  $n = 4$ , temos

$$\begin{aligned}\int \sec^4 x \, dx &= \frac{\operatorname{tg} x \sec^2 x}{3} + \frac{2}{3} \int \sec^2 x \, dx \\ &= \frac{\operatorname{tg} x \sec^2 x}{3} + \frac{2}{3} \operatorname{tg} x + C\end{aligned}$$

Para  $n = 5$ , temos

$$\begin{aligned}\int \sec^5 x \, dx &= I_5 = \frac{\operatorname{tg} x \sec^3 x}{4} + \frac{3}{4} I_3 \\ &= \frac{\operatorname{tg} x \sec^3 x}{4} + \frac{3}{4} \left( \frac{\operatorname{tg} x \sec x}{2} + \frac{1}{2} I_1 \right) \\ &= \frac{\operatorname{tg} x \sec^3 x}{4} + \frac{3 \operatorname{tg} x \sec x}{8} + \frac{3}{8} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C\end{aligned}$$

**Exemplo 18.7.** Deduza a fórmula de recorrência

$$\boxed{\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx}$$

e então, usando-a, calcule  $\int \cos^4 x \, dx$  e  $\int \cos^7 x \, dx$ .

*Solução.*

$$\int \cos^n x \, dx = \int \underbrace{\cos^{n-1} x}_u \underbrace{\cos x \, dx}_{dv} = uv - \int v \, du$$

Sendo  $u = \cos^{n-1} x$ , temos  $du = -(n-1) \cos^{n-2} x \operatorname{sen} x \, dx$ .

Sendo  $dv = \cos x \, dx$ , podemos tomar  $v = \operatorname{sen} x$ . Então

$$\begin{aligned}\int \cos^n x \, dx &= \operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \operatorname{sen}^2 x \, dx \\ &= \operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x) \, dx \\ &= \operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + (n-1) \left( \int \cos^{n-2} x \, dx - \int \cos^n x \, dx \right)\end{aligned}$$



Logo,

$$\int \cos^n x \, dx = \operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \cos^n x \, dx$$

Daí,

$$n \int \cos^n x \, dx = \operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \, dx$$

e então

$$\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$$

Deixamos para o leitor a aplicação desta fórmula, para obter

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x \, dx &= \frac{1}{4} \operatorname{sen} x \cos^3 x + \frac{3}{8} \operatorname{sen} x \cos x + \frac{3x}{8} + C \\ \int \cos^7 x \, dx &= \frac{1}{7} \operatorname{sen} x \cos^6 x + \frac{6}{35} \operatorname{sen} x \cos^4 x + \frac{8}{35} \operatorname{sen} x \cos^2 x + \frac{16}{35} \operatorname{sen} x + C \end{aligned}$$

## 18.4 Problemas

### Integrais que requerem complemento de quadrados

1.  $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$ . Resposta.  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C$ .
2.  $\int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 4}$ . Resposta.  $\frac{1}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{3x-1}{\sqrt{11}} + C$ .
3.  $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 5}$ . Resposta.  $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-5}{x-1} \right| + C$ .
4.  $\int \frac{6x-7}{3x^2 - 7x + 11} dx$ . Resposta.  $\ln |3x^2 - 7x + 11| + C$ .
5.  $\int \frac{3x-1}{x^2 - x + 1} dx$ . Resposta.  $\frac{3}{2} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$ .
6.  $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$ . Resposta.  $\frac{1}{2} \operatorname{arcsen} \frac{8x+3}{\sqrt{41}} + C$ .
7.  $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 5x}}$ . Resposta.  $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln |6x + 5 + \sqrt{12(3x^2 + 5x)}| + C$ .
8.  $\int \frac{x+3}{\sqrt{3+4x-4x^2}} dx$ . Resposta.  $-\frac{1}{4} \sqrt{3+4x-4x^2} + \frac{7}{4} \operatorname{arcsen} \frac{2x-1}{2} + C$ .
9.  $\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ . Resposta.  $2\sqrt{ax^2+bx+c} + C$ .

## Integrais envolvendo funções trigonométricas

10.  $\int \sin^3 x \, dx$ . Resposta.  $\frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C$ .

11.  $\int \sin^5 x \, dx$ . Resposta.  $-\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + C$ .

12.  $\int \cos^4 x \sin^3 x \, dx$ . Resposta.  $-\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x + C$ .

13.  $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} \, dx$ . Resposta.  $\operatorname{cosec} x - \frac{1}{3} \operatorname{cosec}^3 x + C$ .

*Sugestão.* Use o mesmo procedimento descrito à página 194, para o cálculo da integral  $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ , quando  $m$  ou  $n$  é um expoente ímpar.

14.  $\int \sin^4 x \, dx$ . Resposta.  $\frac{3}{8}x - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C$ .

15.  $\int \cos^6 x \, dx$ . Resposta.  $\frac{1}{16} \left( 5x + 4 \sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{3} + \frac{3}{4} \sin 4x \right) + C$ .

16.  $\int \sin^4 x \cos^4 x \, dx$ . Resposta.  $\frac{1}{128} \left( 3x - \sin 4x + \frac{\sin 8x}{8} \right) + C$ .

*Sugestão.*  $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ .

17.  $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx$ . Resposta.  $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln |\cos x| + C$ .

*Sugestão.*  $\operatorname{tg}^3 x = \operatorname{tg} x \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg} x (\sec^2 x - 1)$ .

18.  $\int \sec^3 x \, dx$ . Resposta.  $\frac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C$ .

*Sugestão.*  $\int \sec^3 x \, dx = \int \underbrace{\sec x}_u \underbrace{\sec^2 x \, dx}_{dv}$ . Depois, use a identidade  $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$ .

1. Alternativamente, podemos fazer

$$\int \sec^3 x \, dx = \int \frac{1}{\cos^3 x} \, dx = \int \frac{\cos x}{\cos^4 x} \, dx = \int \frac{\cos x \, dx}{(1 - \sin^2 x)^2}, \text{ e então } u = \sin x.$$

19.  $\int \sec^4 x \, dx$ . Resposta.  $\operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C$ .

*Sugestão.*  $\sec^4 x = \sec^2 x \sec^2 x = (1 + \operatorname{tg}^2 x) \sec^2 x$ .

20.  $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} \, dx$ . Resposta.  $\frac{3}{5} \cos^{5/3} x + 3 \cos^{-1/3} x + C$ .

21.  $\int \frac{dx}{4 - 5 \sin x}$ . Resposta.  $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1} \right| + C$ .

*Sugestão.* Use a identidade  $\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$  (temos também  $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$ ).

Faça  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = u$ , com  $\frac{x}{2} = \arctg u$  e então  $dx = \frac{2}{1+u^2} du$ .

22.  $\int \frac{\sin^2 x \, dx}{1 + \cos^2 x}$ . Resposta.  $\sqrt{2} \arctg \left( \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) - x + C$ .

*Sugestão.* Como  $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$ , deduzimos  $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$  e

$\sin^2 x = \cos^2 x \operatorname{tg}^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ . Faça  $t = \operatorname{tg} x$ ,  $x = \arctg t$ .

23.  $\int \sin ax \cos bx \, dx \, (a \neq b)$ . *Resposta.*  $-\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + C$ .

*Sugestão.* Considere as fórmulas abaixo, e some-as membro a membro.

$$\sin(a+b)x = \sin ax \cos bx + \sin bx \cos ax$$

$$\sin(a-b)x = \sin ax \cos bx - \sin bx \cos ax$$

24.  $\int \sin ax \sin bx \, dx \, (a \neq b)$ . *Resposta.*  $\frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + C$

*Sugestão.* Desenvolva  $\cos(a-b)x$  e  $\cos(a+b)x$ , e então calcule  $\cos(a-b)x - \cos(a+b)x$ .

## Fórmulas de redução

25. Deduza a fórmula de recorrência

$$\int \operatorname{tg}^n x \, dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x \, dx$$

e então, usando-a, calcule

(a)  $\int \operatorname{tg}^5 x \, dx$ . *Resposta.*  $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln |\cos x| + C$ .

(b)  $\int \operatorname{tg}^6 x \, dx$ . *Resposta.*  $\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \operatorname{tg} x - x + C$

*Sugestão.*  $\int \operatorname{tg}^n x \, dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x (\sec^2 x - 1) \, dx$ .

26. Deduza as fórmulas de recorrência

(a)  $\int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx$

(b)  $\int x^n e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} \, dx$

