Valores P

Augusto César Ferreira de Miranda Oliveira

Programa de Pós Graduação em Biometria e Estatística Aplicada

29 de Novembro de 2019

PPG EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA UFRPE

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

Introdução

- P-valor ou valor p é outro meio de relatar os resultados de um teste de hipótese.
- Um valor p relata os resultados de um teste em uma escala mais contínua, em vez de apenas “aceitar H_0” ou “rejeitar H_0”.

P-valor

Definição

- **Definição**: Um *valor p* $p(\mathbf{X})$ é uma estatística de teste que satisfaz $0 \leq p(\mathbf{x}) \leq 1$ para cada ponto amostral $\mathbf{x}$. Pequenos valores de $p(\mathbf{X})$ fornecem evidências de que H_1 é verdadeira. Um valor p é *válido* se, para cada $\theta \in \Theta_0$ e cada $0 \leq \alpha \leq 1$,

$$P_\theta(p(\mathbf{X}) \leq \alpha) \leq \alpha. \tag{1}$$

P-valor

Definição

$$P_\theta(p(\mathbf{X}) \leq \alpha) \leq \alpha. \qquad (2)$$

Onde,

- P_θ declara a probabilidade de ocorrência de eventos extremos (rejeitar a hipótese nula sabendo que é verdadeira);
- $p(\mathbf{X})$ é uma estatística de teste sob a população em estudo e
- α denota o nível de significância estipulado.

P-valor

Teorema

- O meio mais comum para definir um valor p válido é dado por:
- **Teorema**: Seja $W(\mathbf{X})$ uma estatística de teste, de modo que grande valores de W dão evidências de que H_1 é verdadeira. Para cada ponto amostral $\mathbf{x}$, defina

$$p(\mathbf{x}) = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(W(\mathbf{X}) \geq W(\mathbf{x})) \tag{3}$$

Então, $p(\mathbf{x})$ é um valor p válido.

P-valor

Demonstração

- **Demonstração**: Fixe $\theta \in \Theta_0$. Seja $F_\theta(w)$ denotando a FDA de $-W(\mathbf{X})$. Definimos:

$$\begin{aligned} p_\theta(\mathbf{x}) &= P_\theta(W(\mathbf{X}) \geq W(\mathbf{x})) \\ &= P_\theta(-W(\mathbf{X}) \leq -W(\mathbf{x})) \\ &= F_\theta(-W(\mathbf{x})). \end{aligned} \tag{4}$$

- Então, a variável aleatória $p_\theta(\mathbf{X})$ é igual a F_θ(-W($\mathbf{X}$)).

P-valor

Transformação Integral de Probabilidade

- Seja X uma variável com função de distribuição F. A transformação de X tal que $Y = F(X)$ é denominada *transformação integral de probabilidade.* (MAGALHÃES, 2015) $\square$
- O uso da transformação depende da possibilidade de inverter F. A inversa tem domínio em [0,1].
- A função inversa também pode ser representada por F^{-1}.

P-valor

Demonstração

- Logo, uma distribuição de $p_\theta(\mathbf{X})$ é estocasticamente maior ou igual a uma distribuição uniforme (0,1).
- Isto é, para cada $0 \leq \alpha \leq 1$, $P_\theta(p_\theta(\mathbf{X}) \leq \alpha) \leq \alpha$.
- Uma vez que $p(\mathbf{x}) = \sup_{\theta' \in \Theta_0} p_{\theta'}(\mathbf{x}) \geq p_\theta(\mathbf{x})$ para cada $\mathbf{x}$.
- Assim, $p(\mathbf{X})$ é um valor p válido.

P-valor

Demonstração

- O cálculo do supremo em (2) pode ser difícil, pois "[...] alguns conjuntos limitados de números racionais não possuem supremo (ou ínfimo). Este fato está ligado à inexistência de raízes quadradas racionais de certos números inteiros, mas é uma dificuldade que vai muito além dessa falta" (LIMA, 2019, p. 78).

P-valor

Exemplos

Exemplo 1 - Valor p bilateral da normal

Sejam $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de uma população $\mathrm{n}(\mu, \sigma^2)$. Considere testar $H_0 : \mu = \mu_0$ versus $H_1 : \mu \neq \mu_0$. Onde,

- μ_0 denota a média amostral do experimento.
- $H_0 : \mu = \mu_0$ declara que não houve alteração no experimento.
- $H_1 : \mu \neq \mu_0$ declara que houve alteração no experimento.

P-valor

Exemplos

Exemplo 1 - Valor p bilateral da normal

- De acordo acordo com o Exercício 8.38 (CASELLA; BERGER, 2002, p. 408), o Teste de Razão de Verossimilhança (TRV) rejeita H_0 para grandes valores de $W(\mathbf{X}) = |\overline{x} - \mu_0|/(S/\sqrt{n})$, estatística de teste para média.
- Sabendo-se que, σ é desconhecida, por definição temos:

$$W(\mathbf{X}) = \frac{(\overline{x} - \mu_0)}{(S/\sqrt{n})}, \text{ em que } W(\mathbf{X}) \sim T_{n-1}$$

P-valor

Exemplos

Exemplo 1 - Valor p bilateral da normal

- Calculando (2) para encontrar um valor p válido, temos:

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{x}) &= \sup_{\mu \in \Theta_0} P_\mu(W(\mathbf{X}) \geq W(\mathbf{x})) \\
&= P_\mu(W(\mathbf{X}) \geq W(\mathbf{x})) \\
&= 2P_\mu(T_{n-1} \geq W(\mathbf{x})) \\
&= 2[1 - P_\mu(T_{n-1} < W(\mathbf{x}))] \\
&= 2\left\{1 - F^{-1}_{T_{n-1}}[W(\mathbf{x})]\right\} \qquad (5)
\end{aligned}$$

P-valor

Exemplo 2 - Valor p bilateral da normal

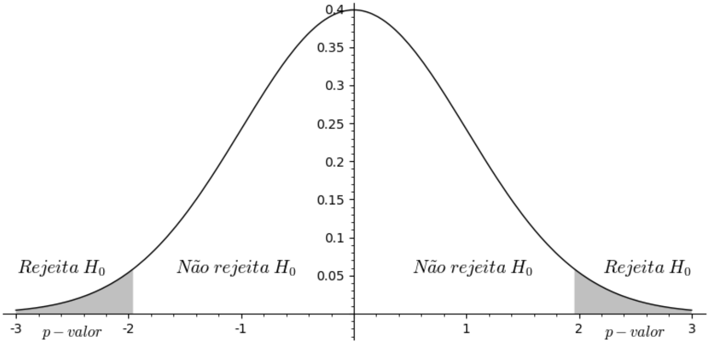

Figura: Valor p bilateral da normal

Fonte: Felipe Mendonça, modificado por Augusto César.

P-valor

Exemplos

Exemplo 2 - Valor p unilateral da normal

Mais uma vez, tenha em conta o modelo normal do Exemplo 1, mas considere testar $H_0 : \mu \leq \mu_0$ versus $H_1 : \mu > \mu_0$. Onde,

- μ_0 é a proporção máxima aceitável de itens com defeito.
- $H_0 : \mu \leq \mu_0$ declara que a proporção de itens com defeito é aceitável.
- $H_1 : \mu > \mu_0$ declara que a proporção de itens com defeito é inaceitavelmente alta.

P-valor

Exemplos

Exemplo 2 - Valor p unilateral da normal

- De acordo com o exercício 8.37 (CASELLA; BERGER, 2002, p. 407), o TRV rejeita H_0 para grandes valores de $W(\mathbf{X}) = (\overline{X} - \mu_0)/(S/\sqrt{n})$.
- Para esta estatística, o supremo em (2) sempre ocorre em um parâmetro (μ_0, σ), e o valor de σ utilizado não faz diferença.
- Considere qualquer $\mu \leq \mu_0$ e qualquer σ:

P-valor

Exemplos

Exemplo 2 - Valor p unilateral da normal

- Temos assim,

$$\begin{aligned}
P_{\mu,\sigma}(W(\mathbf{X}) \geq W(\mathbf{x})) &= P_{\mu,\sigma}\left(\frac{\overline{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \geq W(\mathbf{x})\right) \\
&= P_{\mu,\sigma}\left(\frac{\overline{x}-\mu_0+\mu-\mu}{S/\sqrt{n}} \geq W(\mathbf{x})\right) \\
&= P_{\mu,\sigma}\left(\frac{\overline{x}-\mu}{S/\sqrt{n}} + \frac{\mu-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \geq W(\mathbf{x})\right) \\
&= P_{\mu,\sigma}\left(\frac{\overline{x}-\mu}{S/\sqrt{n}} \geq W(\mathbf{x}) - \left(\frac{\mu-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right)\right)
\end{aligned}$$

P-valor

Exemplos

Exemplo 2 - Valor p unilateral da normal

$$
\begin{aligned}
P_{\mu,\sigma}(W(\mathbf{X}) \geq W(\mathbf{x})) &= P_{\mu,\sigma}\left(\frac{\overline{x}-\mu}{S/\sqrt{n}} \geq W(\mathbf{x}) + \frac{\mu_0-\mu}{S/\sqrt{n}}\right) \\
&= P_{\mu,\sigma}\left(T_{n-1} \geq W(\mathbf{x}) + \frac{\mu_0-\mu}{S/\sqrt{n}}\right) \\
&\leq P(T_{n-1} \geq W(\mathbf{x}))
\end{aligned}
$$

- A desigualdade na última linha é verdadeira porque $\mu_0 \geq \mu$ e $(\mu_0-\mu)/(S/\sqrt{n})$ é uma variável aleatória não negativa.

P-valor

Exemplos

Exemplo 2 - Valor p unilateral da normal

- Portanto, o valor p de (2) para este teste unilateral t é

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) &= P(T_{n-1} \geq W(\mathbf{x})) \\ &= P(T_{n-1} \geq (\overline{x} - \mu_0/(s/\sqrt{n})). \end{aligned} \tag{6}$$

P-valor

Exemplo 2 - Valor p unilateral da normal

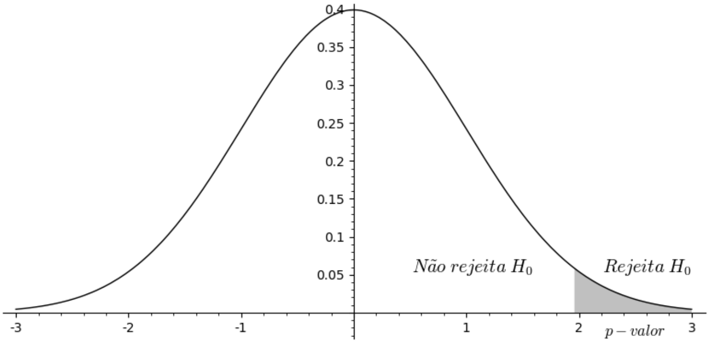

Figura: Valor p unilateral da normal

Fonte: Felipe Mendonça, modificado por Augusto César.

P-valor

Condicionamento

- Outro método para definir um valor p válido, uma alternativa à utilização de (2), envolve condicionar sobre uma estatística suficiente.
- Para cada ponto amostral $\mathbf{x}$ definimos:

$$p(\mathbf{x}) = P(W(\mathbf{X}) \geq W(\mathbf{x}) | S = S(\mathbf{X})) \tag{7}$$

P-valor

Condicionamento

- Argumentando como no teorema anterior, mas considerando somente a distribuição única, que é a distribuição condicional de $\mathbf{X}$ considerando que $S = s$, vemos que, para qualquer, $0 \leq \alpha \leq 1$,

$$P(p(\mathbf{X}) \leq \alpha | S = s) \leq \alpha \tag{8}$$

Também, é um p-valor válido.

P-valor

Exemplos

Exemplo 3 - Teste Exato de Fisher

- Sejam S_1 e S_2 observações independentes, com $S_1 \sim Binomial(n_1, p_1)$ e $S_2 \sim Binomial(n_2, p_2)$. Considere testar $H_0 : p_1 = p_2$ versus $H_1 : p_1 > p_2$.
- Seja $S = S_1 + S_2$ uma estatística suficiente para H_0.
- A distribuição condicional S_1 dado $S = s$ é hipergeométrica$(n_1 + n_2, n_1, s)$, vejamos:

P-valor

Exemplos

Exemplo 3 - Teste Exato de Fisher

- Sabendo-se que, por definição, a distribuição condicional pode ser reescrita em notação de função de probabilidade da seguinte forma:

$$P_{x|y}(x|y) = \frac{P_{x,y}(x,y)}{P_y(y)}$$

- E, se X, Y são independentes, então $P_{x,y}(x,y) = P_x(x) \cdot P_y(y)$. Sendo assim, temos:

P-valor

Exemplos

Exemplo 3 - Teste Exato de Fisher

$$
\begin{aligned}
P(S_1 = s_1 | S_1 + S_2 = s) &= \frac{P(S_1 = s_1, S_1 + S_2 = s)}{P(S_1 + S_2 = s)} \\
&= \frac{P(S_1 = s_1, S_2 = s - S_1)}{P(S_1 + S_2 = s)} \\
&= \frac{P(S_1 = s_1, S_2 = s - s_1)}{P(S_1 + S_2 = s)} \\
&= \frac{P(S_1 = s_1)P(S_2 = s - s_1)}{P(S_1 + S_2 = s)} \qquad (9)
\end{aligned}
$$

P-valor

Exemplos

Exemplo 3 - Teste Exato de Fisher

Onde,

- $S_1 \sim Binomial(n_1, s_1) = \binom{n_1}{s_1} p^{s_1}(1-p)^{n_1-s_1}$
- $S_2 \sim Binomial(n_2, s-s_1) = \binom{n_2}{s-s_1} p^{s-s_1}(1-p)^{n_2-(s-s_1)}$
- $S_1 + S_2 \sim Binomial(n1+n2, s) = \binom{n_1+n_2}{s} p^{s}(1-p)^{n_1+n_2-s}$

P-valor

Exemplos

Exemplo 3 - Teste Exato de Fisher

Retomando a equação (9), temos:

$$
\begin{aligned}
P(S_1 = s_1 | S_1 + S_2 = s) &= \frac{\binom{n_1}{s_1} p^{s_1}(1-p)^{n_1-s_1} \cdot \binom{n_2}{s-s_1} p^{s-s_1}(1-p)^{n_2-s+s_1}}{\binom{n_1+n_2}{s} p^{s}(1-p)^{n_1+n_2-s}} \\
&= \frac{\binom{n_1}{s_1}\binom{n_2}{s-s_1} p^{s_1+s-s_1}(1-p)^{n_1-s_1+n_2-s_1+s_1}}{\binom{n_1+n_2}{s} p^{s}(1-p)^{n_1+n_2-s}} \\
&= \frac{\binom{n_1}{s_1}\binom{n_2}{s-s_1} p^{s}(1-p)^{n_1+n_2-s}}{\binom{n_1+n_2}{s} p^{s}(1-p)^{n_1+n_2-s}} \\
&= \frac{\binom{n_1}{s_1}\binom{n_2}{s-s_1}}{\binom{n_1+n_2}{s}} = hipergeométrica(n1+n2, s)
\end{aligned}
$$

P-valor

Exemplos

Exemplo 3 - Teste Exato de Fisher

- O teste definido por este valor p é chamado de Teste Exato de Fisher.

Bibliografia

- CASELLA, George; BERGER, Roger L. **Statistical inference**. Pacific Grove: Duxbury, 2002.
- LIMA, Elon Lages. Curso de Análise vol. 1–15ª edição. **Rio de Janeiro: IMPA–Projeto Euclides**, 2019.
- MAGALHÃES, Marcos Nascimento. **Probabilidade e variáveis aleatórias**. São Paulo: Edusp, 2015.

Valores P

Augusto César Ferreira de Miranda Oliveira

Programa de Pós Graduação em Biometria e Estatística Aplicada

29 de Novembro de 2019

PPG EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA UFRPE

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO