Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Augusto Carvalho D’Arruda Neto RA: 157704

Valor em Risco: Modelos ARMA e GARCH

CAMPINAS

2021

1 Introdução

A medida mais famosa de risco no contexto da análise financeira é chamada de Valor em Risco, ela foi introduzida por J.P. Morgan em Outubro de 1994 através do *RiskMetrics™*. O VaR (Value at Risk) é uma estimação da cauda inferior da distribuição empírica. Muitas aplicações assumem que os retornos são normalmente distribuídos, mas no exemplo desenvolvido veremos que há um modelo de cálculo de Valor em Risco feito pela modelagem ARMA-GARCH que demonstra ser superior ao modelo usando a distribuição Normal. O desenvolvimento do exemplo é feito a partir do índice S&P 500, um dos índices mais famosos do mercado de ações dos Estados Unidos.

2 Metodologia

Quando se trata de uma carteira de ativos, em um período pré-fixado, a medida de Valor em Risco nos mostra a variação potencial máxima do ativo. O Valor em Risco mede a pior perda que um ativo ou carteira de investimento pode presenciar devido a eventos extremos.

2.1 Valor em Risco

O Valor em Risco é definido como o máximo de perda em um certo tempo. Ele é de fato uma probabilidade $\theta \in (0,1)$, ou seja, a um nível $\alpha = 1-\theta$ nos mostra um retorno (ou perda) em um certo período de tempo. Se considerarmos x_t o retorno, o valor em risco pode ser definido como

$$\theta = \mathrm{P}\left[x_{t+1} \leq VaR_{\theta,t+1} \mid \mathscr{F}_t\right] \tag{1}$$

sendo que a função de densidade contínua condicional $F_t(y) = \Pr\left[x_t \leq y \mid \mathscr{F}_{t-1}\right]$, com $F_t(y)^{-1}$, sendo a inversa da função de densidade contínua condicional, vemos que o Valor em Risco pode ser dado por

$$VaR_{\theta,t} = F_t(y)^{-1}(\theta) \tag{2}$$

esse resultado é demonstrado em Morettin (2006)[1].

A principal ideia de se calcular o Valor em Risco utilizando os modelos ARMA (modelo auto-regressivo de médias móveis) e GARCH (modelo de heterocedasticidade condicional auto-regressivo generalizado) é que a volatilidade pode ser modelada pelo modelo heterocedástico do tipo GARCH, e pelo fato de algumas séries de retornos possuírem auto-correlação, podemos eliminar a auto-correlação utilizando um modelo linear tipo ARMA.

Primeiramente, vamos entender o que cada modelo faz.

2.2 Modelo GARCH para os erros

O modelo GARCH vem da família dos modelos ARCH. Ele é uma extensão generalizada do modelo ARCH, introduzida por Bollerslev (1986) para corrigir o problema de necessidade de um número grande de lag para estimar corretamente a evolução da volatilidade no decorrer do tempo.

O modelo $GARCH(s,r)$ assume que $a_t = \sigma_t e_t$, e que e_t são variáveis aleatórias iid com média zero e variância um, e σ_t é:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{s} \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{r} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \tag{3}$$

com $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, ..., s-1, \alpha_s > 0, \beta \geq 0, j = 1, ..., r-1$ e $\beta_r > 0$. Esses parâmetros são suficientes para que a variância condicional σ_t^2 seja positiva. O modelo $GARCH(1,1)$ é considerado o mais simples e mais usado onde

$$\sigma_t^2 = E\left[a_t^2 \mid F_{t-1}\right] = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \tag{4}$$

Repare que α_1 e β_1 são positivos, e que valores altos de a_{t-1}^2 ou σ_{t-1}^2 nos retorna um valor alto de σ_t^2. Se fizéssemos $\upsilon_t = a_{t-1}^2 - \sigma_t^2$ de forma que υ_t possui média zero e serialmente é não-correlacionado. Dessa forma, o modelo $GARCH(1,1)$ pode ser escrito como

$$a_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) a_{t-1}^2 + v_t - \beta_1 v_{t-1} \tag{5}$$

de forma generalizada, podemos escrever que o modelo $GARCH(s,r)$ é

$$a_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i + \beta_i) a_{t-i}^2 + v_t - \sum_{i=1}^{s} \beta_i v_{t-i} \tag{6}$$

repare que há uma condição necessária de suficiência no nosso modelo, em que

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i + \sum_{i=1}^{r} \beta_i = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i + \beta_i) < 1 \tag{7}$$

Quando essa condição é existente, a variância incondicional poderá ser escrita como

$$\sigma_a^2 = \mathrm{var}[a_t] = \alpha_0 / \left[1 - \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i + \beta_i)\right] \tag{8}$$

Esse resultado é demonstrado em Bollerslev (1986), e basicamente ele nos mostra que quanto mais próximos os coeficientes $\alpha_1 + \beta_1$ estão de 1, a volatilidade é mais persistente, isso significa dizer que as mudanças da variância terão um efeito mais persistente no modelo.

2.3 Modelo ARMA para a média

O modelo $ARMA$ foi introduzido por Box, Jenkins e Reinsel (1994). O modelo $ARMA$ combina o modelo AR(p) com o MA(q), ou seja, um modelo auto-regressivo com médias móveis. O modelo $ARMA(p,q)$ pode ser expressado por

$$\mu_t = E\left(r_t \mid F_{t-1}\right) = \phi_o + \sum_{i=1}^{p} \phi_i r_{t-i} - \sum_{j=1}^{q} \theta_j a_{t-j} \tag{9}$$

A primeira parte da equação representa o modelo AR(p) e a segunda o modelo MA(q). Especificamente, um modelo $ARMA(1,1)$ é dado por

$$\mu_t = E\left(r_t \mid F_{t-1}\right) = \phi_o + \phi_1 r_{t-1} - \theta_1 a_{t-1} \tag{10}$$

3 Processo ARMA-GARCH

O processo $ARMA$ é regido por um ruído branco, ε_t, e o processo $GARCH$ é estacionário, mas possui também um ruído branco. Se considerarmos que os erros do processo $ARMA$ ε_t sejam $\sigma_t z_t$, sendo que σ_t seja um processo $GARCH$, os modelos são combinados para gerar um modelo com as seguintes especificações

$$\begin{aligned} x_t &= \mu_t + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \sigma_t z_t \\ \mu_t &= \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i \mu_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{r} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{aligned} \tag{11}$$

sendo que, μ_t e σ_t são, respectivamente, a média e a variância condicional do processo ARMA-GARCH. Utilizando esse processo, conseguimos por fim calcular as estimativas dos parâmetros do modelo, afim de descobrir se os parâmetros são significativos dado a nossa amostra.

4 Exemplo

No nosso exemplo, vamos calcular o valor em risco utilizando o modelo $ARMA(1,1) + GARCH(1,1)$ para o índice S&P500

4.1 S&P 500

O S&P 500 é um índice do mercado de ações que reúne as 500 maiores empresas do mundo listadas nas principais bolsas de valores dos Estados Unidos. O S&P 500 seria o equivalente ao IBOVESPA aqui no Brasil, porém, muito maior. O S&P 500 é considerado um termômetro do mercado global de ações, e é muito usado como referência para de rentabilidade da renda variável.

No nosso exemplo, pegamos o período de 1 de Janeiro de 1990 até 18 de Maio de 2021.

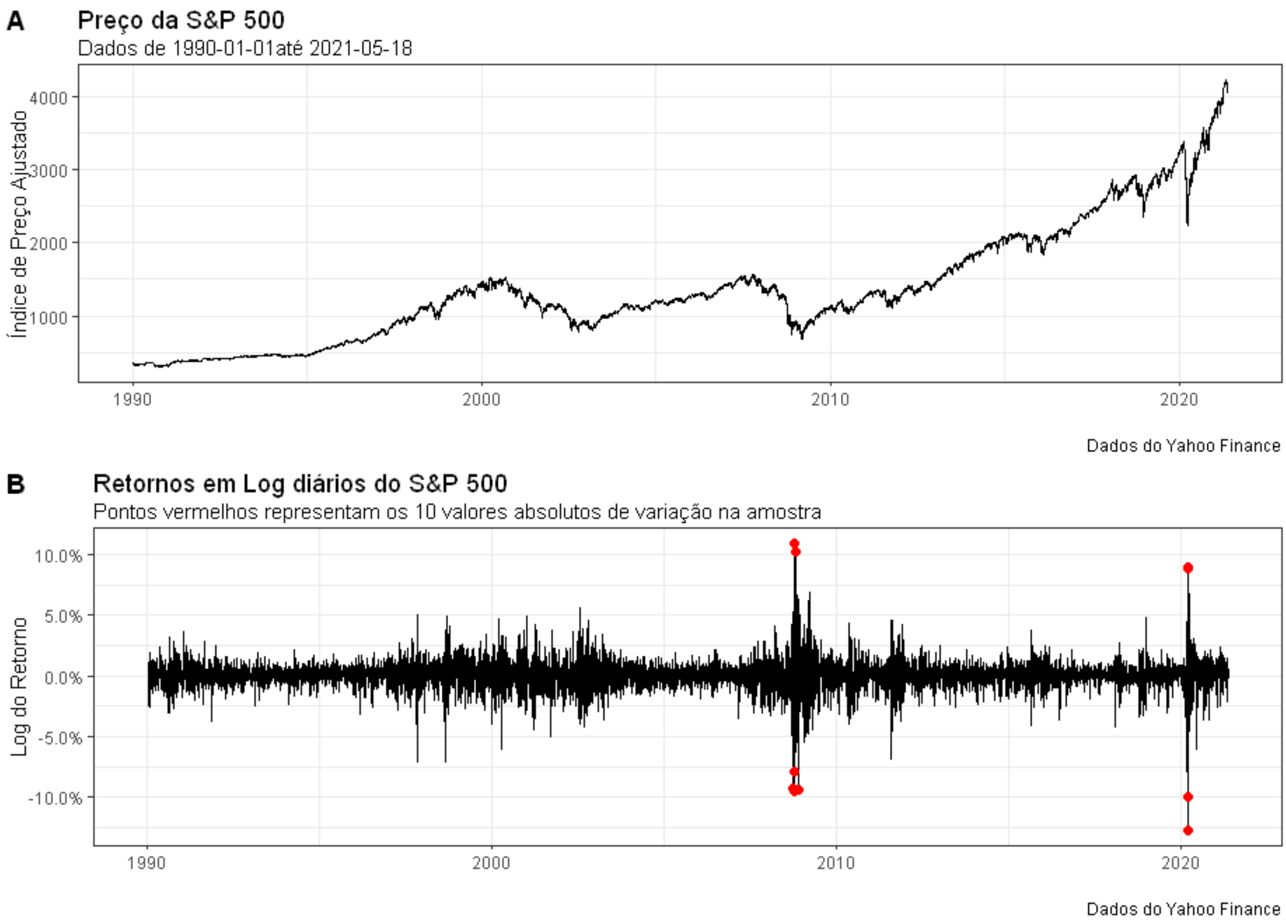

Figura 1: *Na figura A temos o índice do preço da S&P 500 e na figura B temos o retorno em Log diário*

É curioso perceber que, os pontos vermelhos do gráfico B da Figura 1 coincidem com dois períodos de crise no mercado de ações, os primeiros pontos são de 2008, referentes à crise dos *subprimes* da bolha do mercado de residências, e em um segundo momento em 2020 sobre à pandemia do Sars-Cov-2 que, até o momento, continua atingindo o mundo.

Repare que no gráfico B da Figura 1, todos os retornos estão centrados em zero. Quando o Índice de Preço muda, para cima ou para baixo, em um curto período, conseguimos capturar à volatilidade do ativo. Os pontos em vermelho evidenciam os pontos em que a volatilidade foi muito alta.

É sempre bom olhar o gráfico de autocorrelação, para checar os padrões da série financeira em análise. O gráfico de autocorrelação pode indicar potenciais problemas nos dados, e ele também nos ajudará no processo futuro de modelagem. Para os retornos financeiros, nós esperamos achar valores baixos de correlações negativas ou positivas. Isso quer dizer que, valores financeiros passados têm pouco poder de explicação sobre os valores futuros. Na Figura 2 vemos exatamente isso quando fazemos o gráfico de autocorrelação para o Log do retorno do Índice S&P 500.

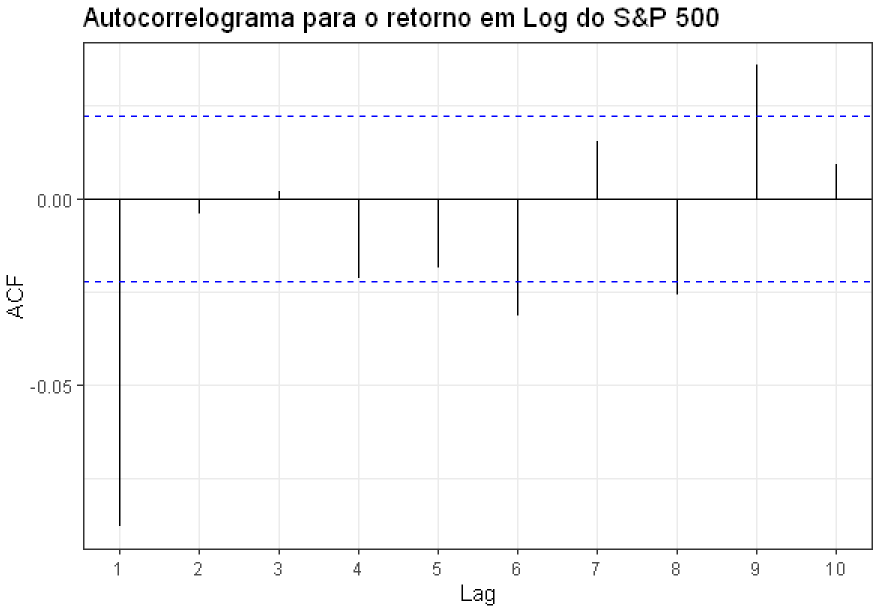

Figura 2: *O autocorrelograma do Log de Retornos do Índice S&P 500. A autocorrelação em lag k do eixo x mostra a correlação linear entre o log do returno no tempo t para t-k no índice S&P 500. A linha pontilhada azul representa a significância estatística da correlação*

4.2 Estimando o Modelo

No nosso exemplo, usaremos apenas um modelo, $ARMA(1,1) + GARCH(1,1)$ a fim de exemplificação para posteriormente calcular o Valor em Risco.

Da equação (11) nós vemos que o modelo $ARMA(1,1)$ é dado por

$$\mu_t = \phi_o + \phi_1 r_{t-1} - \theta_1 a_{t-1} \tag{12}$$

e o modelo $GARCH(1,1)$ é dado por

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha r_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \tag{13}$$

Sendo assim, quando rodamos o nosso modelo, podemos encontrar os valores de $\mu, AR(1), MA(1), \omega, \alpha_1, \beta_1$

Tabela 1: *Parâmetros do modelo ARMA(1,1) + GARCH (1,1) para a série de S&P 500*

Parâmetro	Estimador	Erro Padrão	t value	p-valor
μ	0.000508	0.000064	7.9624	< 0.00001
AR(1)	0.811833	0.037227	21.8078	< 0.00001
MA(1)	-0.866002	0.031425	-27.5574	< 0.00001
ω	0.000002	0.000001	2.3791	0.01735
α_1	0.095999	0.009535	10.0686	< 0.00001
β_1	0.889893	0.009975	89.2120	< 0.00001

Nota: As estimativas do modelo foram calculadas pelo pacote *rugarch*[4] no software R.

Repare que $\alpha_1 + \beta_1 < 1$, o que significa que o modelo garante a reversão à média, isso é, no longo prazo, a variância condicional deve reverter até a sua média, que é a variância incondicional. No nosso caso, vemos que a persistência da volatilidade indica que mudanças muito grandes tendem a se manter por um tempo depois da primeira mudança. $\alpha_1 + \beta_1$ está bem perto de 1, o que implica que a nossa volatilidade é persistente.

4.3 Calculando o Valor em Risco: ARMA-GARCH

Calcular o Valor em Risco utilizando o quantil da Normal, assume que os retornos são normalmente distribuídos. Esse método consiste em computar a variância do retorno, e é definido da seguinte forma:

$$\mathrm{VaR}(a) = \mu + \sigma * N^{-1}(a) \tag{14}$$

em que μ é a média do retorno, σ é o desvio padrão do retorno, a é o intervalo de confiança e N^{-1} é a inversa da função de densidade de probabilidade, o que nos resulta no quantil correspondente de uma distribuição Normal dado a.

Já para o nosso modelo $ARMA - GARCH$, calculamos o Valor em Risco da seguinte forma

$$VaR(a) = \mu + \hat{\sigma}_{t|t-1} * F^{-1}(a) \tag{15}$$

em que $\hat{\sigma}_{t|t-1}$ é o desvio padrão condicional dado a informação $t-1$ e F^{-1} é a inversa da distribuição Normal. Esse cálculo é mais utilizado pois ele leva em consideração à volatilidade do retorno. Para efeito de comparação, a Figura 3 mostra em vermelho o VaR do nosso modelo e em verde o VaR calculado pelo quantil da Normal.

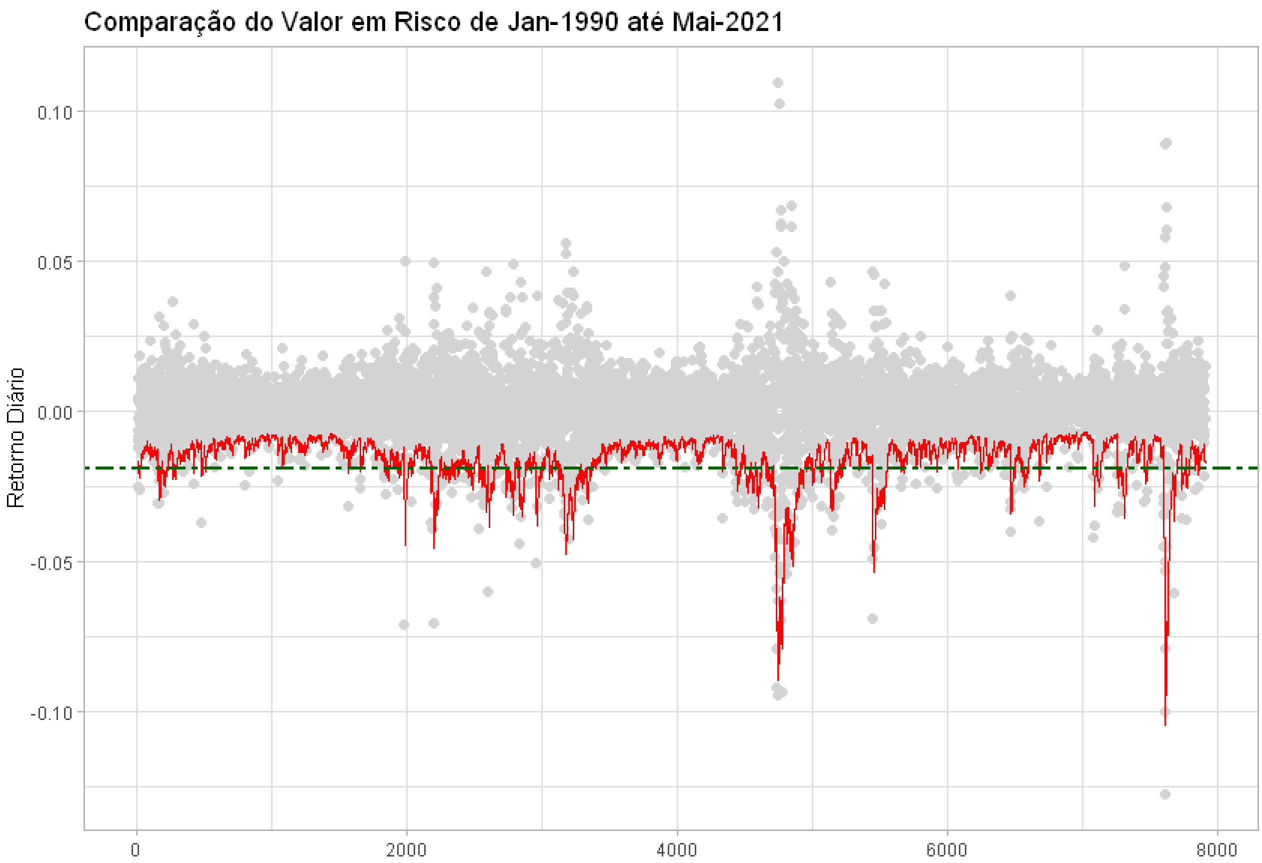

Figura 3: *Ambos Valores em Risco possuem um α de 0.05. O VaR calculado pelo modelo ARMA-GARCH consegue captar a volatilidade da série de retornos*

O modelo VaR seguiu um parâmetro típico de um dia a frente, e é notável que ele conseguiu captar momentos em que as mudanças do log retorno foram grandes.

Se observamos os 500 últimos pontos, veremos que perto da observação 200, que coincide com o começo do ano de 2020, há uma volatilidade imensa, e mesmo assim, a linha de estimação do VaR consegue acompanhar de certa forma.

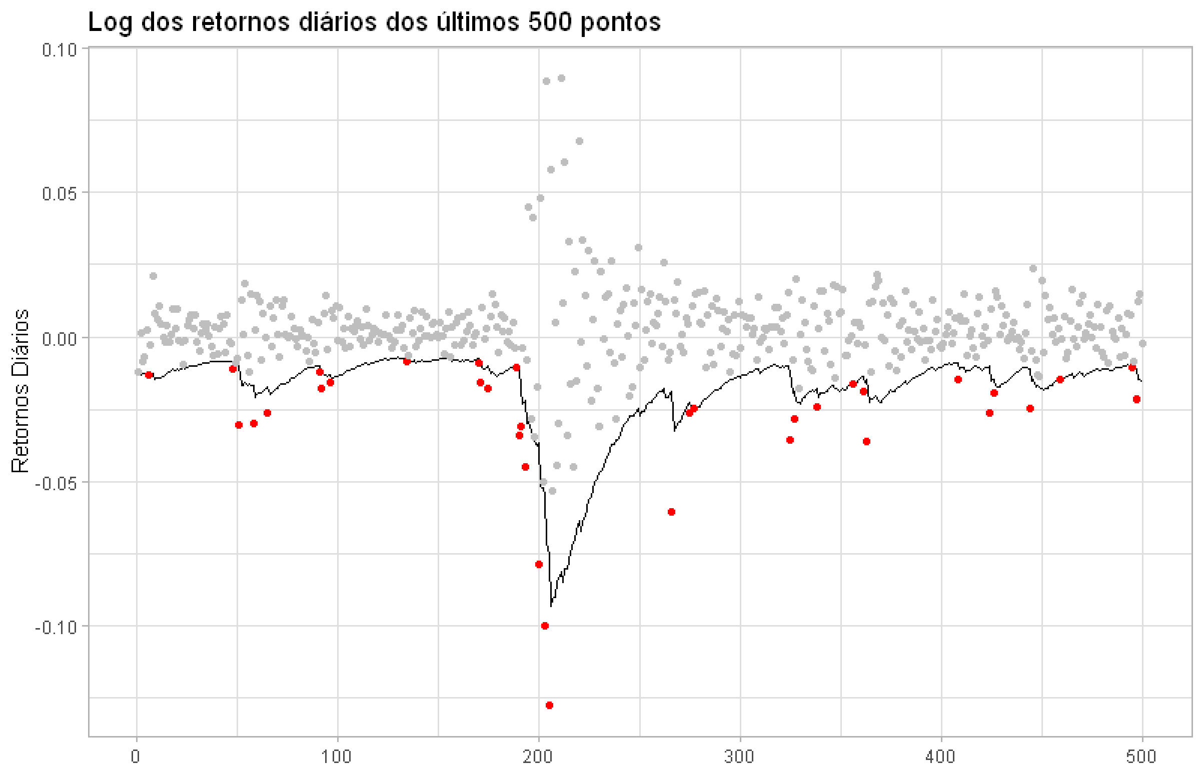

Figura 4: *Pontos em vermelhos mostram retornos que ultrapassaram a estimação do VaR à nível de confiança de 95%*

5 Discussão

O Valor em Risco do nosso modelo $ARMA - GARCH$ conseguiu captar e modelar a volatilidade do índice S&P 500, indicando um maior valor em risco em períodos de muita variância, especialmente em dois períodos em que o mercado de ações estavam passando por uma crise. Vale ressaltar que apenas um modelo foi feito e testado, mas em um caso de aplicação real, o ideal seria selecionar diferentes modelos da família ARMA-GARCH e selecionar o melhor através de algum critério de perda de informação, como o AIC. No caso de uma carteira de investimentos que possui várias ações financeiras, seria necessário uma testagem e comparação com vários modelos.

6 Conclusão

Utilizando o índice S&P 500 conseguimos calcular o Valor em Risco olhando a série toda da nossa amostra no período de Janeiro de 1990 até Maio de 2021 e foi notável que em momentos de alta volatilidade o nosso Valor em Risco aumentou consideravelmente chegando em até 10% em momentos voláteis do mercado. O nosso modelo conseguiu performar melhor do que métodos mais simples de cálculo de valor em risco, mas é importante ressaltar que para carteiras com mais de uma ação, é necessário testar uma pletora de modelos a fim de definir um modelo que consiga captar a volatilidade de forma mais precisa.

7 Referências

[1] Morettin, P.A. (2017). Econometria Financeira: Um Curso em Séries Temporais Financeiras. Terceira Edição. Editora Blucher, São Paulo

[2] Montgomery D., Jennings C. and Kulahci M. (2015). Introduction to Time Series Analysis and Forecasting (Second Edition). New Jersey: Wiley

[3] Brockwell, P.J, Davis, R.A. (2016).Introduction to Time Series and Forecasting.Terceira Edição. Springer Verlag, Nova Iorque

[4] Ghalanos A (2020). rugarch: Univariate GARCH models.. R package version 1.4-4

[5] Tim Bollerslev, Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, Journal of Econometrics, Volume 31, Issue 3, 1986

[6] Box, G.E.P., Jenkins, G.M. and Reinsel, G.C. (1994) Time Series Analysis; Forecasting and Control. 3rd Edition, Prentice Hall, Englewood Cliff, New Jersey.