

Fundamentos de Matemática



Educação a Distância
Cruzeiro do Sul Educacional
Campus Virtual

Material Teórico



Funções

Responsável pelo Conteúdo:

Profa. Ms. Conceição Aparecida Cruz Longo

Revisão Textual:

Profa. Ms. Selma Aparecida Cesarin



- Introdução
- Representação de função por meio de diagramas
- Definição de função
- Domínio, contradomínio e imagem
- Estudo do domínio de uma função
- Função injetiva, sobrejetiva e bijetiva
- Função composta
- Função inversa



Objetivo de APRENDIZADO

Abordaremos, primeiramente, a noção de função, conhecendo algumas de suas aplicabilidades e sua representação por meio de diagramas.

A seguir, conheceremos a definição de função, estudaremos seu domínio, seu contradomínio e sua imagem para, em seguida, estudarmos os casos particulares do domínio de uma função.

Na sequência, serão apresentadas as funções injetiva (ou injetora), sobrejetiva (ou sobrejetora) e bijetiva (ou bijetora) e encerraremos esta Unidade com o estudo das funções composta e inversa.

Para ajudá-lo, realize a leitura dos textos indicados, acompanhe e refaça os exemplos resolvidos, além de treinar com as Atividades Práticas disponíveis e suas resoluções ao final do conteúdo.

Não deixe de assistir, também, a apresentação narrada do conteúdo e de alguns exercícios resolvidos.

Finalmente, e o mais importante, fique atento às atividades avaliativas propostas e ao prazo de realização e envio.

Contextualização

Deixamos para você um artigo da Folha de São Paulo, 24 de junho de 2010 para que você leia e reflita sobre o tema que vamos abordar nesta unidade.

Podemos associar essa notícia ao momento que estamos vivendo em nosso país, ao sediar novamente a Copa do Mundo de Futebol. Boa leitura!

Lendo Notícias¹

O estudo de funções e gráficos é útil para entender fenômenos físicos e sociais. Veja o exemplo em que a análise de um gráfico possibilita que se façam hipóteses sobre os hábitos e comportamento da população em certo período.

As companhias de energia registram e analisam dados de consumo de energia elétrica **em função** de muitas variáveis, como a região geográfica e o horário para poder prever e evitar panes no sistema de distribuição de energia.

Consumo de energia no país deve cair durante o jogo do Brasil amanhã

O consumo de energia no país deve cair cerca de 20% amanhã durante a transmissão do jogo da seleção brasileira contra Portugal.

A carga esperada pelo sistema de transmissão da CTEEP no Estado de São Paulo é similar à verificada na estreia do Brasil na África do Sul, no último dia 15.

O comportamento se repete no restante do país, de acordo com a concessionária privada de transmissão de energia elétrica, que também atua em outras regiões.

Durante o jogo, o nível se aproxima do patamar mínimo diário, registrado nas madrugadas, segundo Celso Cerchiari, diretor de operações da CTEEP (Companhia de Transmissão de Energia Elétrica Paulista).

“O movimento ocorre porque muitas empresas param de funcionar. Há uma pausa na produção e os trabalhadores se reúnem em um único lugar para assistir à partida”, afirma Cerchiari.

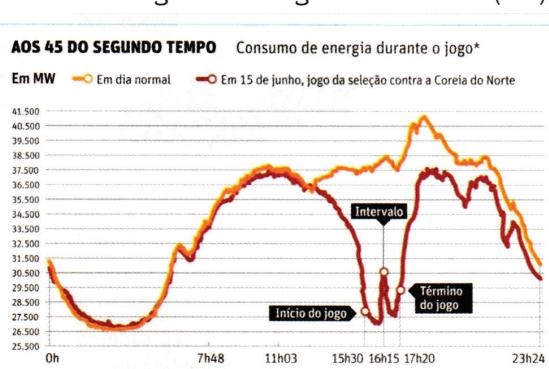
No intervalo, acontece o pico de consumo, quando os torcedores ligam micro-ondas, abrem geladeiras e usam outros eletrônicos.

Nesse momento, a elevação equivale ao abastecimento da carga de energia de Jundiaí (SP) a cada minuto.

No início do segundo tempo da partida, o baixo nível de consumo registrado na primeira parte é retomado.

Após o término do jogo, o crescimento atinge 37%, com variação gradativa até alcançar a carga normal, enquanto a população retoma suas atividades.

“Quando o término do jogo coincide com o final do dia, a rampa de subida do consumo é maior, pois coincide também com a iluminação pública”, afirma.



Editoria de Arte/Folhapress

Fonte: Folha de S.Paulo, 24 jun. 2010. Maria Cristina Frias. Mercado aberto. p. B2.

1

Fonte: BIGODE, A.J.L. Projeto Vlear: Matemática (9º ano). São Paulo: Scipione, 2012.

Introdução



Nem sempre percebemos, mas as funções estão presentes em muitas atividades do nosso cotidiano. Veja os exemplos:

Exemplo 1

Lucas foi almoçar em um restaurante que vende comida por quilo. Neste restaurante, cada 100g de comida custa R\$ 4,00. A tabela seguinte mostra o “peso” em gramas de uma refeição e o valor pago pela refeição.

| “Peso” (Em gramas) | Custo da refeição (Em reais) |
|-----------------------|---------------------------------|
| 100g | 4,00 |
| 200g | 8,00 |
| 400g | 16,00 |
| 500g | 20,00 |
| 600g | 24,00 |
| 800g | 32,00 |
| 1000g | 40,00 |

Observe que o preço a pagar é dado em função do “peso” da refeição, ou seja, o valor a pagar depende do “peso” da refeição.

O preço a pagar será de R\$ 0,04 (preço de 1g de comida) vezes a quantidade de comida comprada, ou seja, se chamarmos de P o preço a pagar e x o “peso” em gramas, temos que:

$P=0,04 \times x \rightarrow$ lei da função ou fórmula matemática da função ou regra da função.

saiba



A palavra “peso” é popularmente usada em lugar de massa. Mas, em linguagem científica, existe diferença entre peso e massa. Peso de um corpo é a força com que o corpo é atraído pelo centro da Terra (gravidade) e massa de um corpo é a quantidade de matéria que esse corpo possui.

Exemplo 2

No quadro seguinte, está indicado o perímetro de um triângulo equilátero em função da medida do seu lado.

| Medida do lado (cm) | Perímetro (cm) |
|---------------------|----------------|
| 3 | 9 |
| 4 | 12 |
| 5,5 | 16,5 |
| 8 | 24 |
| x | $3x$ |



Glossário

Triângulo equilátero é todo triângulo que apresenta os três lados com a mesma medida. Nesse caso, dizemos que os três lados são congruentes.

Observe que o perímetro do triângulo **depende** da medida do lado do triângulo, ou seja, o perímetro está em função da medida do lado do triângulo.

Neste caso, o perímetro é três vezes a medida do lado do triângulo. Esta relação pode ser representada pela seguinte fórmula:

$$P = 3x$$

Perímetro do triângulo
 ↓
 Quantidade de lados do triângulo
 ↓
 Medida do lado do triângulo

Exemplo 3

Em certa cidade, os taxistas cobram R\$ 4,50 a bandeirada mais R\$ 3,00 por quilômetro rodado. Escreva a lei de formação.

Neste problema, é fácil perceber que o valor da corrida **depende** do número de quilômetros rodados. Para resolvê-lo, é necessário determinar, a partir dos dados apresentados, a relação existente entre o preço P e o número x de quilômetros rodados, que são as variáveis do problema.

Vamos construir uma tabela em que calculamos o valor de P para alguns valores particulares de x :

| x (Km rodados) | P (Preço pago, em reais) |
|---------------------------|---|
| 0 | 4,50 |
| 3 | $4,50 + 3,00 \cdot 3 = 4,50 + 9,00 = 13,50$ |
| 6,5 | $4,50 + 3,00 \cdot 6,5 = 4,50 + 19,50 = 24,00$ |
| 8 | $4,50 + 3,00 \cdot 8 = 4,50 + 24,00 = 28,50$ |
| 12 | $4,50 + 3,00 \cdot 12 = 4,50 + 36,00 = 40,50$ |
| 15,5 | $4,50 + 3,00 \cdot 15,5 = 4,50 + 46,50 = 51,00$ |
| x | $4,50 + 3,00 \cdot x$ |

A partir desta tabela, é possível deduzir que a relação que fornece o preço da corrida, qualquer que seja o número de quilômetros rodados, é: $y=4,5+3 \cdot x$

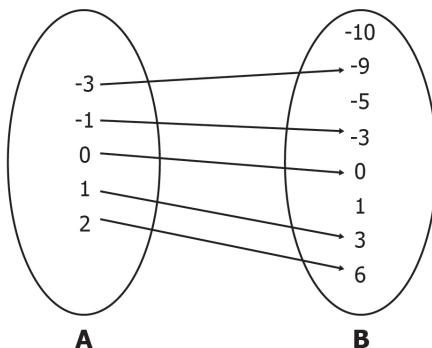
Representação de função por meio de diagramas



Além dos casos citados anteriormente, uma função também pode ser representada por um diagrama de setas ou por uma tabela.

Vamos considerar os exemplos a seguir.

- 1)** Dados dois conjuntos **A** e **B**, vamos associar cada elemento de **A** a seu triplo em **B**.

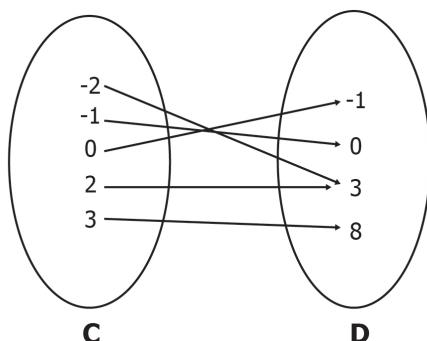


| $x \in A$ | $y=3x$ | $y \in B$ |
|-----------|-----------------------|-----------|
| -3 | $y=3 \cdot (-3) = -9$ | -9 |
| -1 | $y=3 \cdot (-1) = -3$ | -3 |
| 0 | $y=3 \cdot 0 = 0$ | 0 |
| 1 | $y=3 \cdot 1 = 3$ | 3 |
| 2 | $y=3 \cdot 2 = 6$ | 6 |

- Todos os elementos de **A** têm correspondente em **B**;
- Cada elemento de **A** corresponde a um único elemento de **B**.

Neste caso temos uma função de **A** em **B**, expressa pela fórmula $y=3x$.

- 2)** No diagrama abaixo, o conjunto **C** está relacionado ao conjunto **D** por meio da fórmula $y=x^2-1$.

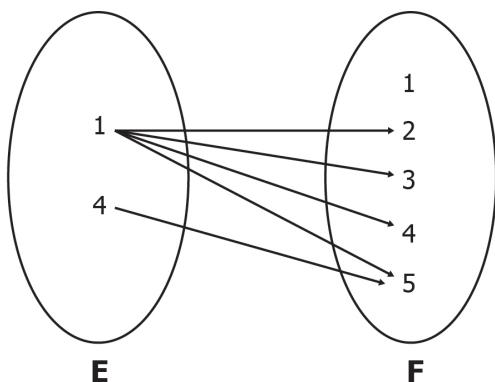


| $x \in C$ | $y=x^2-1$ | $y \in D$ |
|-----------|----------------|-----------|
| -2 | $y=(-2)^2-1=3$ | 3 |
| -1 | $y=(-1)^2-1=0$ | 0 |
| 0 | $y=0^2-1=-1$ | -1 |
| 2 | $y=2^2-1=3$ | 3 |
| 3 | $y=3^2-1=8$ | 8 |

- Todos os elementos de **C** têm correspondente em **D**;
- Cada elemento de **C** corresponde a um único elemento de **D**.

Neste caso temos uma função de **C** em **D**, expressa pela fórmula $y=x^2-1$.

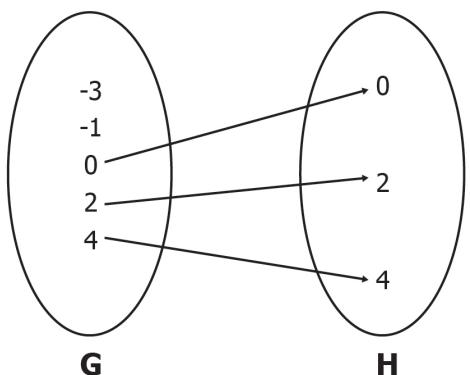
- 3) Dados $E = \{1, 4\}$ e $F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, relacionamos E e F de modo que cada elemento de E é menor do que um elemento de F .



Veja que, neste caso, ao elemento 1 correspondem quatro elementos de F (2, 3, 4 e 5) e não apenas um único elemento de F .

Portanto, não temos uma função de E em F .

- 4) Dados $G = \{-3, -1, 0, 2, 4\}$ e $H = \{0, 2, 4\}$, associamos aos elementos de G os elementos de igual valor em H .



Observe que há elementos em G (os números -3, -1) que não têm correspondente em H . Neste caso, não temos uma função de G em H .

Definição de função



Dados dois conjuntos não vazios A e B , a relação f de A em B é uma função quando a cada elemento x do conjunto A está associado um único elemento de B .

Usamos a seguinte notação:

$f: A \rightarrow B$ ou $A \xrightarrow{f} B$ (lê-se: f é uma função de A em B)

A fórmula $y = x^2 - x + 4$ é uma função que também pode ser escrita como:

$$f(x) = x^2 - x + 4$$

Se quisermos encontrar o valor de y , basta atribuir valores para x e efetuar os cálculos. Assim:

$$x=2, \text{ temos que: } f(2) = 2^2 - 2 + 4 = 4 - 2 + 4 = 6$$

Exemplo 1

Seja a função $f(x) = x + 1$, calcule:

a) $f(-2)$

Substituir x por (-2)

$$f(-2) = -2 + 1 = -1$$

b) $f(-1)$

Substituir x por (-1)

$$f(x) = -1 + 1 = 0$$

c) $f(0)$

Substituir x por 0

$$f(x) = 0 + 1 = 1$$

d) $f(3)$

Substituir x por 3

$$f(3) = 3 + 1 = 4$$

e) $f\left(\frac{1}{2}\right)$

Substituir x por $\frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

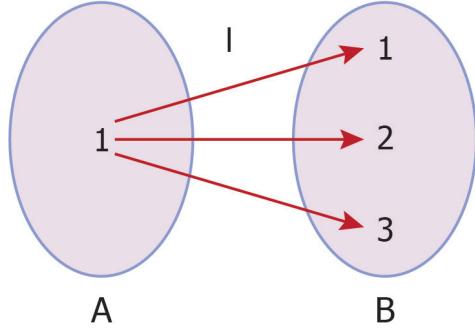
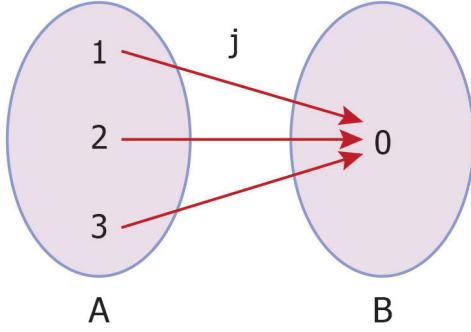
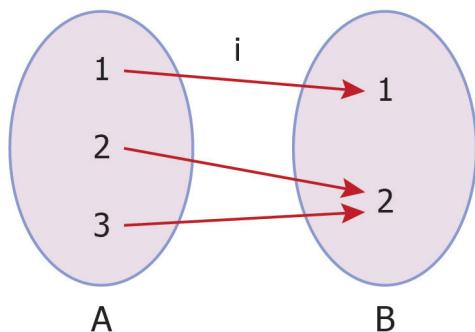
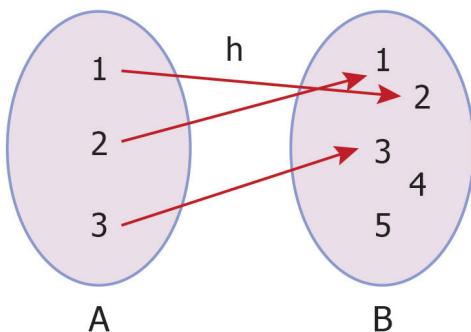
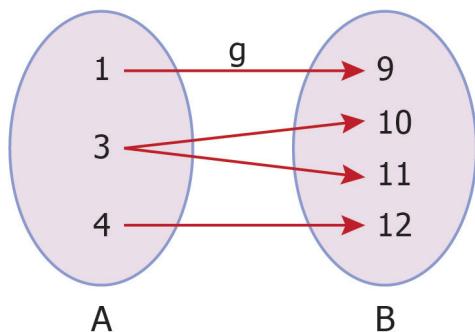
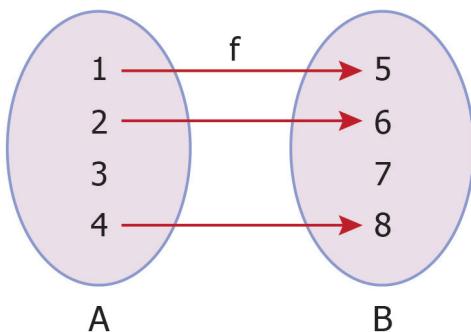
f) $f\left(\frac{3}{2}\right)$

Substituir x por $\frac{3}{2}$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

Exemplo 2

Os diagramas de flechas dados representam uma relação binária. Em cada um deles, diga se é ou não uma função.



Resolução

f não é função, pois sobram elementos no conjunto A.

g não é função, pois a um mesmo elemento de A correspondem dois elementos em B e não apenas um único elemento de B.

h é função.

i é função.

j é função.

l não é função, pois a um mesmo elemento de A correspondem três elementos em B e não apenas um único elemento de B.

Domínio, contradomínio e imagem

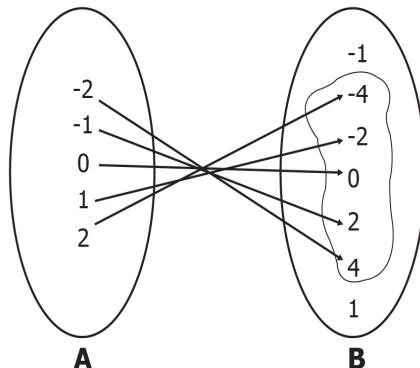


Seja uma função f de A em B , o conjunto A chama-se *domínio* da função, e o conjunto B , *contradomínio* da função.

A cada elemento y de B associado ao elemento x de A , denominamos *imagem*. Ao conjunto de todos os valores de y que são imagem chamamos de *imagem da função*.

Exemplo

A função $f: A \rightarrow B$ é formada pelos conjuntos: $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ e pela fórmula $f(x) = -2x$.



Em toda função $f: A \rightarrow B$, $\text{Im}(f) \rightarrow B$.
 $\subset \rightarrow$ está contido

Observe que para caracterizar uma função é preciso conhecer seus três elementos: o domínio (A), o contradomínio (B) e uma regra que associa cada elemento de A a um único elemento de B .

Neste exemplo, temos:

$$D(f) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}, \text{ o } CD(f) = \{-4, -2, -1, 0, 1, 2, 4\} \text{ e } \text{Im}(f) = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$$

Exemplo

Considere os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e a relação $y = x + 1$. Escreva o domínio, o contradomínio e calcule a imagem desta função.

Resolução

$$D(f) = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$CD(f) = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Para encontrar a imagem, calculamos:

$$f(-2) = -2 + 1 = -1$$

$$f(-1) = -1 + 1 = 0$$

$$f(0) = 0 + 1 = 1$$

$$f(1) = 1 + 1 = 2$$

$$f(2) = 2 + 1 = 3$$

$$f(3) = 3 + 1 = 4$$

$$f(4) = 4 + 1 = 5$$

Portanto, a imagem de $y = x + 1$ é o conjunto $\text{Im } (f) = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Estudo do domínio de uma função



Já sabemos que uma função definida por $f: A \rightarrow B$ deve ter domínio, contradomínio e uma regra (lei de correspondência).

Neste caso, o domínio é formado pelos elementos do conjunto A e o contradomínio pelos elementos do conjunto B.

Porém, existem alguns casos em que o domínio não está evidente.

Exemplo 1

Qual o domínio da função $f(x) = \frac{1}{2x}$?

$$2x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$



Nesta função, o domínio é o conjunto dos números reais com exceção do zero (não existe divisão por zero).

Em notação matemática, escrevemos:

$$D(f) = \mathbb{R} - \{0\} \text{ ou } D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} \text{ ou } D(f) = \mathbb{R}^*$$

Exemplo 2

Explicito o domínio da função $f(x) = \sqrt{3x-12}$



Atenção: Em \mathbb{R} não há raiz quadrada de um número negativo.

$\sqrt{3x-12}$ só é possível em \mathbb{R} se $3x-12 \geq 0$.

$$3x-12 \geq 0$$

Soma 12 nos dois membros da equação: $3x-12+12 \geq 0+12$

$$3x \geq 12$$

Divide-se os dois membros da equação por 3: $\frac{3x}{3} \geq \frac{12}{3}$

$$x \geq 4$$

Logo, o domínio de f é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 4\}$

Exemplo 3

Calcule o domínio da função $f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+1}}$

Nesse caso, temos restrições tanto no numerador quanto no denominador. As restrições podem ser calculadas da seguinte maneira:

I) $2-x \geq 0 \Rightarrow -x \geq -2 \Rightarrow x \leq 2$

Quando multiplicamos uma desigualdade por (-1), não podemos nos esquecer de inverter o sinal dessa desigualdade.



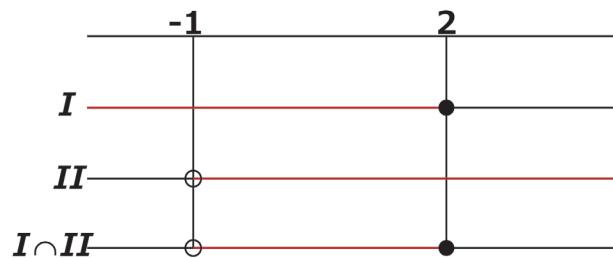
Neste caso, temos que $2 - x \geq 0$, pois no conjunto dos números reais não existe raiz quadrada de número negativo.

II) $x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$



Neste caso, temos duas restrições para $x+1$; a de ser diferente de zero (por estar no denominador) e maior que zero (por estar dentro de uma raiz quadrada). Portanto, $x+1 > 0$.

Executando a intersecção entre I e II, obtemos:



Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x \leq 2\}$

Função injetiva, sobrejetiva e bijetiva



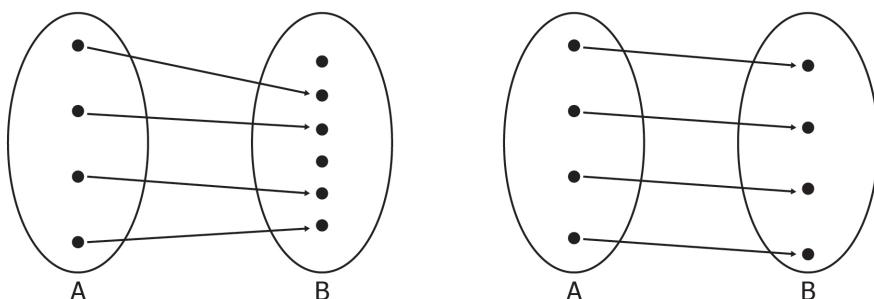
- **Função injetiva ou injetora**

Uma função é injetiva (ou injetora) se diferentes elementos do domínio tiverem imagens diferentes, ou seja: Uma função $f: A \rightarrow B$ é injetiva se, e somente se, para todo $x_1 \neq x_2$, pertencente a A, temos: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Para pensar

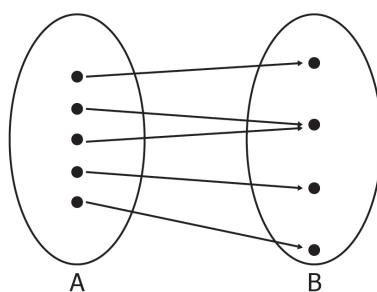
$f(x_1) = f(x_2)$ em B $\Rightarrow x_1 = x_2$ em A expressa uma função injetiva?

Usando o diagrama de flechas, temos:



Nestes dois diagramas, podemos perceber que não há elementos no contradomínio que seja imagem de mais de um elemento do domínio.

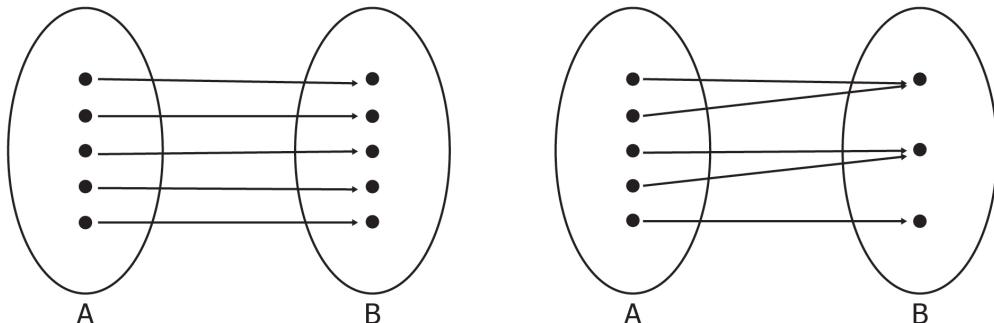
Já o diagrama seguinte não representa uma função injetiva, pois há um elemento em B que é imagem de dois elementos distintos em A.



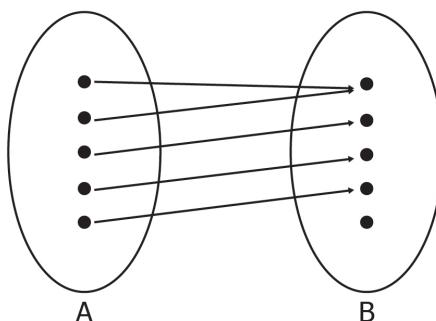
- **Função sobrejetiva ou sobrejetora**

Uma função é sobrejetiva (ou sobrejetora) se o conjunto imagem for igual ao contradomínio ($\text{Im} = \text{CD}$), ou seja: uma função $f: A \rightarrow B$ é sobrejetiva se, e somente se, para todo y pertencente a B , existe um x pertencente a A tal que $f(x) = y$.

Usando o diagrama de setas, temos:



Esses diagramas representam funções sobrejetivas, pois não há elemento do contradomínio que não tenha correspondente no domínio. O mesmo não ocorre no diagrama seguinte, em que há elementos em B sem correspondente em A .



- **Função bijetiva ou bijetora**

A função bijetiva, também chamada de correspondência biunívoca, é aquela, simultaneamente, injetiva e sobrejetiva, ou seja:

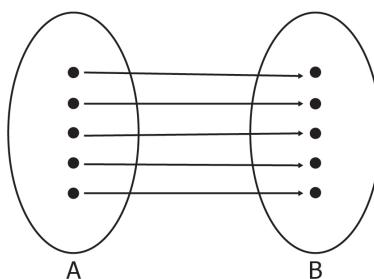
Uma função $f:A \rightarrow B$ é bijetiva

$$\forall x_1 \neq x_2 \in D(f) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \text{ e } \text{Im}(f) = \text{CD}(f).$$



O símbolo \forall lê-se **para todo** ou **qualquer que seja**.

Veja a seguir a representação de uma função bijetiva em um diagrama de setas.



Você Sabia ?

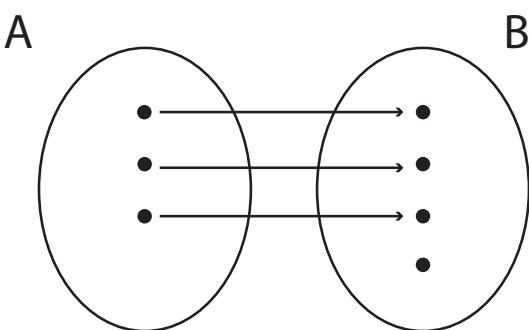


Quem descobriu essa curiosa correspondência biunívoca foi o físico italiano Galileu Galilei, há mais de 400 anos.

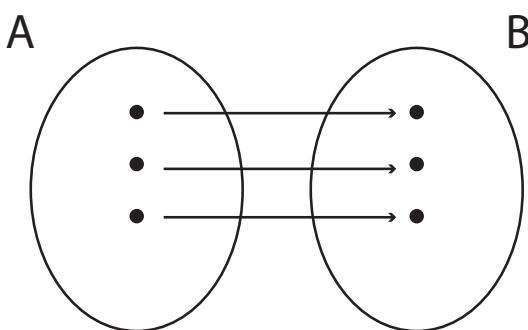
Exemplo

Verifique se as funções são injetoras (ou injetivas), sobrejetora (ou sobrejetiva) ou bijetora (bijetiva). Justifique sua resposta.

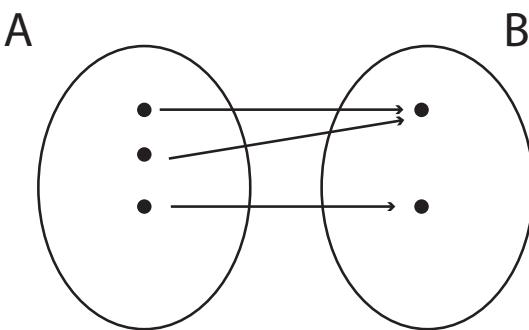
(a)



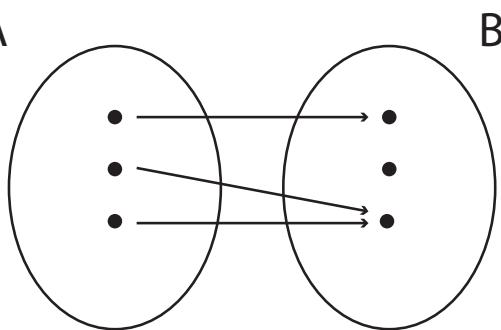
(b)



(c)



(d)



Resolução

- (a) Injetora, pois elementos distintos do conjunto A estão em correspondência com elementos distintos do conjunto B.
- (b) Bijetora, pois para elementos distintos do conjunto A correspondem elementos distintos do conjunto B e $\text{Im}(f) = B$.
- (c) Sobrejetora, pois o conjunto imagem da função é o próprio conjunto B.
- (d) Não é injetora, pois pelo menos um elemento de B é imagem de mais de um elemento de A. Não é sobrejetora, pois o conjunto imagem da função não é o próprio conjunto B.

Função composta



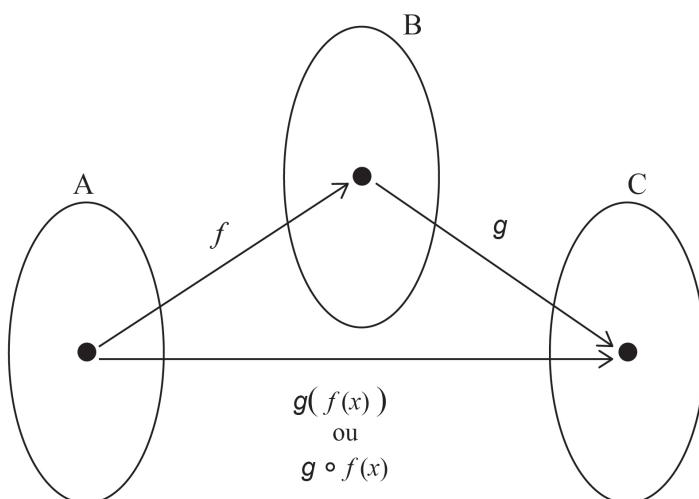
Vamos considerar duas funções f e g de maneira que o contradomínio de f seja o domínio de g .

$$f : A \rightarrow B \text{ e } g : B \rightarrow C$$

Para definirmos uma **função composta**, vamos estabelecer uma função $h : A \rightarrow C$, que faz a correspondência entre as funções f e g . Indicamos essa função por:

$$g(f(x)) = g \circ f(x) \quad (\text{lê-se: } g \text{ círculo } f \text{ ou } g \text{ composta com } f)$$

Podemos representar a função $g \circ f$ em um diagrama de setas:



$$\left. \begin{array}{l} f: A \rightarrow B \\ e \\ g: B \rightarrow C \end{array} \right\} h: A \rightarrow C \Rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)), \text{ tal que } x \in A$$

Parece complicado? Mas não é não! Acompanhe os exemplos a seguir:

Exemplo 1

Dadas as funções $f(x)=x - 5$ e $g(x)=2x^2 - 1$, determine:

a) $f(g(x))$. Veja o passo a passo:

$$f(g(x)) = f(2x^2 - 1) \quad \text{Substitui } g(x) \text{ por } (2x^2 - 1)$$

$$f(2x^2 - 1) = (2x^2 - 1) - 5$$

$$f(g(x)) = 2x^2 - 1 - 5$$

$$f(g(x)) = 2x^2 - 6$$

O x de $f(x)$ passa a ser agora $(2x^2 - 1)$, então, no lugar do x de $f(x)$ substituímos por $(2x^2 - 1)$

b) $g(f(x))$

De maneira análoga ao exemplo anterior, temos:

$$g(f(x)) = g(x-5)$$

Substitui $f(x)$ por $(x-5)$

$$g(x-5) = 2(x-5)^2 - 1$$

No lugar do x de $g(x)$ substituímos $(x-5)$ e resolvemos a equação

Relembrando

Você se lembra como se resolve a expressão $(x-5)^2$? Vamos rever aqui duas maneiras para resolvermos esse problema.

A primeira delas é aplicando uma propriedade que chamamos de “Propriedade Distributiva”. Veja:

$$(x-5)^2 = (x-5) \cdot (x-5) = x(x-5) - 5(x-5) = x^2 - 5x - 5x + 25 = x^2 - 10x + 25$$

A outra maneira é usando os “Produtos Notáveis”. Veja:

Quadrado da diferença de dois termos

$$\underbrace{(x-y)^2}_{\text{Quadrado da diferença de dois termos}} = \underbrace{x^2}_{\text{Quadrado do 1º termo}} - \underbrace{2xy}_{\text{Duas vezes o produto do 1º pelo 2º}} + \underbrace{y^2}_{\text{Quadrado do 2º termo}}$$

O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro, menos duas vezes o produto do primeiro pelo segundo mais o quadrado do segundo.

No caso de $(x-5)^2 = (x^2 - 10x + 25)$

Voltando a nossa:

$$g(f(x)) = 2(x-5)^2 - 1, \text{ temos:}$$

$$g(f(x)) = 2(x^2 - 10x + 25) - 1$$

Aplica a propriedade distributiva.

$$g(f(x)) = 2x^2 - 2 \cdot x \cdot 10 + 2 \cdot 25 - 1$$

$$g(f(x)) = 2x^2 - 20x + 50 - 1$$

$$g(f(x)) = 2x^2 - 20x + 49$$

Trocando ideias

Além do **quadrado da diferença de dois termos**, temos:

o quadrado da soma de dois termos

$$\underbrace{(x+y)^2}_{\text{Quadrado da soma de dois termos}} = \underbrace{x^2}_{\text{Quadrado do 1º termo}} + \underbrace{2xy}_{\text{Duas vezes o produto do 1º pelo 2º}} + \underbrace{y^2}_{\text{Quadrado do 2º termo}}$$

O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro, mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo.

E também, **o produto da soma pela diferença de dois termos**

$$\underbrace{(x+y)}_{\text{Soma dos termos}} \cdot \underbrace{(x-y)}_{\text{Diferença dos termos}} = \underbrace{x^2}_{\text{Quadrado do 1º termo}} - \underbrace{y^2}_{\text{Quadrado do 2º termo}}$$

O produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo.



Explore

- <http://www.matematicadidatica.com.br/ProdutosNotaveis.aspx>
- <http://www.infoescola.com/matematica/produtos-notaveis/>

c) $g(g(x))$

$$g(g(x)) = 2(2x^2 - 1)^2 - 1$$

$$g(g(x)) = 2(4x^4 - 4x^2 + 1) - 1$$

$$g(g(x)) = 8x^4 - 8x^2 + 2 - 1$$

$$g(g(x)) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

d) o valor de x para o qual $f(g(x)) = g(f(x))$

Neste caso, vamos usar os resultados dos exemplos a e b:

$$f(g(x)) = 2x^2 - 6$$

$$g(f(x)) = 2x^2 - 20x + 49$$

Então se, $f(g(x)) = g(f(x))$, temos que:

$$2x^2 - 6 = 2x^2 - 20x + 49$$

(Isolar a variável x)

$$2x^2 - 2x^2 + 20x = 49 + 6$$

(Cancela-se $2x^2$ e $-2x^2$; soma-se 49 com 6)

$$20x = 55$$

(O 20 que multiplica o x, passa do outro lado da igualdade dividindo o 55)

$$x = \frac{55}{20} = \frac{11}{4}$$

(Simplificamos o 55 e o 20 por 5)

$$x = \frac{11}{4}$$

Exemplo 2

Dadas as funções $f(x) = x+1$ e $g(x) = y^2$. Calcular:

a) $g \circ f (1)$

Para calcular $g(f(1))$, primeiro calculamos $f(1)$

$$f(1) = 1+1=2$$

Agora calculamos $g(f(1))$, que é o mesmo que calcular $g(2)$.

$$g(2) = 2^2=4$$

b) $g \circ f (2)$

$$g(f(x)) = g(f(2)) = g(2+1) = g(3) = 3^2=9$$

c) $g \circ f (3)$

$$g(f(x)) = g(f(3)) = g(3+1) = g(4) = 4^2=16$$

Exemplo 3

Dada a função: $f(x) = x^2 + 1$, calcule $f(f(2))$.

$$f(2) = 2^2+1= 4+1=5$$

$$f(f(2)) = f(5)=5^2+ 1= 25+1= 26$$

Exemplo 4

Determine a função g segundo as funções

$$f(x) = 5x - 3 \text{ e } f(g(x)) = -5x+7.$$

Primeiro, vamos substituir x por $g(x)$ em $f(x)$

$$f(\textcolor{blue}{x}) = 5\textcolor{blue}{x} - 3$$

$$f(\textcolor{blue}{g}(x)) = 5(\textcolor{blue}{g}(x)) - 3 \text{ (I)}$$

Mas como foi dado que $f(g(x)) = -5x + 7$, vamos substituir essa expressão em (I).

$$\begin{aligned} -5x + 7 &= 5(g(x)) - 3 \\ 5(g(x)) &= -5x + 7 + 3 \\ 5(g(x)) &= -5x + 10 \\ g(x) &= \frac{-5x + 10}{5} \\ g(x) &= \frac{5(-x + 2)}{5} \\ g(x) &= -x + 2 \end{aligned}$$

Exemplo 5

Dadas as funções $f(x) = 3x - 2$ e $g(x) = 4x + 1$, calcule $g(f(x))$.

Como $g(x) = 4x + 1$, vamos substituir no lugar de x o valor de $f(x)$.

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= 4(3x - 2) + 1 \quad \text{(4 . } 3x + 4 . 2\text{) propriedade distributiva.} \\ g(f(x)) &= 12x - 8 + 1 \\ g(f(x)) &= 12x - 7 \end{aligned}$$

Perceba a diferença quando calculamos $f(g(x))$.

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= 3(4x + 1) - 2 \quad \text{(3 . } 4x + 3 . 1\text{) propriedade distributiva.} \\ f(g(x)) &= 12x + 3 - 2 \\ f(g(x)) &= 12x + 1 \end{aligned}$$

Exemplo 6

Sejam $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = x + 2$. Determine:

a) $f \circ g$

$$f \circ g = f(g(x)) = f(x+2) = (x+2)^2 - 1 = (x^2 + 4x + 4) - 1 = x^2 + 4x + 4 - 1 = x^2 + 4x + 3$$

b) $g \circ f = g(f(x)) = g(x^2 - 1) = x^2 - 1 + 2 = x^2 + 1$

Função inversa



Vamos iniciar o estudo das funções inversas com o seguinte exemplo:

Dadas as $f(x) = 2x$ e $g(x) = \frac{x}{2}$, vamos atribuir alguns valores para x e determinar a imagem correspondente para obter os pares ordenados (x,y) .

Importante

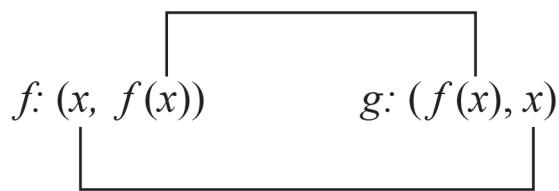
Só existe função inversa de uma função bijetora.

| x | $f(x) = 2x$ | (x,y) |
|----------|-------------------------------|---------------------------|
| - 5 | $f(-5) = 2 \cdot (-5) = -10$ | (-5, -10) |
| - 2 | $f(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$ | (-2, -4) |
| 3 | $f(3) = 2 \cdot 3 = 6$ | (3,6) |
| 7 | $f(7) = 2 \cdot 7 = 14$ | (7,14) |
| 10 | $f(10) = 2 \cdot 10 = 20$ | (10,20) |

Na função $g(x)$, vamos atribuir para x os valores correspondentes a imagem de f .

| x | $g(x) = \frac{x}{2}$ | (x,y) |
|----------|--|---------------------------|
| - 10 | $g(-10) = \frac{-10}{2} = -5$ | (- 10, - 5) |
| - 4 | $g(-4) = \frac{-4}{2} = -2$ | (- 4, - 2) |
| 6 | $g(6) = \frac{6}{2} = 3$ | (6,3) |
| 14 | $g(14) = \frac{14}{2} = 7$ | (14,7) |
| 20 | $g(20) = \frac{20}{2} = 10$ | (20,10) |

Observe que podemos obter os pares ordenados de uma “invertendo” os pares ordenados da outra.



Neste caso, podemos dizer que a função g é a função inversa da função f . Representamos essa função por f^{-1} .

Definição

Dada uma função $f: A \rightarrow B$, bijetiva, chama-se função inversa de f a função $g: B \rightarrow A$ tal que, se $f(a) = b$, então $g(b) = a$, com $a \in A$ e $b \in B$

Como obter uma função inversa?

Dada a função bijetora $f(x) = 4x$, para encontrar a sua inversa vamos proceder da seguinte maneira:

- Primeiro escrevemos a função f da seguinte maneira: $y = 4x$;
- Agora substituímos a variável y por x e a variável x por y na função $y = 4x$.
 $x = 4y$
- Finalmente isolamos a variável y e obtemos a função inversa de f .

$$x = 4y \Rightarrow y = \frac{x}{4} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{4}$$

Exemplo 1

Determine a função inversa de $f(x) = -3x + 5$.

- Trocar $f(x)$ por y
 $y = -3x + 5$
- Trocar x por y e y por x .
 $x = -3y + 5$
- Isolar a variável y .

$$3y = 5 - x \Rightarrow y = \frac{5 - x}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{5 - x}{3}$$

Podemos tirar a prova testando os valores:

Atribuímos um valor qualquer para x ($x = 2$, por exemplo) e calculamos $f(2)$.

$$f(2) = -3 \cdot 2 + 5 = -6 + 5 = -1$$

$$\text{Agora calculamos } f^{-1}(-1) = \frac{5 - (-1)}{3} = \frac{5 + 1}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Exemplo 2

Determine a função inversa da função definida por:

$$y = 2x + 3.$$

- Permutamos x por y e y por x .
 $x = 2y + 3$
- Explicitamos y em função de x , isolando y da equação:

$$2y + 3 = x$$

$$2y = x - 3$$

$$y = \frac{x - 3}{2}$$

$$\text{Portanto, } f^{-1}(x) = \frac{x - 3}{2}$$

Material Complementar

Para aprofundar seus estudos sobre as Noções de Funções, consulte os sites e as referências a seguir;

- <http://magiadamatematica.com/uerj/cap/01-introfuncao.pdf>
- <http://www.brasilescola.com/matematica/introducao-funcao.htm>
- <http://www1.folha.uol.com.br/folha/educacao/ult305u366327.shtml>

Outras indicações:

- Capítulo 3 e 4 do livro **A Matemática do Ensino Médio** (volume 1), de Elon Lages Lima, Paulo César P. Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado. Rio de Janeiro, SBM, 1997. Coleção do Professor de Matemática.
- **Sobre o desenvolvimento histórico do Conceito de Função**, Educação Matemática em Revista SBEM, ano 8, nº 9/10, abr.2001, p.10.

Referências

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e aplicações** - 1º ano. São Paulo: Ática, 2011.

PAIVA, M. **Matemática: volume único**. São Paulo: Moderna, 1999.

RIBEIRO, J. **Matemática: Ciência e linguagem**: volume único. São Paulo: Scipione, 2007.

Anotações





Educação a Distância
Cruzeiro do Sul Educacional
Campus Virtual

www.cruzeirodosulvirtual.com.br
Campus Liberdade
Rua Galvão Bueno, 868
CEP 01506-000
São Paulo SP Brasil
Tel: (55 11) 3385-3000



Universidade
Cruzeiro do Sul



UNICID
Universidade
Cidade de S. Paulo



UNIFRAN
Universidade
de Franca



UDF
Centro
Universitário



Módulo
Centro
Universitário