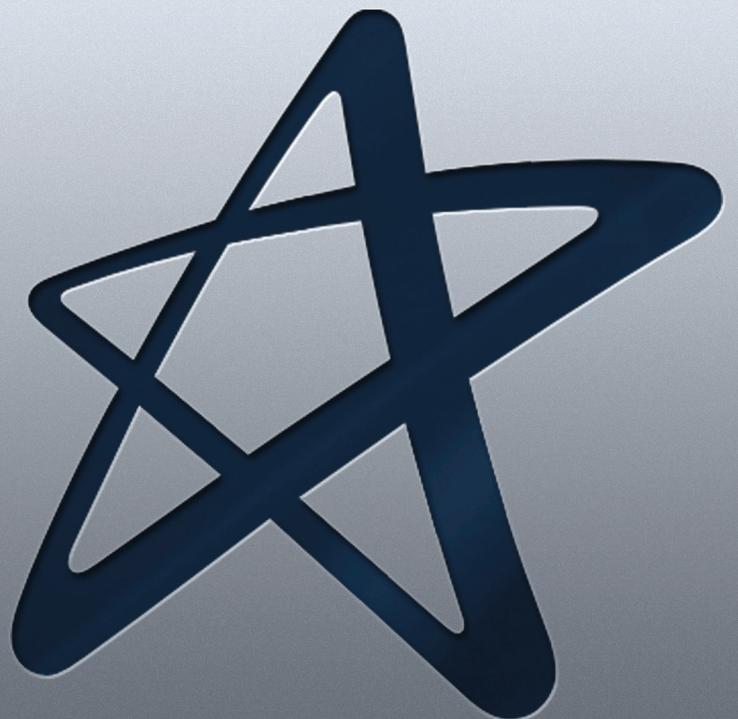


# Fundamentos de Matemática



Educação a Distância  
Cruzeiro do Sul Educacional  
Campus Virtual



# Material Teórico



**Função Afim ou Função Polinomial do 1º Grau**

**Responsável pelo Conteúdo:**

Profa. Ms. Conceição Aparecida Cruz Longo

**Revisão Textual:**

Prof. Ms. Selma Aparecida Cesarin



# UNIDADE

## Função Afim ou Função Polinomial do 1º Grau



- Introdução
- Casos Particulares da Função Afim
- Gráfico de uma Função Afim
- Função Definida por mais de uma Sentença
- Função Afim Crescente ou Decrescente
- Zero da Função Afim
- Inequações do 1º Grau
- Inequações-Produto e Inequações Quociente



- Nesta unidade estudaremos a representação de uma função afim, sua forma e coeficientes. Surgirão alguns casos particulares da função afim, como a função linear, a função identidade e a função constante.
- Calcularemos o valor de uma função afim por meio de exercícios e problemas. Encerraremos esta etapa construindo o gráfico de uma função afim e de alguns casos particulares.



### Atenção

Para um bom aproveitamento do curso, leia o material teórico atentamente antes de realizar as atividades. É importante também respeitar os prazos estabelecidos no cronograma.

## Contextualização

**Veja algumas situações-problema em que usamos as funções afim:**

1. O preço a pagar em função da quantidade de feijão comprado

Dona Cidinha vai ao supermercado para comprar feijão, o preço do quilograma de feijão é R\$ 6,85.

Quantidade de Kg de feijão	Preço a pagar (em reais)
1	6,85
2	13,70
3	20,55
4	27,40
5	34,25
...	...
x	6,85 x

## Reflita

- a. Existe uma relação entre o preço a pagar e a quantidade de quilos de feijão comprada?
  - b. O preço do quilo do feijão “depende” de quanto vou pagar?
  - c. O preço que vou pagar “depende” da quantidade de feijão que eu comprarei?
  - d. Existe uma expressão matemática que me permite relacionar o preço do feijão à quantidade comprada?
2. A área a ser pintada em função dos dias de trabalho

Um pintor foi contratado para pintar uma parede cuja área é 240m<sup>2</sup>. A tabela mostra o quanto ainda falta para ser pintado no final de cada dia.\*

Dia	Área a ser pintada (m <sup>2</sup> )
0	240
1	210
2	180
3	150
4	120
5	90
6	60
7	30
8	0

## Reflita

- A área da parede a ser pintada tem relação com o número de dias?
- Quando os dias passam, o que acontece com a quantidade de área a ser pintada?
- Quantos dias o pintor levou para terminar o serviço?  
\* Supondo-se que o pintor pinte a mesma quantidade de parede em todos os dias.

3. O valor da corrida de táxi em função da quantidade de quilômetros rodados

**Em certa cidade, o preço de um corrida de táxi é calculado do seguinte modo:**

- ✓ A “bandeirada” é de R\$ 6,50
- ✓ A cada km percorrido o preço é de R\$ 1,80

## Reflita

- Qual seria a fórmula matemática que represente essa situação?
  - Para uma corrida de 60 km, quanto se gastará?
  - Um passageiro que pagou R\$ 118,10 por uma corrida, percorreu quantos quilômetros?
4. O valor pago pela escola em função do número de meses

Uma escola de natação cobra de seus alunos uma matrícula de R\$ 80,00, mais uma mensalidade de R\$ 50,00.

## Reflita

- Qual a função que representa o gasto de um aluno em relação aos meses de aula?
- Quanto gastará um aluno nos seis primeiros meses de aula?

**Reflita e formule problemas com as seguintes situações:**

- ✓ O valor pago ao estacionamento de carros em função de sua permanência no estabelecimento;
- ✓ O custo total da produção de uma fábrica de parafusos.

## Introdução



Em nosso dia a dia, estamos sempre comparando e relacionando números, grandezas e formas.

Vamos pensar na seguinte situação: Raul é funcionário de uma loja que vende skates. Ele recebe mensalmente um salário composto de uma parte fixa, no valor R\$ 800,00, mais uma parte variável, que corresponde a uma comissão de 5% (0,05) sobre o total de vendas que ele faz durante o mês.

**O salário mensal de Raul pode ser escrito da seguinte maneira:**

$$\text{Salário mensal} = 800,00 + 0,05 \cdot (\text{total de vendas no mês})$$

Observamos que o salário mensal de Raul é dado em função do total de vendas que ele fez durante o mês, ou seja:

Se chamarmos de  $S(x)$  o salário mensal de Raul e  $x$  a quantidade de skates que ele vende por mês, temos:

$$S(x) = 0,05x + 800$$

Aqui temos um exemplo de **função afim**.

**Veja outros exemplos.**

**Exemplo 2**

Lucas e sua família vão sair de férias e Lucas resolveu alugar um apartamento na praia. O dono do apartamento informou que o valor do aluguel corresponde a uma taxa fixa de limpeza, no valor de R\$ 150,00, mais o valor de R\$ 180,00 por dia.

- » Um dia,  $R\$ 180,00 + R\$ 150,00 = \mathbf{R\$ 330,00}$
- » Dois dias,  $R\$ 180,00 \times 2 + R\$ 150,00 = \mathbf{R\$ 510,00}$

Podemos escrever uma fórmula para calcular o valor do aluguel. Basta chamar de  $y$  ou  $f(x)$  o valor total do aluguel e de  $x$  o número de dias de hospedagem.

$f(x) = 180 \cdot x + 150 \Rightarrow$  esta é a lei de formação da função que expressa o valor do aluguel de acordo com o número de dias.

Esta função é a que chamamos de **função afim**.

Para sabermos quanto Lucas gastará de aluguel, se ele e sua família se hospedarem lá por 8 dias, podemos, por meio desta função, calcular o valor total que ele pagará calculando  $f(8)$ .

$$f(8) = 180 \cdot 8 + 150 = 1440 + 150 = 1590$$

Assim, o valor a ser pago por 8 dias de hospedagem será de R\$1 590,00.

Muitos são os contextos que podem ser representados por meio de uma função afim ou função polinomial do 1º grau.

Chama-se de função afim, uma função  $f$ , de  $R \rightarrow R$  quando existem dois números reais  $a$  e  $b$  tal que  $f(x) = ax + b$  para todo  $x \in R$ .

### **Exemplo 1**

$$f(x) = 2x + 1, \text{ sendo: } a = 2 \text{ e } b = 1$$

$$f(x) = -x + 3, \text{ sendo: } a = -1 \text{ e } b = 3$$

$$f(x) = 3x - 2, \text{ sendo: } a = 3 \text{ e } b = -2$$

$$f(x) = -5x, \text{ sendo: } a = -5 \text{ e } b = 0$$

$$f(x) = \frac{2}{3}x + 4, \text{ sendo: } a = \frac{2}{3} \text{ e } b = 4$$

### **Exemplo 2**

Identifique quais das funções  $f: R \rightarrow R$  são afins.

a.  $f(x) = -5x + 5$

b.  $f(x) = x^2 + 3x$

c.  $f(x) = 10x$

d.  $f(x) = -4 + 3x^3$

e.  $f(x) = -x + 3,5$

f.  $f(x) = \frac{1}{x} + 3$

**Resolução:** São funções afim os itens **a, c e e.**

### **Exemplo 3**

Identifique os coeficientes  $a$  e  $b$  das funções a seguir.

a.  $y = 4x + 2$

b.  $y = 5x + 9$

c.  $y = 10 - 3x$

d.  $y = 3x$

e.  $y = 4 - x$

### **Resolução**

a.  $y = 4x + 2, a = 4 \text{ e } b = 2$

b.  $y = 5x + 9, a = 5 \text{ e } b = 9$

c.  $y = 10 - 3x, a = -3 \text{ e } b = 10$

d.  $y = 3x, a = 3 \text{ e } b = 0$

e.  $y = 4 - x, a = -1 \text{ e } b = 4$

### Exemplo 4

Para cada item, escreva uma função afim na forma  $f(x) = ax + b$ , de acordo com os valores dos coeficientes  $a$  e  $b$ .

- a.  $a = 1$  e  $b = 3$
- b.  $a = -2$  e  $b = 1$
- c.  $a = -5$  e  $b = 8$
- d.  $a = \frac{1}{3}$  e  $b = -2$
- e.  $a = 5$  e  $b = 0$

### Resolução

- a.  $f(x) = x + 3$ ,
- b.  $f(x) = -2x + 1$ ,
- c.  $f(x) = -5x + 8$ ,
- d.  $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$ ,
- e.  $f(x) = 5x$ .

## Casos Particulares da Função Afim



### 1) Função identidade

Uma função identidade dá como imagem do elemento o próprio elemento, ou seja  $f(x) = x$  para todo  $x \in R$ . Nesse caso,  $a = 1$  e  $b = 0$ .

### 2) Função Linear

Uma função linear é aquela definida por  $f(x) = a x$  para todo  $x \in R$ . Nesse caso,  $b = 0$ .

### Exemplos

- a.  $f(x) = 8x$ , sendo:  $a = 8$
- b.  $f(x) = -3x$ , sendo  $a = -3$
- c.  $f(x) = \frac{1}{5}x$ , sendo  $a = \frac{1}{5}$
- d.  $f(x) = \sqrt{2}x$ , sendo  $a = \sqrt{2}$

### 3º) Função constante

Uma função constante é aquela definida por  $f(x)=b$  para todo  $x \in R$ .

Nesse caso,  $a = 0$ .

$f(x)=4$ , sendo:  $a = 0$  e  $b = 4$

$f(x)=-3$ , sendo  $a = 0$  e  $b = -3$

$f(x)=\frac{2}{3}$ , sendo  $a = 0$  e  $b = \frac{2}{3}$

$f(x)=\sqrt{3}$ , sendo  $a = 0$  e  $b = \sqrt{3}$

## VALOR DA FUNÇÃO AFIM

### Exemplo 1

Seja a função  $f: R \rightarrow R$ , definida por  $f(x)=2x - 6$ , calcule:

a.  $f(2)$

$$f(2) = 2 \cdot 2 - 6 = 4 - 6 = -2$$

b.  $f(-3)$

$$f(-3) = 2 \cdot (-3) - 6 = -6 - 6 = -12$$

c.  $f(0)$

$$f(0) = 2 \cdot 0 - 6 = 0 - 6 = -6$$

d.  $f(\frac{1}{2})$

$$f(\frac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{1}{2} - 6 = 1 - 6 = -5$$

e.  $f(1,5)$

$$f(1,5) = 2 \cdot 1,5 - 6 = 3 - 6 = -3$$

### Exemplo 2

Seja a função  $f: R \rightarrow R$ , definida por  $f(x)=3x - 5$ , calcule:

a.  $f(x) = 7$ ,

$$3x - 5 = 7,$$

$$3x = 7 + 5,$$

$$3x = 12,$$

$$x = \frac{12}{3},$$

$$x = 4.$$

b.  $f(x) = -13,$

$$3x - 5 = -13,$$

$$3x = -13 + 5,$$

$$3x = -8,$$

$$x = \frac{(-8)}{3},$$

$$x = -\frac{8}{3}.$$

c.  $f(x) = 3,$

$$3x - 5 = 3,$$

$$3x = 3 + 5,$$

$$3x = 8,$$

$$x = \frac{8}{3}.$$

d.  $f(x) = \frac{2}{3},$

$$3x - 5 = \frac{2}{3},$$

$$3x = \frac{2}{3} + 5,$$

$$3x = \frac{2 + 15}{3},$$

$$9x = 2 + 15,$$

$$9x = 17$$

$$x = \frac{17}{9}$$



### Trocando Ideias

Caso você precise rever como se resolve uma equação do 1º grau consulte o site:

<http://www.brasilescola.com/matematica/equacao-1-o-grau-com-uma-incognita.htm>.

Lá você vai encontrar algumas dicas de como resolver as equações de maneira simples e objetiva.

### Exemplo 3

Uma companhia de energia elétrica cobra pela fatura mensal uma taxa fixa de R\$ 15,00 mais R\$ 0,45 por kWh consumido.

- Escreva uma função afim que permita calcular o valor pago mensalmente em função da quantidade de kwh consumidos.
- De acordo com a função escrita, calcule a quantia a ser paga pelo consumo de:
  - » 85 kwh
  - » 117 kwh
  - » 100 kwh
- Quantos kwh uma pessoa consumiu em um mês cujo valor pago foi de R\$ 51,00?

## Glossário



**kWh (quilowatt-hora):** unidade de medida de energia consumida (ou produzida) em uma hora.

## Resolução

- Vamos chamar de  $y$  a quantia a ser paga mensalmente e  $x$  a quantidade de kWh consumida.

$$y = 0,45x + 15$$

### b. Para 85 kwh, temos:

$$y = 0,45 \cdot 85 + 15 = 38,25 + 15 = 53,25$$

**R: R\$ 53,25**

### Para 117 kwh, temos:

$$y = 0,45 \cdot 117 + 15 = 52,65 + 15 = 67,65$$

**R: R\$ 67,65**

### Para 100 kwh, temos:

$$y = 0,45 \cdot 100 + 15 = 45,00 + 15 = 60$$

**R: R\$ 60,00**

### c. $y = 0,45x + 15$

Se o valor pago ( $y$ ) foi de R\$ 51,00, temos que:

$$y = 0,45x + 15 \Rightarrow 0,45x + 15 = 51 \Rightarrow 0,45x = 51 - 15 \Rightarrow 0,45x = 36$$

$$x = \frac{36}{0,45} = 80$$

**R: 80 kwh**

## Gráfico de uma Função Afim



Antes de iniciarmos a construção do gráfico de uma função afim, vamos provar que ele é uma reta.

Para isso, basta mostrar que três pontos quaisquer do gráfico são colineares, ou seja, pertencem a uma mesma reta.

### Você Sabia ?

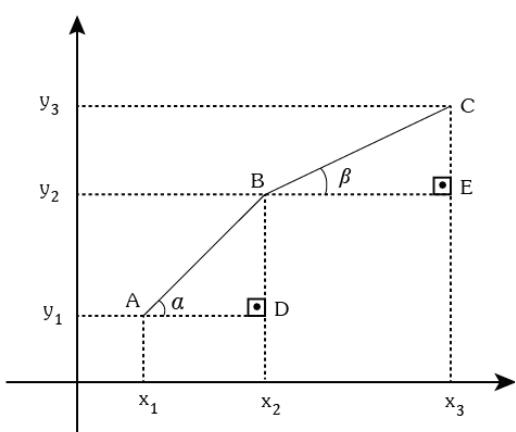


Foi por volta de 1.360 d.C. que um matemático parisiense chamado Nicole Oresme teve um pensamento brilhante: “por que não traçar uma figura que representasse a maneira pela qual as coisas variam?” Ali estava um primeiro esboço do que conhecemos hoje como representação gráfica de funções.

Este processo era conhecido, então, como “a latitude das formas”. Oresme usava os termos latitud e longitude de modo equivalente à ordenada e à abscissa que usamos hoje, e sua representação gráfca assemelhava-se à nossa geometria analítica.

Podemos verificar que dados três pontos distintos do gráfico da função afim, esses pontos são colineares, ou seja, o gráfico é uma reta.

## Prova



Suponhamos inicialmente que o gráfico não seja uma reta, ou seja, existem três pontos A,B e C distintos dois a dois, do gráfico de  $f$  que não estão alinhados, conforme a figura seguinte:

Sejam  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  e  $(x_3, y_3)$ , respectivamente, as coordenadas cartesianas desses pontos.

**Daí temos:**

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = a \cdot x_1 + b \\ y_2 = a \cdot x_2 + b \\ y_3 = a \cdot x_3 + b \end{array} \right.$$

**Subtraindo membro a membro, teremos:**

$$\begin{cases} y_3 - y_2 = (a \cdot x_3 + b) - (a \cdot x_2 + b) = a \cdot x_3 + b - a \cdot x_2 - b = a \cdot x_3 - a \cdot x_2 = a(x_3 - x_2) \quad (I) \\ y_2 - y_1 = (a \cdot x_2 + b) - (a \cdot x_1 + b) = a \cdot x_2 + b - a \cdot x_1 - b = a \cdot x_2 - a \cdot x_1 = a(x_2 - x_1) \quad (II) \end{cases}$$

$$(I) \quad y_3 - y_2 = a(x_3 - x_2)$$

$$a = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

$$(II) \quad y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

**Então,**

$$\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

**e,**

$$\tg \beta = \frac{\overline{CE}}{\overline{BE}} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \quad e \quad \tg \alpha = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



### Atenção

$\overline{CE}$  é o cateto oposto ao ângulo  $\beta$  e  $\overline{BE}$  é o cateto adjacente ao ângulo  $\beta$  que é a tangente de  $\beta$ . E,  $\overline{BD}$  é o cateto oposto ao ângulo  $\alpha$  e  $\overline{AD}$  é o cateto adjacente ao ângulo  $\alpha$  que é a tangente de  $\alpha$ . Importante é saber que, se o valor de duas tangentes é igual, é porque a medida de seus ângulos também é igual.



### Explore

Trigonometria (1): Relações no triângulo retângulo

<http://goo.gl/IU6DXe>.

Então, se  $\tg \beta = \tg \alpha$ , devemos ter que  $\alpha = \beta$ , portanto, os pontos A, B e C estão obrigatoriamente alinhados. Conforme queríamos demonstrar.

## Estudo do Gráfico da Função Afim

Inicialmente, construímos uma tabela e atribuímos valores para  $x$  e encontramos os valores correspondentes para  $y$ , determinando os pares ordenados  $(x,y)$ .

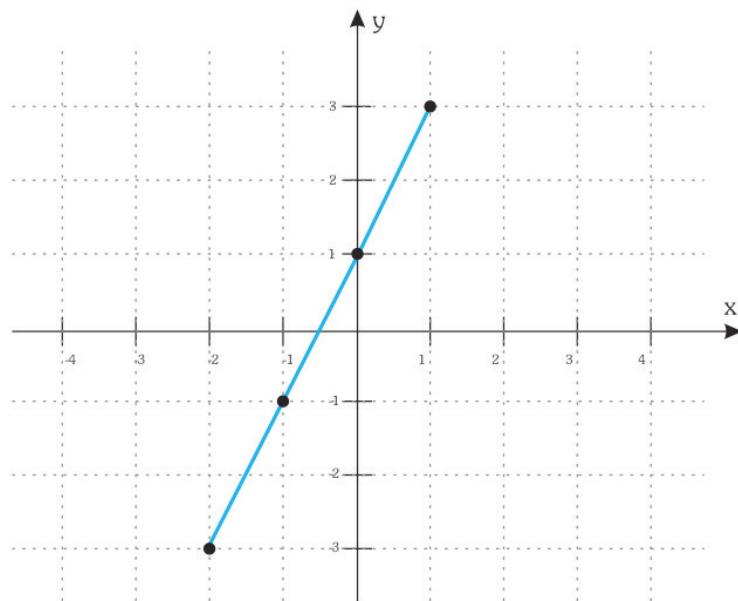
### Exemplo 1

Função afim com  $a \neq 0$  e  $b \neq 0$ .

$$f(x) = 2x + 1 \quad (\alpha > 0)$$

$x$	$y = f(x) = 2x + 1$	$(x,y)$
-2	$y = f(-2) = 2 \cdot (-2) + 1 = -4 + 1 = -3$	(-2, -3)
-1	$y = f(-1) = 2 \cdot (-1) + 1 = -2 + 1 = -1$	(-1, -1)
0	$y = f(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 0 + 1 = 1$	(0, 1)
1	$y = f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$	(1, 3)
2	$y = f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 4 + 1 = 5$	(2, 5)

Cada par ordenado indicado na Tabela corresponde a um ponto no plano cartesiano. Atribuímos apenas alguns valores para  $x$  na tabela. Porém, existem infinitos valores para  $x$  ( $D(f) = \mathbb{R}$ ) e, consequentemente, infinitos pares ordenados. Em seguida, unimos esses pontos, obtendo uma reta, que é o gráfico da função  $f(x)=2x+1$ .



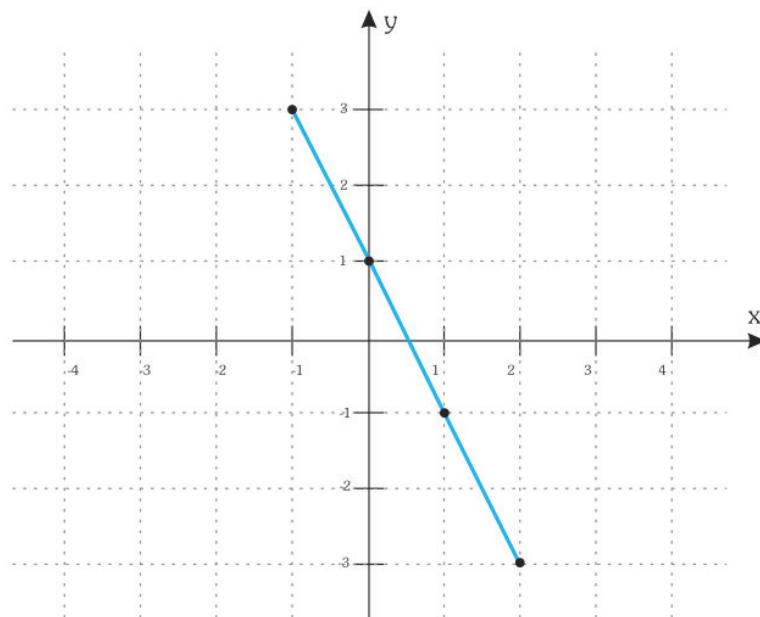
Os coeficientes da função  $f(x)=2x+1$  são:  $a=2$  e  $b=1$  e o ponto que a reta intercepta o eixo  $y$  é exatamente o ponto  $b$ .

## Exemplo 2

Função afim com  $a \neq 0$  e  $b \neq 0$ .

$$f(x) = -2x + 1 \quad (\alpha < 0)$$

x	$y = f(x) = -2x + 1$	(x,y)
-2	$y = f(-2) = -2 \cdot (-2) + 1 = 4 + 1 = 5$	(-2, 5)
-1	$y = f(-1) = -2 \cdot (-1) + 1 = 2 + 1 = 3$	(-1, 3)
0	$y = f(0) = -2 \cdot 0 + 1 = 0 + 1 = 1$	(0, 1)
1	$y = f(1) = -2 \cdot 1 + 1 = -2 + 1 = -1$	(1, -1)
2	$y = f(2) = -2 \cdot 2 + 1 = -4 + 1 = -3$	(2, -3)



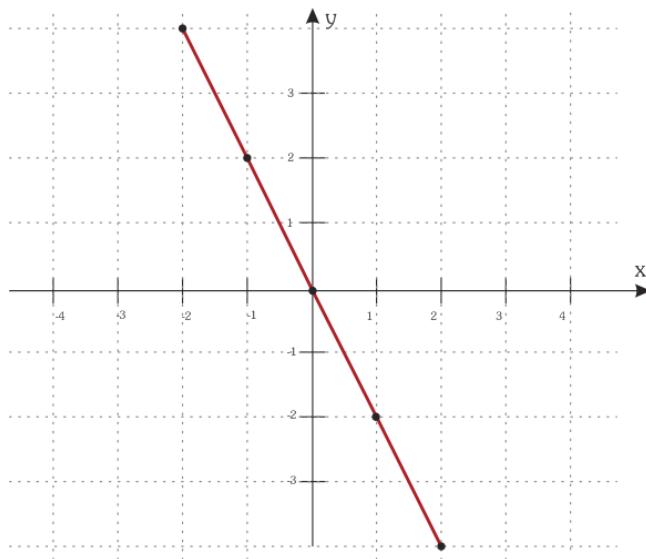
$b = 1$ , ponto em que a reta intercepta o eixo y.

### Exemplo 3

Função linear com  $a \neq 0$  e  $b = 0$ .

$$f(x) = -2x \ (\alpha < 0)$$

x	$y = f(x) = -2x$	(x,y)
-2	$y = f(-2) = -2 \cdot (-2) = 4$	(-2, 4)
-1	$y = f(-1) = -2 \cdot (-1) = 2$	(-1, 2)
0	$y = f(0) = -2 \cdot 0 = 0$	(0, 0)
1	$y = f(1) = -2 \cdot 1 = -2$	(1, -2)
2	$y = f(2) = -2 \cdot 2 = -4$	(2, -4)



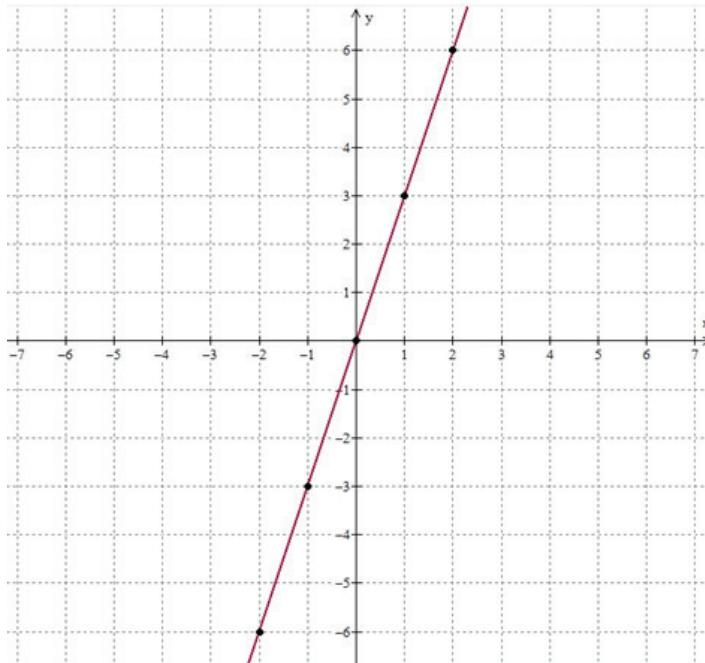
$b = 0$ , ponto em que a reta intercepta o eixo y.

### Exemplo 4

Função linear com  $a \neq 0$  e  $b = 0$ .

$$f(x) = 3x \ (\alpha > 0)$$

x	$y = f(x) = 3x$	(x,y)
-2	$y = f(-2) = 3 \cdot (-2) = -6$	(-2, -6)
-1	$y = f(-1) = 3 \cdot (-1) = -3$	(-1, -3)
0	$y = f(0) = 3 \cdot 0 = 0$	(0, 0)
1	$y = f(1) = 3 \cdot 1 = 3$	(1, 3)
2	$y = f(2) = 3 \cdot 2 = 6$	(2, 6)

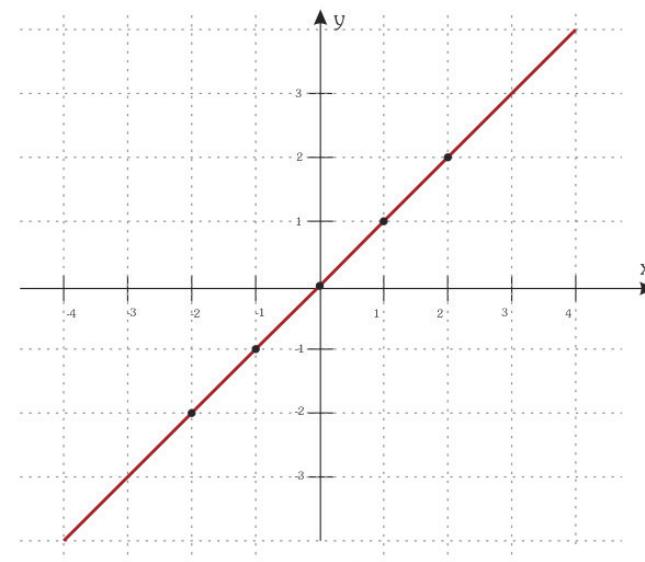


### Exemplo 5

Função identidade com  $a = 1$  e  $b = 0$ .

$$f(x) = x$$

x	$y = f(x) = x$	(x,y)
-2	$y = f(-2) = (-2) = -2$	(-2, -2)
-1	$y = f(-1) = (-1) = -1$	(-1, -1)
0	$y = f(0) = 0$	(0, 0)
1	$y = f(1) = 1$	(1, 1)
2	$y = f(2) = 2$	(2, 2)



Observe que o gráfico da função identidade é a bissetriz do 1º e 3º quadrantes.



## Para Pensar

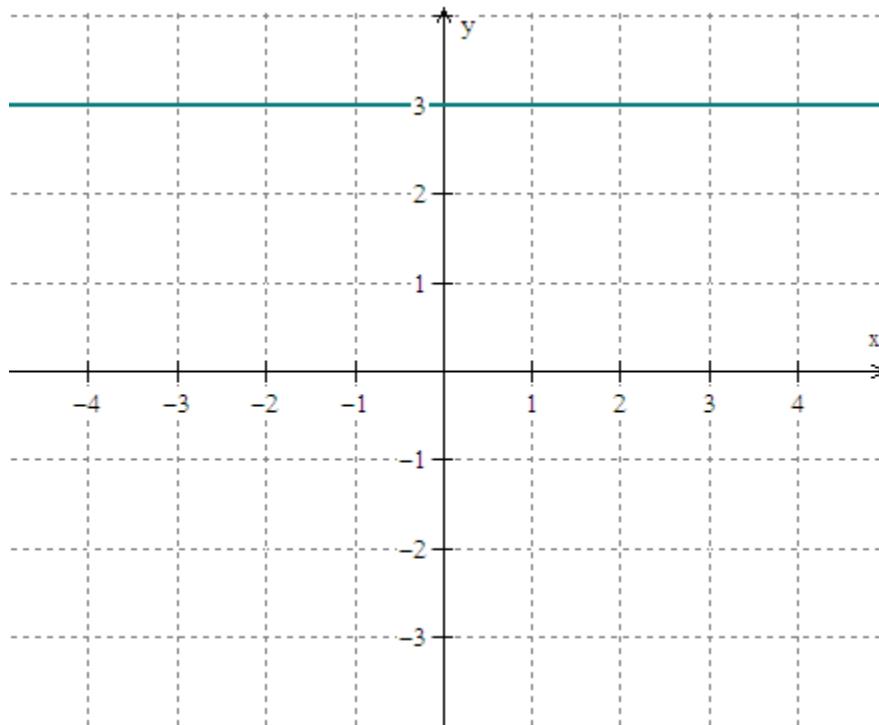
O que é bissetriz de um ângulo?

### Exemplo 6

Função constante  $a = 0$ .

$$f(x) = 3$$

x	$y = f(x) = 3$	(x,y)
-2	$y = f(-2) = 3$	(-2, 3)
-1	$y = f(-1) = 3$	(-1, 3)
0	$y = f(0) = 3$	(0, 3)
1	$y = f(1) = 3$	(1, 3)
2	$y = f(2) = 3$	(2, 3)



O gráfico de uma função constante  $f(x)=b$  é uma reta paralela ao eixo x que passa pelo ponto  $(0, b)$ . Sendo assim, a imagem de f é o próprio conjunto b:  $\text{Im } (f) = \{b\}$ .



## Para Pensar

Como dois pontos determinam uma reta, basta considerarmos dois pontos no plano cartesiano para construirmos o gráfico de uma função afim.

## Função Definida por mais de uma Sentença



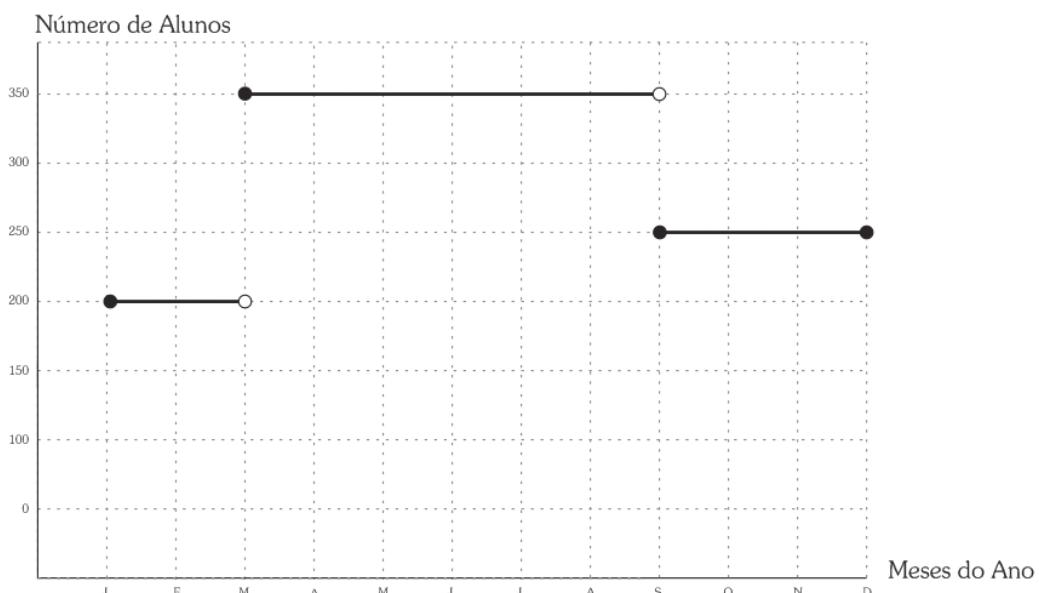
Pense na seguinte situação: em janeiro de 2014, uma escola tinha 200 alunos matriculados, em março, devido a uma reforma no prédio de uma escola próxima, foram matriculados mais 150 alunos. Em outubro, apenas 100 alunos retornaram para sua escola de origem.

Este é um exemplo de função definida por mais de uma sentença:

$f: A \rightarrow N$  (chamamos de A os meses do ano)

$$f(x) = \begin{cases} 200, & \text{se } x \in \{\text{janeiro, fevereiro}\} \\ 350, & \text{se } x \in \{\text{março, abril, maio, junho, julho, agosto, setembro}\} \\ 250, & \text{se } x \in \{\text{outubro, novembro, dezembro}\} \end{cases}$$

**Veja como fica o gráfico desta função:**



### Exemplo 1

Construa o gráfico da função definida por:  $f(x) = \begin{cases} -x - 5, & \text{se } x \leq -3 \\ 2x + 5, & \text{se } x > -3 \end{cases}$

Primeiro representamos essa função por meio de duas outras funções:

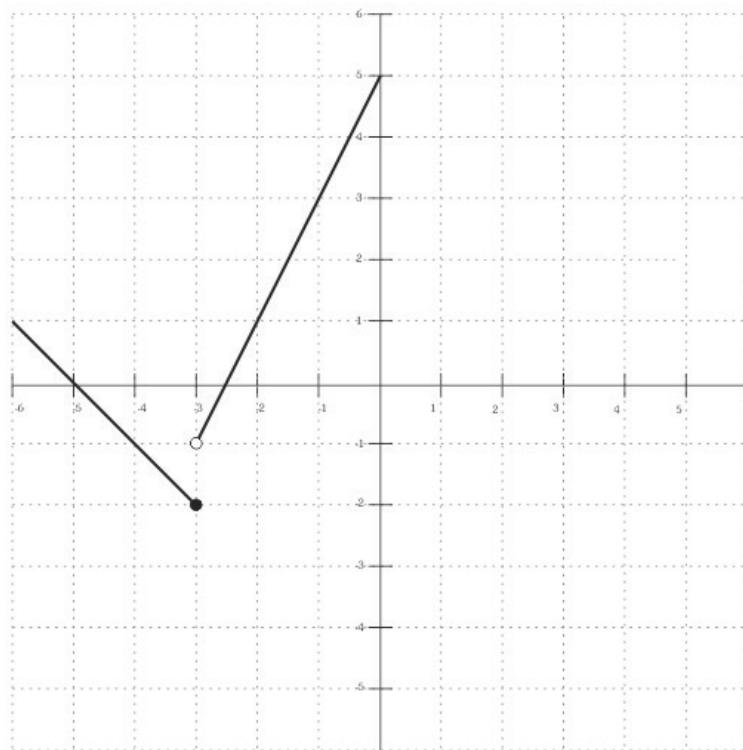
$$g(x) = -x - 5, \text{ se } x \leq -3$$

$$h(x) = 2x + 5, \text{ se } x > -3$$

Para obtermos o gráfico de  $f(x)$ , devemos construir os gráficos das funções  $g(x) = -x - 5$ , para  $x \leq -3$  e  $h(x) = 2x + 5$ , para  $x > -3$ .

<b>x</b>	<b><math>g(x) = -x - 5</math></b>	<b><math>g(x)</math></b>
-6	$g(-6) = -(-6) - 5 = 6 - 5 = 1$	(-6, 1)
-4	$g(-4) = -(-4) - 5 = 4 - 5 = -1$	(-4, -1)
-3	$g(-3) = -(-3) - 5 = 3 - 5 = -2$	(-3, -2)

<b>x</b>	<b><math>h(x) = 2x + 5</math></b>	<b><math>h(x)</math></b>
-2	$h(-2) = 2(-2) + 5 = -4 + 5 = 1$	(-2, 1)
-1	$h(-1) = 2(-1) + 5 = -2 + 5 = 3$	(-1, 3)
0	$h(0) = 2 \cdot 0 + 5 = 0 + 5 = 5$	(0, 5)



## Pense

Qual o significado dos símbolos ■ e ○ no gráfico?

## Função Afim Crescente ou Decrescente



### Em Síntese

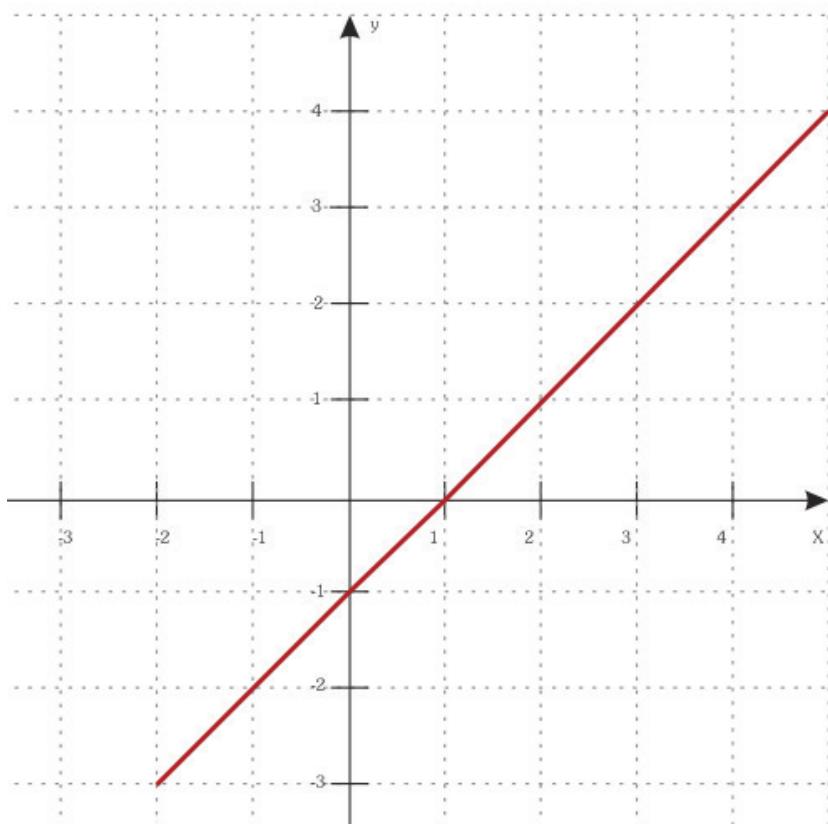
Até o momento, já vimos que uma função afim  $f(x) = ax + b$  tem como gráfico uma reta não paralela ao eixo  $y$ , ou seja, não vertical, e que a ordenada onde a reta intercepta o eixo  $y$  é sempre  $b$ .

No caso de  $a = 0$ , o valor de  $f(x)$  permanece constante e o gráfico de  $f$  é a reta paralela ao eixo  $x$  que passa por  $(0, b)$ .

Em uma função em que  $a \neq 0$ , existem duas possibilidades:

**$a > 0$  ou  $a < 0$**

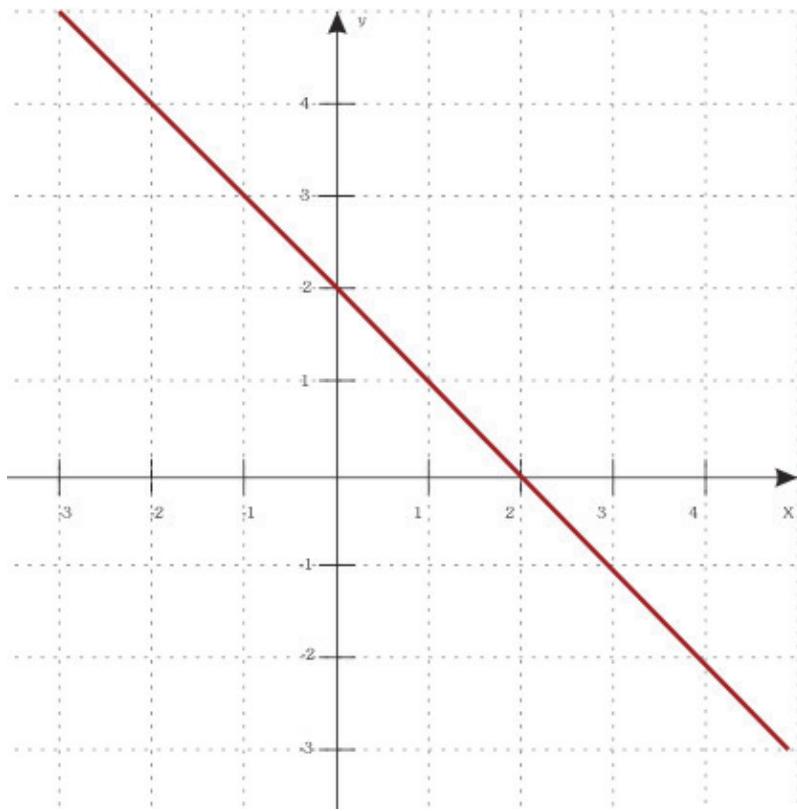
Observe o gráfico de  $f(x) = x - 1$ , com  $a > 0$ .



Observe que na função  $f$ , à medida que aumentamos os valores de  $x$ , os valores correspondentes de  $y$  também aumentam.

Dizemos que,  $f(x) = x - 1$  é **crescente**.

Agora, observe o gráfico de outra função afim  $f(x) = -x + 2$ , com  $a < 0$ .



Observe que na função  $f$ , à medida que aumentamos os valores de  $x$ , os valores correspondentes de  $y$  diminuem.

Dizemos que,  $f(x) = -x + 2$  é **decrescente**.

### Exemplo 1

Classifique em crescente ou decrescente cada uma das funções  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**a.**  $f(x) = -2, 4x + 5$

R:  $a < 0 \rightarrow$  função decrescente

**b.**  $f(x) = 1/3 x - 1$

R:  $a > 0 \rightarrow$  função crescente

**c.**  $f(x) = 7 - x$

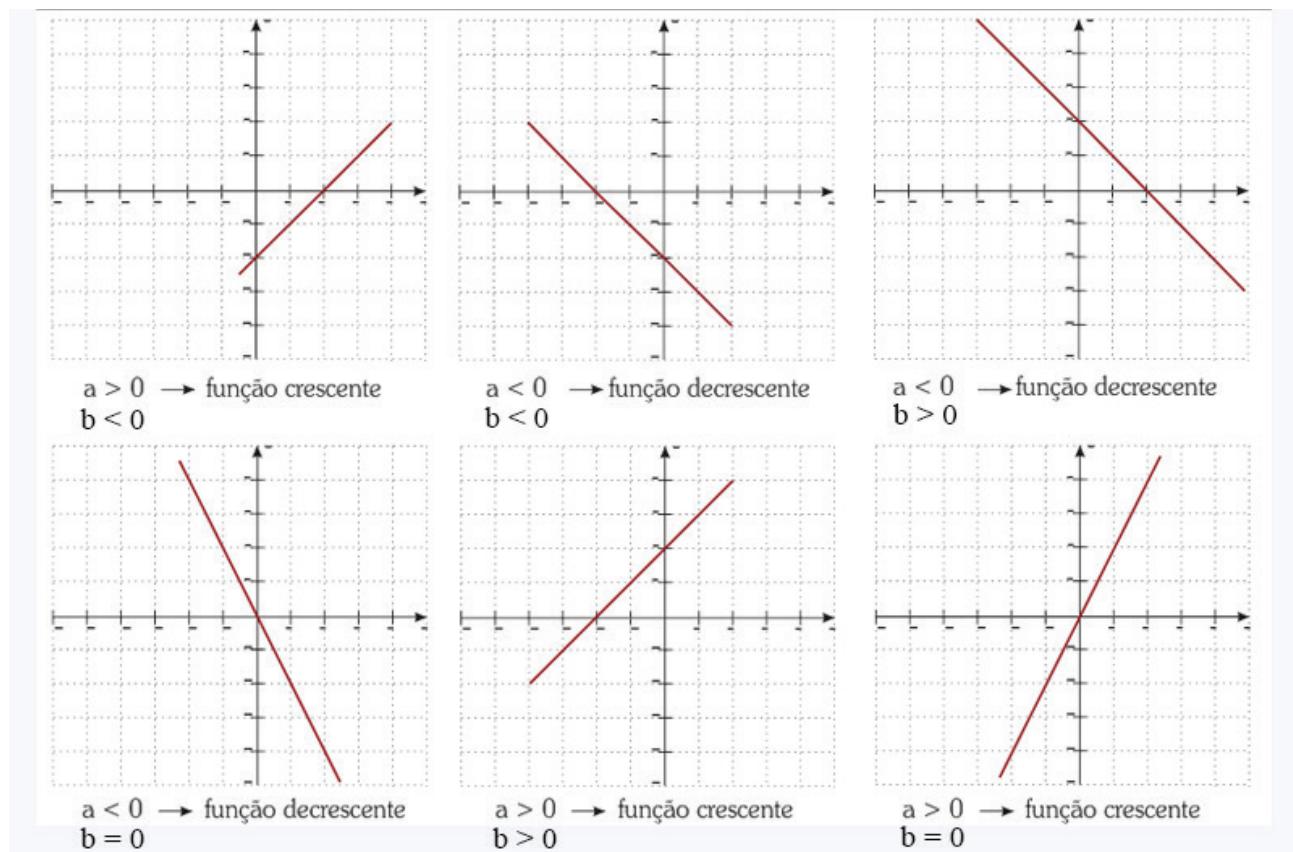
R:  $a < 0 \rightarrow$  função decrescente

**d.**  $f(x) = 1 + 3x$

R:  $a > 0 \rightarrow$  função crescente

## Exemplo 2

Em cada um dos gráficos a seguir, que representam funções afins, diga se  $a$  e  $b$  são positivos, negativos ou nulos e se as funções são crescente ou decrescente.



## Zero da Função Afim



Encontrar o zero de uma função é determinar o valor de  $x$  para o qual a função  $f(x) = ax + b$ ,  $a \neq 0$ , se anula, ou seja, encontra o valor para  $f(x) = 0$ .

Para encontrar esse valor, basta resolver a equação  $a x + b = 0$ .

### Exemplo

Calcular o zero das seguintes funções:

a.  $f(x) = 2x - 4$

Fazemos  $2x - 4 = 0$  e resolvemos a equação.

$$2x - 4 = 0$$

$$2x = 0 + 4$$

$$2x = 4$$

$$x = \frac{4}{2}$$

$$x = 2$$

b.  $f(x) = 3x + 2,$

$$3x + 2 = 0,$$

$$3x = -2,$$

$$x = -\frac{2}{3}.$$

c.  $f(x) = 3x - (7x - 1),$

$$3x - (7x - 1) = 0,$$

$$3x - 7x + 1 = 0,$$

$$-4x = -1,$$

$$x = \frac{1}{4}.$$

Geometricamente, o zero da função afim  $f(x) = ax + b$ ,  $a \neq 0$  é a abscissa do ponto de intersecção do gráfico da função com o eixo x.

**Por exemplo:** Dada a função afim  $f(x) = 2x + 6$ , temos que:

$$2x + 6 = 0,$$

$$2x = -6,$$

$$x = \frac{(-6)}{2},$$

$$x = -3 \text{ (zero da função)}$$

Assim, o gráfico dessa função intercepta o eixo x no ponto  $(-3, 0)$ .

## Estudo do Sinal de uma Função Afim

O estudo do sinal de uma função afim consiste em determinar os valores reais de x para os quais y é zero, menor do que zero ou maior do que zero:

- $f(x) = 0$
- $f(x) > 0$
- $f(x) < 0$

## Exemplo 1

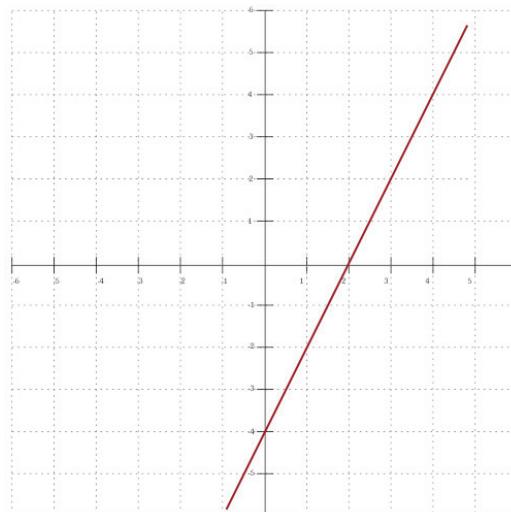
Veja a função  $f(x) = 2x - 4$ . Podemos encontrar os valores de  $x$  para os quais a função é maior do que zero, menor do que zero ou igual a zero.

Primeiro, calculamos o zero da função, ou seja, fazemos  $f(x) = 0$ .

$$2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2} \Rightarrow x = 2 \text{ (zero da função)}$$

Em seguida, vamos construir o gráfico dessa função para, em seguida, estudar o sinal dessa função.

x	f(x)
0	-4
1	-2
3	2



Neste caso, temos que: a função  $f(x) = 2x - 4$  ( $\alpha > 0$ ) é crescente.

Percebemos também que, para qualquer valor que atribuirmos para  $x$  que seja maior do que 2 ( $x > 2$ ), temos  $f(x) > 0$  e para qualquer valor que atribuirmos para  $x$  que seja menor do que 2 ( $x < 2$ ), temos  $f(x) < 0$ .

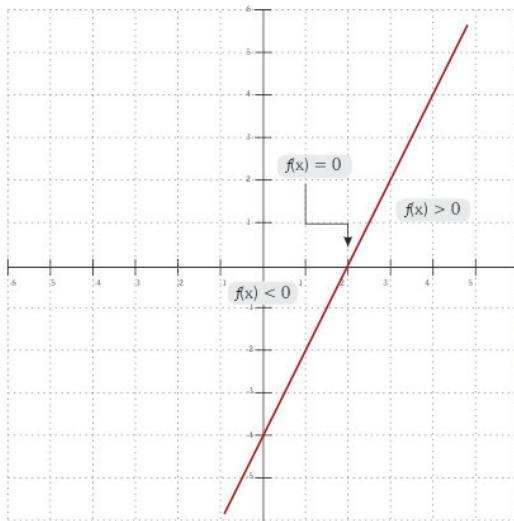
**Resumindo:**

- ✓ A função  $f(x) = 2x - 4$  **se anula** quando  $x = 2$ .
- ✓ A função  $f(x) = 2x - 4$  é **positiva** para  $x > 2$ .
- ✓ A função  $f(x) = 2x - 4$  é **negativa** quando  $x < 2$ .

$$f(x) = 0 \text{ para } x = 2$$

$$f(x) > 0 \text{ para } x > 2$$

$$f(x) < 0 \text{ para } x < 2$$



## Exemplo 2

Estude o sinal da função  $f(x) = -4x + 2$ .

Primeiro vamos encontrar o zero dessa função:

$$-4x + 2 = 0 \Rightarrow -4x = -2 \Rightarrow x = \frac{(-2)}{(-4)} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (raiz da função ou, onde a reta intercepta o eixo } x)$$

Segundo vamos construir o gráfico. Começamos pela tabela e depois traçamos a reta.

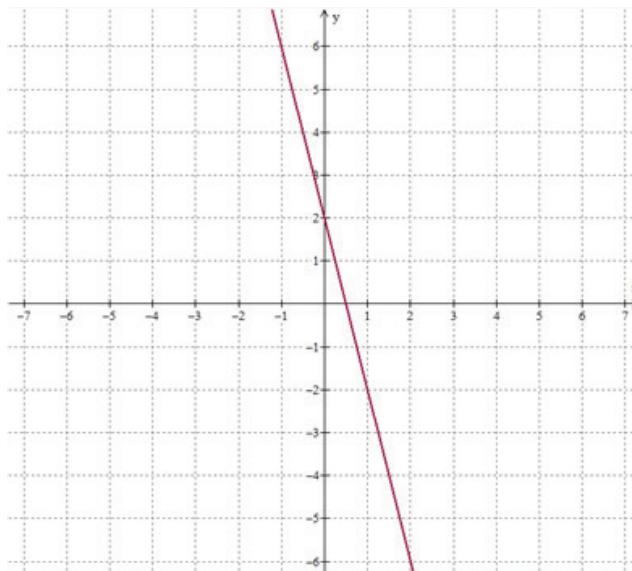
x	f(x)
0	2
1	-2
2	-6



### Pense

É conveniente que se atribua valores para x menores e maiores que a raiz da função.

Gráfico da função  $f(x) = -4x + 2$ :



$$f(x) = 0 \text{ para } x = \frac{1}{2} \quad f(x) < 0 \text{ para } x > \frac{1}{2} \quad f(x) > 0 \text{ para } x < \frac{1}{2}$$

### Exemplo 3

Lucas gastou R\$ 750,00 na compra de certa quantidade de camisetas para revender a R\$ 15,00 cada uma. Ele deseja saber quantas camisetas deve vender para que haja lucro no final da venda.

Primeiro, escrevemos a lei de formação dessa função:

$x \rightarrow$  número de camisetas vendidas

$f(x) \rightarrow$  lucro com a venda das camisetas

$$f(x) = 15x - 750$$

**Fazendo  $f(x)=0$ , temos:**

$$15x - 750 = 0 \Rightarrow 15x = 750 \Rightarrow x = \frac{750}{15} \Rightarrow x = 50$$

Ou seja, se ele vender 50 camisetas não haverá lucro nem prejuízo.

Se  $f(x) > 0$ ,  $x > 50$ , ou seja, se ele vender mais de 50 camisetas terá lucro. Analogamente, se ele vender menos de 50 camisetas terá prejuízo,  $f(x) < 0$ .

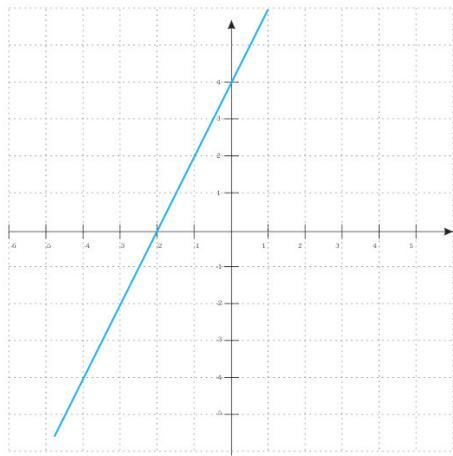
**Resumindo:**

- Vendendo 50 camisetas não haverá nem lucro nem prejuízo.  
Para  $x = 50$ , temos  $f(x) = 0$ .
- Vendendo mais de 50 camisetas haverá lucro.  
Para  $x > 50$ , temos  $f(x) > 0$
- Vendendo menos de 50 camisetas haverá prejuízo.  
Para  $x < 50$ , temos  $f(x) < 0$

Em situações como esta, dizemos que foi feito o estudo do sinal da função, que consiste em determinar os valores de  $x$  do domínio para os quais  $f(x) = 0$ ,  $f(x) > 0$  e  $f(x) < 0$ .

### Exemplo 3

De acordo com o gráfico da função afim abaixo, responda às questões seguintes.



- Qual é o zero dessa função?
- Escreva a função afim  $f$  correspondente a esse gráfico.
- Essa função é crescente ou decrescente?

**Para quais valores de  $x$  temos:**

Em que  $a \in \mathbb{R}$

$$\blacksquare f(x) = 0 ?$$

$$\blacksquare f(x) < 0 ?$$

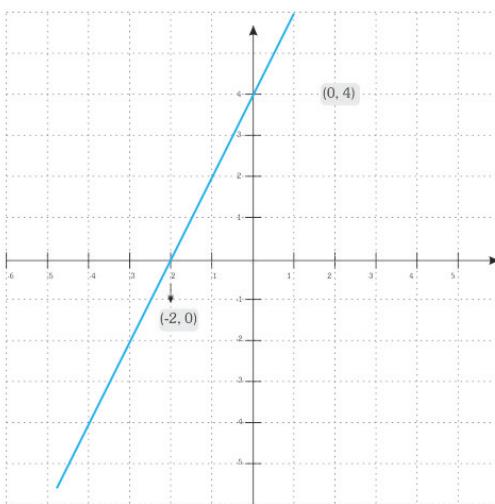
$$\blacksquare f(x) > 0 ?$$

### Resolução

a. O zero da função é o ponto onde a reta intercepta o eixo  $x$ . Neste caso  $x = -2$ .

b. Para escrever a função afim fazemos o seguinte:

**Localizamos dois pontos no gráfico:  $(0, 4)$  e  $(-2, 0)$**



Temos que:  $y = ax + b$ , e as coordenadas  $(x,y)$  de dois pontos.

$$A = (0, 4) \{4 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 4$$

$$B = (-2, 0) \{0 = a \cdot (-2) + b \Rightarrow 0 = -2a + 4 \Rightarrow -2a = -4 \Rightarrow a = 2$$

**Determinados  $a=2$  e  $b=4$  escrevemos a função  $f(x)=2x+4$ .**

c. Como  $a=2>0$ , temos que a função é crescente.

d. Estudo do sinal da função  $f(x)=2x+4$

$$f(x)=0 \Rightarrow 2x+4=0 \Rightarrow 2x=-4 \Rightarrow x=\frac{-4}{2} \Rightarrow x=-2$$

$$f(x)>0 \Rightarrow 2x+4>0 \Rightarrow 2x>-4 \Rightarrow x>\frac{-4}{2} \Rightarrow x>-2$$

$$f(x)<0 \Rightarrow 2x+4<0 \Rightarrow 2x<-4 \Rightarrow x<\frac{-4}{2} \Rightarrow x<-2$$

## Inequações do 1º Grau



Seja  $f: R \rightarrow R$  uma função de variável  $x$ . Chamamos de inequação toda desigualdade que possa ser deduzida a uma das seguintes formas:

■  $f > 0$       ■  $f < 0$       ■  $f \geq 0$       ■  $f \leq 0$

Uma inequação do 1º grau é toda inequação que pode ser deduzida a uma das seguintes formas:

■  $ax + b > 0$       ■  $ax + b < 0$       ■  $ax + b \geq 0$       ■  $ax + b \leq 0$

Em que  $a$  e  $b \in R$ , com  $a \neq 0$ .

**Alguns exemplos de inequações do 1º grau:**

- a.  $2x + 1 > 0$
- b.  $4x \leq 10 - x$
- c.  $x - 8 < 0$
- d.  $2x - 5 \geq 7$

Na resolução de inequações, devemos usar adequadamente as propriedades das desigualdades entre números reais e das desigualdades envolvendo adição e multiplicação de números reais. Algumas dessas propriedades são:

1. Dados  $x, y \in R$ , vale uma e somente uma das possibilidades:

**$x < y, x = y$  ou  $y < x$**

2. Se  $x < y$  e  $y < z$ , então  $x < z$  (transitiva).

3. Se  $x < y$ , então, para qualquer  $z \in R$  tem-se  $x + z < y + z$ , ou, de outra forma, se  $x < y$  e  $x' < y'$ , então  $x + x' < y + y'$  (soma membro a membro).

4. Se  $x < y$  e  $z$  é positivo, então  $x \cdot z < y \cdot z$ , ou, de outra forma, dados  $x, y, x', y'$  positivos, se  $x' < y'$ , então  $x \cdot x' < y \cdot y'$ , então  $x \cdot x' < y \cdot y'$  (produto membro a membro).
5. Se  $x < y$  e  $z$  é negativo, então  $x \cdot z > y \cdot z$  (quando multiplicamos os dois membros de uma desigualdade por um número negativo, o sentido dessa desigualdade se inverte).
6. Se  $x \neq 0$ , então  $x^2 > 0$  (exceto zero, todo quadrado é positivo).

**Se  $0 < x < y$ , então podemos dividir todos os membros por  $x$  e  $y$ , assim:**

$$\frac{0}{xy} < \frac{x}{xy} < \frac{y}{xy} \Rightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$$

(quanto maior for um número positivo, menor será seu inverso).



### Pense

Qual o significado dos símbolos  $\geq$  e  $\leq$ ?



### Explore

Para saber um pouco mais sobre as propriedades das desigualdades, consulte os seguintes sites:

- ✓ Conjunto numéricos : <http://goo.gl/HUzx5t>
- ✓ Propriedades algébricas e interpretações - 2 : <http://goo.gl/TlMNq8>

## Como Resolver uma Inequação do 1º Grau

Resolver uma inequação é encontrar todos os valores de  $x$  que tornam a desigualdade verdadeira.

### Exemplo 1

Resolva em  $\mathbb{R}$  a inequação  $6x - 2 \geq 0$ .

$$6x - 2 \geq 0 \Rightarrow 6x \geq 2 \Rightarrow x \geq \frac{2}{6},$$

Portanto,  $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{1}{3} \right\}$ .

## Exemplo 2

Resolva em  $\mathbb{R}$  a inequação:  $4(x - 2) < 8x + 12$ .

$$\begin{aligned} &\text{(Propriedade distributiva)} \\ &\overbrace{4(x - 2)} < 8x + 12 \\ &4x - 8 < 8x + 12 \\ &4x - 8x < 12 + 8 \\ &-4x < 20 \end{aligned}$$

(Multiplicar ambos os membros por  $(-1)$ , invertemos o sinal da desigualdade)

$$\begin{aligned} 4x &> -20 \\ x &> \frac{-20}{4} \\ \overbrace{x} &> -5 \end{aligned}$$

Portanto,  $S = \{x \in \mathbb{R} | x > -5\}$

Outra maneira de resolver uma inequação do 1º grau é por meio do estudo do sinal da função. Veja o exemplo seguinte:

## Exemplo 3

Resolva a inequação  $3 - 2x \geq x - 12$

Primeiro escrevemos a função  $f(x)$ .

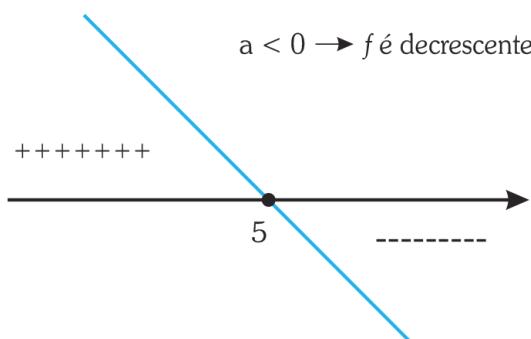
$$\begin{aligned} 3 - 2x &\geq x - 12 \\ -2x - x + 3 + 12 &\geq 0 \\ -3x + 15 &\geq 0 \\ f(x) &= -3x + 15 \end{aligned}$$

Para estudarmos o sinal dessa função, encontramos o seu zero:

$$-3x + 15 = 0 \Rightarrow -3x = -15 \Rightarrow x = 5 \text{ (zero da função)}$$

**Ou seja:**

O gráfico que representa essa função intercepta o eixo x no ponto 5 e a  $< 0$ , temos a seguinte representação:



Observe no esquema que, para valores de  $x$  menores ou iguais que 5, temos  $f(x) \geq 0$ ; para valores de  $x$  maiores ou iguais que 5, temos  $f(x) \leq 0$ .

No caso do exemplo queremos  $f(x) \geq 0$ , portanto  $x \leq 5$ .

Portanto,  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\}$

### Exemplo 4

Resolva a inequação  $4x - 7 > 9$ .

**Vamos resolver das duas maneiras:**

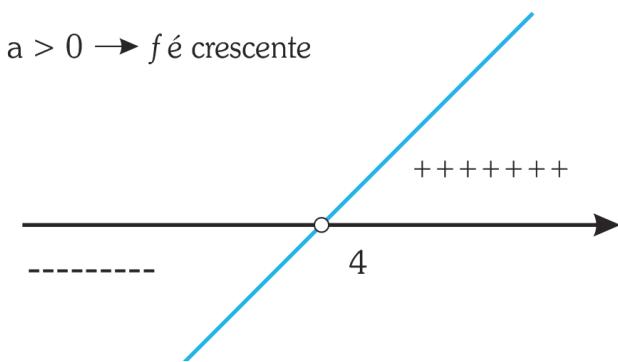
$$1º. \quad 4x - 7 > 9 \Rightarrow 4x > 9 + 7 \Rightarrow 4x > 16 \Rightarrow x > 4$$

Portanto,  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$

$$2º. \text{ Escrever } f(x) = 4x - 7 - 9 > 0 \Rightarrow f(x) = 4x - 16 > 0$$

**Agora encontramos o zero da função:**

$$4x - 16 = 0 \Rightarrow 4x = 16 \Rightarrow x = 4 \quad (\text{a} > 0 \rightarrow \text{função crescente})$$



Como queremos  $f(x) > 0$ , temos que:  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$

### Sistemas de Inequações do 1º Grau

Um sistema de inequações é composto por duas ou mais inequações, as quais devem ser resolvidas ao mesmo tempo.

Usamos o estudo do sinal das funções para resolver sistemas de inequações do 1º grau.

**Veja os exemplos seguintes:**

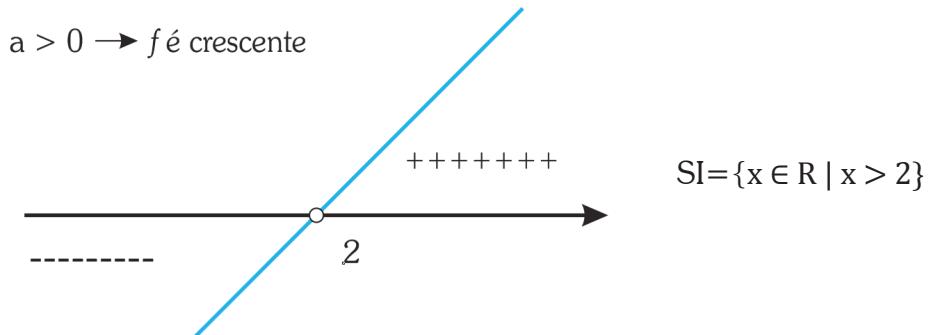
### Exemplo 1

$$\begin{cases} 5x - 3 > 7 \\ x + 6 \geq 2x - 1 \end{cases}$$

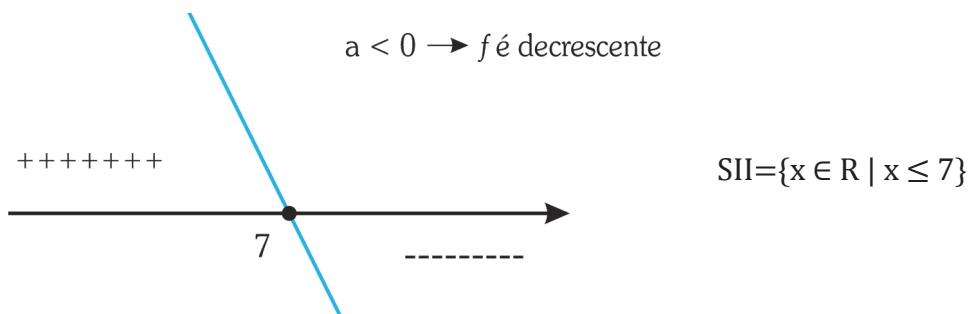
(A solução do sistema será dada pela intersecção das soluções das duas inequações)

**Primeiro vamos resolver cada uma das inequações separadamente:**

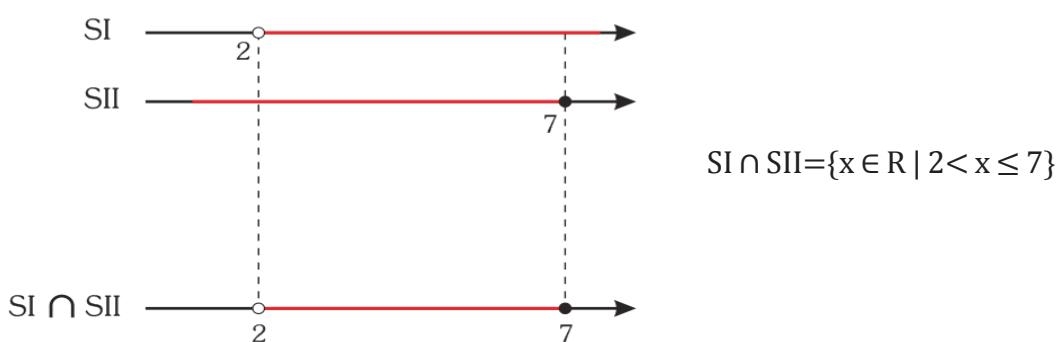
$$\text{I}) 5x - 3 > 7 \Rightarrow 5x > 7 + 3 \Rightarrow 5x > 10 \Rightarrow x > 2$$



$$\text{II}) x + 6 \geq 2x - 1 \Rightarrow x - 2x \geq -1 - 6 \Rightarrow -x \geq -7 \Rightarrow x \leq 7$$



**Fazendo a interseção dos conjuntos soluções das duas inequações, temos:**



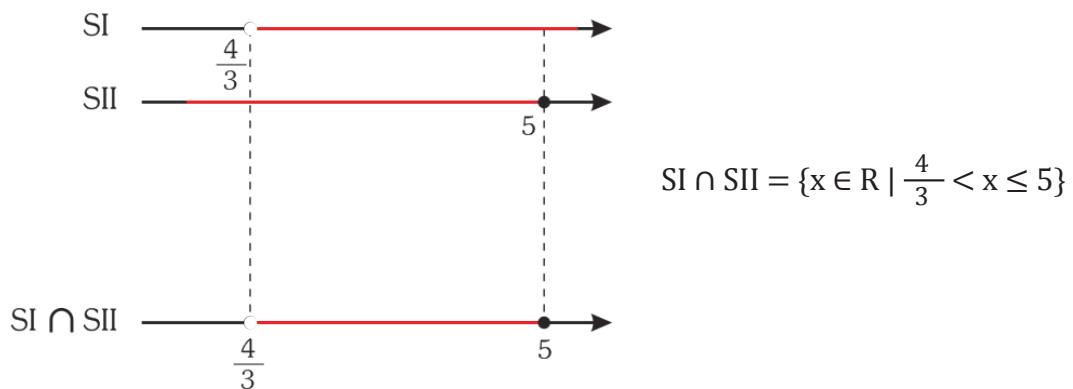
## Exemplo 2

$$\begin{cases} 3x - 4 > 0 \text{ (I)} \\ -x + 5 \geq 0 \text{ (II)} \end{cases}$$

$$\text{I}) 3x > 4 \Rightarrow 3x > 4 \Rightarrow x > \frac{4}{3}$$

$$\text{II}) -x + 5 \geq 0 \Rightarrow -x \geq -5 \Rightarrow x \leq 5$$

$$S_I \cap S_{II}$$



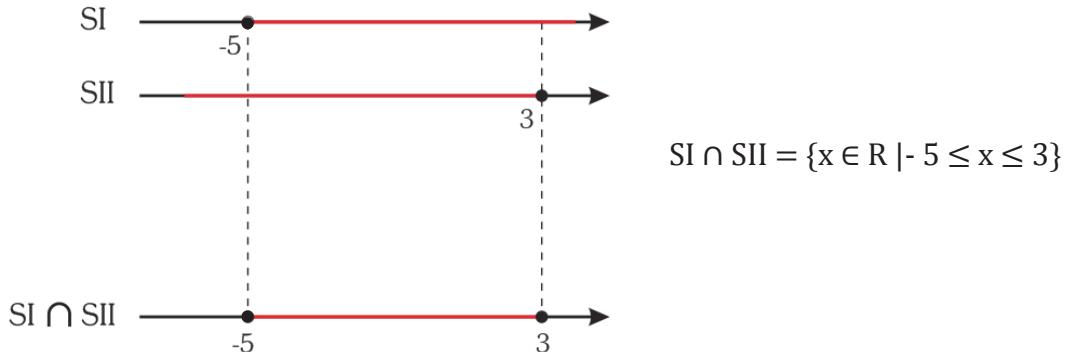
### Exemplo 3

Resolva a inequação  $-3 \leq x + 2 \leq 5$

Essas desigualdades equivalem aos sistemas  $\begin{cases} -3 \leq x + 2 \text{ (I)} \\ x + 2 \leq 5 \text{ (II)} \end{cases}$

$$\text{I}) -3 \leq x + 2 \Rightarrow -3 - 2 \leq x \Rightarrow -5 \leq x \text{ ou } x \geq -5$$

$$\text{II}) x + 2 \leq 5 \Rightarrow 5 - 2 \Rightarrow x \leq 3$$



## Inequações-Produto e Inequações Quociente



Sentenças matemáticas constituídas por desigualdades com produto ou quociente de funções.

Essas inequações, em geral, têm sua solução baseada no estudo da variação do sinal de uma função do 1º grau e nas propriedades dos sinais do produto e do quociente dos números reais.

### Exemplo 1

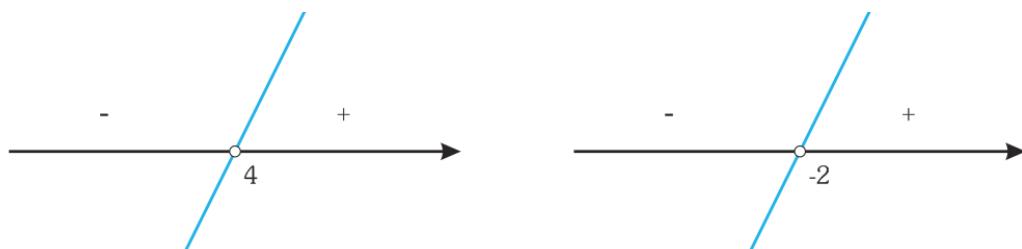
Encontre o conjunto solução da inequação produto do 1º grau  $(x - 4)(x + 2) > 0$

#### Resolvendo

Cada um dos fatores  $(x - 4)(x + 2)$  representa uma função do 1º grau. Assim, iniciaremos pelo estudo dos sinais dessas expressões, que chamaremos de  $y$  e  $z$ , respectivamente.

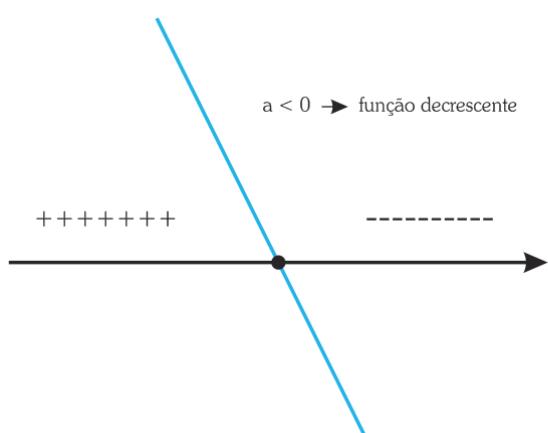
**Para  $y = (x - 4)$  e  $z = (x + 2)$  temos:**

- (1) Se  $y = x - 4$ , então sua raiz é obtida fazendo  $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$ .
- (2) Se  $z = x + 2$  então sua raiz é obtida fazendo  $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ .

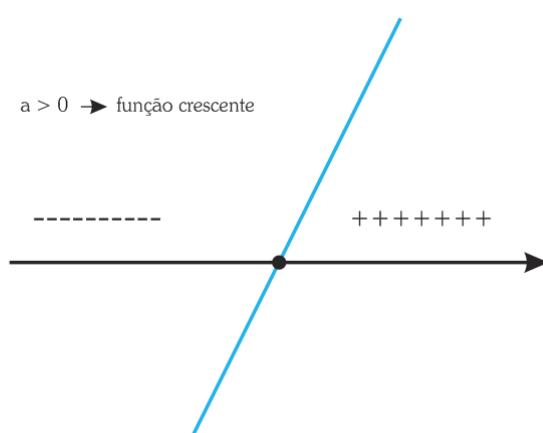


Para construir esses esquemas, lembre-se de uma regra básica:

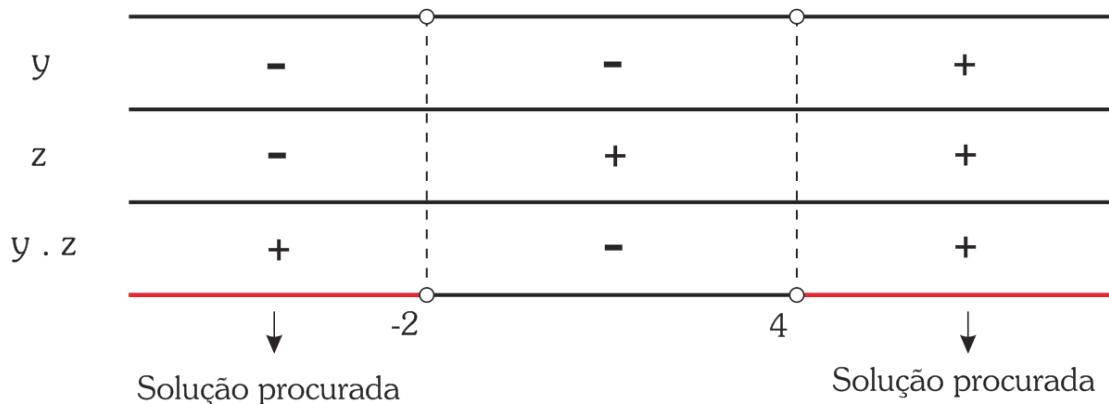
**$a < 0$ : função é decrescente**



**$a > 0$ : função crescente**



A solução da inequação produto é obtida a partir da integração das análises das variações de sinais de  $y$  e  $z$ , representadas acima. Após, aplicamos a regra de sinais do produto dos números reais e analisamos o resultado final encontrado.



Para encontrar a solução procurada, fazemos a multiplicação dos sinais de  $y$  e  $z$ :  $(-) \cdot (-) = (+)$  e  $(+) \cdot (+) = (+)$ . Como procuramos  $f(x) > 0$ , a solução está no intervalo em que o sinal é positivo  $(+)$ .

De acordo com o esquema, podemos verificar que os valores de  $x$  para os quais  $y \cdot z > 0$ , são  $x < -2$  e  $x > 4$ .

Portanto,  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ e } x > 4\}$

## Exemplo 2

Encontre o conjunto solução da inequação quociente do 1º grau:

$$\frac{x-1}{x+5} < 0$$

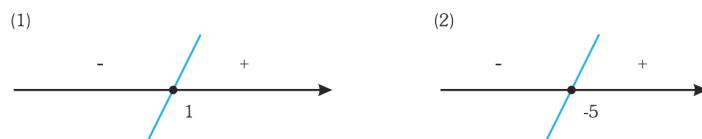
### Resolvendo

A resolução da inequação quociente é similar ao da inequação produto, pois no conjunto dos números reais, a divisão ou multiplicação de dois números apresenta a mesma regra de sinais.

Assim, cada termo do quociente representa uma expressão do 1º grau. Iniciamos pelo estudo dos sinais dessas expressões, que chamamos de  $a$  e  $b$ , respectivamente.

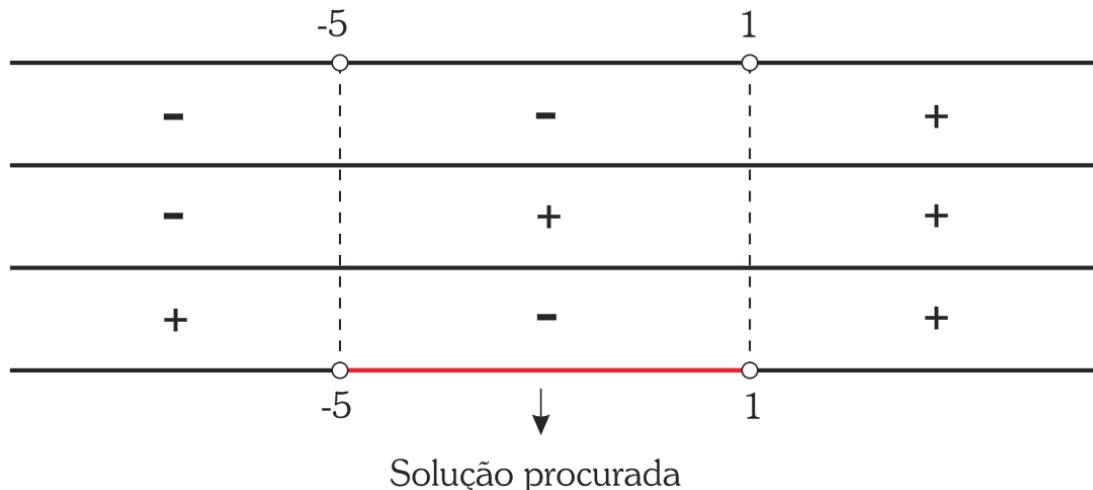
**Para  $a=x-1$  e  $b=x+5$ , temos:**

- (1) Se  $a=x-1$ , a raiz obtida é  $x-1=0 \Rightarrow x=1$
- (2) Se  $b=x+5$ , a raiz obtida é  $x+5=0 \Rightarrow x=-5$



A solução da inequação quociente é obtida a partir da integração das análises das variações de sinais das expressões  $a$  e  $b$ , representadas acima.

Após, aplicamos a regra de sinais do quociente dos números reais e analisamos o resultado final encontrado.



De acordo com o esquema, podemos verificar que os valores de  $x$  para os quais  $y: z > 0$ , são  $-5 < x < 1$ .

$$\text{Portanto, } S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 1\}$$

### Exemplo 3

De acordo com o conjunto dos números Reais, determine o valor de  $x$  na seguinte inequação produto:  $(2x + 1)(x + 2) \leq 0$ .

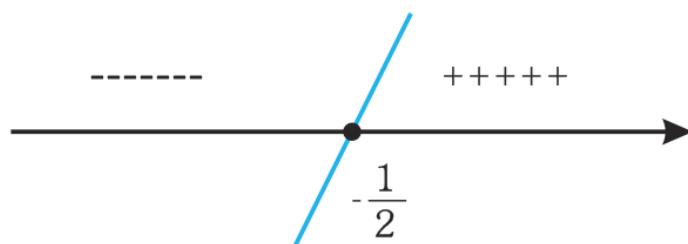
$$\text{Temos que: } f(x) = 2x + 1 \text{ e } g(x) = x + 2$$

- Podemos chamar uma função de  $y$ ,  $z$  ou  $w$  (letras minúsculas do alfabeto, como nos exemplos 1 e 2) e também de  $f(x)$ ,  $g(x)$  ou  $h(x)$  (como no exemplo 3).

$$f(x) = 2x + 1$$

$$f(x) = 0$$

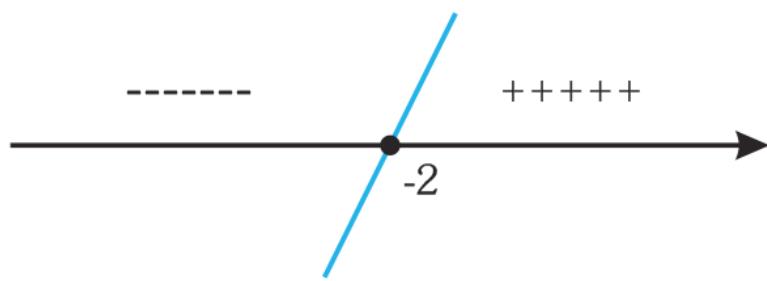
$$2x + 1 = 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$



$$g(x) = x + 2$$

$$g(x) = 0$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$



$$\text{Portanto, } S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq \frac{-1}{2}\}$$

### Exemplo 4

A inequação a seguir envolve produto e quociente entre termos:  $((x+1)(x+4))/(-x-2) \geq 0$ . Construa o quadro de sinais e os possíveis valores de  $x$ .

$$f(x) = x + 1$$

$$f(x) = 0$$

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

$$g(x) = x + 4$$

$$g(x) = 0$$

$$x + 4 = 0$$

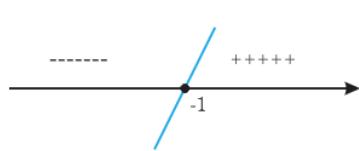
$$x = -4$$

$$h(x) = -x - 2$$

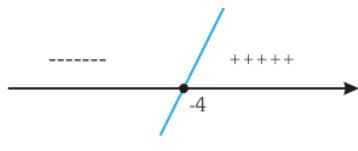
$$h(x) = 0$$

$$-x - 2 = 0$$

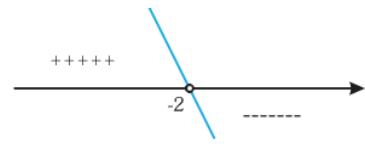
$$x = -2$$



$a > 0 \rightarrow f$  função crescente



$a > 0 \rightarrow f$  função crescente



$a < 0 \rightarrow f$  função decrescente

Por que em  $h(x)$  o esquema tem uma  $\circ$  para  $x = -2$ ?

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -4 \text{ ou } -2 < x \leq -1\}$$

## Material Complementar

**Para aprofundar seus estudos sobre Função Afim, consulte as indicações a seguir:**

A função afim e suas aplicações de Mariza Ferraz da Silva. Monografia apresentada como requisito para obtenção de título de Especialista em Matemática, Mídias Digitais e Didática ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, sob a orientação da professora doutora Maria Cristina Varriale;

- ✓ Função Afim - <http://www.infoescola.com/matematica/funcao-afim/>
- ✓ Função de 1º- <http://www.somatematica.com.br/emedio/funcao1/funcao1.php>
- ✓ Função Afim - <http://www.matematicadidatica.com.br/FuncaoAfim.aspx>

Capítulo 5 do livro **A Matemática do Ensino Médio** (volume 1), de Elon Lages Lima, Paulo César P. Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado. Rio de Janeiro, SBM, 1997. Coleção do Professor de Matemática.

## Referências

DANTE, L. R. **Matemática:** Contexto e aplicações – 1º ano. São Paulo: Ática, 2011.

PAIVA, M. **Matemática:** volume único. São Paulo: Moderna, 1999.

RIBEIRO, J. **Matemática:** Ciência e linguagem: volume único. São Paulo: Scipione, 2007.

## Anotações



---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---





**Educação a Distância**  
Cruzeiro do Sul Educacional  
*Campus Virtual*

www.cruzeirodosulvirtual.com.br  
Campus Liberdade  
Rua Galvão Bueno, 868  
CEP 01506-000  
São Paulo SP Brasil  
Tel: (55 11) 3385-3000



Universidade  
**Cruzeiro do Sul**



**UNICID**  
Universidade  
Cidade de S. Paulo



**UNIFRAN**  
Universidade  
de Franca



**UDF**  
Centro  
Universitário



**Módulo**  
Centro  
Universitário