Fundamentos de Matemática

Educação a Distância
Cruzeiro do Sul Educacional
Campus Virtual

Material Teórico

Função Quadrática

Responsável pelo Conteúdo:
Prof.ª Me. Conceição Aparecida Cruz Longo

Revisão Técnica:
Prof.ª Dr.ª Cintia Aparecida Bento dos Santos

Revisão Textual:
Prof.ª Esp.Vera Lídia de Sá Cicarone

UNIDADE Função Quadrática

- Introdução
- Definição de Função Quadrática
- Gráfico da Função Quadrática
- Estudo do sinal da função quadrática
- Inequações do 2º grau

Objetivo de APRENDIZADO

- Nesta unidade vamos fazer o estudo da função quadrática ou função polinomial do 2º grau. As funções quadráticas são fundamentais, por exemplo, no estudo do movimento de projéteis (balística) e de modelos econômicos, entre outros.
- Além disso, podemos encontrar arcos de parábolas em variadas estruturas arquitetônicas.

Outros objetivos que serão buscados nesta unidade:

» consolidar conhecimentos obtidos na resolução de equações do 2º grau;
» conceituar função polinomial do 2º grau;
» determinar a lei de formação de uma função polinomial do 2º grau;
» determinar a imagem de elementos do domínio de uma função polinomial do 2º grau;
» construir, ler e analisar os gráficos de funções polinomiais do 2º grau;
» identificar a concavidade e outros elementos da parábola;
» identificar o crescimento e decrescimento de uma função polinomial do 2º grau;
» resolver problemas de máximos e mínimos associados à função polinomial do 2º grau;
» compreender os significados dos coeficientes da função do 2º grau;
» utilizar a função polinomial do 2º grau para resolver problemas.

As inequações do 2º grau encerram esta unidade com atividades que incluem inequações simples, sistemas de inequações, inequações-produto e inequações quociente.

Contextualização

Nesta Unidade vamos assistir ao vídeo: “O mundo da matemática”, Episódio 7 – Uma parábola para Júlia.

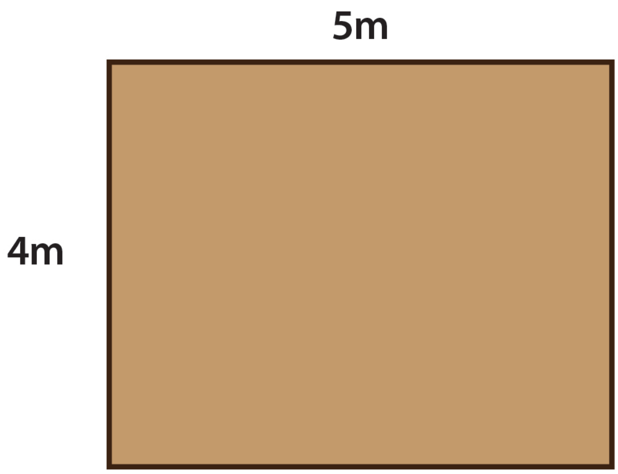
No audiovisual “Uma parábola para Júlia”, episódio 7 do programa “O Mundo da Matemática”, Júlia vai aprender que a perda de calorias durante uma caminhada está relacionada com a velocidade que se imprime aos passos.

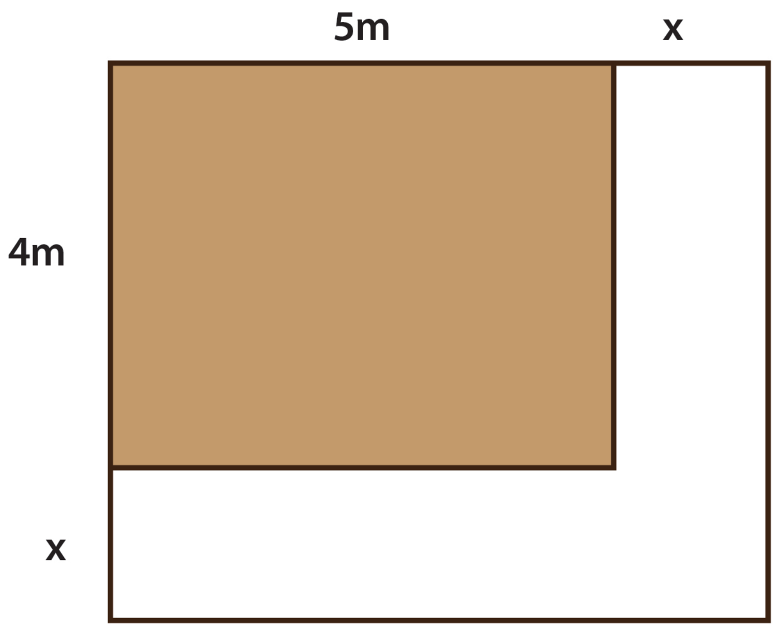
Neste episódio, você vai descobrir, com Rafael e Júlia, o que é uma parábola e como a função de 2º grau pode ser útil para auxiliar na resolução de alguns problemas.

- ✓ https://www.youtube.com/watch?v=7VUTe-mbITQ

Introdução

A figura abaixo representa uma região retangular onde foi construído um canil. O dono do canil pretende ampliar essa região, aumentando a mesma medida para o lado e para o comprimento.

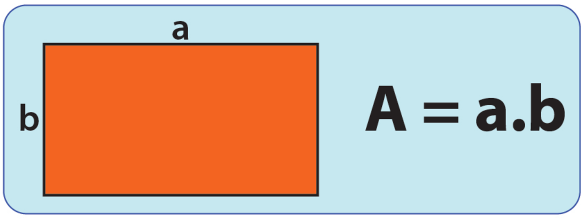




Como podemos expressar a área (f(x)) do canil após a ampliação dos lados em função da medida x?

Trocando Ideias

A área do retângulo é dada pela multiplicação da medida dos seus lados.



$f(x) = (5+x) . (4+x)$

$f(x) = 5 (4+x) + x(4+x)$

$f(x) = 20+5x + 4x + x^2$

$f(x) = 20 + 9 x + x^2$

ou

$\mathbf{f(x) = x^2 + 9 x + 20}$ - é a lei da função que expressa a área do canil após a ampliação em função da medida x. Chamamos essa função de função quadrática ou função polinomial do 2º grau.

Se o dono do canil resolver aumentar o lado em 1 m na largura e 1 m no comprimento, podemos calcular a área do canil usando a função $\mathbf{f(x) = x^2 + 9 x + 20}$ fazendo f(1).

$$\mathbf{f(1) = 1^2 + 9.1 + 20 = 1+9+20 = 30}$$

Portanto, para x = 1, a área do canil após a ampliação é 30 m².

Se considerarmos x = 2, estamos considerando que a medida dos lados seja aumentada de 2 m (na largura e no comprimento).

$$\mathbf{f(2) = 2^2+9.2 + 20 = 4+18+20 = 42}$$

Portanto, para x = 2, a área do canil após a ampliação é de 42 m².

Definição de Função Quadrática

Uma função f: R → R chama-se **quadrática** quando existem números reais **a, b, c**, com a ≠ 0, tal que $\mathbf{f(x) = a\, x^2+bx+c}$ para todo x ∈ R.

f: R → R
$\mathbf{x \to a\, x^2+bx+c}$

- **a** é o coeficiente real de x^2, com a ≠ 0.
- **b** é o coeficiente real de x.
- **c** é um coeficiente real, também chamado de **termo independente.**

Vamos identificar a função quadrática com o trinômio do 2º grau a ela associado e escrevemos como $\mathbf{f(x) = a\,x^2 + b\,x + c}$.

Exemplo 1

$\mathbf{f(x) = -3x^2 + 5x - 1}$
a = - 3, b = 5, c = -1

$\mathbf{f(x) = 2x^2 - x}$
a = 2, b = -1, c = 0

$\mathbf{f(x) = x^2 + 6}$
a = 1, b = 0, c = 6

$\mathbf{f(x) = 20x^2}$
a = 20, b = 0, c = 0

$\mathbf{f(x) = 2 - 3x - x^2}$
a = - 1, b = - 3, c = 2

Observe que não são funções quadráticas:

$f(x) = 2x$
$f(x) = 3x$
$f(x) = x^3 - 2\,x^2 + 1$

Reflita

Por que as três funções acima não são funções quadráticas?

As funções quadráticas em que b = 0 e c = 0, por exemplo: $\mathbf{f(x) = 20x^2}$ ou nas com b = 0, por exemplo: $\mathbf{f(x) = x^2 + 6}$ ou ainda, naquelas que c = 0: $\mathbf{f(x) = 2\,x^2 - x}$, são chamadas **incompletas**. Já as funções quadráticas em que $b \neq 0$ e $c \neq 0$ são chamadas **completas.**

Exemplo 2: Quais das seguintes funções são funções quadráticas?

a) $\mathbf{f(x) = 3\,x^2}$

b) $f(x) = 2\,x - 1$

c) $\mathbf{f(x) = x - x^2}$

d) $f(x) = x^3 - x^2$

e) $\mathbf{f(x) = \frac{x^2}{2}}$

f) $\mathbf{f(x) = x^2}$

Exemplo 3: Calcule o valor de $h(x) = 4x^2 - 6x + 3$ para:

A) x = -2

$h(-2) = 4 \cdot (-2)^2 - 6 \cdot (-2) + 3$

$h(-2) = 4 \cdot 4 + 12 + 3$

$h(-2) = 16 + 12 + 3$

$\mathbf{h(-2) = 31}$

B) x = 3

$h(3) = 4 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 3$

$h(3) = 4 \cdot 9 - 18 + 3$

$h(3) = 36 - 18 + 3$

$\mathbf{h(x) = 21}$

Exemplo 4: as funções abaixo são equivalentes à função $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$. Determine, em cada uma delas, os coeficientes a, b e c.

A) $f(x) = 2(x^2 - 3)$ $\longrightarrow$

$f(x) = 2x^2 - 6$

$a = 2, b = 0, c = -6$

Propriedade distributiva:

$2(x^2 - 3) = 2 \cdot x^2 + 2(-3) = 2x^2 - 6$

B) $f(x) = 2(x - 3)^2$ $\longrightarrow$ $(x - 3)^2 = (x)^2 - 2 \cdot (x) \cdot (3) + (3)^2 = x^2 - 6x + 9$

$f(x) = 2(x^2 - 6x + 9)$ $\longrightarrow$ $2(x^2 - 6x + 9) = 2.x^2 + 2.(-6x) + 2.9 = 2x^2 - 12x + 18$

$f(x) = 2x^2 - 12x + 18$

$a = 2, b = -12, c = 18$

C) $f(x) = (x + 2) \cdot (x - 3)$

$f(x) = x(x - 3) + 2(x - 3)$ $\longrightarrow$ $x(x - 3) + 2(x - 3) = x \cdot x + x \cdot (-3) + 2 \cdot x + 2 \cdot (-3) = x^2 - 3x + 2x - 6 = x^2 - x - 6$

$f(x) = x^2 - 3x + 2x - 6$

$f(x) = x^2 - x - 6$

$a = 1, b = -1, c = -6$

Exemplo 5:

Dada a função quadrática $f: R \to R$ definida por $\mathbf{f(x) = x^2 - 6x + 8}$, determine:

A) Os coeficientes a, b e c.

$a = 1, b = -6, c = 8$

B) f(1), f(0), f(-2)

$f(1) = 1^2 - 6 \cdot 1 + 8 = 1 - 6 + 8 = 3$

$f(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 8 = 0 - 0 + 8 = 8$

$f(-2) = (-2)^2 - 6 \cdot (-2) + 8 = 4 + 12 + 8 = 24$

C) se existe x Є R tal que **f(x) = 3.** Se existir, calcule x.

f(x) = 3

$x^2 - 6x + 8 = 3$
$x^2 - 6x + 8 - 3 = 0$
$x^2 - 6\,x + 5 = 0$

Importante: Para resolver essa equação, será preciso rever o conteúdo de "Equação do 2º grau".

Veja:

- ✓ http://www.brasilescola.com/matematica/equacao-2-grau.htm
- ✓ http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm22/frame7.htm
- ✓ http://jmpmat5.blogspot.com.br/

Então, vamos lá!

$x^2 - 6x + 5 = 0$
a= 1, b= - 6, c= 5

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Primeiro começamos com o cálculo do valor de $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4.a.c}$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, 5$
$\Delta = 36 - 20$
$\Delta = 16$

Calculamos o valor de $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{16}}{2.1}$$

$$x = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} x' = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5 \\ x'' = \frac{6-4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

$s = \{5, 1\}$

D) se existe x ∈ R para que se tenha **f(x)= - 3**. Se existir, calcule x.

f(x) = - 3

$x^2 - 6x + 8 = -3$

$x^2 - 6x + 8 + 3 = 0$

$x^2 - 6x + 11 = 0$

a= 1, b= -6, c= 11

Primeiro começamos com o cálculo do valor de **$\Delta = b^2 - 4.a.c$**

$\Delta = (-6)^2 - 4 . 1 . 11$

$\Delta = 36 - 44$

$\Delta = -8$

Não existe x ∈ R tal que f(x)= -3.

Importante: Neste caso, não existe solução, pois não existe no conjunto dos números reais a raiz quadrada de **-8.**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{-8}}{2.1}$$

E) se existe x ∈ R para que se tenha f(x) = 0. Se existir, calcule x.

f(x) = 0

$x^2 - 6x + 8 = 0$

a= 1, b= - 6, c= 8

Primeiro começamos com o cálculo do valor de **$\Delta = b^2 - 4.a.c$**

$\Delta = (-6)^2 - 4 . 1 . 8$

$\Delta = 36 - 32$

$\Delta = 4$

Calculamos o valor de $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2.1}$$

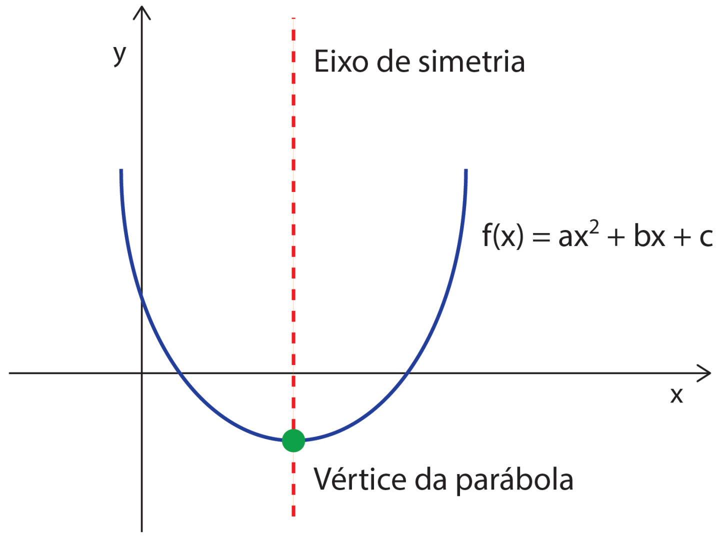
$$x = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} x' = \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ x'' = \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$S = \{4, 2\}$

Gráfico da Função Quadrática

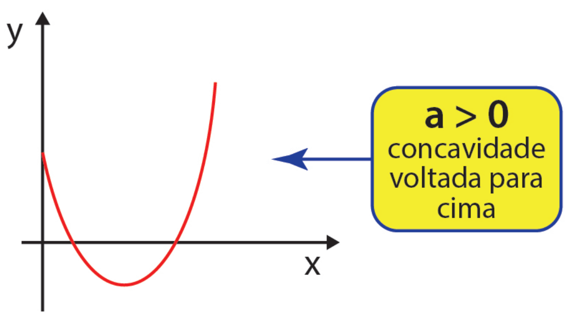
O gráfico de uma função do 2º grau ou quadrática é uma curva aberta chamada parábola.

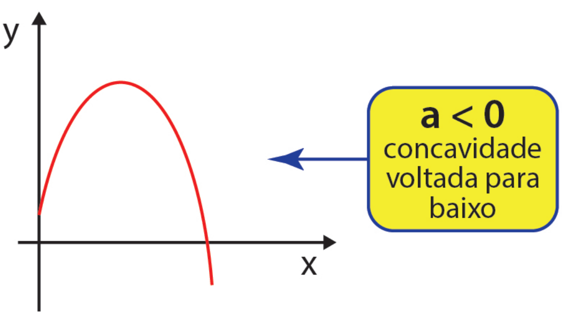
A parábola possui um eixo de simetria que passa pelo seu vértice, que é o ponto em que o eixo de simetria e a parábola se cruzam.



A parábola pode ter concavidade voltada **para cima ou para baixo,** de acordo com o coeficiente a.

- Se o coeficiente a é positivo, ou seja, $a > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima.
- Se o coeficiente a é negativo, ou seja, $a < 0$, a concavidade da parábola é voltada para baixo.



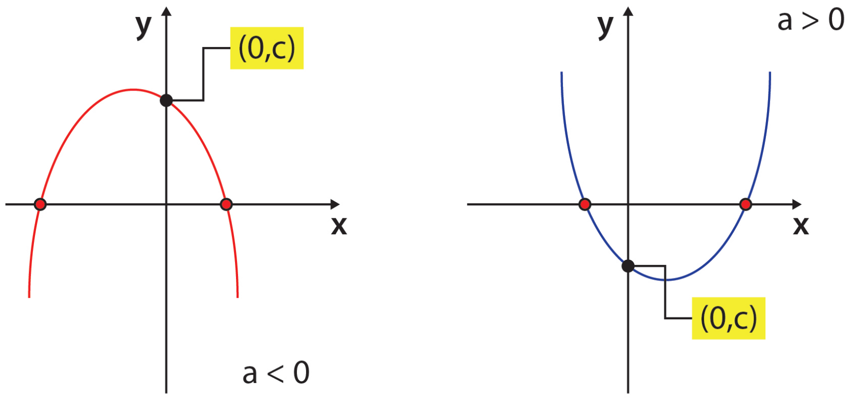


A ponte Juscelino Kubitscheck, inaugurada em dezembro de 2002, em Brasília (DF), apresenta três arcos que cruzam diagonalmente a ponte, cujas formas lembram três parábolas.

O gráfico de uma função quadrática intercepta o eixo y (eixo vertical) em um único ponto. Esse ponto de intersecção do gráfico com o eixo vertical tem abscissa x = 0. Quando substituímos esse valor na função $f(x) = ax^2 + bx + c$, obtemos:

$f(0) = a.0^2 + b.0 + c = 0 + 0 + c = c \Rightarrow y = c$

Assim, o ponto de intersecção da parábola com o eixo vertical 0y é único, e suas coordenadas são (0, c).

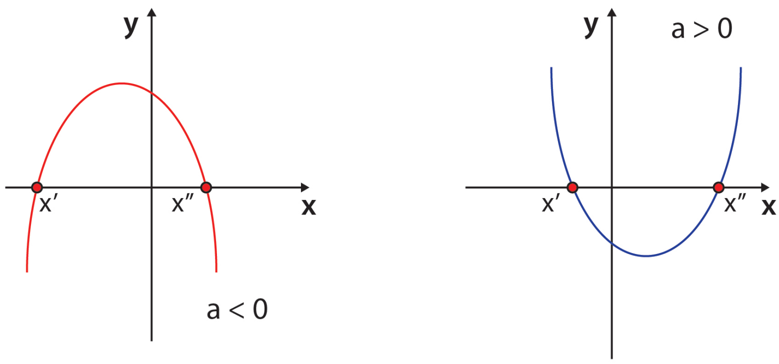


O gráfico de uma função quadrática também intercepta o eixo x (eixo horizontal), chamado de raízes da função.

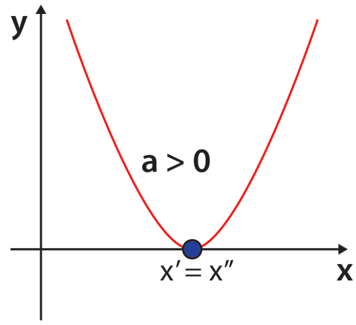
Nesses pontos, o valor da função é igual a zero. Assim, basta fazer f(x) = 0, e a função quadrática transforma-se em uma equação do 2º grau:

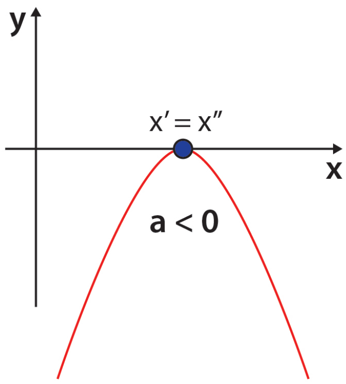
$$ax^2 + bx + c = 0 \,|\, x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}, \text{ com } \Delta = b^2 - 4.a.c$$

- Se $\Delta > 0$, a equação terá duas raízes reais e distintas, x' e x'', o que significa que a parábola terá dois pontos de intersecção distintos com o eixo x: (x', 0) e (x'', 0).

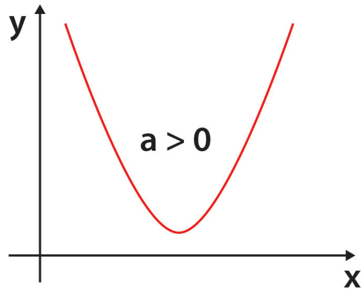


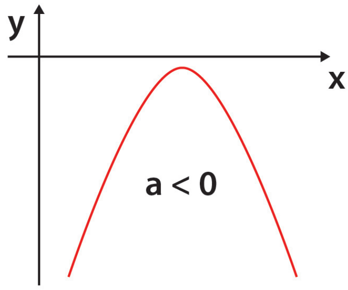
- Se $\Delta = 0$, a equação terá duas raízes reais e iguais: x' = x'', o que significa que a parábola interceptará o eixo horizontal no ponto (x', 0) = (x'', 0).





- Se $\Delta < 0$, a equação não terá raízes reais, e a parábola não cortará o eixo horizontal.





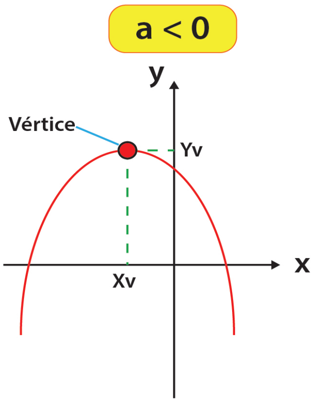
Outro ponto que ajuda na construção do gráfico é a determinação do vértice da parábola.

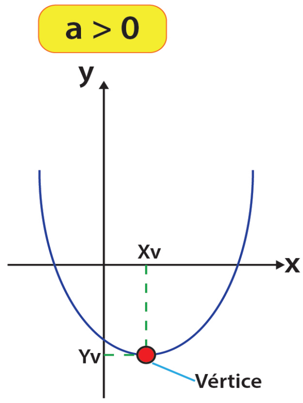
Uma das maneiras de determinar o vértice é lembrar que a parábola é simétrica em relação a um eixo vertical (eixo de simetria) que passa pelo **vértice da parábola.**

Para determinarmos as coordenadas do vértice do gráfico de **f(x) = ax² + bx + c,** usamos a seguinte fórmula:

$$V(x_v, y_v)$$

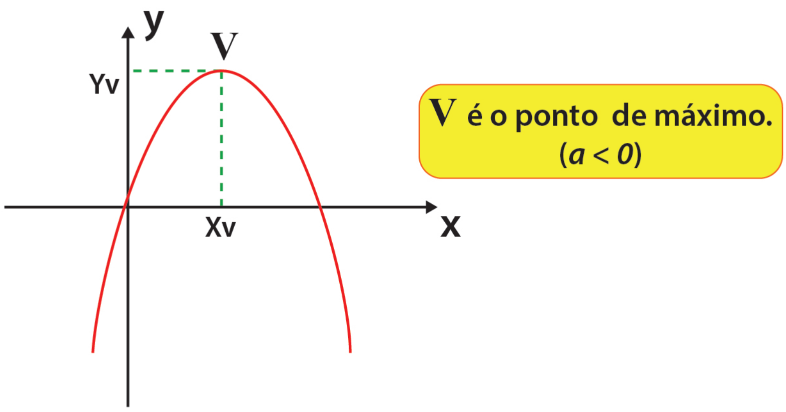
$$X_v = -\frac{b}{2.a} \quad e \quad Y_v = -\frac{\Delta}{4.a}$$



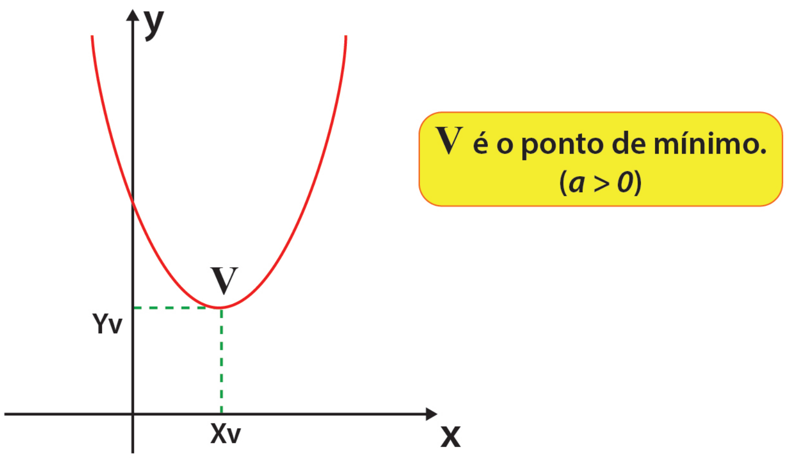


Por fim, vamos determinar o **ponto de máximo** e o **ponto de mínimo** de uma função quadrática.

O vértice $V(x_v, y_v)$ de uma parábola correspondente ao **ponto de máximo** da função quadrática quando sua concavidade é voltada para baixo, ou seja, quando o coeficiente a é menor que zero. Dizemos, ainda, que y_v é o **valor máximo** dessa função.



Quando a concavidade da parábola é voltada para cima, ou seja, quando o coeficiente a é maior que zero, o vértice corresponde ao **ponto de mínimo**, e y_v, ao valor mínimo da função.



Parece difícil? Vamos aos exemplos a seguir.

Exemplo 1) Construir o gráfico da função $\mathbf{f(x) = 2x^2 - 4x + 3}$.

1º passo: Concavidade

$a = 2 > 0 \Longrightarrow a > 0 \Longrightarrow$ concavidade voltada para cima

2º passo: Intersecção com o eixo y

$c = 3 \Longrightarrow$ Ponto de intersecção com o eixo y (0,3).

3º passo: Intersecção com o eixo x (zeros da função)

Fazer $f(x) = 0 \Longrightarrow 2x^2 - 4x + 3 = 0$

a = 2, b = -4, c = 3
$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$
$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3$
$\Delta = 16 - 24$
$\Delta = -8$
$\Delta < 0$

Portanto, a parábola não intercepta o eixo x.

4º passo: Vértice da parábola

$$V(x_v,\ y_v)$$

$$x_v = -\frac{b}{2.a}$$

$$x_v = -\frac{(-4)}{2.2} = \frac{4}{4} = 1$$

e

$$y_v = -\frac{\Delta}{4.a}$$

$$y_v = -\frac{8}{4.2} = \frac{8}{8} = 1$$

$$V(1,1)$$

5º passo: Construir uma tabela e localizar esses pontos no eixo das coordenadas e traçar a parábola.

x	y
-1	
0	3
1	1
2	
3	

Primeiro coloque os valores do vértice no centro da tabela

Agora coloque, na tabela, o ponto em que a parábola intercepta o eixo *y*.

$f(x) = 2x^2 - 4x + 3$

$f(-1) = 2.(-1)^2 - 4.(-1) + 3 = 2 \cdot 1 + 4 + 3 = 2 + 4 + 3 = 9$

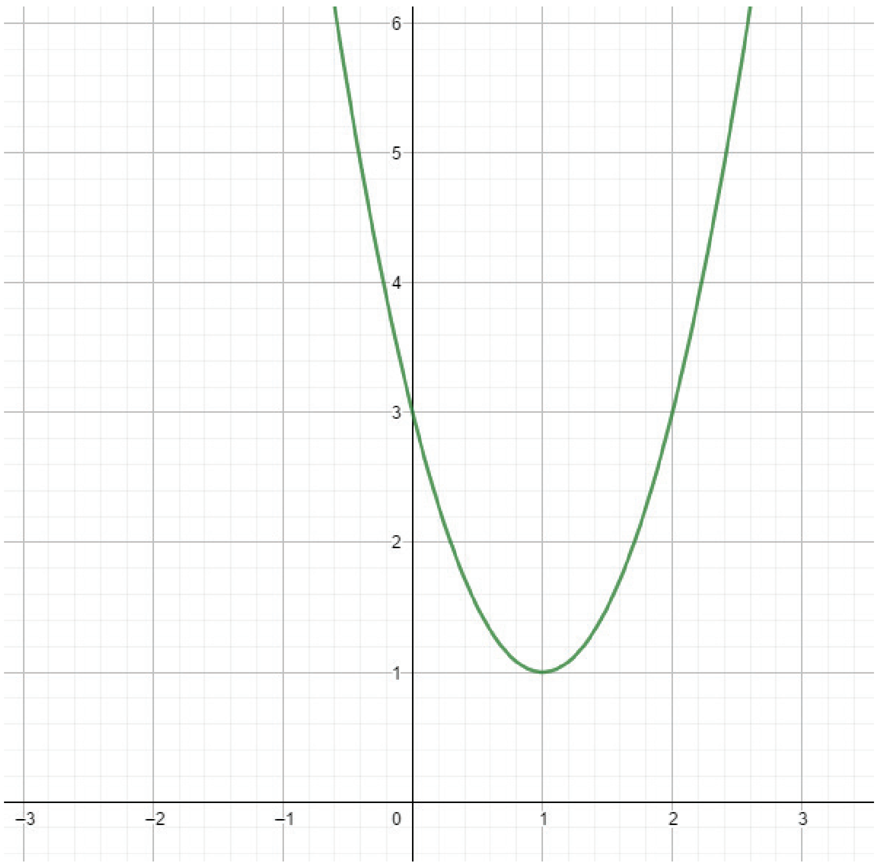
$f(2) = 2.\ 2^2 - 4.\ 2 + 3 = 2 \cdot 4 - 8 + 3 = 8 - 8 + 3 = 3$

$f(3) = 2.\ 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 2 \cdot 9 - 12 + 3 = 18 - 12 + 3 = 9$

x	y
-1	9
0	3
1	1
2	3
3	9

Perceba que os valores de y na tabela são simétricos em relação ao vértice.

Agora, basta localizar esses ponto no eixo cartesiano e traçar a parábola.



Exemplo 2) Construir o gráfico da função $\mathbf{f(x) = x^2 - 2x + 1}$.

1º passo: Concavidade

$a = 1 > 0 \Longrightarrow a > 0$, concavidade voltada para cima

2º passo: Intersecção com o eixo y

$c = 1 \Longrightarrow$ Ponto de intersecção com o eixo y (0,1).

3º passo: Intersecção com o eixo x (zeros da função)

Fazer $\mathbf{f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0}$

a= 1, b= -2, c= 1
$\Delta = b^2 - 4 . a . c$
$\Delta = (-2)^2 - 4 . 1 . 1$
$\Delta = 4 - 4$
$\Delta = 0$

Portanto, a parábola intercepta o eixo x em um ponto.

$$\mathbf{x} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

$$\mathbf{x} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{0}}{2.1}$$

$$\mathbf{x} = \frac{-(-2)}{2.1}$$

$$\mathbf{x} = \frac{2}{2} = 1$$

$\mathbf{x} = 1$ (ponto em que a parábola intercepta o eixo x, (0,1))

4º passo: Vértice da parábola

$$\mathbf{V}\ (\mathbf{x_v},\ \mathbf{y_v})$$

$$\mathbf{x_v} = -\frac{b}{2.a}$$

$$\mathbf{x_v} = -\frac{(-2)}{2.1} = \frac{2}{2} = 1$$

e

$$\mathbf{y_v} = -\frac{\Delta}{4.a}$$

$$\mathbf{y_v} = -\frac{0}{4.1} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\mathbf{V}\ (1{,}0)$$

5º passo: Construir uma tabela e localizar esses pontos no eixo das coordenadas e traçar a parábola.

Agora que você já entendeu a construção da tabela, vamos simplificar.

Colocar os valores do vértice no centro da tabela e distribuir os outros (intersecção com os eixos) em intervalos iguais.

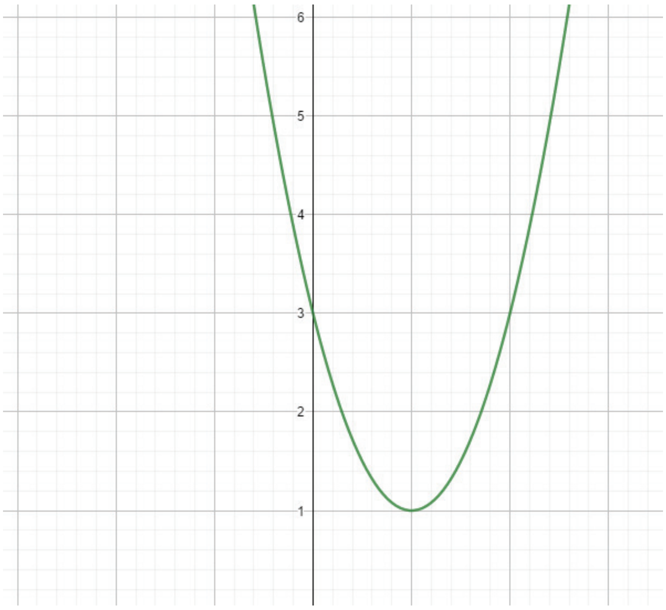
x	y
-1	4
0	1
1	0
2	1
3	4

$\mathbf{f(x) = x^2 - 2x + 1}$

$f(-1) = (-1)^2 - 2 \,.\, (-1) + 1 = 1 + 2 + 1 = 4$

$f(2) = (2)^2 - 2 \,.\, (2) + 1 = 4 - 4 + 1 = 1$

$f(3) = (3)^2 - 2 \,.\, (3) + 1 = 9 - 6 + 1 = 4$



Exemplo 3) Construir o gráfico da função $\mathbf{f(x) = -x^2 + 2x + 3}$

1º passo: Concavidade

$a = -1 < 0 \Longrightarrow a < 0$, concavidade voltada para baixo

2º passo: Intersecção com o eixo y

$c = 3 \Longrightarrow$ Ponto de intersecção com o eixo y (0,3).

3º passo: Intersecção com o eixo x (zeros da função)

Fazer $\mathbf{f(x) = 0 \Longrightarrow -x^2 + 2x + 3}$

$a = -1$, $b = 2$, $c = 3$

$\Delta = b^2 - 4 \,.\, a \,.\, c$

$\Delta = (2)^2 - 4 \,.\, (-1) \,.\, 3$

$\Delta = 4 + 12$

$\Delta = 16$

Portanto, a parábola intercepta o eixo x em um dos pontos distintos.

$$\mathbf{x} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

$$\mathbf{x} = \frac{-(2) \pm \sqrt{16}}{2.(-1)}$$

$$\mathbf{x} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{-2} = \frac{-2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} x' = \frac{-2+4}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \\ x' = \frac{-2-4}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3 \end{cases}$$

Os pontos que interceptam o eixo x são: (-1,0) e (3,0)

4º passo: Vértice da parábola

$$V\ (x_v,\ y_v)$$

$$x_v = -\frac{b}{2.a}$$

$$x_v = -\frac{2}{2.(-1)} = \frac{2}{2} = 1$$

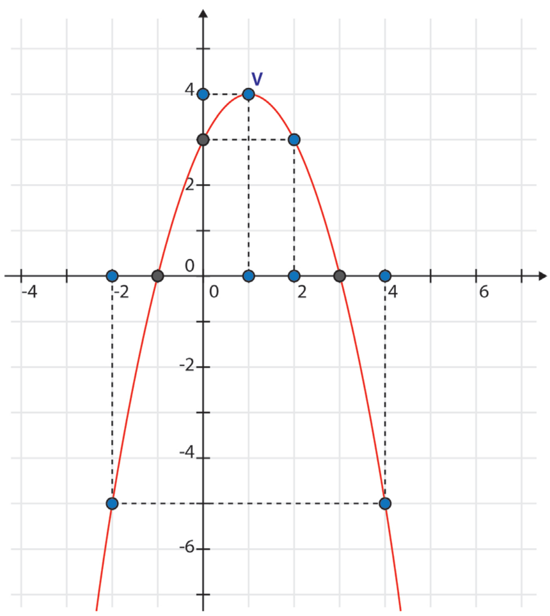
e

$$y_v = -\frac{\Delta}{4.a}$$

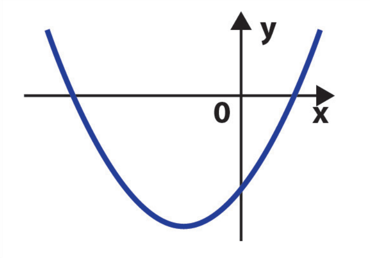
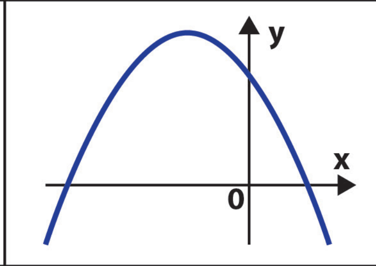
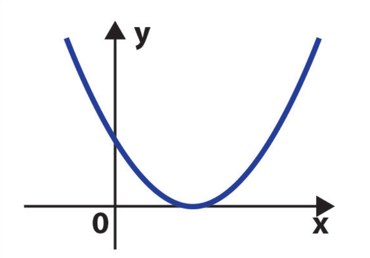
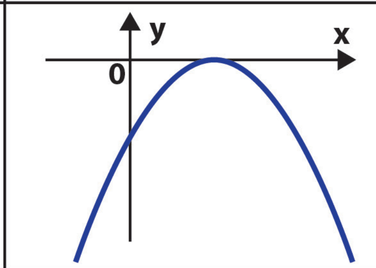
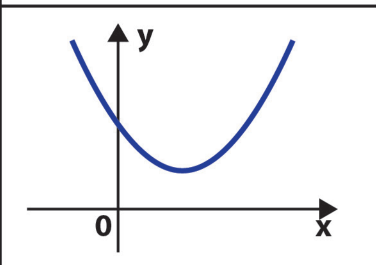
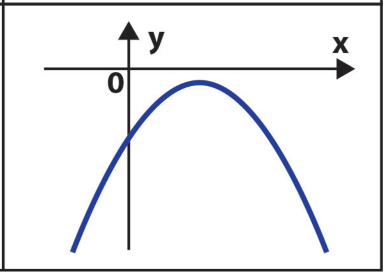
$$y_v = -\frac{16}{4.(-1)} = \frac{16}{4} = 4$$

$$V = (1,4)$$

5º passo: Localizar esses pontos no eixo das coordenadas e traçar a parábola.



Em Síntese:

delta Δ	a parábola no plano cartesiano	$a > 0$ concavidade para cima	$a < 0$ concavidade para baixo
$\Delta > 0$	corta o eixo horizontal em dois pontos		
$\Delta = 0$	toca em um ponto o eixo horizontal		
$\Delta < 0$	não corta o eixo horizontal		

Estudo do sinal da função quadrática

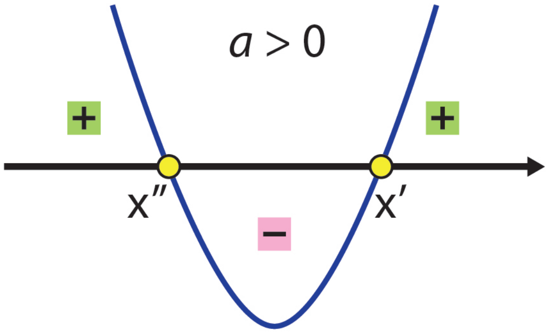
Estudar o sinal de uma função quadrática $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0}$ significa determinar os valores reais de x para os quais:

- $f(x)$ se anula $\Longrightarrow f(x) = 0$
- $f(x)$ é positiva $\Longrightarrow f(x) > 0$
- $f(x)$ é negativa $\Longrightarrow f(x) < 0$

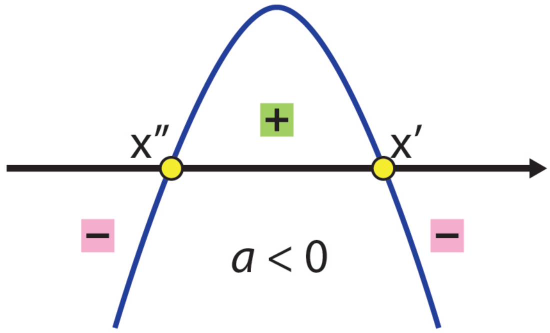
Vamos dividir este nosso estudo em três casos:

1º caso: $\Delta > 0$

Neste caso, a função admite dois zeros reais e diferentes, x' e x'', ou seja, a parábola que representa a função intersecta o eixo x em dois pontos.



$f(x) = 0$ para $x = x''$ ou $x = x'$
$f(x) > 0$ para $x < x''$ ou $x > x'$
$f(x) < 0$ para $x'' < x < x'$



$f(x) = 0$ para $x = x''$ ou $x = x'$
$f(x) > 0$ para $x'' < x < x'$
$f(x) < 0$ para $x < x''$ ou $x > x'$

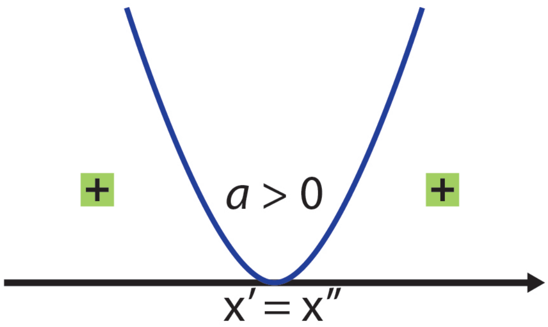
Em Síntese

Quando **Δ > 0, f(x)** tem o sinal oposto ao de a, quando x está entre as raízes da equação, e tem o sinal de a, quando x está fora do intervalo das raízes.

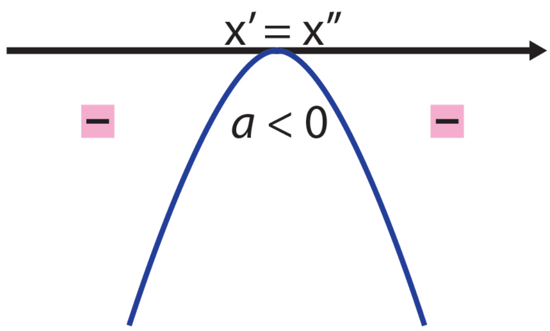
2º caso: Δ = 0

Neste caso, a função admite um zero real duplo $x' = x''$, ou seja, a parábola que representa a função tangencia o eixo x.

Veja:



$f(x) = 0$ para $x = x' = x''$
$f(x) > 0$ para $x \neq x'$



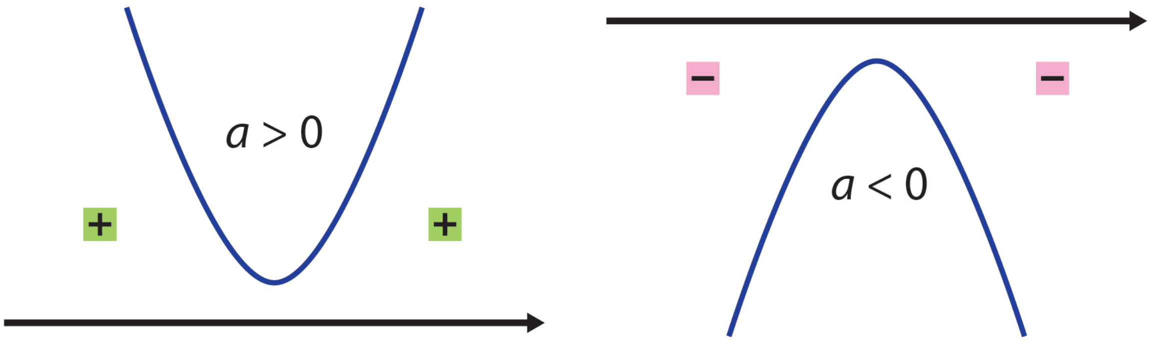
$f(x) = 0$ para $x = x' = x''$
$f(x) < 0$ para $x \neq x'$

Em Síntese

Quando **Δ = 0, f(x)** tem o sinal de a para x diferente da raiz dupla da equação.

3º caso: Δ < 0

Neste caso, a função não admite zeros reais, ou seja, a parábola que representa a função não intersecta o eixo x.



Em Síntese

Quando **Δ < 0, f(x)** tem o sinal de a para qualquer valor real de x.

Vamos aos exemplos.

Exemplo 1)

Estude o sinal da seguinte função quadrática.

A) y = x² – 3x + 2

Resolução:

- **a= 1, a > 0** (concavidade voltada para cima)
- Cálculo de **Δ = b² - 4 . a . c**

Δ = (-3)² - 4 . 1 . 2 = 9 - 8 = 1 (Δ >0, admite duas raízes reais e distintas)

- Cálculo das raízes: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2.1} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} x' = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x'' = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

$$x' = 2 \; e \; x'' = 1$$

Então,

» f(x) = 0 para x= 1 ou x= 2;

» f(x) > 0 para x < 1 ou x > 2

» f(x) < 0 para 1 < x < 2

B) y = –x² + 7x – 12 Resolução:

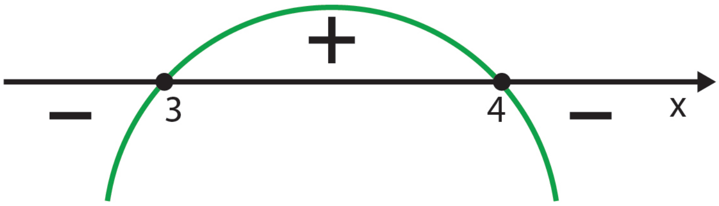
- **a= -1, a < 0** (concavidade voltada para baixo)
- Cálculo de **Δ = b² - 4 . a . c**

Δ = (7)² - 4 . (-1) .(-12) = 49 - 48 = 1 (Δ > 0, admite duas raízes reais e distintas)

-

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{2.(-1)} = \frac{-7 \pm 1}{-2} = \begin{cases} x' = \dfrac{-7+1}{-2} = \dfrac{-6}{-2} = 3 \\ x'' = \dfrac{-7-1}{-2} = \dfrac{-8}{-2} = 4 \end{cases}$$

x' = 3 e x'' = 4



Então,

» f(x) = 0 para x = 3 ou x = 4;

» f(x) > 0 para 3 < x < 4

» f(x) < 0 para x < 3 ou x > 4

C) y = x² - 6 x + 9

Resolução:

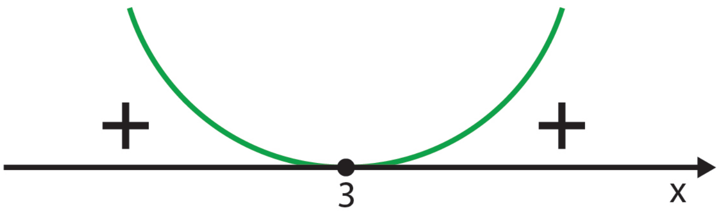
- **a= 1, a > 0** (concavidade voltada para cima)
- Cálculo de **Δ = b² - 4 . a . c**

Δ = (-6)² - 4 . 1 . 9 = 36 - 36 = 0 (Δ = 0, admite duas raízes reais e iguais)

- Cálculo das raízes: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$

$$x = \frac{-(-6)\ \pm\sqrt{0}}{2.1} = \frac{6}{2} = 3$$

x' = 3 e x'' = 3



Então,

» f(x) = 0 para x = 3

» f(x) > 0 para qualquer x ≠ 3

D) f(x) = - 4x² + 4 x - 1

Resolução:

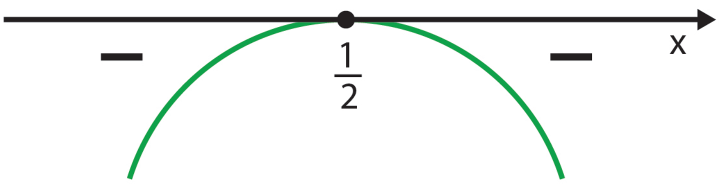
- **a= - 4, a < 0** (concavidade voltada para baixo)
- Cálculo de **Δ = b² - 4 . a . c**

Δ = (4)² - 4 . (-4) . (-1) = 16 - 16 = 0 (Δ = 0, admite duas raízes reais e iguais)

- Cálculo das raízes: $x = \frac{-b \pm\sqrt{\Delta}}{2.a}$

$$x = \frac{-4\ \pm\sqrt{0}}{2.(-4)} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$$

x' = x'' = $\frac{1}{2}$



Então,

» f(x) = 0 para x = 1/2

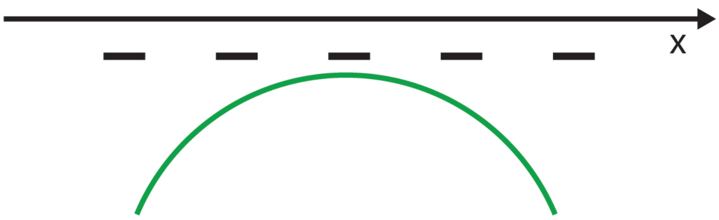
» f(x) < 0 para qualquer x ≠ 1/2

E) $f(x) = -2x^2 + 3x - 4$

Resolução:

- **$a = -2$, $a < 0$** (concavidade voltada para baixo)
- **Cálculo de $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$**

$\Delta = (3)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-4) = 9 - 32 = -23$ ($\Delta < 0$, a função não tem raízes reais)



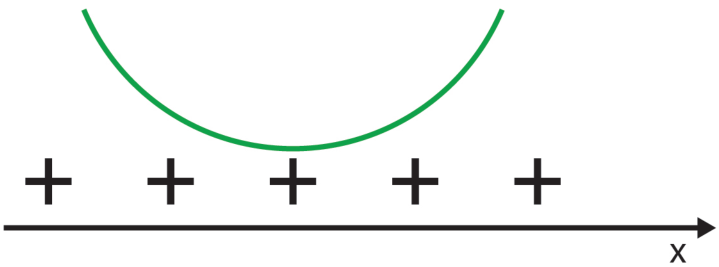
Então, **$f(x) < 0$** para todo x real, ou seja, f(x) é sempre negativa.

F) $f(x) = x^2 + 4$

Resolução:

- **$a = 1$, $a > 0$** (concavidade voltada para cima)
- Cálculo de **$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$**

$\Delta = (0)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0 - 16 = -16$ ($\Delta < 0$, a função não tem raízes reais)



Então, **$f(x) > 0$** para todo x real, ou seja, f(x) é sempre positiva.

Inequações do 2º grau

Denomina-se inequação do 2º grau toda desigualdade que pode ser reduzida a uma das seguintes formas:

- $ax^2 + bx + c > 0$
- $ax^2 + bx + c < 0$
- $ax^2 + bx + c \geq 0$
- $ax^2 + bx + c \leq 0$

Veja alguns exemplos:

a. $x^2 - 6x + 4 > 0$

b. $3x^2 \geq 0$

c. $x^2 - 1 < x + 3$

d. $(x - 3)(x + 2) \leq 0$

Exemplo:

Resolver as inequações:

A) $2x^2 + 4x - 6 \leq 0$

Iniciamos com o estudo do sinal dessa função.

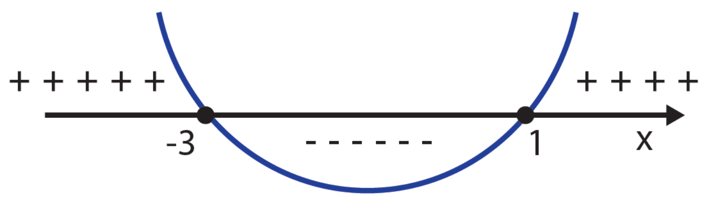
Resolução:

- **a= 2, a > 0** (concavidade voltada para cima)
- Cálculo de $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c}$

  $\boldsymbol{\Delta = (4)^2 - 4 \cdot (2) \cdot (-6) = 16 + 48 = 64}$ ($\Delta > 0$, admite duas raízes reais e distintas)
- Cálculo das raízes: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2.2} = \frac{-4 \pm 8}{4} = \begin{cases} x' = \dfrac{-4+8}{4} = \dfrac{4}{4} = 1 \\ \\ x'' = \dfrac{-4-8}{4} = \dfrac{-12}{2} = -3 \end{cases}$$

$$x' = 1 \; e \; x'' = -3$$



De acordo com a inequação dada, devemos determinar os valores de x para os quais $f(x) \leq 0$.

Portanto, $\boldsymbol{S = \{x \in R \,/\, -3 \leq x \leq 1\}}$

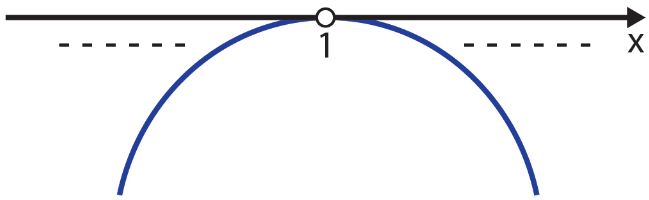
B) $-3x^2 + 6x - 3 > 0$

Resolução:

- **a= -3, a < 0** (concavidade voltada para baixo)
- Cálculo de **Δ = b² - 4 . a . c**
  Δ = (6)² - 4 . (-3) .(-3) = 36 - 36 = 0 ($\Delta = 0$, admite duas raízes reais e iguais)
- Cálculo das raízes: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2.(-3)} = \frac{-6}{-6} = 1$$

$$x' = x'' = 1$$



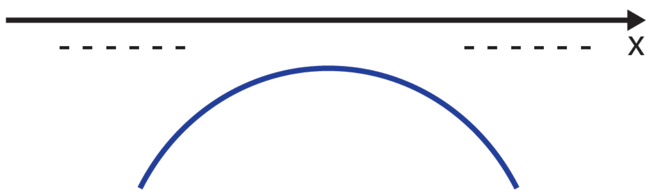
De acordo com a inequação dada, devemos determinar os valores de x para os quais f(x) > 0. Observando o esquema, podemos verificar que não existe nenhum valor de x que torne f(x) > 0.

Portanto, **S = { } ou S = Ø**

C) - x² - 4x - 5 < 0

Resolução:

- **a= -1, a < 0** (concavidade voltada para baixo)
- Cálculo de **Δ = b² - 4 . a . c**
  Δ = (-4)² - 4 . (-1) .(-5) = 16 - 20 = - 4 ($\Delta < 0$, a função não admite raízes reais)



De acordo com a inequação dada, devemos determinar os valores de x para todos f(x) < 0. Portanto S = $\mathbb{R}$.

Inequações simultâneas

Resolver uma inequação simultânea é o mesmo que resolver um sistema de inequações.

Exemplo1) Resolva $\mathbf{-2 \leq x^2 - 3 \leq 6}$

Resolução:

$$-2 \leq x^2 - 3 \leq 6$$

$$\begin{cases} -2 \leq x^2 - 3 \text{ (I)} \\ x^2 - 3 \leq 6 \text{ (II)} \end{cases}$$

I) $\mathbf{-2 \leq x^2 - 3 \Rightarrow x^2 - 3 \geq -2 \Rightarrow x^2 - 3 + 2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 1 \geq 0}$

É possível resolver essa inequação do 2º grau incompleta $(\mathbf{x^2 - 1 = 0})$ usando a fórmula de Báskara. Optamos, neste caso, isolar o termo independente.

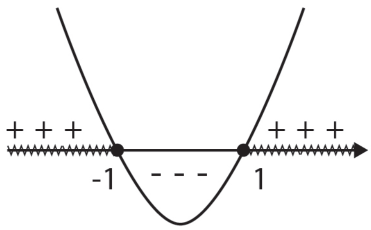
$\mathbf{x^2 - 1 \geq 0}$ (a > 0: concavidade voltada para cima)

$x^2 \geq 1$

$x \geq \pm\sqrt{1}$

$\mathbf{x \geq -1 \text{ e } x \geq 1}$

I $x^2 - 1 \geq 0$



II) $\mathbf{x^2 - 3 \leq 6}$ (a > 0: concavidade voltada para cima)

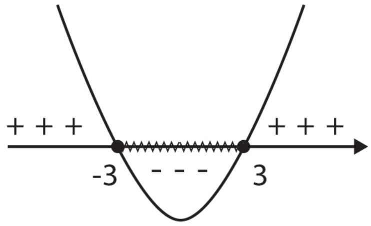
$x^2 \leq 6 + 3$

$x^2 \leq 9$

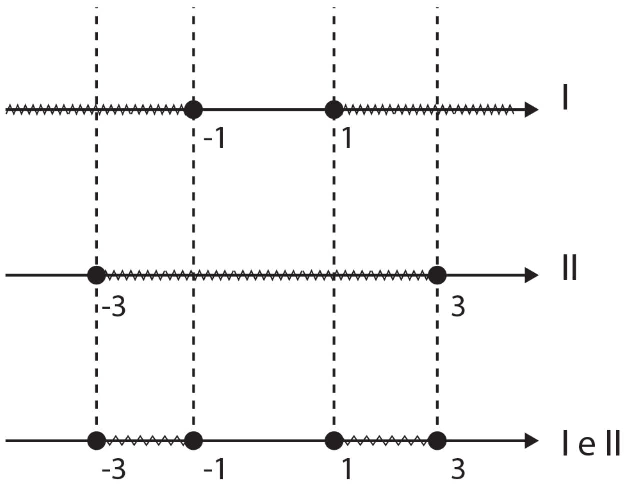
$x \leq \pm \sqrt{9}$

$\mathbf{x \leq -3 \text{ e } x \leq 3}$

II $x^2 - 9 \leq 0$



Como temos duas condições necessárias que devem ser satisfeitas simultaneamente, vamos determinar a intersecção de I e II no diagrama a seguir.



$$\mathbf{S = \{x \in R,\ \textit{tal que}\ -3 \leq x \leq -1\ \textit{e}\ 1 \leq x \leq 3\}}$$

Exemplo 2) Para que valores de x, as duas inequações $\mathbf{x^2 + x - 6 > 0}$ **e** $\mathbf{x^2 + 3x - 4 < 0}$ se verificam simultaneamente?

Resolução:

Chamamos de **(I)** $\mathbf{x^2 + x - 6 > 0}$ e de **(II)** $\mathbf{x^2 + 3x - 4 < 0}$ e resolvemos separadamente o cálculo de suas raízes (ou zeros da função).

(I) $\mathbf{x^2 + x - 6 > 0}$ ($a > 0$: concavidade voltada para cima)

$x^2 + x - 6 = 0$

$a = 1, b = 1, c = -6$

$\Delta = b^2 - 4 . a . c$

$\Delta = 1^2 - 4 . 1 . (-6)$

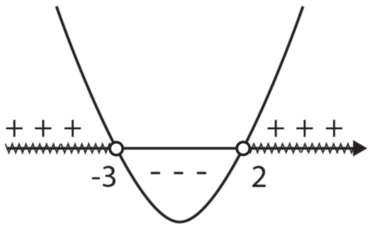
$\Delta = 1 + 24$

$\mathbf{\Delta = 25}$ ($\Delta > 0$, admite duas raízes reais e distintas)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2.1} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x' = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x'' = \frac{-1-5}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

S(I) = {-3,2}



(II) $x^2 + 3x - 4 < 0$

$x^2 + 3x - 4 = 0$

a = 1, b = 3, c = -4

$\Delta = b^2 - 4 . a . c$

$\Delta = 3^2 - 4 . 1 . (-4)$

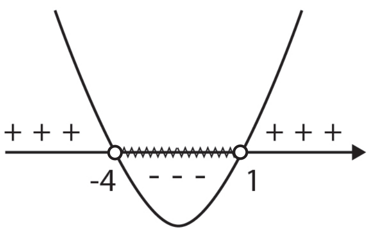
$\Delta = 9 + 16$

Δ = 25 ($\Delta > 0$, admite duas raízes reais e distintas)

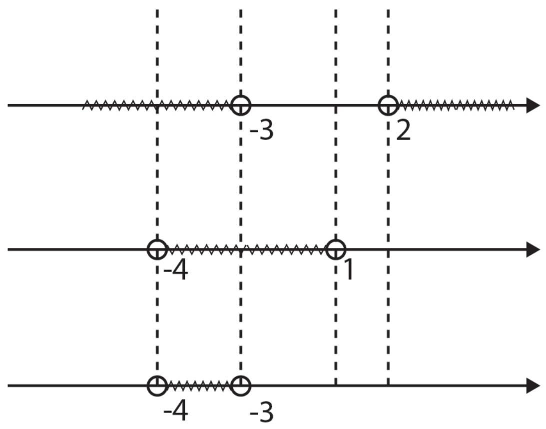
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2.1} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} x' = \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ x'' = \frac{-3-5}{2} = \frac{-8}{2} = -4 \end{cases}$$

S(II) = {-4,1}



Como temos duas condições necessárias que devem ser satisfeitas simultaneamente, vamos determinar a intersecção de I e II no diagrama a seguir.



$S = \{x \in R$ *tal que* $-4 < x < -3\}$

Exemplo 3:

Resolva: $\underbrace{5 \leq \overbrace{x^2 - 4}}\leq 3x$

(I) $5 \leq x^2 - 4$

(II) $x^2 - 4 \leq 3x$

Resolvemos separadamente o cálculo de suas raízes (ou zeros da função).

(I) $5 \leq x^2 - 4$

$x^2 - 4 \geq 5$

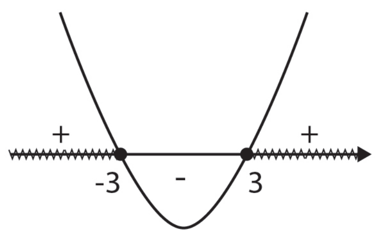
$x^2 \geq 5 + 4$

$x^2 \geq 9$ (a > 0: concavidade voltada para cima)

$x \geq \pm\sqrt{9}$

$x \geq \pm 3$

$S = \{-3,3\}$



(II) $x^2 - 4 \leq 3x$

$x^2 - 3x - 4 \leq 0$

$x^2 - 3x - 4 = 0$ (a > 0: concavidade voltada para cima)

a= 1, b= - 3, c= -4

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)$

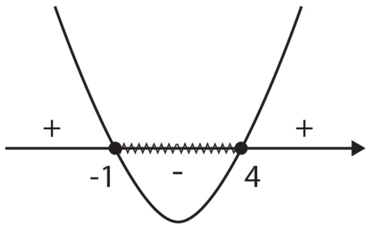
$\Delta = 9 + 16$

$\Delta = 25$ ($\Delta > 0$, admite duas raízes reais e distintas)

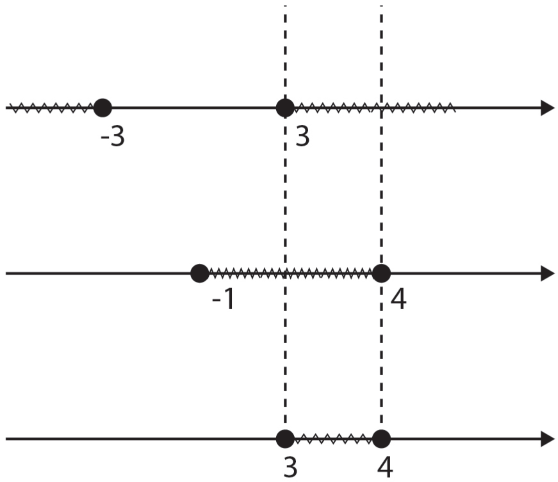
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2.1} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} x' = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ x'' = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

S (II) = {-1,4}



Como temos duas condições necessárias que devem ser satisfeitas simultaneamente, vamos determinar a intersecção de I e II no diagrama a seguir.



S = {x ∈ R *tal que* 3 ≤ x ≤ 4}

Inequação produto

Exemplo 1)

Resolva a inequação produto: $(2x + 4) \cdot (x^2 + 2x - 3) < 0$

Resolução:

Primeiro vamos nomear de f(x) e g(x) as desigualdades.

$$\underbrace{(2x + 4)}_{f(x)} \cdot \underbrace{(x^2 + 2x - 3)}_{g(x)} < 0$$

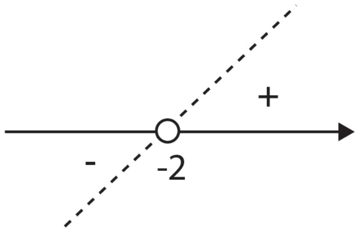
Resolvendo f(x):

$2x + 4 < 0$ (a > 0: reta é crescente)

$2x < -4$

$x < \frac{-4}{2}$

$x < -2$



Resolvendo g(x):

$x^2 + 2x - 3 < 0$

$x^2 + 2x - 3 = 0$ (a > 0: concavidade voltada para cima)

a= 1, b= 2, c= -3

$\Delta = b^2 - 4 . a . c$

$\Delta = 2^2 - 4 . 1 . (-3)$

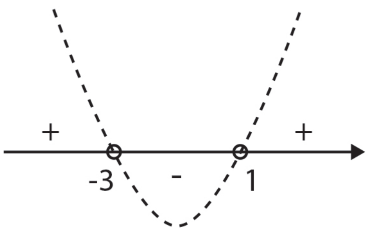
$\Delta = 4 + 12$

$\Delta = 16$ ($\Delta > 0$, admite duas raízes reais e distintas)

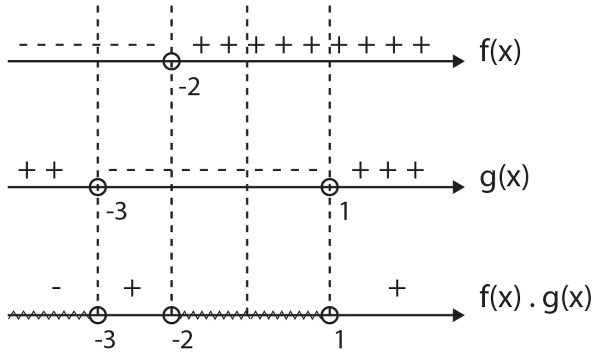
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2.1} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x' = \dfrac{-2+4}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ x'' = \dfrac{-2-4}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

S(II) = {-3,1}



Representando no quadro de sinais, temos:



S = {x ∈ R tal que x< -3 e -2 < x < 1}

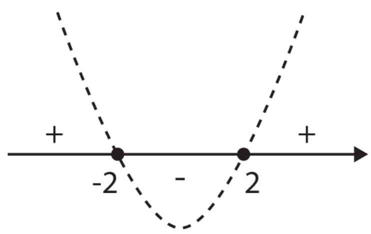
Exemplo 2)

Resolva: $(x^2 - 4) . (-x^2 + x - 6) \leq 0$

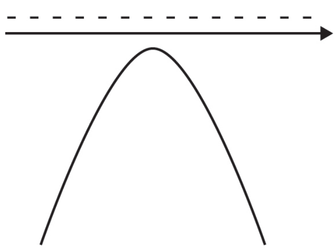
$\underbrace{(x^2 - 4)}_{f(x)} . \underbrace{(-x^2 + x - 6)}_{g(x)} \leq 0$

$f(x) = x^2 - 4 \leq 0$ (a > 0: concavidade voltada para cima)

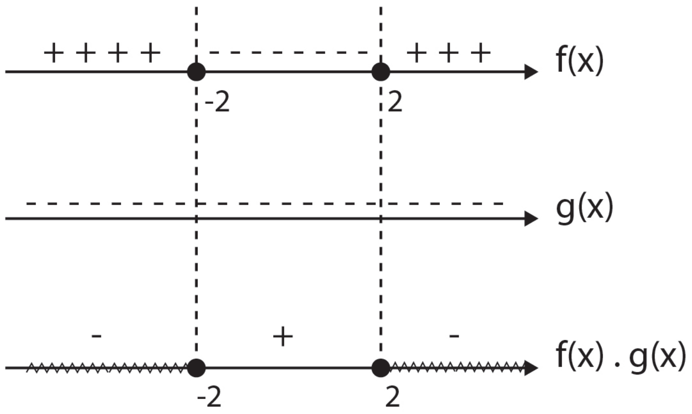
$x^2 - 4 = 0$
$x^2 = 4$
$x = \pm\sqrt{4}$
$x = \pm 2$
S = {-2,2}



$g(x) = -x^2 + x - 6 \leq 0$
$-x^2 + x - 6 = 0$ (a < 0: concavidade voltada para baixo)
$a = -1, b = 1, c = -6$
$\Delta = b^2 - 4 . a . c$
$\Delta = 1^2 - 4 . (-1) . (-6)$
$\Delta = 1 - 24$
$\Delta = -23$ ($\Delta < 0$, não admite raízes reais)



No quadro de sinais, temos:



S = {x ∈ R *tal que* x ≤ -2 *e* x ≥ 2}

Inequação Quociente

Exemplo 1)

Determine os valores reais de **x** para os quais $\frac{x^2-2}{x} \leq 1$.

$$\frac{x^2-2}{x} - 1 \leq 0$$

$$\frac{x^2-2-x}{x} \leq 0$$

$$\frac{x^2-x-2}{x} \leq 0$$

$$\frac{x^2-x-2 \rightarrow f(x)}{x \rightarrow g(x)}$$

Encontrando as raízes de **f(x) = x² - x - 2**

x^2 - x - 2 = 0 (a > 0: concavidade voltada para cima)

a= 1, b= -1, c= -2

$\Delta = b^2 - 4 . a . c$

$\Delta = (-1)^2 - 4 . 1 . (-2)$

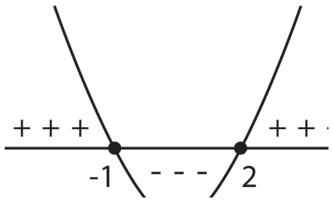
$\Delta = 1 + 8$

Δ = 9 (Δ > 0, admite duas raízes reais e distintas)

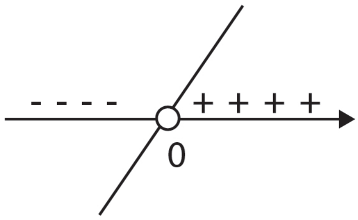
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2.1} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x' = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x'' = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

S = {-1,2}

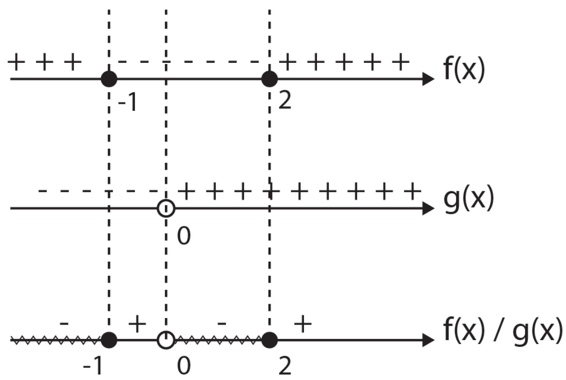


Para **g(x) = x > 0**, temos que:



Lembrando que x ≠ 0, pois está no denominador e a reta é crescente (a > 0).

A representação no quadro de sinais fica:



S = {x ∈ R *tal que* x ≤ -1 *e* 0 < x ≤ 2}

Exemplo 2)

Resolver $\frac{x^2+2x-8}{x+3} \geq 0$

f(x) = x² + 2 x - 8 ≥0 *e* **g(x) = x + 3 > 0**

Resolvendo **f(x) = x² + 2 x - 8 ≥ 0**, temos:

x² + 2x - 8 = 0 (a > 0: concavidade voltada para cima)

a = 1, b = 2, c = -8

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)$

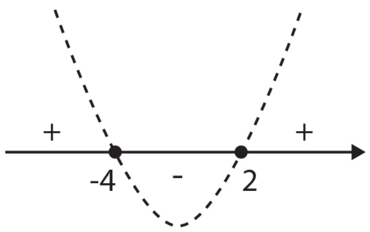
$\Delta = 4 + 32$

$\mathbf{\Delta = 36}$ ($\Delta > 0$, admite duas raízes reais e distintas)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2.1} = \frac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} x' = \frac{-2+6}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x'' = \frac{-2-6}{2} = \frac{-8}{2} = -4 \end{cases}$$

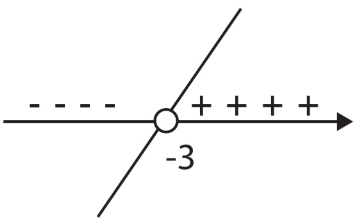
S ={-4,2}



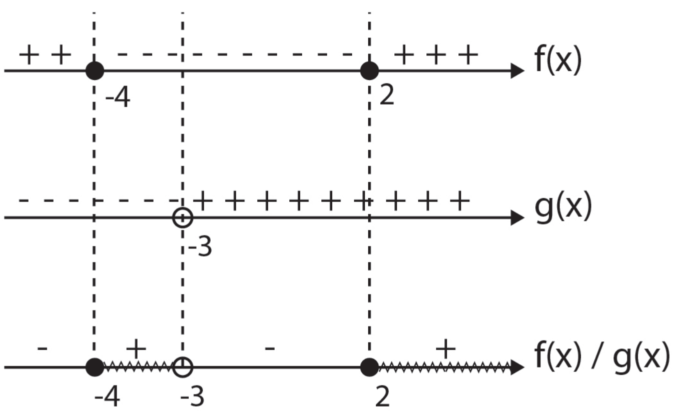
Resolvendo **g(x) = x + 3 > 0**

x + 3 > 0 (a > 0, a reta é crescente)

x > - 3 ⟶ Lembrando que não dividimos por zero!



No quadro de sinais, temos:



S = {x ∈ R *tal que* -4 ≤ x < -3 e x ≥2}

Exemplo 3)

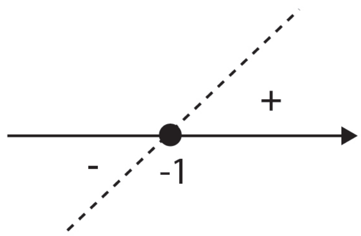
Resolva a inequação nos reais $\frac{(2x+2).(x^2+2x-8)}{x^2+x-2} \geq 0$

$f(x) = 2x + 2 \geq 0$ (a > 0 a reta é crescente)

$2x \geq -2$

$x \geq \frac{-2}{2}$

$x \geq -1$



g(x) = x^2 + 2x - 8 ≥0

$x^2 + 2x - 8 = 0$ (a > 0: concavidade voltada para cima)

a = 1, b = 2, c = -8

$\Delta = b^2 - 4 . a . c$

$\Delta = 2^2 - 4 . 1 . (-8)$

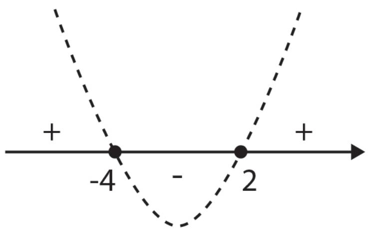
$\Delta = 4 + 32$

$\boldsymbol{\Delta = 36}$ ($\Delta > 0$, admite duas raízes reais e distintas)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2.1} = \frac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} x' = \frac{-2+6}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x'' = \frac{-2-6}{2} = \frac{-8}{2} = -4 \end{cases}$$

S = {-4,2}



h(x) = x^2 + x - 2 > 0 (Não existe divisão por zero!)

$x^2 + x - 2 = 0$ (a > 0: concavidade voltada para cima)

a = 1, b = 1, c = -2

$\Delta = b^2 - 4 . a . c$

$\Delta = 1^2 - 4 . 1 . (-2)$

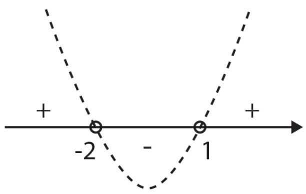
$\Delta = 1 + 8$

$\boldsymbol{\Delta = 9}$ ($\Delta > 0$, admite duas raízes reais e distintas)

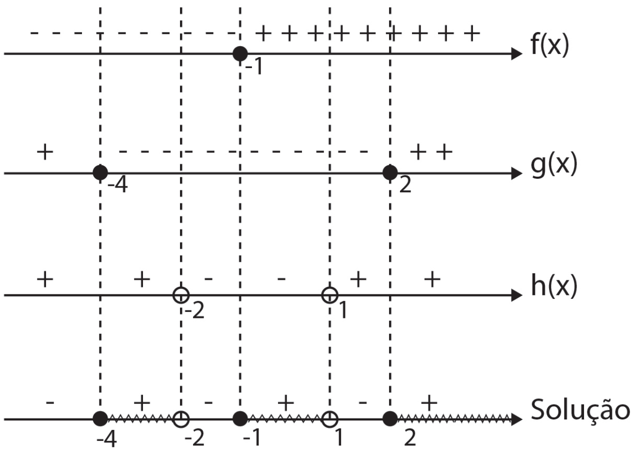
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2.1} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x' = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ x'' = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

h(x) = x^2 + x - 2



No quadro de sinais, temos:



S = {x ∈ R tal que -4 ≤ x< -2 e -1 ≤ x < 1 e x ≥ 2}

Material Complementar

Para aprofundar seus estudos sobre Função quadrática consulte as indicações seguintes:

1) Livro:

PERELMAN, Yakov. **Aprenda Álgebra Brincando**. São Paulo: Hemus, 2001.

- ✓ http://www.matematicadidatica.com.br/FuncaoQuadratica.aspx
- ✓ https://www.educabras.com/enem/materia/matematica/aulas/funcao_quadratica
- ✓ https://www.youtube.com/watch?v=Z5aVW_Zgifk

Referências

BIGODE, A.J.L. **Projeto Velear:** Matemática (9º ano). São Paulo: Scipione, 2012.

DANTE, L. R. **Matemática:** Contexto e aplicações - 1º ano. São Paulo: Ática, 2011.

PAIVA, M. **Matemática:** volume único. São Paulo: Moderna, 1999.

RIBEIRO, J. **Matemática:** Ciência e linguagem: volume único. São Paulo: Scipione, 2007.

Anotações

Educação a Distância
Cruzeiro do Sul Educacional
Campus Virtual

www.cruzeirodosulvirtual.com.br
Campus Liberdade
Rua Galvão Bueno, 868
CEP 01506-000
São Paulo SP Brasil
Tel: (55 11) 3385-3000

Universidade Cruzeiro do Sul

UNICID Universidade Cidade de S. Paulo

UNIFRAN Universidade de Franca

UDF Centro Universitário

Módulo Centro Universitário