Fundamentos de Matemática

Educação a Distância
Cruzeiro do Sul Educacional
Campus Virtual

Material Teórico

Função Exponencial

Responsável pelo Conteúdo:
Profa. Ms. Conceição Aparecida Cruz Longo

Revisão Textual:
Prof. Ms. Claudio Brites

UNIDADE

Função Exponencial

- Introdução
- O símbolo da Potência
- Função Exponencial
- Equação Exponencial
- Inequação Exponencial

Objetivo de APRENDIZADO

- Nesta unidade trataremos das funções exponenciais. A função exponencial é uma das mais importantes para o estudo e explicação de inúmeros fenômenos naturais e também para o projeto de incontáveis máquinas, tornando-se assim, uma das ferramentas indispensáveis para físicos, químicos, biólogos e também engenheiros.

Nesta Unidade você inicia mais um estudo sobre as funções exponenciais. Este conteúdo lhe permitirá rever os conceitos de potenciação e radiciação, bem como suas propriedades, que servirão como embasamento para os estudos das equações exponenciais, das funções exponenciais e dos gráficos das funções exponenciais.

Não se esqueça: consulte o material teórico na íntegra. Faça as atividades. Fique atento às datas de entrega das tarefas avaliativas. Enfim, ao concluir seus estudos nesta Unidade você terá vencido mais uma importante etapa no seu curso.

Contextualização

Nesta contextualização você estudará uma aplicação de funções exponenciais lendo o seguinte artigo, extraído do jornal O Globo, de 21 maio 2011:

Número de casos de dengue cresce em Nova Friburgo

Com vias ainda obstruídas e o acúmulo de água parada, o número de casos de dengue aumentou exponencialmente em Nova Friburgo. Em 2010, entre janeiro e maio, a Secretaria estadual de Saúde registrou 17 casos. Neste ano, no mesmo período, esse número cresceu mais de dez vezes. Foram 179 casos.

Pense neste trecho: "[...] aumentou exponencialmente [...]".

Em algum momento você já deve ter lido ou ouvido uma notícia em que se fala sobre aumento exponencial ou decréscimo exponencial. Que tal dar uma olhada no que diz o dicionário?

"Exponencialmente ou exponencial significa algo que é considerado acima ou abaixo do comum ou que tem grande variação (Ex.: crescimento exponencial)"[1] .

Suponha que neste município, a cada ano, o número de casos de dengue aumente, aproximadamente, dez vezes em relação ao ano anterior e esse padrão se mantenha nos anos seguintes. Logo:

- 2010 → 17 casos;
- 2011 → 17 x 10 = 170 casos (aproximadamente);
- 2012 → 17 x 10 x 10 = 1 700 casos (aproximadamente);
- 2013 → 17 x 10 x 10 x 10 = 17 000 casos (aproximadamente);
- 2014 → 17 x 10 x 10 x 10 x 10 = 170.000 casos (aproximadamente).

E assim, sucessivamente...

Agora, vamos chamar de "Q(t)" a quantidade de casos de dengue a cada ano e "t" a quantidade de anos, a fim de poder escrever da seguinte forma:

1 Fonte: http://www.priberam.pt/dlpo/exponencialmente

Considerando o ano de 2010 como t = 0:

- 2010 → 17×10^0
- 2011 → 17×10^1
- 2012 → 17×10^2
- 2013 → 17×10^3
- 2014 → 17×10^4
- Ano t → 17×10^t

Assim, a função que expressa o número de casos de dengue de acordo com o ano t é: $\mathbf{Q(t) = 17 \cdot 10^t}$.

Se nada for feito para controlar a dengue, em 2016 teremos:

- $Q(t) = 17 \cdot 10^6$
- $Q(t) = 17 \cdot 1\,000\,000$
- $Q(t) = 17\,000\,000$ (dezessete milhões de casos)!

Um valor considerado absurdo, certamente. Lembra-se do que dizia o dicionário?

"Exponencialmente ou exponencial significa algo que é considerado acima ou abaixo do comum ou que tem grande variação" (grifos nossos).

Pense nisso!

Vejamos agora este outro exemplo:

> (Vunesp - SP) Duas funções f(t) e g(t) fornecem o número de ratos e o número de habitantes de uma certa cidade em função do tempo t (em anos), respectivamente, num período de 0 a 5 anos. Suponha que no tempo inicial (t = 0) existiam nessa cidade 100 000 ratos e 70 000 habitantes, que o número de ratos dobra a cada ano e que a população humana cresce 2 000 habitantes por ano. Encontre:

a) As expressões matemáticas das funções f(t) e g(t);

b) O número de ratos que haverá por habitante, após 5 anos.

Pense primeiro na quantidade de ratos:

- Em t = 0, temos $f(0) = 100\,000 = 100\,000 \times 2^0$
- Em 1 ano, temos $f(1) = 200\,000 = 100\,000 \times 2^1$
- Em 2 anos, temos $f(2) = 400\,000 = 100\,000 \times 2^2$
- Em 3 anos, temos $f(3) = 800\,000 = 100\,000 \times 2^3$
- Em 4 anos, temos $f(4) = 1\,600\,000 = 100\,000 \times 2^4$
- Em t anos, temos $f(t) = 100\,000 \times 2^t$

$$\mathbf{f(t) = 100\,000 \cdot 2^t}$$

E para a quantidade de pessoas:

» Em g = 0, temos g(0) = 70 000
» Em 1 ano, temos g(1) = 70 000 + 2 000
» Em 2 anos, temos g(2) = 70 000 + 2 000 x 2
» Em 3 anos, temos g(3) = 70 000 + 2 000 x 3
» Em 4 anos, temos g(4) = 70 000 + 2 000 x 4
» Em t anos, temos g(t) = 70 000 + 2 000 x t

g(t) = 70 000 + 2 000.t

Para resolver o item b, calculamos o quociente entre o número de ratos e de pessoas daqui a cinco anos:

$$\frac{f(5)}{g(5)} = \frac{100\,000\,.2^5}{70\,000 + 2\,000\,.5} = \frac{100\,000\,.32}{70\,000 + 10\,000} = \frac{3\,200\,000}{80\,000} = 40$$

Logo, após cinco anos, existirão nessa cidade quarenta ratos por habitante.

Introdução

Primeiro faremos uma revisão de potenciação.

Você conhece a lenda do xadrez?

O xadrez é um dos jogos mais antigos do mundo. Foi criado há séculos, na Índia. A história do jogo conta que um rei chamado Sheram ficou entusiasmado pela criação do jogo novo. Sessa era professor e o inventor do jogo, e foi recompensado pelo rei pelo invento realizado. Como era uma pessoa humilde, o pedido que fez ao rei foi de receber um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro de xadrez, dois grãos pela segunda casa, quatro grãos pela terceira, oito pela quarta, e assim por diante, até completar as 64 casas do tabuleiro de xadrez.

O Rei Sheram ficou admirado pelo pedido tão modesto do inventor que imediatamente ordenou aos seus sábios o cálculo do número de grãos para que fossem entregues em um saco ao inventor. Contudo, o rei ficou espantado com o resultado fornecido pelos sábios, pois esse número era tão grande que não caberia dentro de um saco, nem dentro de todos os sacos existentes na Terra. Como foi realizado o cálculo feito pelos sábios para se chegar ao número 18 446 744 073 709 551 615?

Fonte: Thinkstock/Getty Images

- » **Primeira casa:** 1 grão;
- » **Segunda casa:** 1. 2 = 2 grãos;
- » **Terceira casa:** 2. 2 = 4 grãos;
- » **Quarta casa:** 2. 2. 2 = 8 grãos;
- » **Quinta casa:** 2. 2. 2. 2 = 16 grãos.

E assim por diante, até completar as 64 casas do tabuleiro de xadrez, chegando ao resultado gigantesco.

Trocando Ideias

Para conhecer mais sobre o assunto acesse:

http://educacao.uol.com.br/planos-de-aula/fundamental/matematica-potenciacao-no-tabuleiro-de-xadrez.htm

Assim,

EXPOENTE

$2^4 = \underbrace{2 .2 .2 .2}_{\text{Fatores}} = 16$ (4 fatores iguais)

BASE

Exemplo:

$5^3 = 5. 5. 5 = 125$ (3 fatores iguais).

O símbolo da Potência

Podemos dizer, então, que para indicarmos multiplicações com fatores iguais, o homem criou a potenciação. Assim, para indicar 2. 2. 2. 2. 2, por exemplo, usamos o símbolo 2^5, denominado potência de base 2 e expoente 5.

Nomenclatura

2^5 = 2. 2. 2. 2. 2 = 32. Assim, 2 é a base, 5 é o expoente e 32 é a potência.

» A base é o fator que se repete;
» O expoente é o número de vezes que repetimos a base;
» A potência é o resultado.

Potências de base real com expoente inteiro:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$$
$$a^1 = a$$
$$a^0 = 1$$
$$a^{-1} = \frac{1}{a}, \text{ com } a \neq \text{ de } 0$$
$$a^{-n} = (a^{-1})^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n, \text{ com } a \neq 0$$

Exemplos:

» $2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$
» $4^2 = 4 \times 4 = 16$
» $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$
» $6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 216$

Todo número diferente de zero e elevado a zero é um:

» $2^0 = 1$
» $3^0 = 1$
» $10^0 = 1$

Todo número diferente de zero e elevado a um é o próprio número:

» $15^1 = 15$
» $20^1 = 20$
» $12^1 = 12$

Base zero e qualquer número no expoente, o resultado é zero:

» $0^5 = 0$
» $0^{12} = 0$
» $0^{25} = 0$

Base negativa e expoente ímpar, resultado negativo:

» $(-4)^5 = (-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4) = -1024$
» $(-3)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3) = -27$
» $(-2)^7 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = -128$

Base negativa e expoente par, resultado positivo:

» $(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 16$
» $(-6)^2 = (-6) \times (-6) = 36$
» $(-8)^2 = (-8) \times (-8) = 64$

Explicando algumas propriedades

Potências de bases iguais
Multiplicação: conserva-se a base comum e somamos os expoentes:

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

Exemplos:

» $3^7 \times 3^5 = 3^{7+5} = 3^{12}$
» $5^8 \times 5^3 = 5^{8+3} = 5^{11}$
» $2^4 \times 2^{-2} = 2^{4+(-2)} = 2^{4-2} = 2^2$
» $5^3 \times 3 \times 5^8 \times 3^5 = 5^{3+8} \times 3^{1+5} = 5^{11} \times 3^6$

Divisão: conserva-se a base comum e subtraímos os expoentes:

Exemplos:

» $2^8 : 2^5 = 2^{8-5} = 2^3$
» $5^{12} : 5^{-5} = 5^{12-(-5)} = 5^{12+5} = 5^{17}$
» $6^3 : 2^7 : 6 : 2^{-3} = 6^{3-1} : 2^{7-(-3)} = 6^2 : 2^{7+3} = 6^2 : 2^{10}$

Potências de Expoentes Iguais

- **Multiplicação:** multiplica-se as bases e conservamos o expoente comum:

$$a^m . b^m = (a.b)^m$$

Exemplos:

» $3^7 \times 2^7 = (3 \times 2)^7 = 6^7$

» $2^9 \times 3^5 \times 2^6 \times 3^{10} = (2^9 \times 2^6) \times (3^5 \times 3^{10}) = 2^{9+6} \times 3^{5+10} = 2^{15} \times 3^{15} = (2 \times 3)^{15} = 6^{15}$

- **Divisão:** divide-se as bases e conservamos o expoente comum:

$$a^m : b^m = (a : b)^m$$

Exemplos:

» $8^7 : 2^7 = (8 : 2)^7 = 4^7$

» $6^{10} : 3^5 : 6^{-2} : 3^{-7} = (6^{10} : 6^{-2}):(3^5:3^{-7})=6^{10-(-2)} : 3^{5-(-7)} = 6^{10+2} : 3^{5+7} = 6^{12} : 3^{12} = (6 : 3)^{12} = 2^{12}$

- **Consequência:** todo número (diferente de zero) elevado a zero é igual a um:

$$a^0 = 1,\ a \neq 0$$

Assim: $a^n : a^n = a^{n-n} = a^0 = 1$

- **Potências de potência:** para escrever a potência elevada a outro expoente, mantém-se a base e multiplicam-se os expoentes:

$$(a^m)^n = a^{m.n}$$

Exemplos:

» $(2^2)^3 = 2^2 \,.\, 2^2 \,.\, 2^2 = 2^{2+2+2} = 2^6 = 64$

» $(2^2)^4 = 2^2 \,.\, 2^2 \,.\, 2^2 \,.\, 2^2 = 2^{2+2+2+2} = 2^8 = 256$

- **Potências de expoente negativo:** inverte-se a base da potência e depois muda-se o sinal do expoente para positivo e então é resolvida normalmente, aplicando as propriedades vistas anteriormente:

$$(a^m)^n = a^{m.n}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ ou } \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

Exemplos:

$$(2)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{2} = \left(\frac{1^2}{2^2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{4}{3} \,.\, \frac{4}{3} \,.\, \frac{4}{3} = \frac{4^3}{3^3} = \frac{64}{27}$$

- **Potências de base "0":** quando a base do expoente é zero o resultado será sempre zero para qualquer valor que seja colocado no expoente, com exceção do zero:

  » $0^n = 0$, se $n > 0$
  » 0^0 = indeterminação
  » 0^n = impossível, se $n < 0$

Em síntese:

$a^m . a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{m.n}$

$(a : b)^n = a^n : b^n$

$(a . b)^n = a^n . b^n$

Outros exemplos:

- $2^7 . 2^3 = 2^{10}$
- $\frac{5^9}{5^7} = 5^2$
- $a^9 : a^4 = a^5$
- $(3^4)^2 = 3^8$
- $(7 . 4)^3 = 7^3 . 4^3$
- $(12 : 3)^4 = 12^4 : 3^4$
- $\left(\frac{5}{7}\right)^m = \frac{5^m}{7^m}$
- $9^{x+2} = 9^x . 9^2$
- $5^{x-2} = 5^x : 5^2$
- $3^{2x} = (3^2)^x$ ou $(3^x)^2$

ATENÇÃO:

$(a^m)^n \neq a^{(m)n}$

Veja, por exemplo, $(2^3)^4 = 2^{12}$ e $2^{(3)4} = 2^{81}$.

saiba +

Para saber mais acesse:

http://goo.gl/6vjQsR

Agora, uma revisão de radiciação.

Figura 2 – Tirinha intitulada Guaraná e Pirrixa e a raiz quadrada.

Fonte: http://guaranaeturma.blogspot.com.br/2012/07/guarana-e-pirrixa-e-raiz-quadrada.html

Dado um número real ***a*** não negativo e um número natural ***n***, n ≥ 1, chama-se raiz n ésima (enésima) de a o número real e não negativo b, tal que $b^n = a$:

$$\underset{\text{radicando}}{\overset{\text{Índice}}{}} \sqrt[n]{a} = b \leftarrow \text{raiz}$$

Importante:

Se $a < 0$, $\sqrt[n]{a} \notin R$, quando n for par.

Considere dois casos:

1º caso: sendo ***a*** um número real não negativo e ***n*** um número inteiro positivo, tem-se que:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \text{ e } b \geq 0 \text{, com } b \in IR$$

Exemplos:

$\sqrt[3]{8} = 2$, pois $2^3 = 8$ e $2 \geq 0$

$\sqrt[1]{5} = 5$, pois $5^1 = 5$ e $5 \geq 0$

$\sqrt{9} = 3$, pois $3^2 = 9$ e $3 \geq 0$

$\sqrt[5]{0} = 0$, pois $0^5 = 0$ e $0 \geq 0$

2º caso: sendo ***a*** um número real negativo e ***n*** um número inteiro positivo, tem-se que:

$$\sqrt[n]{-a} = b \Leftrightarrow b^n = -a \text{, com } b \in IR$$

Exemplos:

$\sqrt[3]{-8} = -2$, pois $(-2)^3 = -8$
$\sqrt[5]{-1} = -1$, pois $(-1)^5 = -1$
$\sqrt{-9} = ?$ (qual é o número cuja raiz quadrada é igual a -9? Não existe tal número).

Propriedades dos radicais

Considerando ***a*** e ***b*** reais não negativos, ***m*** inteiro, ***n*** $\in$ aos naturais não nulos, temos as seguintes propriedades:

1ª propriedade:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Exemplos:

$$\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^6 = \sqrt{2^6} = 2^3 = 8$$

2ª propriedade:

$$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b}$$

Exemplos:

$$\sqrt{3 . 5} = \sqrt{3} . \sqrt{5}$$

$$\sqrt{2 . 8} = \sqrt{2} . \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$$

3ª propriedade:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Exemplos:

$$\sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

4ª propriedade:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\,.\,p]{a^{m\,.\,p}} \quad e \quad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\,:\,p]{a^{m\,:\,p}}$$

Exemplos:

$$\sqrt[3]{56^2} = \sqrt[3\,.4]{56^{2\,.\,4}} = \sqrt[12]{56^8}$$

$$\sqrt[10]{10^6} = \sqrt[10\,:2]{10^{6\,:\,2}} = \sqrt[5]{10^3}$$

5ª propriedade:

$$\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[p.n]{a^m}$$

Exemplos:

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[5.3]{3} = \sqrt[15]{3}$$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = \sqrt[2.2.2]{2} = \sqrt[8]{2}$$

Racionalização de denominadores

São três casos:

1° caso: o radical do denominador possui índice 2. Exemplos:

$$\frac{10}{\sqrt{5}} . \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} . \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3^2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$\frac{9}{2\sqrt{3}} . \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{2.\sqrt{3^2}} = \frac{9\sqrt{3}}{2.3} = \frac{9\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

O valor de uma fração não se altera quando multiplicamos seu numerador e seu denominador por um mesmo número, pois isso equivale a multiplicar essa fração por 1.

2° caso: o radical do denominador possui índice diferente de 2. Exemplos:

a) $$\frac{5}{\sqrt[3]{2^2}}=\frac{5}{\sqrt[3]{2^2}}.\frac{\sqrt[3]{2^1}}{\sqrt[3]{2^1}}=\frac{5\sqrt[3]{2^1}}{\sqrt[3]{2^{2+1}}}=\frac{5\sqrt[3]{2^1}}{\sqrt[3]{2^3}}=\frac{5\sqrt[3]{2}}{2}$$

b) $$\frac{6}{\sqrt[4]{3}}=\frac{6}{\sqrt[4]{3}}.\frac{\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3^3}}=\frac{6\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3^{1+3}}}=\frac{6\sqrt[4]{27}}{\sqrt[4]{3^4}}=\frac{6\sqrt[4]{27}}{3}=2\sqrt[4]{27}$$

3° caso: o denominador é um binômio em que, pelo menos, um dos termos é um número irracional sob a forma de radical. Exemplos:

$$\frac{3}{3+\sqrt{2}}.\frac{\left(3-\sqrt{2}\right)}{\left(3-\sqrt{2}\right)}=\frac{3.\left(3-\sqrt{2}\right)}{3^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{3.\left(3-\sqrt{2}\right)}{9-2}=\frac{3.\left(3-\sqrt{2}\right)}{7}=\frac{9-3\sqrt{2}}{7}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}}.\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)}=\frac{\sqrt{2}.\left(2+\sqrt{3}\right)}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4-3}=2\sqrt{2}+\sqrt{6}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}.\frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{5-3}=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}$$

Função Exponencial

Vamos à função f(x) = a^x.

Dado um número real a ($a > 0$ e $a \neq 1$), denomina-se função exponencial de base a uma função f de R em R*+ definida por $f(x) = a^x$ ou $y = a^x$. Exemplos:

$f(x) = 3^x$

$y = 5^x$

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$f(x) = \left(\sqrt{3}\right)^x$

Para Pensar

Por que as restrições de $a > 0$ e $a \neq 1$ foram dadas na definição?

Exemplos:

Não são funções exponenciais:

» $f(x) = (-4)^x$
» $f(x) = x^2$
» $f(x) = 0^x$
» $f(x) = 1^x$

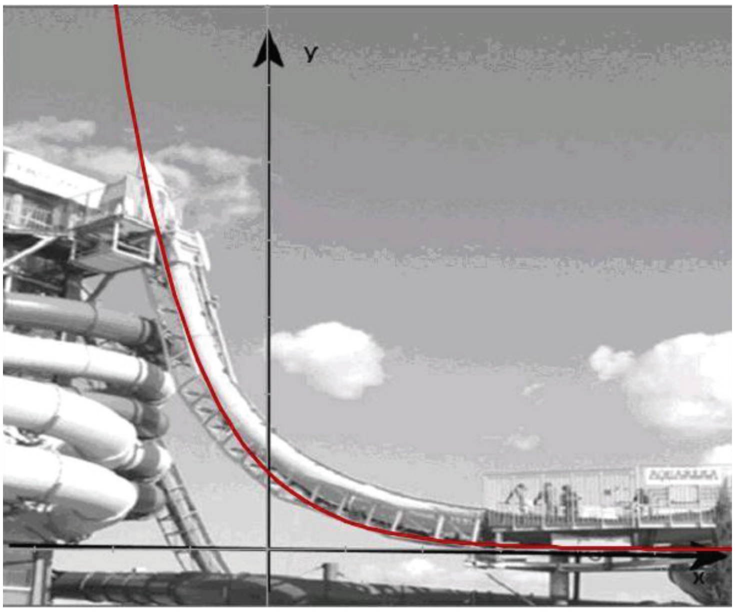
Dada a função exponencial $f(x) = 2^x$, calcule:

$f(3) = 2^3 = 8$

$f(-1) = 2^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

$f(0) = 2^0 = 1$

Figura 3 - Gráfico da função exponencial.



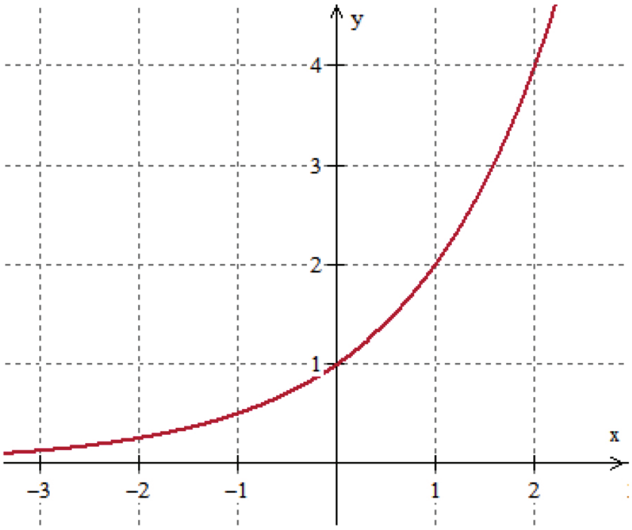
Acompanhe a construção dos gráficos de duas funções exponenciais: $f(x) = 2^x$ e $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Atribui-se alguns valores para x para encontrar os valores correspondentes de f(x):

Tabela 1 - Função Exponencial

x	**$f(x) = 2^x$**	**(x, f(x))**
-2	$f(x)=2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$	$\left(-2\ \frac{1}{4}\right)$
-1	$f(x)=2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$	$\left(-1\ \frac{1}{2}\right)$
0	$f(x) = 2^0 = 1$	(0, 1)
1	$f(x) = 2^1 = 2$	(1, 2)
2	$f(x) = 2^2 = 4$	(2, 4)

Gráfico 1 – Função Exponencial.

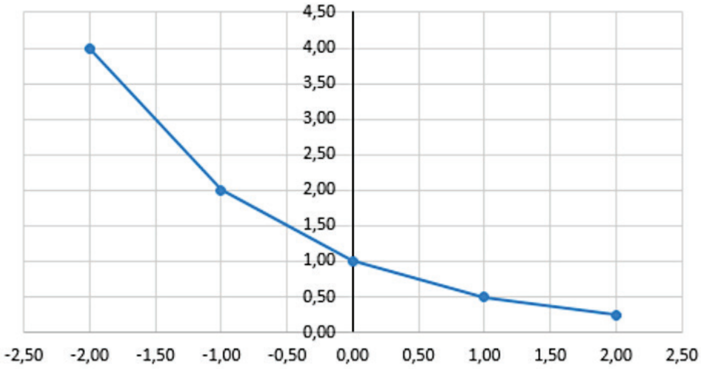


Uma função exponencial é crescente se a > 1, pois sempre que aumentamos os valores de x, os valores correspondentes de f(x) também aumentam. No caso acima, temos que a função f é crescente com a = 2.

Tabela 2 – Função exponencial.

x	$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	**(x, f(x))**
-2	$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=2^2=4$	(-2,4)
-1	$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2^1=2$	(-1,2)
0	$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=1$	(0, 1)
1	$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=\frac{1}{2}$	$\left(1,\frac{1}{2}\right)$
2	$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{1}{4}$	$\left(2,\frac{1}{4}\right)$

Gráfico 2 – Função exponencial.



Uma função exponencial é decrescente se $0 < a < 1$, pois sempre que aumentamos os valores de x, os valores correspondentes de f(x) diminuem. No caso acima, temos que a função f é decrescente com $a = \frac{1}{2}$.

Em Síntese:

» Se $a > 1$ a função é crescente;
» Se $0 < a < 1$ a função é decrescente.

Para Pensar

» O gráfico de uma função exponencial não toca o eixo x, encontrando-se todo acima desse eixo, pois para todo x, temos $\mathbf{f(x) = a^x > 0}$;

» O gráfico de uma função $\mathbf{f(x) = a^x}$ é chamado curva exponencial e corta o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas (0, 1);

» Na função exponencial $\mathbf{f(x) = a^x}$ o domínio, contradomínio e o conjunto imagem são definidos por: $\mathbf{D(f) = R}$, $\mathbf{CD(f) = R^*_+}$ **e** $\mathbf{Im(f) = R^*_+}$;

Equação Exponencial

Equações exponenciais são aquelas em que a incógnita aparece nos expoentes. Exemplos:

$$4^x = 32$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$$

$$25^{x+1} = \sqrt{5^x}$$

Para resolver uma equação exponencial, são reduzidos os dois membros da equação a potências de mesma base. Para isso, utilizam-se as propriedades das potências vistas anteriormente.

Exemplo: Resolva as equações abaixo:

- $\mathbf{4^x = 8}$

$$4^x = 8 \Rightarrow \left(2^2\right)^x = 2^3 \Rightarrow \underbrace{\cancel{2}^{2x} = \cancel{2}^3}_{\text{Potências de mesma base}} \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

- $\mathbf{3^{x-1} = 81}$

Transforma-se a equação dada em uma igualdade de potências de mesma base:

$$3^{x-1} = 81 \Rightarrow \cancel{3}^{x-1} = \cancel{3}^4 \Rightarrow x - 1 = 4 \Rightarrow x = 4 + 1 \Rightarrow x = 5$$

$$S = \{5\}$$

- $\mathbf{4^{-(x-1)} = 4^{2(x+2)}}$
  $-(x - 1) = 2(x+2)$
  $-x + 1 = 2x + 4$
  $-x - 2x = 4 - 1$
  $-3x = 3$
  $x = -1$
  $\mathbf{S = \{-1\}}$

- $\mathbf{2^{x^2-7x+12} = 1}$
  $\cancel{2}^{x^2-7x+12} = \cancel{2}^{0}$
  $x^2 - 7x + 12 = 0$ (Bháskara)

- $\mathbf{7^{3x+4} = 49^{2x-3}}$
  $7^{3x+4} = (7^2)^{2x-3}$
  $7^{3x+4} = (7)^{4x-6}$
  $3x + 4 = 4x - 6$
  $4x - 3x = 4 + 6$
  $x = 10$
  $\mathbf{S = \{10\}}$

- $\mathbf{2^{3x-1} . 4^{2x+3} = 8^{3x}}$
  $2^{3x-1} . (2^2)^{2x+3} = (2^3)^{3x}$
  $2^{3x-1} . (2)^{4x+6} = 2^{9x}$
  $2^{3x-1+4x+6} = 2^{9x}$
  $2^{7x+5} = 2^{9x}$
  $7^{x+5} = {}^{9x}$
  $9x - 7x = 5$
  $2x = 5$
  $x = \frac{5}{2}$
  $\mathbf{S} = \{\frac{5}{2}\}$

Em algumas equações exponenciais não é possível reduzir ambos os membros da equação a uma potência de mesma base. Nesses casos, usam-se alguns artifícios de cálculo.

Exemplo 1: Determinar a solução da equação $\mathbf{9^x - 10.3^x + 9 = 0}$

Inicialmente a equação é escrita de outra maneira:

$$\mathbf{(3^2)^x - 10.3^x + 9 = 0 \Rightarrow (3^x)^2 - 10.3^x + 9 = 0}$$

Pense:
$\mathbf{(3^2)^x = (3^x)^2}$

Agora 3^x é substituído por y:

- $\mathbf{y^2 - 10y + 9 = 0}$

Ao substituir é encontrada uma equação do segundo grau, que é resolvida da seguinte forma:

$y^2 - 10y + 9 = 0$

$a = 1, b = -10, c = 9$

$\Delta = b^2 - 4.a.c$

$\Delta = (-10)^2 - 4.1.9$

$\Delta = 100 - 36$

$\Delta = 64$

$$y = \frac{-b \pm\sqrt{\Delta}}{2.a}$$

$$y = \frac{-(-10) \pm\sqrt{64}}{2.1}$$

$$y = = \begin{cases} y' = \frac{10+8}{2} = \frac{18}{2} = 9 \\ y'' = \frac{10-8}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

As raízes são 1 e 9.

Agora, volta-se à igualdade para substituir os valores encontrados de y e determinar a solução da equação exponencial:

- **Para y = 1 há:**
  $3^x = 1$
  $3^x = 3^0$
  $x = 0$

- **Para y = 9:**
  $3^x = 9$
  $3^x = 3^2$
  $x = 2$

  $\mathbf{S = \{0,2\}}$

Exemplo 2: Determinar a solução da equação $\mathbf{2^{x+2} + 2^{x-1} = 18}$.

Aqui é utilizada a propriedade $\mathbf{2^m \,.\, 2^n = 2^{m+n}}$

$\mathbf{2^2 \,.\, 2^x + 2^{-1} \,.\, 2^x = 18}$

Substituímos 2^x por y

$4y + \frac{1}{2}y = 18$

m.m.c. = 2

$$\frac{8y+1y}{2} = \frac{36}{2}$$

$9y = 36$
$y = 4$

Como $2^x = y$:

$2^x = 4$
$2^x = 2^2$
$x = 2$

$\mathbf{S = \{2\}}$

Trocando Ideias

Você se lembra da restrição $a > 0$ e $a \neq 1$? Veja porque são necessárias para $f(x) = a^x$:

Se $a = 1$ teríamos uma função constante e não exponencial, pois 1 elevado a qualquer x real resultaria em 1. Neste caso $f(x) = 1^x$ equivale a $f(x) = 1$, que é uma função constante;

Para $a = 0$, quando se estuda a potenciação, constata-se que 0^0 é indeterminado, então, $f(x) = 0^x$ seria indeterminado quando $x = 0$. No caso de $a < 0$, não se esqueça de que não existe a raiz real de um radicando negativo e índice par, portanto, se houver $a = -3$ e $x = \frac{1}{4}$ o valor de f(x) não será um número real, pois haverá:

$$f(x) = a^x \Longrightarrow f(\tfrac{1}{4}) = -3^{\frac{1}{4}} \Longrightarrow f(\tfrac{1}{4}) = \sqrt[4]{-3} \text{ e, } \sqrt[4]{-3} \text{ que não existem em R.}$$

Inequação Exponencial

Inequação exponencial é toda desigualdade cuja incógnita está no expoente. Exemplo:

- $3^{x-1} \geq 27$
- $4^{x+3} \leq 1$
- $25^x < \sqrt{5}$

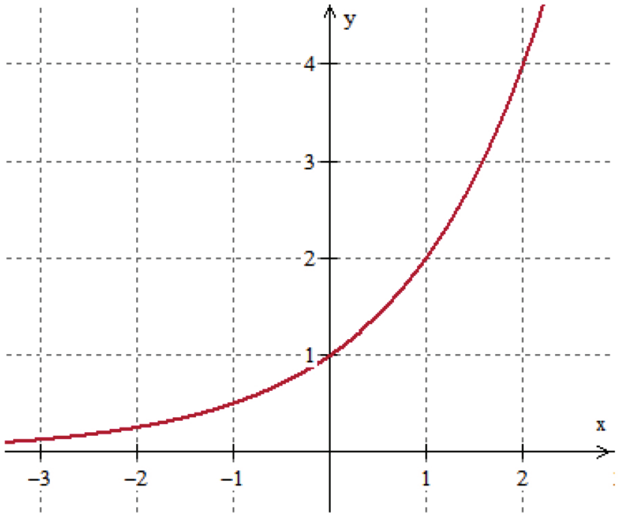
Para resolver uma inequação exponencial, você deve se lembrar que a função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente para $a > 1$ e decrescente para $0 < a < 1$, ou seja:

- Se $a > 1 \Longrightarrow f(x) = a^x$ é crescente.

$$\mathbf{a^{x1} > a^{x2} \Leftrightarrow x^1 > x^2}$$

Note que o sentido da desigualdade se mantém.

Gráfico 3 – Inequação exponencial.

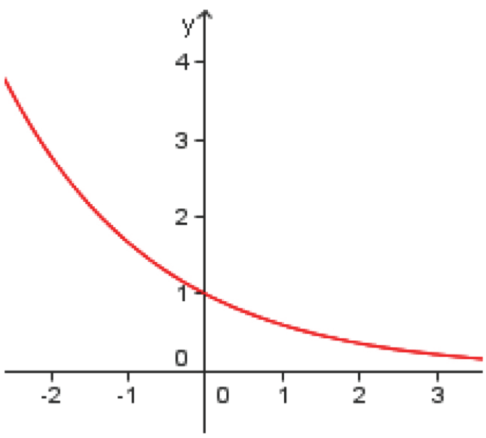


- Se $\mathbf{0 < a < 1} \Rightarrow \mathbf{f(x) = a^x}$ é decrescente.

$$a^{x1} < a^{x2} \Leftrightarrow x^1 > x^2$$

Note que o sentido da desigualdade é invertido.

Gráfico 4 – Inequação exponencial.



Exemplo: resolver as inequações a seguir:

$5^x > 25$
$5^x > 5^2$
$x > 2$

Note que o sentido da desigualdade se manteve, pois a base (a = 5) é maior que 1. Portanto, **S = {x ∈ R | x>5}**

- $\mathbf{3^{x+1} < 9^{x-2}}$

$3^{x+1} < (3^2)^{x-2}$
$3^{x+1} < 3^{2x-4}$
$x + 1 < 2x - 4$
$x - 2x < -4 - 1$

$-x < -5$ – inverte o sinal da desigualdade, pois multiplicamos os dois lados da desigualdade por (-1).

- $\mathbf{x > 5}$

Note que o sentido da desigualdade se manteve, pois a base (a = 3) é maior que 1. Portanto, **S = {x ∈ R | x>5}**

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{x} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{-x+1}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{-(-x+1)}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}$$

$2x \leq x - 1$

$2x - x \geq -1$

$x \geq -1$

Note que o sentido da desigualdade se inverte, pois a base (a = 2/3) é menor que 1. Portanto, **S = {x ∈ R | x ≥ -1}**

- $\mathbf{(0{,}7^{x})^{x-3} < (0{,}49)^{x-2}}$

$(0{,}7)^{x^2-3x} < (0{,}7^2)^{x-2}$

$(0{,}7)^{x^2-3x} < (0{,}7)^{2x-4}$

$X^2 - 3x < 2x - 4$

$X^2 - 5x + 4 < 0$

Resolvendo esta equação do segundo grau, encontra-se:

- $X^2 - 5x + 4 = 0 \begin{cases} x' = 4 \\ x'' = 1 \end{cases}$

Note que o sentido da desigualdade se inverte, pois a base (a = 0,7) é menor que 1.
Portanto, **S = {x ∈ R | x<1 e x>4}**

- $\underbrace{1 \leq \overbrace{4^{\frac{x}{4}}}_{}}_{\text{i}}\!\!\!\overbrace{< 8^2}^{\text{ii}}$

Separar em duas inequações:

Resolver separadamente:

- $1 \leq 4^{\frac{x}{4}}$

  $4^0 \leq 4^{\frac{x}{4}}$

  $0 \leq \frac{x}{4}$

  $0 \leq x$

  $x \geq 0$

- $4^{\frac{x}{4}} < 8^2$

  $(2^2)^{\frac{x}{4}} < (2^3)^2$

  $2^{\frac{x}{2}} < 2^6$

  $\frac{x}{2} < 6$

  $x < 12$

Fazendo a intersecção, há:

S = {x ∈ R | 0 ≤x< 12}

Material Complementar

Para aprofundar seus estudos sobre a função exponencial consulte as seguintes indicações:

http://educacao.uol.com.br/matematica/funcao-exponencial.jhtm

http://educacao.uol.com.br/disciplinas/matematica/funcao-exponencial-aplicacoes-em-biologia-quimica-e-matematica-financeira.htm

LIMA, E. L. Crescimento Linear e crescimento exponencial. **Revista do Professor de Matemática (RPM)**, n. 33, p. 16.

______. Quais as raízes da equação 2x = x2? **Revista do Professor de Matemática (RPM)**, n. 3, p. 18.

______. et al. **A Matemática do Ensino Médio.** Rio de Janeiro: SBM, 1997. (Coleção do Professor de Matemática; 1). Capítulo 8.

Referências

BIGODE, A. J. L. Projeto Velear: **Matemática** (9º ano). São Paulo: Scipione, 2012.

DANTE, L. R. **Matemática:** contexto e aplicações – 1º ano. São Paulo: Ática, 2011.

PAIVA, M. **Matemática:** volume único. São Paulo: Moderna, 1999.

RIBEIRO, J. **Matemática:** Ciência e linguagem, volume único. São Paulo: Scipione, 2007.

Anotações

Educação a Distância
Cruzeiro do Sul Educacional
Campus Virtual

www.cruzeirodosulvirtual.com.br
Campus Liberdade
Rua Galvão Bueno, 868
CEP 01506-000
São Paulo SP Brasil
Tel: (55 11) 3385-3000

Universidade Cruzeiro do Sul

UNICID Universidade Cidade de S. Paulo

UNIFRAN Universidade de Franca

UDF Centro Universitário

Módulo Centro Universitário