

# Métodos espectrais de alta ordem na resolução de equações diferenciais

MONOGRAFIA APRESENTADA  
AO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA  
OBTENÇÃO DO TÍTULO  
DE  
BACHAREL EM MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL

Augusto Carillo Ferrari

Orientador: Prof. Dr. Nelson Mukgayar Kuhl

Coorientador: Dr. Paulo José Saiz Jabardo

São Paulo, dezembro de 2015



# Agradecimientos

A elaborar



# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>ix</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 História . . . . .	1
1.2 Julia . . . . .	1
<b>2 Capítulo I</b>	<b>3</b>
2.1 Método espectral . . . . .	3
2.2 Interpolação . . . . .	3
2.2.1 Interpolação polinomial . . . . .	3
2.2.2 Fenômeno de Runge . . . . .	4
<b>3 Conclusões</b>	<b>5</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>7</b>



# Lista de Figuras

2.1	interpolação simples . . . . .	3
2.2	interpolação com n pontos equidistantes . . . . .	4
2.3	fenômeno Runge . . . . .	4





# Lista de Tabelas



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 História

O método espectral surgiu como uma ferramenta de alto poder computacional em mecânica de fluídos, proposto em 1994 por Blinova, implementado em 1954 por Sylberman, praticamente abandonado no meio da década de 60 e ressurgindo em 1969-1970 por Orszag e Eliason, Manchenhauer e Rasmussen, foi desenvolvido para aplicações especializadas. No entanto, somente em 1977 foi formalizado matematicamente por Gottlieb e Orszag em 1980. Originalmente o método espectral foi promovido por meteorologistas no estudo de modelos globais de tempo e especialistas em dinâmica de fluídos estudando turbulências isotrópicas. Desde a década de 80 até hoje o estudo na área de CFD (Computational Fluid Dynamics- dinâmica dos fluidos computacional) tem crescido lado a lado ao avanço computacional que o tornou possível.

### 1.2 Julia

Para a implementação do método usaremos como ferramenta de estudo a linguagem de alto nível, *Julia*, que por ser dinâmica e de excelente desempenho computacional será essencial para execução dos cálculos. Apesar de nova, a linguagem criada no MIT vem sendo rapidamente acolhida pela comunidade científica e assim, com seu código open-source, ele é diariamente atualizado e possui um número de bibliotecas em crescente ascensão.



## Capítulo 2

# Capítulo I

### 2.1 Método espectral

Método espectral é um método poderoso usado para solução de equações diferencial parcial. Diferentemente do método das diferenças finitas, que considera apenas os pontos próximos do ponto que queremos computar chamada de método *local*, o método espectral considera todo o domínio, sendo assim um método *global*. Essa técnica tem mais precisão pois converge exponencialmente diferente do método local. É preferível a utilização desse método quando a solução varia em função do *tempo* e *espaço*.

### 2.2 Interpolação

A interpolação de uma função  $f(x)$  por um polinômio trigonométrico ou não, de grau  $n$ ,  $P_n(x)$  e que satisfaça:

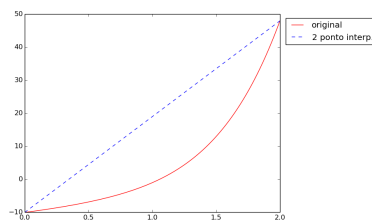
$$P_n(x_i) = f(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, n+1 \quad (2.1)$$

Onde  $f(x_i)$  é a função  $f$  pré-calculada nos pontos  $x_i$ . A escolha desses pontos  $x_i$  ainda será explicada.

#### 2.2.1 Interpolação polinomial

Antes do uso de calculadoras e computadores, um método de estimar o valor de uma  $f$  num ponto, eram utilizados tabelas com valores de pré-calculados. A maneira mais simples de entender é a estimação do valor da função em um ponto intermediário entre dois pontos conhecidos é o uso da interpolação *Linear*.

$$f(x) \approx \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) \quad (2.2)$$



**Figura 2.1:** *interpolação simples*

Para fazermos essa interpolação para  $n$  pontos conhecidos aproximamos uma função usando o

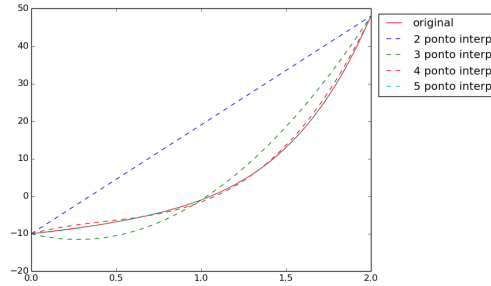
polinômio base de *Lagrange*.

$$C_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^N \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (2.3)$$

A interpolação de *Lagrange* é dada por :

$$P_n(x) \equiv \sum_{i=0}^N f(x_i) C_i(x) \quad (2.4)$$

Obedecendo que  $P_n(x_i) = f(x_i)$ . Apesar dos pontos interpoladores equidistantes serem comumente utilizados, não há restrições, podendo até mesmo estar fora de ordem.



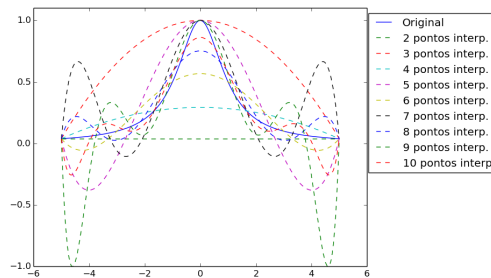
**Figura 2.2:** interpolação com  $n$  pontos equidistantes

### 2.2.2 Fenômeno de Runge

Apesar de parecer que uma boa interpolação tenha uma boa aproximação usando pontos igualmente distantes sobre um intervalo  $[a, b]$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - P_n(x)| = 0$  para qualquer  $f(x)$  diferenciável. No início do século XX, *Carl David Tolmé Runge*, provou que para uma função  $f(x)$ :

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}, x \in [-5, 5] \quad (2.5)$$

que para pontos equidistantes, a interpolação converge apenas no intervalo  $[-3.63, 3.63]$ , e diverge fora do mesmo. Para polinômios de maior grau, esse intervalo de convergência tende a diminuir e perto dos pontos de fronteira diverge bastante (figura abaixo).



**Figura 2.3:** fenômeno Runge

Assim, Runge prova que no meio do intervalo temos boas aproximações mas infelizmente perto dos extremos, os valores interpolados oscilam muito, para um polinômio de grau  $n$  com pontos equidistantes. Esse fenômeno sugere que escolhamos pontos diversos que tenham menor concentração do meio do intervalo, onde temos uma maior precisão, e aumentar a densidade de pontos próximos dos extremos.

## Capítulo 3

# Conclusões

test test test

[Ard14]





# Referências Bibliográficas

[Ard14] Luca Ardito. *Energy-aware Software*. Tese de Doutorado, Politecnico di Torino, 2014. [5](#)