Lista 2

Probabilidade I

2025-1

Deve fazer **todos** os exercícios marcados com **(*)** e mais um; só pode entregar esses exercícios. Tem até o dia 11 de Abril até as 23.59 para enviar a lista; cada dia de retraso se descontará um ponto da sua nota. Entrega em LaTeX é desejável mas não obrigatória. Enviar no e-mail bruno.andrades@impa.br com o assunto "Lista 2 - [SEU NOME] - Prob I". Pode responder em inglês, espanhol ou português.

Independência

1. **(*)** Construa variáveis aleatórias $X_1, \cdots, X_n$ tal que para todo $S \subsetneq [n]$ temos que as variáveis $(X_i)_{i \in S}$ são independentes mas $X_1, \cdots, X_n$ não são independentes
2. Seja $X = (X_1, \cdots, X_d)$ um vetor Gaussiano, i.e. X tem densidade

$$p_X(x) = (2\pi)^{-d/2} |\det(K_X)|^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_X)^T K_X^{-1}(x-\mu_X)}$$

   onde $\mu_X \in \mathbb{R}^d$ e $K_X \in \mathbb{R}^{d \times d}$ é uma matriz positiva definida. Mostre que $X_1, \cdots, X_d$ são independentes se e somente $\text{cov}(X_i, X_j) = 0$ para todo $i \neq j$
3. **(*)** Prove que
   (a) Para toda $\mathbb{P}_X$ medida de probabilidade em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $\mathbb{P}_X(A) \in \{0, 1\}$ para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ se e somente se $\mathbb{P}_X = \delta_p$ para algum $p \in \mathbb{R}$
   (b) Se X é uma variável aleatória independente de se mesma, então $X = c$ quase certamente para algum $c \in \mathbb{R}$
   (c) Se $X = c$ quase certamente para algum $c \in \mathbb{R}$ então X é independente de qualquer outra variável aleatória
   (d) Sejam X e Y independentes. De uma condição suficiente e necessária para que $\mathbb{P}(X = Y) > 0$
   (e) Se X e Y são variáveis aleatórias independentes tais que $X + Y = c$ quase certamente para algum $c \in \mathbb{R}$ então $X = c_1$ e $Y = c_2$ quase certamente onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tais que $c_1 + c_2 = c$
   (f) Prove que se X e Y são variáveis aleatórias independentes sem átomos, então $X + Y$ também não tem átomos
4. Suponha que as variáveis aleatórias $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ com $\lambda_i > 0$ são independentes
   (a) Ache a distribuição de $\min\{X_1, \ldots, X_n\}$
   (b) Mostre que

$$\mathbb{P}(X_j = \min\{X_1, \cdots, X_n\}) = \frac{\lambda_j}{\sum_{i \in [n]} \lambda_i}$$

5. Suponha que $U, V \sim \text{Exp}(\lambda)$ com $\lambda > 0$ são independentes. Prove que as variáveis $\dfrac{U}{U+V}$ e $U + V$ são independentes e encontre a distribuição de ambas

Borel-Cantelli

1. Sejam $(X_i)_{i\geq 1}$ variáveis aleatórias i.i.d. não negativas. Mostre que
   (a) Se $\mathbb{E}X_1 < \infty$ então,
   $$\limsup_n \frac{X_n}{n} = 0 \text{ q.c.}$$
   (b) Se $\mathbb{E}X_1 = \infty$ então,
   $$\limsup_n \frac{X_n}{n} = \infty \text{ q.c.}$$
2. **(*)** Sejam $X_i \sim \mathrm{Exp}(1)$ i.i.d.
   (a) Prove que
   $$\limsup_n \frac{X_n}{\log n} = 1 \text{ q.c.}$$
   (b) Seja $M_n = \max_{i\in[n]} X_i$. Prove que
   $$\liminf_n \frac{M_n}{\log n} \geq 1 \text{ q.c.}$$
   (c) Prove que existe uma subsequência n_k tal que
   $$\limsup_k \frac{M_{n_k}}{\log n_k} \leq 1 \text{ q.c.}$$
   (d) Mostre que
   $$\lim_n \frac{M_n}{\log n} = 1 \text{ q.c.}$$
3. Seja X_i uma sequência de variáveis aleatórias independentes. Mostre que $\sup_n X_n < \infty$ q.c. se e somente se existe algum $A > 0$ tal que
   $$\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(X_k > A) < \infty$$

1 Sigma álgebra caudal

1. **(*)** Seja $(X_n)_n$ uma sequencia de variáveis aleatórias, seja $\mathcal{B}_n = \sigma((X_k)_{k\geq n})$ e $\mathcal{B}_\infty = \cap_n \mathcal{B}_n$
   (a) Considere $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$. Mostre que os seguintes eventos estão em $\mathcal{B}_\infty$
   i. $\left\{ \dfrac{X_n}{f(n)} \in B, \text{ para infinitos } n\text{'s} \right\}$ para $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$
   ii. $\left\{ \limsup_n \dfrac{X_n}{f(n)} > c \right\}$ para $c \in \mathbb{R}$
   iii. $\left\{ \exists \lim_n \dfrac{X_n}{f(n)} \right\}$
   (b) Conclua que $\limsup_n \frac{X_n}{f(n)}$ e $\lim_n \frac{X_n}{f(n)} \mathbb{1}_{\left[\exists \lim_n \frac{X_n}{f(n)}\right]}$ são variáveis aleatórias (possivelmente nos reais estendidos) $\mathcal{B}_\infty$-mensuráveis