Lista 1

Probabilidade I

2025-1

Deve escolher exatamente 5 exercícios para entregar, dos quais pelo menos três devem ser dos exercícios marcados com **(*)** e os outros dois devem ser um de cada semana. Tem até o dia 30 de Março até as 23.59 para enviar a lista. Entrega em $\LaTeX$ é desejável mas não obrigatória. Enviar no e-mail bruno.andrades@impa.br com o assunto "Lista 1 - [SEU NOME] - Prob I". Pode responder em inglês, espanhol ou português.

Semana 1

1. Sejam $(\mathcal{F}, \Omega)$ e $(\mathcal{F}', \Omega')$ dois espaços mensuráveis, Q uma medida de probabilidade em $(\mathcal{F}', \Omega')$ e $\{\mathbb{P}_\omega\}_{\omega \in \Omega'}$ medidas de probabilidade em $(\mathcal{F}, \Omega)$ tal que para cada $A \in \mathcal{F}$ a aplicação $\omega \mapsto \mathbb{P}_\omega(A)$ seja mensurável. Prove que
$$\mathbb{P}(A) := \int_{\Omega'} \mathbb{P}_\omega(A)\, dQ(\omega)$$
define uma probabilidade em $(\mathcal{F}, \Omega)$
2. Dado $n \in \mathbb{N}$ fixo, um vetor $s = (s_0, \cdots, s_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ é dito um caminho simples de tamanho n se $s_0 = 0$ e $|s_k - s_{k-1}| = 1$ para todo $k \in [n]$. Seja $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ o espaço de todas as caminhadas simples de tamanho $2n$ com a medida uniforme $\mathbb{P}$. Prove que para todo $k \in [n]$
$$\mathbb{P}(\{s : \max s_i \geq 2k-1\}) = 2\mathbb{P}(\{s : s_{2n} \geq 2k-1\})$$
3. **(*)** Seja $\Omega = C[0,1]$ o espaço das funções continuas reais em $[0,1]$, considere os Borelianos $\mathcal{B}$ induzidos pela norma $||\cdot||_\infty$. E seja
$$\mathcal{A} := \sigma\left(\{X_t^{-1}(B) : t \in [0,1],\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}\right)$$
a sigma álgebra gerada pelas preimagens das projeções $X_t(\omega) = \omega(t)$.
   (a) Prove que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$
   (b) Mostre que os seguintes conjuntos são $\mathcal{A}$-mensuráveis
      i. $\{\omega \in \Omega : \omega(1/2) \geq 0\}$
      ii. $\{\omega \in \Omega : \omega \geq 0\}$
      iii. $\left\{\omega \in \Omega : \int_{[0,1]} \omega(t)\, dt \geq 0\right\}$
4. **(*)** Mostre que se $\mathbb{E}[X_1^-] < \infty$ e $X_n \nearrow X$ então $\mathbb{E}X_n \nearrow \mathbb{E}X$

5. Seja $X \geq 0$ uma variável aleatória. Prove que
   (a) $\lim_{y\to\infty} y\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\mathbb{1}_{[X>y]}\right) = 0$
   (b) $\lim_{y\to 0^+} y\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\mathbb{1}_{[X>y]}\right) = 0$
6. **(*)** Dada X uma variável aleatória real. Definimos $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ por $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. Prove que
   (a) F é não decrescente
   (b) $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$
   (c) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$
   (d) F é contínua pela direita
   (e) F é descontínua em x_0 se e somente se $\mathbb{P}(X = x_0) > 0$
   (f) A função $F^{-1}(y) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq y\}$ definida em $(0,1)$ é não decrescente, contínua pela esquerda e satisfaz $F^{-1}(F(X)) = X$ quase certamente
7. Prove as seguintes desigualdades
   (a) (Desigualdade de Markov) Seja $X \geq 0$ uma variável aleatória. Prove que para todo $t > 0$

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}X}{t}$$

   (b) (Desigualdade de Chebyshev) Dado $X \in L^2(\mathbb{P})$, definimos $\operatorname{Var} X = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)^2\right]$. Prove que $\operatorname{Var} X < \infty$ e se $t > 0$ então

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq t) \leq \frac{\operatorname{Var} X}{t^2}$$

8. O objetivo do seguinte exercício é provar alguns teoremas determinísticos via métodos probabilísticos. Seja $\mathcal{G}_n$ é a família dos grafos com conjunto de vértices $[n]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $p \in (0,1)$ defina a função

$$\mu_{n,p} : \mathcal{G}_n \to [0,1]$$

   por

$$\mu_{n,p}(G) = p^{e(G)}(1-p)^{\binom{n}{2}-e(G)}$$

   onde $e(G)$ é o número de arestas de G.
   (a) Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$ e $p \in (0,1)$ temos que μ define uma medida de probabilidade em $(\mathcal{G}_n, \mathcal{P}(\mathcal{G}_n))$
   (b) Seja $e : \mathcal{G}_n \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ definida como antes. Prove que $e \sim \text{Bin}\left(\binom{n}{2}, p\right)$, i.e.

$$\mathbb{P}(e = k) = \binom{\binom{n}{2}}{k} p^k (1-p)^{\binom{n}{2}-k}$$

   calcule $\mathbb{E}[e]$ e $\operatorname{Var}(e)$.

(c) Dizemos que $(v_1, \cdots, v_k)$ é um C_k em G se $v_1, \cdots, v_k \in V(G)$ são distintos dois a dois e $v_1v_2, v_2v_3, \cdots, v_{k-1}v_k, v_kv_1 \in E(G)$, além disso, dizemos que dois C_k são o mesmo se as arestas coincidem. Seja $X_k : \mathcal{G}_n \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ a função tal que $X_k(G)$ seja o número de C_k em G. Escolha um valor de $p = p(n) \in (0, 1)$ tal que

- $\mathbb{E}X_k = O(n)$
- $\mathbb{E}[e] = \Theta\left(n^{1+1/k}\right)$

concluir que existe $c > 0$ tal que para todo n existem grafos com $e(G) \geq cn^{1+1/k}$ arestas e sem nenhum C_k.

(Dica: Utilize Markov e Chebyshev para provar que existem grafos que satisfazem as duas propriedades no mesmo tempo, e de algum desses grafos obtenha o grafo sem C_k)

Observação 1. *O máximo numero de arestas de um grafo de n vértices que não tem nenhum C_k é denotado por $\mathbf{ex}(n, C_k)$. É um problema aberto calcular asintóticamente $\mathbf{ex}(n, C_{2k})$, a ordem exata é só sabida para $k = 2, 3, 5$. O que acabamos de provar é que existe um $c > 0$ tal que*

$$\mathbf{ex}(n, C_{2k}) \geq cn^{1+1/2k}$$

é sabido também que existe $C > 0$ tal que

$$\mathbf{ex}(n, C_{2k}) \leq Cn^{1+1/k}$$

a conjetura de Erdős-Simonovits diz que

$$\mathbf{ex}(n, C_{2k}) = \Theta\left(n^{1+1/k}\right)$$

e é um dos problemas mais importantes da teoria extremal de grafos

(d) Prove que para todo $k \in \mathbb{N}$ grande suficiente existem grafos em $n \geq \dfrac{k}{\sqrt{2}e}2^{k/2}$ vértices sem nenhum conjunto de k vértices tais que estejam todos conectados ou todos desconectados.

(Dica: Considere $\mu_{n,1/2}$ e calcule a esperança do número de conjuntos dessa forma. Pode usar sem provar que para todo n, k temos $\binom{n}{k} \leq (en/k)^k$.)

Observação 2. *O mínimo número de vértices n tal que todo grafo de n vértices tem um conjunto dessa forma, é chamado o número de Ramsey de k denotado por $R(k)$. O que acabamos de provar é que*

$$R(k) \geq \frac{k}{\sqrt{2}e} 2^{k/2}$$

para todo k grande suficiente, isso foi provado por Erdős em 1947 e foi o primeiro uso do que hoje é conhecido como método probabilístico. Um argumento simples prova que $R(k) \leq 4^k$ para tudo k. No ano 2023 foi feita a primeira melhora exponencial ao limitante superior por Campos (IMPA), Griffits (PUC-Rio), Morris (IMPA) e Sahasrabudhe (Cambridge) que provaram

$$R(k) \leq 3.995^k$$

e refinando seus métodos Gupta, Ndiaye, Norin e Wei provaram em 2024 que

$$R(k) \leq 3.8^k$$

nenhuma melhora exponencial foi feita no limitante inferior; a única melhora foi por um fator de 2 por Spencer no ano 1975. Hoje em dia, os melhores limitantes são

$$(1 + o(1)) \frac{\sqrt{2}k}{e} 2^{k/2} \leq R(k) \leq 3.8^k$$

É um problema aberto determinar se existe um $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_k \sqrt[k]{R(k)} = c$$

Semana 2

1. Seja $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ uma função absolutamente contínua tal que $h' \geq 0$ e $h(0) = 0$. Dado $X \geq 0$ uma variável aleatória
   (a) Prove que
   $$\mathbb{E}[h(X)] = \int_0^\infty h'(t)\mathbb{P}(X \geq t)\, dt$$
   (b) Conclua que se X assume valores em $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ então
   $$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \mathbb{E}X + 2\sum_{n \geq 0} n\mathbb{P}(X > n)$$
2. Seja $(X_n)_n$ uma sequencia de variáveis aleatórias reais tais que para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ temos $\mathbb{P}((X_1, \cdots, X_n) \in B) = \lambda^n(B \cap [0,1]^n)$ onde λ^n é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$. Seja
   $$N = \min\{n : X_1 + \cdots + X_n \geq 1\}$$
   calcule $\mathbb{E}[N]$ e $\mathbb{E}\left[N^2\right]$
3. Seja X uma variável aleatória tal que $0 < \mathbb{E}\left[X^2\right] < \infty$. Mostre que se $t > 0$ e $a \in (0, 1)$ então
   (a) $\mathbb{P}(X \neq 0) \geq \dfrac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}\left[X^2\right]}$
   (b) $\mathbb{P}(X - \mathbb{E}X \geq t) \leq \dfrac{\operatorname{Var} X}{\operatorname{Var} X + t^2}$
   (c) Se $X \geq 0$ então $\mathbb{P}(X \geq a\mathbb{E}X) \geq (1-a)^2 \dfrac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}\left[X^2\right]}$

4. **(*)** Dada uma variável aleatória real X, dizemos que $m \in X$ é uma mediana de X se $\mathbb{P}(X \geq m) \geq 1/2$ e $\mathbb{P}(X \leq m) \geq 1/2$. Prove que
   (a) Toda variável aleatória real possui uma mediana
   (b) Se $X \in L^1(\mathbb{P})$ então m é mediana se e somente se minimiza $\mathbb{E}|X - m|$
   (c) Prove que se $X \in L^1(\mathbb{P})$ então para qualquer m mediana temos

$$|\mathbb{E}X - m| \leq \sqrt{\operatorname{Var} X}$$

   ($\operatorname{Var} X$ poderia ser infinito)
   (d) Mostre que o conjunto de medianas de X é um intervalo
   (e) Seja $m_+(X)$ o supremo das medianas de X. Prove que $m_+(X) < \infty$ e que $m_+(X)$ é uma mediana
   (f) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa. Prove que para qualquer mediana m de X temos

$$f(m) \leq m_+(f(X))$$

5. **(*)** O objetivo desse exercício é definir e estudar a função geradora de momentos
   (a) Mostre que existe $r > 0$ tal que $\mathbb{E}e^{\lambda X} < \infty$ para todo $\lambda \in (-r, r)$ se e somente se

$$\limsup_p \frac{||X||_p}{p} < \infty$$

   (b) Prove que supondo as condições do item anterior temos para todo $\lambda \in (-r, r)$

$$\mathbb{E}e^{\lambda X} = \sum_{p \geq 0} \frac{\lambda^p \mathbb{E}\left[X^p\right]}{p!}$$

   (c) Conclua que nesta situação

$$\left.\frac{d^p}{d\lambda^p}\mathbb{E}e^{\lambda X}\right|_{\lambda=0} = \mathbb{E}\left[X^p\right]$$

6. (Desigualdades de Chernoff) Seja X uma variável aleatória real tal que $M(t) = \mathbb{E}e^{tX}$ é finito em uma vizinhança $(-r, r)$ com $r > 0$.
   (a) Prove que para tudo $a \in \mathbb{R}$ temos

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \inf_{t \in (0,r)} M(t)e^{-ta}$$
$$\mathbb{P}(X \leq a) \leq \inf_{t \in (-r,0)} M(t)e^{-ta}$$

   (b) Mostre que se $X \sim \mathsf{Bin}(n, p)$ e $\delta \in (0, 1)$ então

$$\mathbb{P}(X \geq (1+\delta)\mathbb{E}X) \leq \exp(-\delta^2 \mathbb{E}X/3)$$
$$\mathbb{P}(X \leq (1-\delta)\mathbb{E}X) \leq \exp(-\delta^2 \mathbb{E}X/2)$$
$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq \delta\mathbb{E}X) \leq 2\exp(-\delta^2 \mathbb{E}X/3)$$

7. Seja $\mu_{n,p}$ definido como no item (8) da semana 1. Prove que se $p = p(n) > \frac{2\log n}{n}$ então se $\varepsilon > 0$ temos

$$\mu_{n,p}(\{G \in \mathcal{G}_n : (1-\varepsilon)pn \leq \deg i \leq (1+\varepsilon)pn,\ \forall i \in [n]\}) \to 1$$

8. Seja $X \in \mathbb{R}^d$ um vetor aleatório. Defina para $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$\Phi_X(\xi) = \mathbb{E}\left[e^{i\langle \xi, X\rangle}\right]$$

prove que

(a) $e^{i\langle \xi, X\rangle} \in L^1(\mathbb{P})$

(b) Se $A \in \mathbb{R}^{p\times d}$ e $b \in \mathbb{R}^p$ então

$$\Phi_{AX+b}(\xi) = e^{i\langle \xi, b\rangle}\Phi_X(A^T\xi)$$

(c) Suponha que $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ e que X_i são i.i.d com $\mathbb{E}X_i = \mu$ e $\operatorname{Var} X_i = \sigma^2$. Seja além disso

$$Y_n = \frac{\sum_{j=1}^n X_j - n\mu}{\sqrt{n}}$$

prove que para todo $\xi \in \mathbb{R}$

$$\Phi_{Y_n}(\xi) \to \Phi_Z(\xi)$$

(Dica: Calcule Φ_Z e Φ_{Y_n} separadamente. Para calcular Φ_{Y_n} use que a esperança é multiplicativa para variáveis aleatórias independentes e o teorema de Taylor)

Observação 3. *O teorema de Lévy diz que se $\Phi_{X_n} \to \Phi_X$ pontualmente, então $X_n \xrightarrow{(d)} X$. Em particular, o que acabamos de provar, junto com o teorema de Lévy, da uma prova do teorema central do limite*

9. Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$ variáveis aleatórias i.i.d. com

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p$$
$$\mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p$$

onde $p \in [0, 1]$. Seja

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

S_n pode ser pensado como uma caminhada aleatória em $\mathbb{Z}$ de comprimento n com um viés de p de dar um passo na direita.

(a) Dizemos que S_n é transitória se

$$\mathbb{P}(\forall n \geq 1:\ S_n \neq 0) > 0$$

prove que se $p \neq 1/2$ então S_n é transitória

(Dica: Use o exercício (6.b) dessa semana)

(b) Prove que se $p = 1/2$ então S_n não é transitória

(Dica: Ache uma fórmula para a probabilidade de que exista $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{P}(S_n = M, S_i \neq 0\ \forall i \in [n])$)

(c) Prove que para todo $\varepsilon > 0$ temos

$$\mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}S_n| \leq n^{1/2+\varepsilon}\right) \to 1$$