

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS  
ESCOLA DE CIÊNCIAS EXATAS E DA COMPUTAÇÃO  
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA



O TEOREMA DE POINCARÉ BENDIXSON

MILLER DOS SANTOS NEVES

GOIÂNIA  
2019

MILLER DOS SANTOS NEVES

O TEOREMA DE POINCARÉ BENDIXSON

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Escola de Ciências Exatas e da computação, da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Licenciatura em Matemática.

Orientador: João Eduardo Reis

GOIÂNIA

2019

MILLER DOS SANTOS NEVES

O TEOREMA DE POINCARÉ BENDIXSON

Este Trabalho de Conclusão de Curso julgado adequado para obtenção o título de Licenciatura em Matemática, e aprovado em sua forma final pela Escola de Ciências Exatas e da Computação, da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, em \_\_\_\_ / \_\_\_\_ / \_\_\_\_\_

---

Prof. Ma. Ludmilla Reis Pinheiro dos Santos  
Coordenador de Trabalho de Conclusão de Curso

Banca examinadora:

---

Orientador: Dr. João Eduardo Reis

---

Dr. Cristian Patricio Novoa Bustos

---

Dra. Silvia Cristina Belo e Silva

GOIÂNIA

2019

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, por tudo.

Ao meu filho, Benjamin Miller M. Neves, luz da minha vida.

Aos meus pais, Cícero e Mara, que nunca mediram esforços para me ampararem quando precisei, os maiores incentivadores da minha vida.

A minha linda esposa, Sâmella Magalhães, por ser compreensível e estar sempre ao meu lado.

Ao meu professor, João Eduardo, por depositar sua confiança em mim.

## **RESUMO**

Este trabalho aborda conceitos qualitativos de equações diferenciais ordinárias, com o enfoque numa análise dos possíveis comportamentos assintóticos de suas soluções (Teorema de Poincaré-Bendixson). Ao longo do texto há um estudo pré-liminar sobre campo de vetores lineares e seus possíveis retratos de fase; campos de vetores não-lineares, seus fluxos associados e conjugações.

Palavras chave: equações diferenciais ordinárias; fluxos; retrato de fase; órbita; conjunto  $\omega$ -limite.

## **ABSTRACT**

This work deals with qualitative concepts of Ordinary Differential Equations, focusing on an analysis of the possible asymptotic behaviours of their solutions (Poincaré-Bendixson's Theorem). Throughout the text there is a preliminary study of Linear Vector Fields and their phase portrait; non-Linear Vector Fields, their flows and conjugations.

Key words: ordinary differential equations, phase portrait, orbit,  $\omega$ -limit set.

# Listas de Figuras

1	Os três casos do Teorema de Poincaré-Bendixson . . . . .	2
1.1	Esboço do Campo Vetorial $f(x, y) = (x, -y)$ . . . . .	5
1.2	Esboço do Campo Vetorial que depende do tempo. . . . .	6
1.3	Solução, $\varphi$ , de uma equação diferencial ordinária autônoma. . . . .	7
1.4	Oscilador harmônico simples . . . . .	8
1.5	Retrato de fase de um Oscilador Harmônico. (a) sem atrito; b) com atrito . . . . .	10
2.1	Campo atrator com $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , ambos negativos. . . . .	19
2.2	Campo repulsor com $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , ambos positivos. . . . .	20
2.3	Campo linear sela, quando $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$ . . . . .	20
2.4	Campo linear do caso 1d. . . . .	21
2.5	Campo linear do caso 1e. . . . .	21
2.6	Campo atrator do caso 2a. . . . .	22
2.7	Campo repulsor do caso 2b. . . . .	22
2.8	Retrato de fase do caso 2c. . . . .	23
2.9	Retrato de fase do caso 2d. . . . .	24
2.10	Retrato de fase do caso 2e. . . . .	24
2.11	Retrato de fase do caso 2f. . . . .	25
2.12	Retrato de fase do caso 3a. . . . .	26
2.13	Retrato de fase do caso 3b. . . . .	26
2.14	Retrato de fase do caso 3c. . . . .	27
3.1	Solução original e a solução com tempo transladado possuem a mesma imagem em $\mathbb{E}$ . . . . .	29
3.2	O que não pode ocorrer em campos $C^1$ . . . . .	30
3.3	Soluções Distintas têm a mesma imagem em intervalos comuns a seus domínios. . . . .	30
3.4	ambas $\varphi$ e $\psi$ são soluções passando por $x_0$ porém $\varphi$ é maximal. . . . .	31

---

3.5	Na figura à esquerda temos uma sela com 3 pontos destacados: $x_1, x_2$ e $x_3$ . Já à direita, suas imagens: $y_1 = \varphi_t(x_1), y_2 = \varphi_t(x_2)$ e $y_3 = \varphi_t(x_3)$ . As curvas por cada ponto no gráfico são imagens das soluções maximais. . . . .	32
3.6	Ilustrando o caso (ii). O ponto $x$ é carregado até o ponto $y$ pela função $\varphi_t$ . Em seguida, $y$ é levado à $z$ por $\varphi_s$ . Isto equivale à $x$ ser levado à $z$ por $\varphi_{s+t}$ . . . . .	33
3.7	Aplicação Fluxo . . . . .	33
3.8	Esboço geométrico do domínio $\Omega$ de um fluxo $\varphi$ . Em destaque, o segmento de reta aberto $I_x \times \{x\} \subset \Omega$ . . . . .	34
3.9	as órbitas $\gamma_1$ e $\gamma_2$ são exemplos de: órbita periódica e singularidade. Já, $\gamma_3$ é a imagem injetora de um intervalo aberto da reta. . . . .	35
3.10	exemplos de retratos de fase de campos definidos na reta, no plano e no espaço. . . . .	36
3.11	seção transversal unidimensional no plano. . . . .	38
3.12	seção transversal bidimensional no espaço, gerada por um plano contendo o ponto $p$ . . . . .	38
3.13	$h$ conjuga o campo $f$ , numa vizinhança de $p$ , ao campo constante $Y$ . . . . .	39
3.14	$\tau(q_i)$ é o tempo exato para que o ponto $q_i$ , pertencente à vizinhança $V$ , atinja a seção transversal $\Sigma$ ao se deslocar através do fluxo $\varphi$ . . . . .	39
4.1	Exemplo em que o conjunto $\omega$ -limite de uma órbita é desconexo. . . . .	42
4.2	Caso (1): Conjunto $\omega$ -limite da órbita $\gamma_p$ contendo somente pontos regulares. . . . .	43
4.3	Caso (2): Conjunto $\omega$ -limite da órbita $\gamma_p$ contendo pontos regulares e singulares. . . . .	44
4.4	Caso (3): Conjunto $\omega$ -limite da órbita $\gamma_p$ não contendo pontos regulares. . . . .	44
4.5	(a) $(x_n)$ é crescente; (b) $(x_n)$ é decrescente. . . . .	46
4.6	Ocasiões que não podem acontecer. . . . .	46
4.7	Uma órbita $\gamma$ de um campo $C^1$ na esfera $\mathbb{T}^2$ , a qual o conjunto $\omega$ -limite é uma órbita fechada. . . . .	48
4.8	Uma órbita fechada que não é uma curva de Jordan. . . . .	49

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>vi</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Equações Diferenciais</b>	<b>4</b>
<b>2 Equações Diferenciais Lineares</b>	<b>12</b>
2.1 Exponencial de Matrizes . . . . .	13
2.2 Classificação dos Sistemas Planares . . . . .	17
<b>3 Campos de Vetores</b>	<b>28</b>
3.1 O que não pode ocorrer em campos $C^1$ . . . . .	29
3.2 Soluções Maximais . . . . .	30
3.3 O Fluxo de um Campo Vetorial . . . . .	32
3.4 Retratos de Fase de Campos Vetoriais . . . . .	34
3.5 Conjugação de Campos Vetoriais . . . . .	36
3.6 Seções Transversais . . . . .	37
<b>4 Teorema de Poincaré-Bendixson</b>	<b>40</b>
4.1 Conjuntos Invariantes . . . . .	40
4.2 Teorema de Poincaré-Bendixson . . . . .	42
4.3 A Importância do Teorema da Curva de Jordan para o Teorema de Poincaré-Bendixson . . . . .	47
4.4 Aplicação do Teorema de Poincaré-Bendixson . . . . .	49
<b>Considerações Finais</b>	<b>52</b>

# Introdução

Pode-se dizer que as aplicações mais importantes do cálculo são as das equações diferenciais, que, através da modelagem matemática, permitiram o desenvolvimento de diversas áreas do conhecimento humano. Estas estabeleceram muitas das importantes Leis da Física; dos modelos estatísticos utilizados na Biologia; das soluções pertinentes à Engenharia ou até mesmo da Economia.

Com o crescente uso desta ferramenta, o interesse científico pelo tema ganhou espaço dentro do âmbito acadêmico. Culminou-se, então, em uma disciplina independente, dividida em duas vertentes: a quantitativa, que enfoca nos métodos de solução de equações diferenciais e suas aplicações; e a qualitativa, centralizada na análise matemática dos resultados teóricos. Ambas, possuem um extenso conteúdo, de modo que este trabalho é apenas uma pequena porção dos resultados obtidos por importantes matemáticos ao longo da história, como Newton e Leibniz, os pioneiros no desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral; Leonhard Euler, responsável por vários avanços matemáticos em sua época, que, em particular, contribuiu muito com relação aos métodos de solução de equações diferenciais, por postular a conhecida constante de Euler-Mascheroni; Louis Cauchy e Camille Jordan, que contribuíram imensamente no campo da álgebra linear, componente de grande importância para este presente trabalho; Henri Poincaré e Ivar Bendixson, a quem lhes são atribuídos o teorema objeto deste estudo.

Particularmente, esta obra é um estudo de Sistemas Dinâmicos. Visualizemos a seguinte situação: considere uma partícula suspensa em uma corrente de ar. Ponderemos algumas perguntas, como, qual a velocidade desta partícula neste momento? E daqui há trinta segundos? Ou até mesmo, qual a sua posição atual? E após certo tempo? E se, por acaso, houver uma pequena perturbação na posição atual da partícula, será que ela continuará a seguir o seu trajeto, ou se desviará para bem longe do dele? Estas indagações são apenas uma mera ilustração do que seria um sistema dinâmico dependente do tempo, entretanto, salientamos que o objetivo deste trabalho é demonstrar os resultados qualitativos das teorias aqui difundidas, não abordando questões quantitativas de resoluções e aplicações.

Ao lidarmos com uma EDO, há situações em que não queremos saber o resultado

numérico de uma solução, mas queremos saber qual é o comportamento da família de soluções a longo prazo. O Teorema de Poincaré-Bendixson, aplicado para sistemas do  $\mathbb{R}^2$  e também para sistemas cujo o domínio é uma superfície bidimensional esférica, lida com esta questão, determinando o que acontece com uma trajetória (solução) quando o tempo vai positivamente para o infinito, e também, quando o tempo vai negativamente para o infinito.

Para que o leitor possa se familiarizar com o objeto de nosso estudo, adiantamos aqui alguns conceitos, começando pela conceito de órbita. Dizemos que a curva integral definida pela imagem da trajetória do PVI

$$x' = f(x), \quad x(0) = x_0$$

é a órbita de  $f$  por  $x_0$ , onde  $f$  é um campo vetorial.

Considere uma órbita  $\gamma$  de  $f$ . Chamamos os conjuntos  $\omega(\gamma)$  e  $\alpha(\gamma)$ , respectivamente, de Ômega-limite de  $\gamma$  e Alfa-limite de  $\gamma$ , e dizemos que  $\gamma$  se aproxima assintoticamente de  $\omega(\gamma)$  quando o tempo tende positivamente para o infinito. Do mesmo modo, dizemos que  $\gamma$  se aproxima assintoticamente de  $\alpha(\gamma)$  quando o tempo tende negativamente para o infinito.

O Teorema de Poincaré-Bendixson afirma que, dada uma órbita  $\gamma$  de um campo sob certas condições (ver Teorema), o  $\omega(\gamma)$  (também vale para  $\alpha(\gamma)$ ) se enquadrará em apenas um dos três seguintes casos:

- (i) O  $\omega(\gamma)$  será uma órbita periódica, e consequentemente,  $\omega(\gamma) = \gamma$ ;
- (ii) O  $\omega(\gamma)$  será um conjunto de órbitas regulares e pontos singulares;
- (iii) O  $\omega(\gamma)$  será apenas um ponto singular.

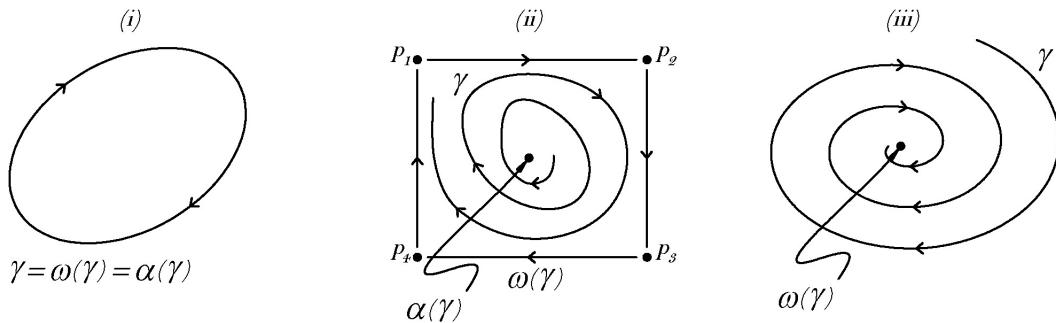


Figura 1: Os três casos do Teorema de Poincaré-Bendixson

Inicialmente, trataremos de Equações Diferenciais Ordinárias em  $\mathbb{R}^n$ , e estudaremos um conceito geral de solução, através da Álgebra Linear. Adiante, será introduzido o conceito

de fluxo no tempo, que se refere às equações diferenciais dependentes de uma variável específica, a qual chamaremos de tempo. Por fim, dissertaremos e demonstraremos os resultados e as consequências do Teorema de Poincaré-Bendixson.

# Capítulo 1

## Equações Diferenciais

Por questão de completude, introduziremos alguns conceitos de análise usados ao longo do texto; sem intenção de nos enveredarmos puramente nesta área.

Seja  $x = (x_1, \dots, x_n)$  um ponto do espaço  $\mathbb{R}^n$ , para algum  $n \geq 1$  fixo. Denotaremos

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2},$$

como a *norma* do ponto  $x$  em  $\mathbb{R}^n$ .

Seja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função definida num subconjunto aberto  $A$  de  $\mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $f$  é *contínua* em  $a \in A$  se

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0; x \in A, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Sejam dois conjuntos  $A$  e  $B$  de  $\mathbb{R}^n$ . Dizemos que a função  $f : A \rightarrow B$  é um *homeomorfismo* se  $f$  for uma bijeção contínua com inversa,  $h^{-1} : B \rightarrow A$ , também contínua.

Dizemos que a aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ , é *diferenciável no ponto*  $a \in U$  quando existe uma aplicação linear  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$f(a + v) - f(a) = T \cdot v + r(v), \quad \text{onde } \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0.$$

A aplicação anterior,  $T$ , é chamada de *derivada de  $f$  no ponto  $a$* , e denotada por  $f'(a)$ . Se, para cada ponto  $x$  do domínio de  $f$  sua derivada  $f'(x)$  no ponto  $x$  existir então a função  $x \rightarrow f'(x)$  é chamada de *derivada de  $f$*  e denotada por  $f'$ . Mais geralmente, denotamos por  $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ , a  $n$ -ésima derivada de  $f$ , para  $n > 1$ .

Dizemos que uma aplicação  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de *classe  $C^k$* , para algum  $k \geq 1$  fixo, se existem e são contínuas todas suas derivadas  $f^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

Dizemos que  $f : A \rightarrow B$  é um *difeomorfismo* se  $f$  for uma bijeção diferenciável com inversa também diferenciável.

Um caminho em  $\mathbb{R}^n$  é uma aplicação diferenciável  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida num intervalo aberto da reta.

Passaremos, agora, aos conceitos centrais de nosso estudo.

Um *campo vetorial* é uma função  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida em um subconjunto  $\mathbb{E}$  de  $\mathbb{R}^n$ . Nesta terminologia, a imagem de cada ponto  $x \in \mathbb{E}$  é visto, geometricamente, como um vetor  $f(x) \in \mathbb{R}^n$ . Para esboçarmos um campo vetorial nós selecionamos alguns pontos em seu domínio e colocamos as origens dos vetores imagens nos próprios pontos. É comum, no esboço, desenharmos os vetores tendo aproximadamente os mesmos tamanhos.

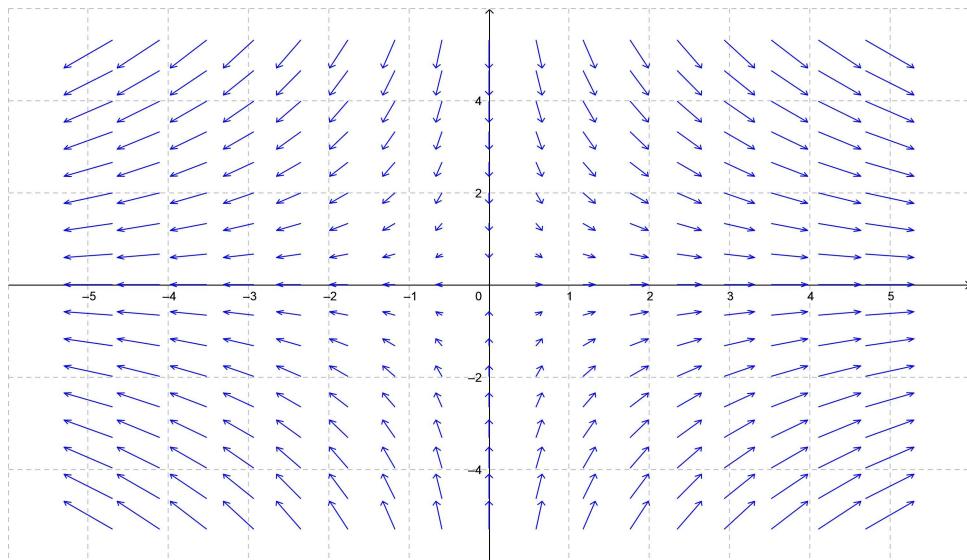


Figura 1.1: Esboço do Campo Vetorial  $f(x, y) = (x, -y)$ .

Em termos físicos, podemos pensar em um campo vetorial como um *campo de força*: as setas  $f(x)$  indicam a direção, sentido e intensidade da força que age em uma partícula que está em um determinado ponto  $x$ . Independente para onde a partícula esteja se movendo, a contribuição que o campo vetorial dá a este deslocamento pode ser identificado pelo conjunto de setas no esboço. Campos de vetores naturalmente presentes em nossas vidas são: campos elétricos, magnéticos e gravitacionais; os campos que compõem as ondas e ventos, que afetam navios e aviões.

Um campo vetorial pode mudar sua configuração (conjunto de setas) a medida que o tempo passa. Isto ocorre naturalmente, por exemplo, nos campos citados. Em tal caso, nós adicionamos uma dimensão extra (dimensão referente ao tempo) em seu domínio:  $f : \mathbb{E} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

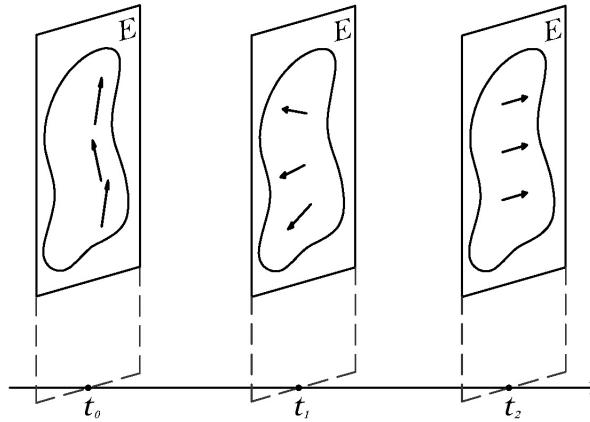


Figura 1.2: Esboço do Campo Vetorial que depende do tempo.

**Definição 1** Seja  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial definido em um conjunto aberto  $\mathbb{E} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Um equação da forma

$$x' = f(t, x) \quad (1.1)$$

é chamada de equação diferencial ordinária. Uma solução de tal equação é um caminho diferenciável  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definido em um intervalo  $I$  da reta, tal que  $(t, \varphi(t)) \in \mathbb{E}, \forall t \in I$ , e  $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ . Fixado  $(t_0, x_0) \in \mathbb{E}$  dizemos que uma solução  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  de (1.1) satisfaz à condição inicial  $x(t_0) = x_0$  se  $t_0 \in I$  e  $\varphi(t_0) = x_0$ . O problema de encontrar uma função que satisfaça ambas condições, a saber,

$$x' = f(t, x), x(t_0) = x_0,$$

é chamado de Problema do Valor Inicial ou Problema de Cauchy.

Podemos usar a seguinte interpretação física para a equação (1.1): se  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma solução então  $\varphi(t)$  denota a posição de uma partícula (que está percorrendo o caminho  $\varphi(I)$ ) no instante  $t$  e a velocidade de tal partícula é dada pelo campo  $f(t, \varphi(t))$ . Em outras palavras: o campo dita para onde as soluções estão se deslocando (Figura 1.3).

A equação (1.1) é denominada *não-autônoma*, pelo fato do campo vetorial depender do tempo. Se tal dependência não ocorre então temos a versão *autônoma*:

$$x' = f(x),$$

onde, agora,  $f : \mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , e cuja solução é um caminho  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tal que  $\varphi(t) \in$

$\mathbb{E}, \forall t \in I$ , com  $\varphi'(t) = f(\varphi(t))$ . Analogamente, o Problema do Valor Inicial associado é

$$x' = f(x), x(t_0) = x_0.$$

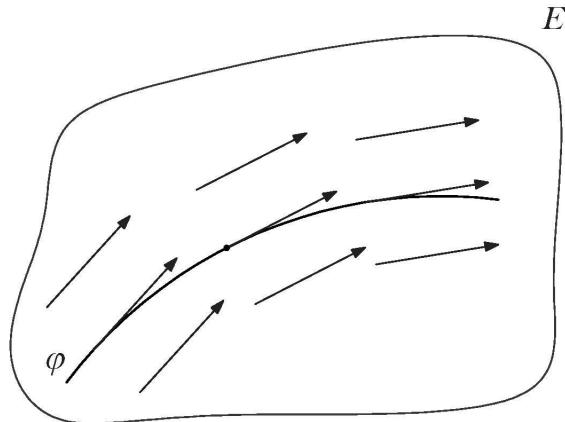


Figura 1.3: Solução,  $\varphi$ , de uma equação diferencial ordinária autônoma.

Quando nos referirmos a uma equação diferencial ordinária, escreveremos equação diferencial, por simplicidade. Além disso, concentraremos no estudo no caso autônomo; é o ramo onde situa-se o Teorema de Poincaré-Bendixson. Antes de prosseguirmos, apresentaremos um exemplo de natureza física como motivação.

**Exemplo.** Tomamos como exemplo o oscilador harmônico simples; uma equação diferencial linear muito útil para nosso estudo. O leitor irá se deparar com termos ainda não apresentados, no entanto, este exemplo servirá apenas de ferramenta para uma melhor compreensão do conteúdo abordado neste texto. Deixamos para apresentar as definições ao longo do estudo.

Considere uma mola de massa desprezível, cuja uma das pontas esteja fixa em uma parede, e a outra ponta à uma partícula sobre o chão, de massa  $m > 0$ , de maneira que tal partícula se desloque horizontalmente através da ação da mola. Vamos supor que não há atrito entre o chão e a partícula. Agora, basta considerar uma reta coordenada disposta no chão, de modo que se possa determinar a posição da partícula em relação ao ponto de repouso da mola, isto é, a origem do sistema: o ponto zero (ver figura 1.4)

Deduziremos uma equação que represente o deslocamento em relação ao tempo. Suponha que a partícula se encontra em uma posição onde a mola esteja esticada. Acontece que uma *força restauradora* movimentará a partícula rumo à origem do sistema. Esta força, pela

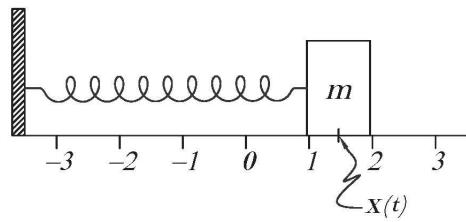


Figura 1.4: Oscilador harmônico simples

Lei de Hooke, é proporcional ao deslocamento da partícula em relação ao ponto em que a mola se encontra em repouso, agindo sem no sentido oposto ao deslocamento da partícula. Assim, a força restauradora se dá por

$$F_r = -kx(t),$$

onde  $k$  é a constante de proporcionalidade (determinada pelas propriedades mecânicas de fabricação da mola);  $x(t)$  é a posição da mola no tempo  $t$  e o sinal negativo é dado pelo fato de  $F_r$  ser uma força vetorial de sentido oposto ao deslocamento da partícula.

Dada a força restauradora, a qual depende da posição da partícula, vamos considerar uma outra força atuante sobre o sistema. Mesmo desconsiderando o atrito com o chão, a partícula pode perder energia cinética devido a um atrito existente com o meio no qual o sistema funciona, como por exemplo, a resistência do ar ou de qualquer outro fluído, tal como o óleo ou a água. Esta força de atrito é de intensidade proporcional à velocidade da partícula e é oposta ao seu deslocamento.

Além destas, poderíamos considerar uma força externa que independe da posição ou da velocidade da partícula. Esta força poderia ser proveniente de um simples empurrão do observador ou até mesmo de um campo magnético (se a partícula for metálica) ou uma vibração proporcionada pela interação do sistema com o ambiente. Entretanto, nos limitaremos neste ponto.

Pela segunda Lei de Newton, deduzimos a equação diferencial de segunda ordem

$$mx''(t) = -kx(t) - \mu x', \quad (1.2)$$

cuja solução para valores iniciais de posição e velocidade em um tempo  $t_0 = 0$ , nos dá a equação que descreve o movimento da partícula.

Podemos reescrever a equação como

$$x''(t) + \frac{\mu x'(t)}{m} + \frac{kx(t)}{m} = 0,$$

e denotando  $\omega^2 = k/m > 0$ ,  $2a = \mu/m \geq 0$ , obtemos

$$x''(t) + 2ax'(t) + \omega^2 x(t) = 0. \quad (1.3)$$

Considere, por agora, a força de atrito com o meio desprezível, isto é,

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0,$$

onde, para um determinado  $x(0) = x_0$  e  $x'(0) = y_0$ , temos por

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{y_0}{\omega} \sin \omega t$$

a única solução da EDO.

Pode-se observar pela solução da EDO que o movimento da partícula é senoidal e se repete toda vez que  $\omega t = 2n\pi$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Outrossim, o tempo necessário para uma oscilação completa do sistema é denominado de *período*  $T$ , de modo que  $\omega T = 2\pi$ , e portanto

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Como  $T$  representa o tempo por oscilação, então a sua inversa  $T^{-1} = f$  nos dá a frequência de oscilações por tempo, isto é,

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ao longo do texto, o leitor irá se deparar com equações diferenciais vetoriais. A equação diferencial de segunda ordem acima está bem definida na reta, entretanto, podemos considerá-la como uma equação vetorial. Basta introduzir uma variável bidimensional  $(x, y)$  e igualar a derivada  $x'(t) = y(t)$ . Então

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -\omega^2 x(t) \end{cases},$$

é o sistema cuja as componentes  $(x, y)$  representa a posição e a velocidade da partícula no plano bidimensional.

Em termos vetoriais, a equação acima pode ser representada por

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Deixamos para o leitor conferir que

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{y_0}{m} \sin \omega t \\ y(t) = -x_0 \omega \sin \omega t + y_0 \cos \omega t \end{cases}$$

é a única solução de (1) com as condições iniciais  $x(0) = x_0$  e  $y(0) = y_0$ .

Observe que a solução  $t \rightarrow (x(t), y(t))$ , para cada problema inicial, descreve uma trajetória da partícula, representada no plano bidimensional. Além disso, cada trajetória define uma órbita elíptica. Esboçando as órbitas de diferentes condições iniciais da EDO, obtemos o *retrato de fase* (ver figura 1 - (a)). Ademais, o fator determinante do retrato de fase é a matriz do sistema

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

A visualização do retrato de fase é uma excelente forma de entender a dinâmica de um sistema. Neste caso, conseguimos compreender o comportamento da partícula em relação ao seu deslocamento e sua velocidade.

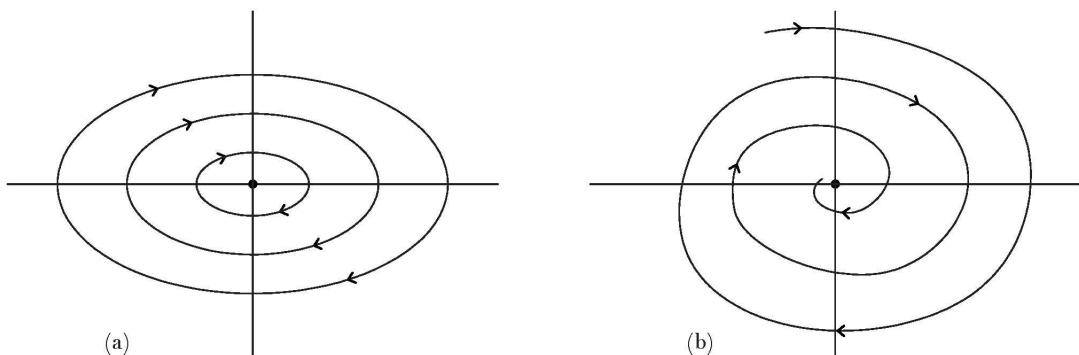


Figura 1.5: Retrato de fase de um Oscilador Harmônico. (a) sem atrito; b) com atrito

Voltemos a considerar o atrito com o meio e a partícula do oscilador representado por (1.3). Ao observar a figura 1.5, note que a energia cinética (velocidade e a amplitude do movimento) da partícula é perdida com o atrito existente. O retrato de fase, neste caso, é

representado por uma órbita que tende para a origem do plano; ao momento de repouso da mola.

Considerando a equação (1.3) em termos vetoriais, temos que a matriz da equação  $(x, y)' = A(x, y)$  é dado por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2a \end{pmatrix},$$

onde o termo  $-2a$ , para  $0 < a < \omega$ , é responsável pelo amortecimento do sistema. Destacamos que, se  $0 < \omega < a$ , o atrito seria suficiente para evitar as oscilações da partícula, alterando completamente o retrato de fase do caso da figura 1.5-(b).

Não obstante, a solução de (1.3) para uma condição inicial  $x(0) = x_0, y(0) = y_0$  é dada por

$$x(t) = e^{-at}(x_0 \cos \omega t + y_0 \frac{1}{\omega} \sin \omega t),$$

indicando que a órbita de qualquer solução tende exponencialmente à origem do sistema.

Ao longo deste texto, estudaremos uma solução geral para uma equação linear; os tipos de operadores lineares e os variados tipos de comportamento de seus respectivos retratos de fase.

Terminaremos esta seção com um resultado que nos garante que não estaremos “trabalhando no vácuo”, desde que o campo vetorial seja razoavelmente comportado.

**Teorema 1 (Existência e Unicidade)** *Se  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um campo de classe  $C^1$  então o Problema de Valor Inicial*

$$x' = f(x), x(t_0) = x_0,$$

*possui uma única solução definida em um intervalo aberto  $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$  para alguma constante  $\alpha = \alpha(t_0, x_0)$ .*

# Capítulo 2

## Equações Diferenciais Lineares

Uma função  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é chamada linear se, para quaisquer pontos  $x$  e  $y$  de seu domínio e qualquer constante real  $k$ , temos:

- (i)  $g(x + y) = g(x) + g(y);$
- (ii)  $g(kx) = kg(x).$

Denotemos por  $M(n)$ , o conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem  $n$ . Da teoria da Álgebra Linear, sabemos que  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é linear se, e somente se, existe uma matriz  $A \in M(n)$  tal que  $g(x) = A \cdot x$ , onde a variável  $x$  é vista como uma matriz coluna de  $n$  linhas e o produto “.” é o produto de matrizes.

**Definição 2** *Uma equação diferencial linear é uma equação da forma*

$$x' = Ax,$$

*para alguma matriz  $A \in M(n)$ .*

Tornando explícitos as coordenadas de pontos do domínio de um campo  $f : \mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  bem como suas funções coordenadas, temos

$$x = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)).$$

Dessa forma, a equação diferencial vetorial

$$x' = f(x), \tag{2.1}$$

é equivalente ao sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(x), \\ \vdots \\ x'_n = f_n(x). \end{cases}$$

Neste caso, temos que a função vetorial,  $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ , é solução da equação vetorial (2.1) se, e somente se, as funções coordenadas,  $\varphi_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , são soluções das respectivas equações do sistema.

Se  $f$  é um campo vetorial linear então a equação diferencial associada pode ser representada tanto da forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

(onde  $A$  é a matriz associada ao campo  $f$ , por este ser linear) quanto na forma do sistema

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ \vdots \\ x'_n = a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n. \end{cases}$$

Encontraremos a solução para uma EDO Linear de um modo Geral

## 2.1 Exponencial de Matrizes

Nesta seção, trataremos de estudar um meio de encontrar uma solução geral para as equações diferenciais lineares. Provas para os resultados desta seção podem ser encontradas no Capítulo 2 de [1].

Como vimos na seção anterior, a solução do problema

$$x' = x, x(0) = x_0,$$

é dada por  $\varphi(t) = e^t x_0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Mais geralmente, para a equação  $x' = ax$ , sendo  $a \in \mathbb{R}$  fixo, teríamos  $\varphi(t) = e^{at} x_0$  como solução do problema de valor inicial associado. Note que as soluções de equações diferenciais lineares unidimensionais envolvem a exponencial  $e^a$ , que

pode ser expressa numa série de potências:

$$e^a = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} a^j.$$

Interpretando o número  $a \in \mathbb{R}$  como uma matriz  $1 \times 1$ ,  $[a]$ , somos induzidos a definir a exponencial de uma matriz  $n \times n$  em busca de uma solução para as equações diferenciais lineares em dimensões maiores.

Recordemos que  $M(n)$  é o conjunto de todas as matrizes de ordem  $n$ , cujas entradas são números reais. Seja  $A \in M(n)$ . Usaremos as seguintes notações, para as potências de  $A$ :

$$A^0 = I, \quad A^1 = A \quad \text{e} \quad A^{m+1} = A^m \cdot A, \quad \forall m \geq 1.$$

**Definição 3** Seja  $A \in M(n)$ ,  $n \geq 1$ . A exponencial de  $A$  é uma matriz, também de ordem  $n$ , dada pela expressão:

$$e^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j.$$

Eventualmente usaremos a notação  $\exp(A)$  para nos referir à  $e^A$ . Trabalhando com normas de operadores e teoria de convergência de séries podemos mostrar que a exponencial de uma matriz está bem definida. Ademais, vale o seguinte resultado:

**Teorema 2** Se  $A \in M(n)$  então a única solução do problema de valor inicial

$$x' = Ax, \quad x(0) = x_0$$

pode ser escrita na forma

$$\varphi(t) = e^{tA} x_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

A expressão de  $\varphi$  nos diz que a solução geral de equações diferenciais lineares é o produto da exponencial da matriz associada ao campo,  $e^{tA}$ , (que é uma matriz de ordem  $n$ ) pela matriz coluna,  $x_0$ , provinda da condição inicial. (Observação: a matriz  $tA$  é o produto do número real  $t$  pela matriz  $A$ .)

A pergunta natural a se fazer então é: *como calcular a matriz exponencial  $e^{tA}$ ?* Desenvolveremos nosso estudo em busca de respostas para o caso em que  $A \in M(2)$ , isto é,  $A$  é uma matriz  $2 \times 2$ . As conclusões obtidas para soluções de equações diferenciais lineares de dimensão 2 são bases para as de dimensões superiores.

Uma matriz  $Q \in M(n)$  é *invertível* se existe uma matriz  $C \in M(n)$  tal que  $QC =$

$CQ = I$ , sendo  $I \in M(n)$  a matriz identidade. Neste caso, dizemos que  $C$  é a matriz inversa de  $Q$  e usamos a seguinte notação:  $C = Q^{-1}$ .

Duas matrizes  $A, B \in M(n)$  são *linearmente conjugadas* se existe uma matriz invertível que  $Q \in M(n)$ , tal que

$$A = Q^{-1}BQ.$$

A matriz  $Q$  é chamada *matriz de conjugação*. Usaremos a notação  $A \sim B$ , para indicar que  $A$  e  $B$  são linearmente conjugadas.

A primeira propriedade das exponenciais de matrizes é que: as exponenciais de matrizes linearmente conjugadas também são conjugadas. Mais precisamente:

**Teorema 3** Se  $A, B, Q \in M(n)$  são matrizes tais que  $A = Q^{-1}BQ$ , então  $e^A = Q^{-1}e^BQ$ .

O Teorema anterior nos indica que se soubermos calcular a exponencial da conjugada de uma matriz  $A$  então também conseguiremos calcular a exponencial de  $A$ , desde que conheçamos a matriz de conjugação. Desta forma, para resolvemos o problema de calcular a exponencial de uma matriz em  $M(2)$  enunciaremos um resultado que diz que qualquer matriz é conjugada a um certo tipo de matriz bem comportada, a qual podemos computar sua exponencial. Tais matrizes são chamadas de matrizes canônicas. Para enunciar tal resultado precisaremos de alguns conceitos prévios.

Seja  $A$  uma matriz em  $M(n)$ . Um número real  $\lambda$  e um vetor não nulo  $v \in \mathbb{R}^n$  são chamados *autovalor* e *autovetor* da matriz  $A$  se satisfazem à equação:

$$Av = \lambda v. \tag{2.2}$$

A equação anterior nos diz que  $v$  é um autovetor de  $A$  se sua imagem pela matriz estiver na mesma reta gerada por  $v$ . Da teoria da Álgebra Linear, temos que encontrar autovetores, essencialmente, é um meio de encontrar subespaços invariantes pela transformação linear associada à  $A$ . Para mais detalhes, veja [2].

Para calcularmos os autovalores de uma matriz procedemos da seguinte forma: à partir da equação (2.2), temos:

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v \\ Av &= \lambda Iv \\ (A - \lambda I)v &= \vec{0}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Na última equação está implícito um sistema com  $n$  equações e  $n$  incógnitas. Na matriz  $A - \lambda I$

jazem coeficientes de tal sistema, enquanto que suas incógnitas são as componentes do vetor  $v = (x_1, \dots, x_n)$  (que é visto como uma matriz coluna na equação). Da teoria da Álgebra Linear, sabemos que existe solução não nula  $v$  da equação (2.3) se, e somente se, o determinante da matriz  $A - \lambda I$  for nulo. Para o caso em que  $A \in M(2)$ , em outras palavras, precisamos encontrar número(s)  $\lambda$  que anule(m) o polinômio:

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det \left[ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] \\ &= \lambda^2 - (\text{tr}A)\lambda + \det A. \end{aligned}$$

Aqui,  $\text{tr}(A)$  significa o *traço da matriz*  $A$ , isto é, a soma dos elementos da diagonal principal de  $A$ . O polinômio em questão é chamado de *polinômio característico*. O Teorema Fundamental da Álgebra garante que o polinômio característico possui raízes, em mesma quantidade de seu grau, no conjunto dos números complexos.

Para o próximo resultado usaremos o conceito de *núcleo de uma matriz*  $A \in M(n)$ : é o conjunto de todos os vetores de  $R^n$  cuja imagem por  $A$  se anulam; denotaremos-lo por  $\mathcal{N}(A)$ .

**Teorema 4 (Forma Canônica de Jordan 2 × 2)** *Dependendo das duas raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  do polinômio característico  $P_A(\lambda)$  de uma matriz 2 × 2 real  $A \in M(2)$ , ocorre exatamente um dos seguintes casos de conjugação:*

1. se  $\lambda_1, \lambda_2$  são reais e  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , então  $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ;

2. se  $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2$  é real e

- (a)  $\dim \mathcal{N}(\lambda_0 I - A) = 2$ , então  $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ ;
- (b)  $\dim \mathcal{N}(\lambda_0 I - A) = 1$ , então  $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ ;

3. se  $\lambda_1 = a + ib$  e  $\lambda_2 = a - ib$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $b \neq 0$ , são números complexos conjugados, então  $A \sim \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ .

Uma matriz  $D$  é dita *matriz de Jordan* se assume alguma dentre as 4 matrizes específicas do teorema anterior.

Sejam  $A$  e  $D$  matrizes conjugadas,  $A = Q^{-1}DQ$ , sendo  $D$  uma matriz de Jordan. Pelos Teoremas 2 e 3, temos que o problema

$$x' = Ax, x(0) = x_0, \quad (2.4)$$

tem como solução a função

$$\varphi(t) = Q^{-1}e^{tD}Qx_0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

No caso particular em que  $A$  é uma matriz de Jordan,  $A = D$ , a solução do problema se reduz à

$$\psi(t) = e^{tD}x_0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

É importante observar que o comportamento das soluções  $\varphi$  (para cada  $x_0$  temos uma solução) se assemelham ao comportamento das soluções  $\psi$ . Este fato provém da conjugação entre as matrizes associadas aos campos lineares. Em resumo, *a solução do problema (2.4), sendo A uma matriz qualquer de  $M(n)$ , tem forma explícita dada por (2.5) e cujo comportamento global é o mesmo da solução em (2.6).* Por fim, para sabermos o comportamento desta última temos que saber calcular as exponenciais das matrizes de Jordan. Ei-las no próximo resultado:

**Proposição 1** *Para quaisquer números reais  $a, b$  e  $t$  temos:*

$$1. \exp\left(t \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^{ta} & 0 \\ 0 & e^{tb} \end{pmatrix};$$

$$2. \exp\left(t \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^{ta} & 0 \\ te^{ta} & e^{ta} \end{pmatrix};$$

$$3. \exp\left(t \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right) = e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) & \sin(bt) \\ -\sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}.$$

Na próxima seção abordaremos os comportamentos aludidos.

## 2.2 Classificação dos Sistemas Planares

Abordaremos uma descrição geométrica para sistemas planares. Ao decorrer do estudo, definimos os três casos da forma canônica de Jordan para matrizes  $M(2)$ . Particularmente, para cada caso, as soluções de uma equações linear vetorial se comportam de maneira

diferente. Mais particularmente, também ocorre variações em cada um dos casos, dependendo do sinal dos autovalores.

Tomamos o problema de valor inicial

$$x' = Ax, \quad x(0) = (k_1, k_2),$$

uma equação linear vetorial planar. Para cada ponto no domínio de  $x'(t)$  passa apenas uma órbita e pela unicidade de soluções, sabemos que, se dados dois pontos diferentes com suas respectivas órbitas, as órbitas são totalmente disjuntas ou são coincidentes.

Dada uma solução  $x = (x_1, x_2) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  de  $x' = Ax$ , diremos que uma órbita é o conjunto de todos os pontos desta solução. A saber,

$$\{x_1(t), x_2(t); t \in \mathbb{R}\}$$

Ora, observe que qualquer solução tem como domínio  $t \in \mathbb{R}$ , o que pressupõe um sentido de direção conforme  $t \rightarrow +\infty$ . Comumente, ao esboçar a órbita de uma solução graficamente, simbolizamos este sentido de direção com uma seta. Ademais, designamos um conjunto de órbitas como *retrato de fase*.

É importante que o leitor tenha em mente como é representado o retrato de fase de cada caso a seguir, pois este é um estudo preliminar para entender o comportamento de um campo não linear no  $\mathbb{R}^n$  que estudaremos posteriormente.

textbf{Primeiro caso.} Observe o primeiro caso das Formas Canônicas de Jordan em  $M(2)$ . Suponha que a equação  $x' = Ax$  seja conjugada à equação linear  $y' = By$ , onde

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Note que dada uma condição inicial  $y(0) = (l_1, l_2)$ , temos a solução

$$y(t) = (l_1 e^{\lambda_1 t}, l_2 e^{\lambda_2 t})$$

Como  $A \sim B$ , então as solução de  $x' = Ax, x(0) = (k_1, k_2)$  estão conjugadas com a solução acima, de maneira que, a origem  $(0, 0)$  é preservada e os eixos invariantes do sistema linear  $B$  são levados aos eixos invariantes dos autoespaços de  $A$ . Dito isto, analisaremos o

comportamento do retrato de fase de  $y' = By$ .

**Caso 1a.**  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , ambos negativos.

Repare que

$$y(t) = (l_1 e^{-|\lambda_1|t}, l_2 e^{-|\lambda_2|t}) = \left( \frac{l_1}{e^{|\lambda_1|t}}, \frac{l_2}{e^{|\lambda_2|t}} \right)$$

implica no seguinte fato: a solução se aproxima de zero quando  $t \rightarrow +\infty$ , e de igual modo, a solução tende para  $+\infty$  quando  $t \rightarrow -\infty$ . Denominamos um campo linear com tal comportamento de *campo atrator* e sua origem de *nó estável*.

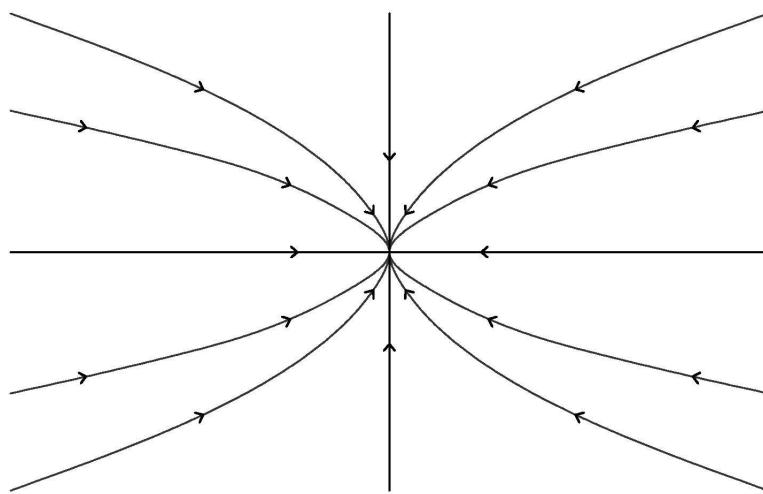
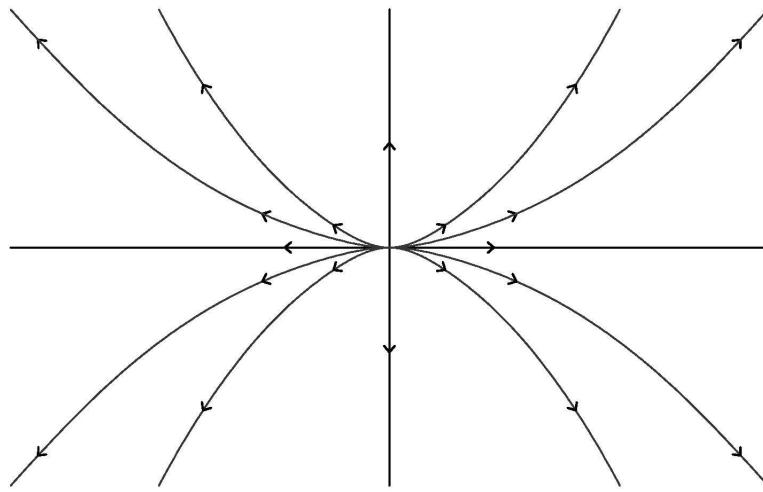


Figura 2.1: Campo atrator com  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , ambos negativos.

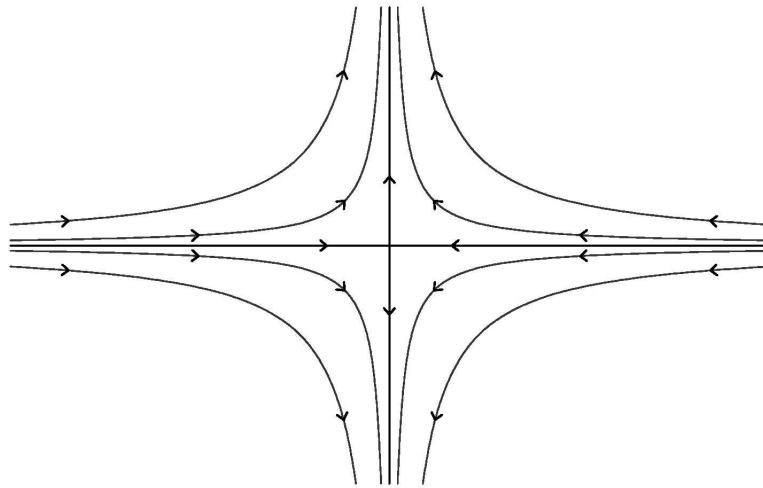
**Caso 1b.**  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , ambos positivos. Comparando este caso particular com o anterior, note que o comportamento do campo linear apenas muda o sentido, isto é, a solução tende para  $+\infty$  quando  $t \rightarrow +\infty$  ou para  $-\infty$  quando  $t \rightarrow -\infty$ . Neste caso, temos um *campo repulsor*, cuja a origem é uma *fonte*.

**Caso 1c.**  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , onde  $\lambda_1 < 0$  e  $\lambda_2 > 0$ . Para melhor entender este caso, consideremos o comportamento da solução sobre os eixos  $y_1$  e  $y_2$  do sistema.

Seja a solução sobre eixo  $y_1$ , segue de  $y(t) = \left( \frac{l_1}{e^{|\lambda_1|t}}, 0 \right)$  que, para  $l_1 < 0$ , a solução tende à  $-\infty$  com  $t \rightarrow -\infty$ , e também, para  $l_1 > 0$ , a solução tende  $+\infty$  com  $t \rightarrow -\infty$ , em outras palavras, as órbitas sobre os dois semi-eixos de  $y_1$  convergem para 0 conforme o tempo cresce positivamente. Todavia, o comportamento das órbitas sobre o eixo  $y_2$  é oposto às do eixo  $y_1$ . Como  $\lambda_2$  é positivo, temos da solução  $y(t) = (0, l_2 e^{\lambda_2 t})$  sobre o eixo  $y_2$  que, para  $l_2$  positivo, a solução tende para  $+\infty$  com  $t \rightarrow +\infty$ ; para  $l_2$  negativo, a solução tende para  $-\infty$  com  $t \rightarrow +\infty$ .

Figura 2.2: Campo repulsor com  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , ambos positivos.

As soluções fora dos eixo possuem comportamento semelhante, ao escolher um ponto distante da origem, por exemplo, um ponto próximo do eixo  $y_1$  e distante de  $y_2$ , acontece que o sentido de sua órbita será, paralelamente, o mesmo da órbita sobre  $y_1$ , entretanto, conforme a órbita deste ponto se proxima do eixo  $y_2$ , sua direção tende a acompanhar, paralelamente, a órbita sobre  $y_2$ . Dizemos que o campo linear é uma *sela*, conforme imagem 2.3.

Figura 2.3: Campo linear sela, quando  $\lambda_1 < 0$  e  $\lambda_2 > 0$ .

**Caso 1d.**  $\lambda_1 < 0$  e  $\lambda_2 = 0$  Dada as condições de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , temos  $y(t) = (l_1 e^{\lambda_1 t}, l_2)$ , isto é, a curva parametrizada  $y(t)$  possui uma componente constante, caracterizando-se em uma reta que passa por  $l_2$ , tendendo para  $\pm\infty$  quando  $t \rightarrow +\infty$ , dependendo do sinal de  $l_1$ .

**Caso 1e.**  $\lambda_1 > 0$  e  $\lambda_2 = 0$  O comportamento das soluções, neste caso particular,

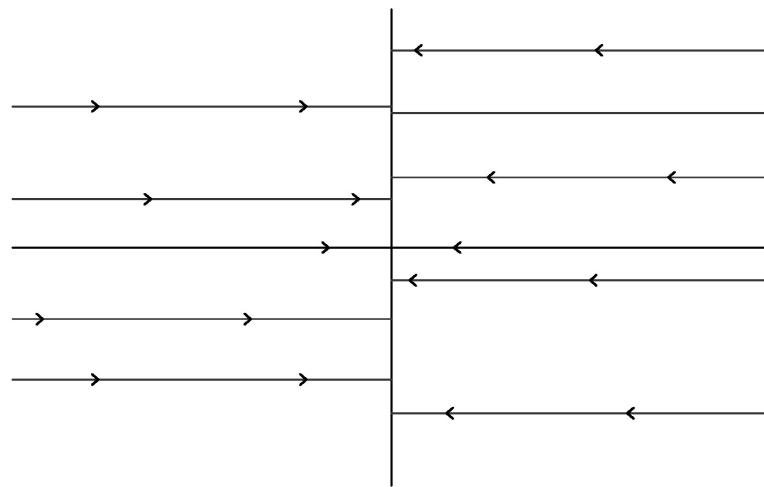


Figura 2.4: Campo linear do caso 1d.

é semelhante ao do caso anterior. Claramente, a diferença entre os dois casos está no sentido oposto das suas respectivas soluções.

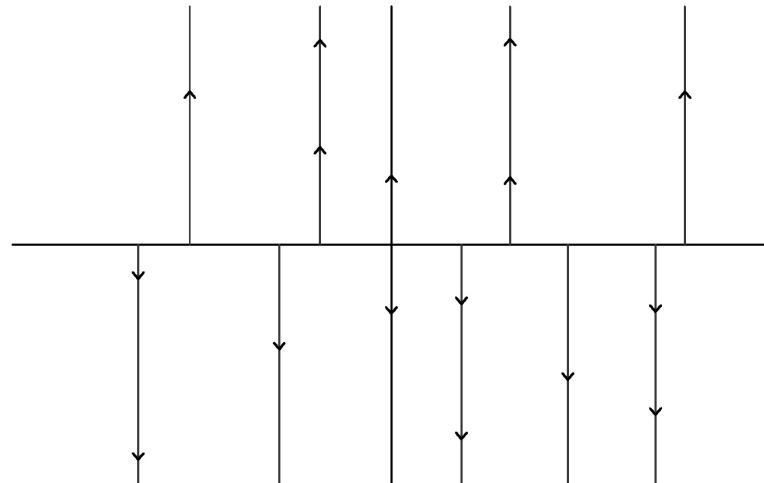


Figura 2.5: Campo linear do caso 1e.

**Segundo caso.** O segundo caso nos apresenta uma derivação na dimensão do núcleo da matriz cujo o polinômio característico possui raízes  $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2$  múltiplas. Cabe então analisar quantos autovetores estão associados ao autovalor  $\lambda_0$ .

Para  $\text{Nuc}(\lambda_0 I - A) = 2$ , dada uma condição inicial  $y(0) = (l_1, l_2)$ , temos

$$y(t) = (l_1 e^{\lambda_0 t}, l_2 e^{\lambda_0 t}) = e^{\lambda_0 t} (l_1, l_2) = e^{\lambda_0 t} y(0)$$

associada aos três seguintes casos.

**Caso 2a** Para  $\lambda_0 < 0$ . Observe que as coordenadas da solução  $e^{\lambda_0 t}y(0)$  tendem para 0 quando  $t \rightarrow +\infty$ , acarreta todas as órbitas do campo são semi-retas cujo a trajetória está voltada para a origem do sistema. Dizemos que o campo é um **atrator** e que sua origem é um **poço** ou um foco estável.

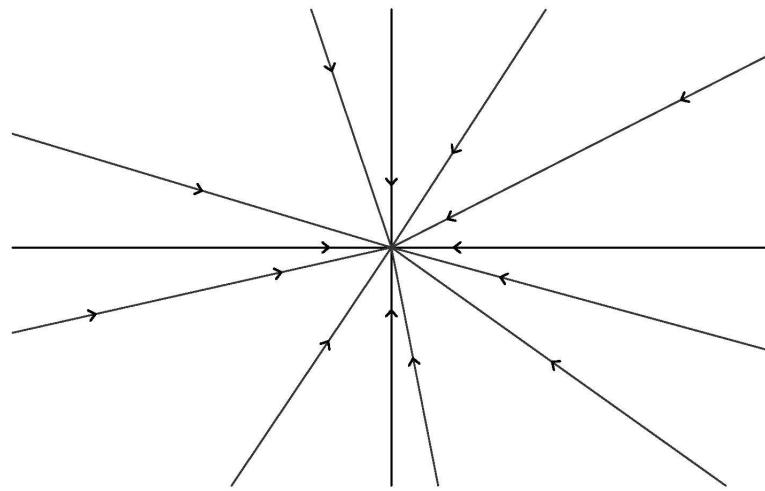


Figura 2.6: Campo atrator do caso 2a.

**Caso 2b** Para  $\lambda_0 > 0$ . Este caso é semelhante ao caso 2a, a diferença está apenas no sentido das órbitas, pois para  $\lambda_0 > 0$ , as coordenadas tendem à 0 conforme  $t \rightarrow -\infty$ .

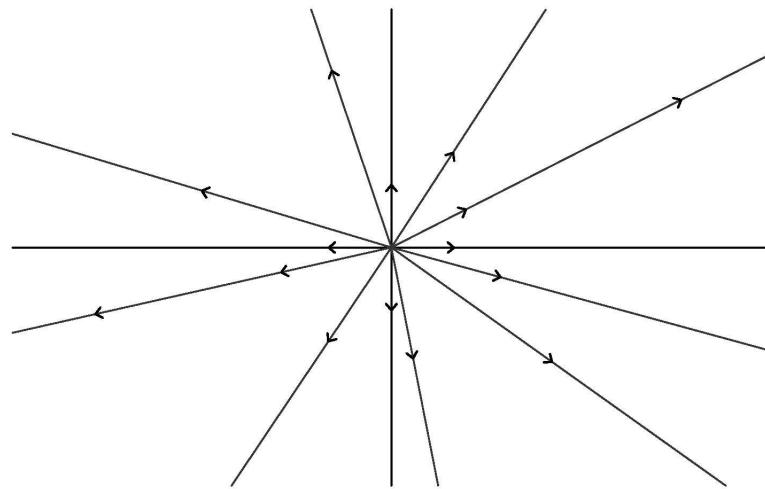


Figura 2.7: Campo repulsor do caso 2b.

**Caso 2c** Para  $\lambda_0 = 0$ . Temos que toda as soluções são constantes. Qualquer órbita do campo linear se resume em seu respectivo ponto.

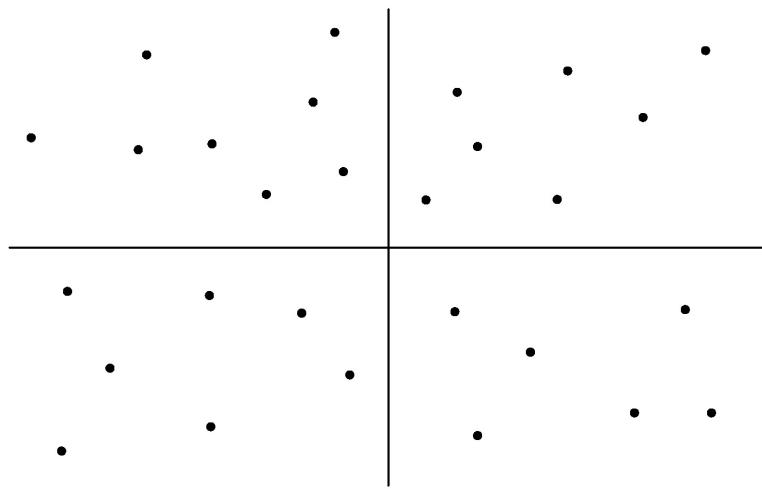


Figura 2.8: Retrato de fase do caso 2c.

Os casos adiantes estão associados à hipótese de  $\text{Nuc}(\lambda_0 I - B) = 1$ . Nesta condição, dada uma condição inicial  $y(0) = (l_1, l_2)$ , temos  $y(t) = (l_1 e^{\lambda_0 t}, (l_1 t + l_2) e^{\lambda_0 t})$  como solução do campo. De fato, através de uma mudança de coordenadas, a equação vetorial

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

é representada pelo sistema

$$\begin{cases} y'_1 = \lambda_0 y_1 \\ y'_2 = y_1 + \lambda_0 y_2 \end{cases} .$$

onde o leitor poderá facilmente constatar que a primeira equação tem como solução  $y_1(t) = l_1 e^{\lambda_0 t}$ . Para resolver a segunda equação, basta substituir  $y_1$  para ter

$$y'_2 = l_1 e^{\lambda_0 t} + \lambda_0 y_2$$

e resolver pelo método do *fator de integração* e então obter a segunda coordenada da solução  $y(t)$ ,

$$y_2(t) = l_1 t e^{\lambda_0 t} + l_2 e^{\lambda_0 t} = (l_1 t + l_2) e^{\lambda_0 t}.$$

Observe que ao tomar os limites da solução  $y(t) = (l_1 e^{\lambda_0 t}, (l_1 t + l_2) e^{\lambda_0 t})$  para  $t \rightarrow \pm\infty$ , o termo  $e^{\lambda_0 t}$  predomina em ambas as componentes de  $y(t)$ . Dito isto, podemos então observar mais três casos adiante.

**Caso 2d.** Para  $\lambda_0 < 0$ . Note, pela solução definida, que as duas coordenadas de  $y(t)$  tendem a 0 com  $t \rightarrow +\infty$ , em outras palavras, as curvas paramétricas definidas pela solução compõe um campo *atrator*, cuja origem é um *poço*. Particularmente, para este caso, denominamos a origem do campo como um *nó impróprio estável*.

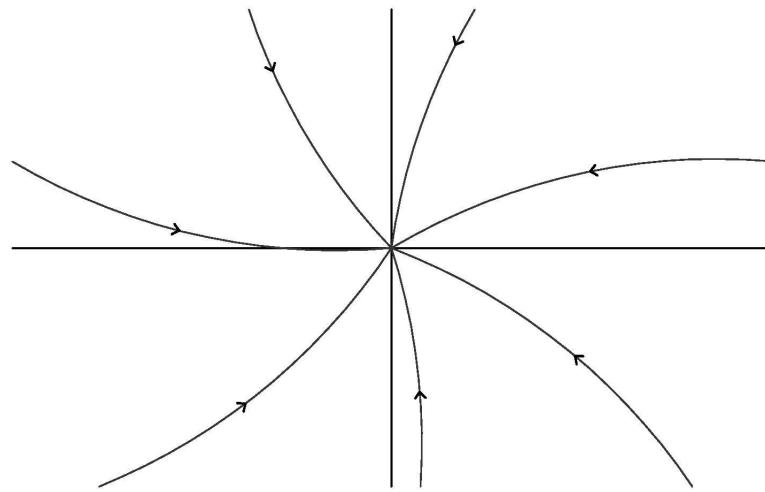


Figura 2.9: Retrato de fase do caso 2d.

**Caso 2e.** Para  $\lambda_0 > 0$ . Este caso é semelhante ao caso 2d. Como o sinal de  $\lambda_0$  é oposto ao do caso anterior, acarreta que o sentido das trajetórias do campo também é. Dizemos que o campo é um *repulsor* e sua origem é uma *fonte*. De modo específico, chamamos a origem deste campo de *nó impróprio instável*.

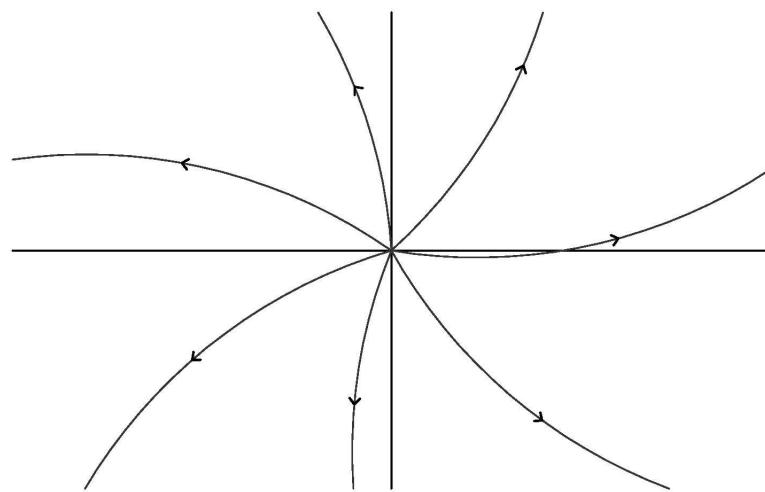


Figura 2.10: Retrato de fase do caso 2e.

**Caso 2f.** Para  $\lambda_0 = 0$ . Neste caso, temos a solução do campo  $y(t) = l_1, tl_1 + l_2$ . Observe a

primeira coordenada é constante, então toda solução do campo é uma semireta vertical. Observe ainda que a segunda componente da solução depende somente de  $tl_1$ , isto é, o sinal de  $l_1$  determina o sentido das trajetórias do campo, e ainda, se  $l_1 = 0$  a solução será  $y(t) = (0, l_2)$  constante.

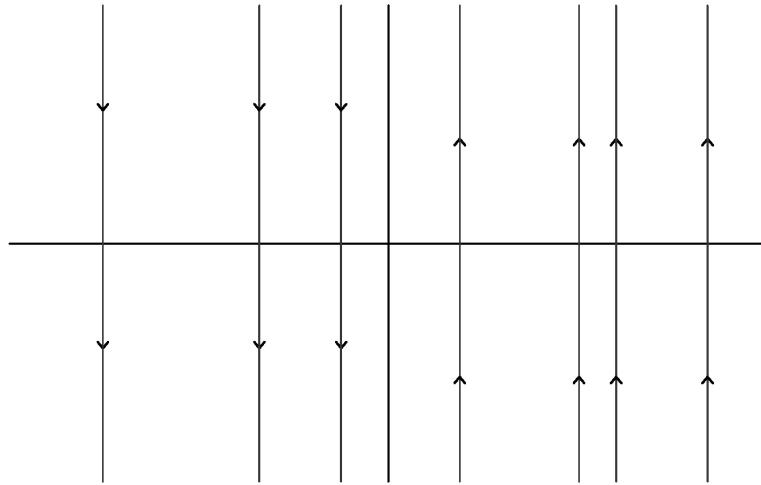


Figura 2.11: Retrato de fase do caso 2f.

**Terceiro caso.** No terceiro caso das Formas Canônicas de Jordan, temos  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ , cuja solução do campo

$$y' = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot y$$

é dada, na forma exponencial e Euler, por

$$y(t) = re^{at}(\cos b(t-\theta), -\sin b(t-\theta)).$$

Observe que o comportamento da solução depende do termo exponencial e das funções trigonométricas. Particularmente, o campo possui um aspecto senoidal que, somado ao aspecto exponencial, implica que as trajetórias são espirais que se expandem ou se contraem, quando  $t \rightarrow +\infty$ , dependendo do sinal de  $a$ .

**Caso 3a.** Para  $a > 0$ . Neste caso, contanto que a condição inicial não seja a origem do sistema, a solução do campo tende para  $(0, 0)$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . Este campo é um *atrator* cuja origem é um *poço*. Particularmente, dizemos que a origem é uma espiral estável.

**Caso 3b.** Para  $a < 0$ . O retrato de fase deste caso é semelhante ao do caso acima, entretanto, note a solução tende para 0 quando  $t \rightarrow -\infty$ , isto é, o sentido de suas trajetórias é opostos.

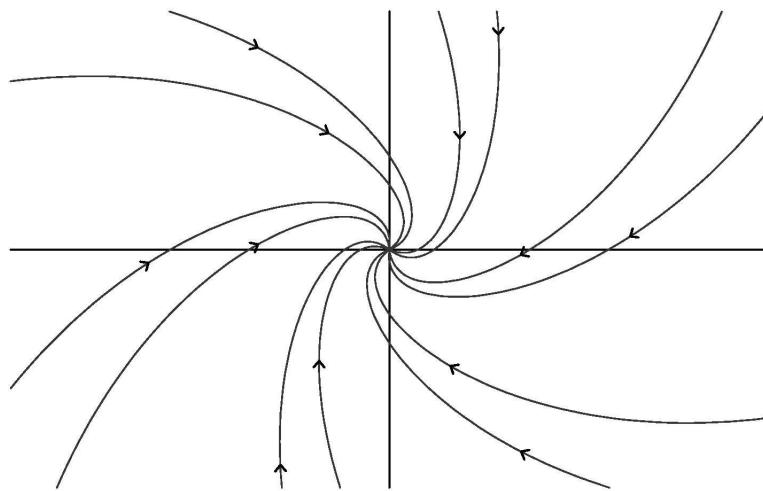


Figura 2.12: Retrato de fase do caso 3a.

Então este campo é um *repulsor* cuja origem é uma *fonte*. Particularmente, a origem aqui é denominada de *espiral instável*.

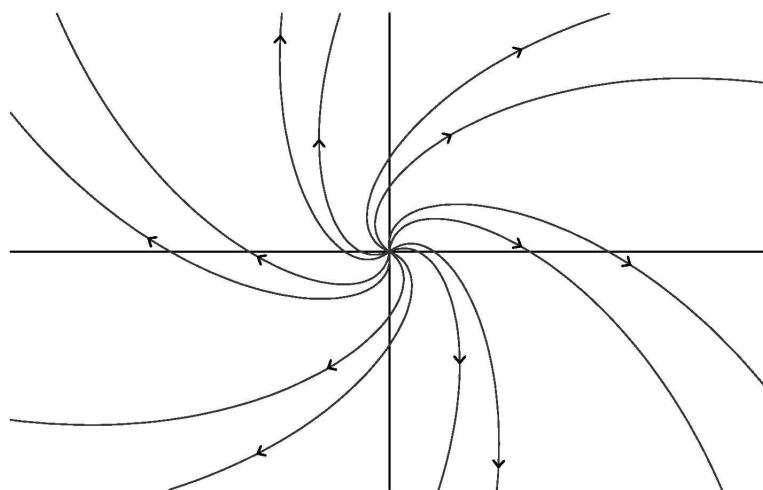


Figura 2.13: Retrato de fase do caso 3b.

**Caso 3c.** Para  $a = 0$ . E finalmente, o último caso a ser abordado nesta subseção. Note que, quando  $a = 0$ , a solução se torna

$$y(t) = r(\cos b(t - \theta), -\sin b(t - \theta)),$$

conservando apenas o seu aspecto senoidal. O retrato de fase deste campo é composto por órbitas elípticas cujo o sentido das trajetórias, no plano, dependem do sinal de  $b$ .

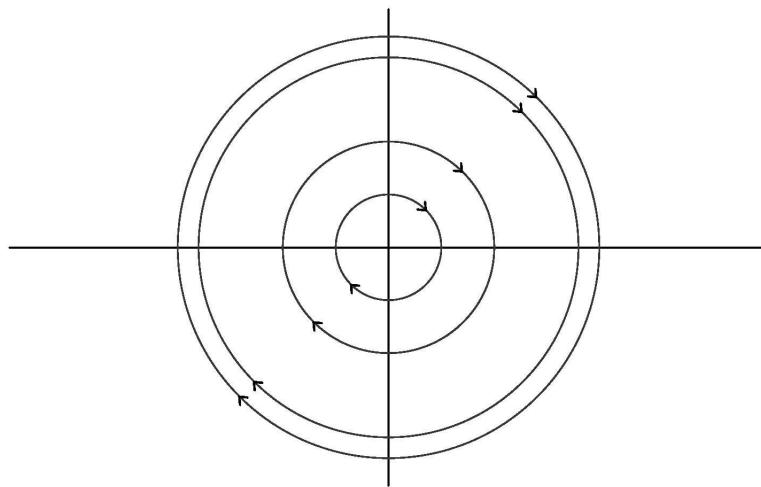


Figura 2.14: Retrato de fase do caso 3c.

Assim, visto todos os casos acima, existe, topologicamente, apenas três tipos de retrato de fase:

- os atratores, onde todas as soluções do campo tendem à origem;
- os repulsores, onde todas as soluções “emanam” da origem;
- e as selas, onde apenas duas soluções tendem à origem quando  $t \rightarrow +\infty$  e outras duas quando  $t \rightarrow -\infty$ , ambas as soluções estão sobre os eixos do sistemas e nenhuma solução fora dos eixos tende para a origem.

# Capítulo 3

## Campos de Vetores

Seja  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo de vetores definido em um conjunto aberto  $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n$ . Neste Capítulo, estudaremos o Problema de Valor Inicial para a equação diferencial autônoma

$$x' = f(x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.1)$$

onde o campo  $f$  não seja necessariamente linear. Primeiramente, recordemos o Teorema de Existência e Unicidade que enunciarmos ao final da Seção 1.

**Teorema 5 (Existência e Unicidade)** *Se  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um campo  $C^1$  então o Problema de Valor Inicial (3.1) possui uma única solução definida em um intervalo aberto  $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$  para alguma constante  $\alpha = \alpha(t_0, x_0)$ .*

Se  $f$  é  $C^k$  então qualquer solução de (3.1) é  $C^{k+1}$ . De fato, se  $\varphi$  é uma solução então ela é diferenciável e  $\varphi' = f \circ \varphi$ . Em particular, ambas funções  $f$  e  $\varphi$  são contínuas, logo a composta  $f \circ \varphi$  também o faz. Dessa forma, obtemos que  $\varphi$  é  $C^1$ . Analogamente,  $f \circ \varphi \in C^1 \Rightarrow \varphi \in C^2$ . Após  $k$ -passos chegamos que  $\varphi' = f \circ \varphi \in C^k \Rightarrow \varphi \in C^{k+1}$ .

As equações diferenciais autônomas satisfazem uma condição particular que nos permite estudar as soluções do problema (3.1) atribuindo zero à condição inicial temporal,  $t_0 = 0$  (Figura 3.1). Mais precisamente, se  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma solução de (3.1) então a aplicação  $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $\psi(t) = \varphi(t + t_0)$ , onde  $J = \{t \in \mathbb{R} \mid t + t_0 \in I\}$ , satisfaz às condições:

- (a)  $\psi'(t) = \varphi'(t + t_0) = f(\varphi(t + t_0)) = f(\psi(t))$ ;
- (b)  $\psi(0) = \varphi(t_0) = x_0$ ;
- (c)  $\psi(J) = \varphi(I)$ .

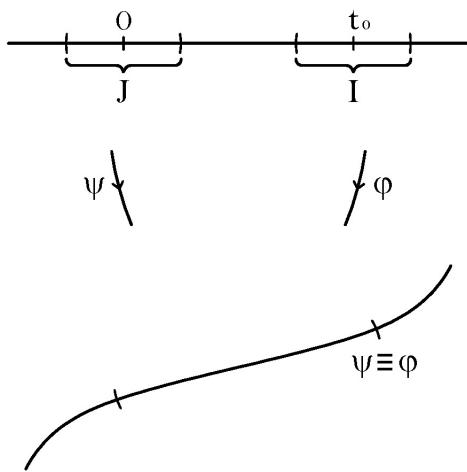


Figura 3.1: Solução original e a solução com tempo transladado possuem a mesma imagem em  $\mathbb{E}$ .

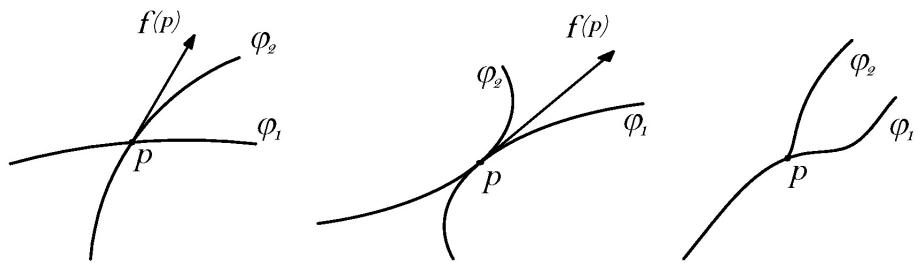
### 3.1 O que não pode ocorrer em campos $C^1$

Destacaremos algumas situações proibidas às soluções de equações diferenciais autônomas de campos  $C^1$ .

Seja  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial de classe  $C^1$ . Sejam  $\varphi_1$  and  $\varphi_2$  duas soluções da equação  $x' = f(x)$ . Então:

- (i) tais soluções não podem se intersectar de forma transversal, como indicado na Figura 3.2 (à esquerda), caso contrário nós teríamos duas velocidades distintas em um mesmo ponto; o que seria um absurdo pois a velocidade em cada ponto é única, e dada pelo campo de vetores.
- (ii) tais soluções não podem ser tangentes em um ponto  $p$ , como na Figura 3.2 (à direita), caso contrário, devido à Propriedade da Translação do Tempo das soluções da EDO's autônomas, poderíamos assumir que ambas soluções,  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  passam pelo ponto  $p$  no mesmo instante  $t_0$ ; isto é, ambas satisfazem à condição inicial  $x(t_0) = x_0$ . Isto é um absurdo, pois neste caso elas teriam que coincidir num intervalo contendo  $t_0$  (Teorema 5).
- (iii) elas não podem ser iguais num certo intervalo e depois se bifurcarem, como na Figura 3.2 (ao centro), caso contrário o mesmo argumento do item (ii) poderia ser aplicado para o último ponto antes da bifurcação.

O próximo resultado diz que a unicidade local garantida pelo Teorema 5 se estende a todo intervalo comum de definição de soluções.

Figura 3.2: O que não pode ocorrer em campos  $C^1$ 

**Proposição 2** Se  $\varphi_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\varphi_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  são soluções de

$$x' = f(x), x(t_0) = x_0,$$

onde  $I_1$  e  $I_2$  são intervalos abertos, então

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t), \quad \forall t \in I_1 \cap I_2.$$

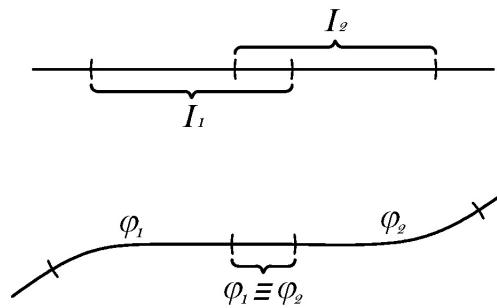


Figura 3.3: Soluções Distintas têm a mesma imagem em intervalos comuns a seus domínios.

## 3.2 Soluções Maximaes

**Definição 4** Um caminho  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma solução maximal do problema de valor inicial

$$x' = f(x), x(0) = x_0 \tag{3.2}$$

se, dada qualquer solução  $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  de (3.2), temos:

- (i)  $J \subset I$

(ii)  $\varphi(t) = \psi(t)$ ,  $\forall t \in J$ .

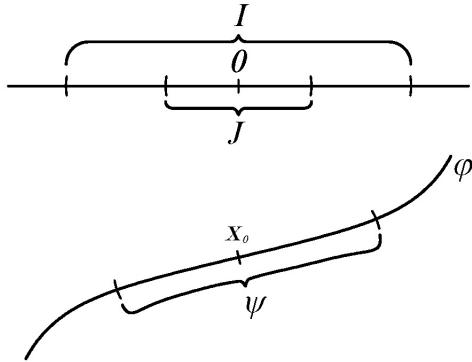


Figura 3.4: ambas  $\varphi$  e  $\psi$  são soluções passando por  $x_0$  porém  $\varphi$  é maximal.

**Proposição 3** Se  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um campo vetorial  $C^1$  então o problema (3.2) tem uma única solução maximal.

**PROVA. (Existência)** Seja  $\mathcal{S}$  o conjunto de todas as soluções de (3.2). Defina o seguinte intervalo

$$I = \bigcup_{\psi \in \mathcal{S}} I_\psi,$$

onde  $I_\psi$  é o intervalo de definição da solução  $\psi \in \mathcal{S}$ . Considere a função  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por,  $\varphi(t) = \psi(t)$ , se  $t \in I_\psi$ . Pela Proposição 2, temos que  $\varphi$  está bem definida. Além disso, da própria definição do intervalo  $I$  e da lei de  $\varphi$  temos:

- (i)  $I \supset I_\psi$ ;
- (ii)  $\varphi(t) = \psi(t)$ ,  $\forall t \in I_\psi$ .

Ou seja,  $\varphi$  é uma solução máxima do problema (3.2).

**(Unicidade)** Suponha que  $\eta : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  seja outra solução maximal. Então,  $I \subset J$  e  $J \subset I \Rightarrow I = J$ . Ademais  $\varphi(t) = \eta(t)$ ,  $\forall t \in J = I$ . Isto é,  $\varphi \equiv \eta$ .

□

O intervalo de definição de uma solução máxima é chamado de *intervalo máximo*. Se  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a solução máxima de (3.2) então denotamos seu intervalo máximo por  $I = I_{x_0}$ . Todo intervalo máximo é aberto e contém o tempo  $t_0 = 0$ .

### 3.3 O Fluxo de um Campo Vetorial

Seja  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo  $C^1$ . Denote por  $\eta : I_x \rightarrow \mathbb{R}^n$  a solução máxima do problema

$$\varphi' = f(\varphi), \varphi(0) = x.$$

Se um certo tempo  $t$  pertence a todos os intervalos maximais, isto é, se  $t \in I_x$  para todo  $x \in \mathbb{E}$ , então podemos definir o *fluxo no tempo t*, associado ao campo vetorial  $f$ , como sendo a função

$$\varphi_t : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$$

$$x \longmapsto \eta(t).$$

Em outras palavras,  $\varphi_t$  descreve a posição de cada ponto  $x \in \mathbb{E}$  após ter sido “carregado” pela solução maximal que passa por dito ponto, por um tempo igual a “t”.

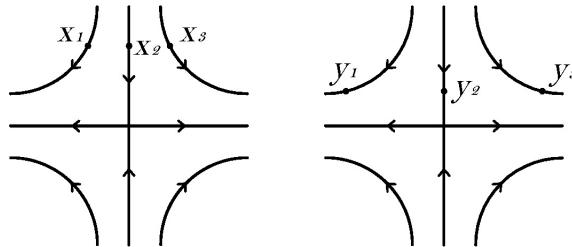


Figura 3.5: Na figura à esquerda temos uma sela com 3 pontos destacados:  $x_1, x_2$  e  $x_3$ . Já à direita, suas imagens:  $y_1 = \varphi_t(x_1)$ ,  $y_2 = \varphi_t(x_2)$  e  $y_3 = \varphi_t(x_3)$ . As curvas por cada ponto no gráfico são imagens das soluções maximais.

**Proposição 4** Seja  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo  $C^1$ . Suponha que  $t$  e  $s$  sejam números reais tais que:  $-t, t, s, t + s \in I_x$  para todo  $x \in \mathbb{E}$ . Então:

(i)  $\varphi_t : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  é um difeomorfismo;

(ii)  $\varphi_{s+t} \equiv \varphi_t \circ \varphi_s$ ;

(iii)  $\varphi_0 \equiv id$ ;

(iv)  $(\varphi_t)^{-1} \equiv \varphi_{-t}$ .

Para definir o fluxo associado ao campo  $f$  nós inseriremos o parâmetro  $t$  da família  $\{\varphi_t\}_t$  no domínio de uma aplicação.

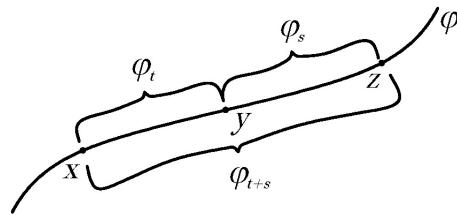


Figura 3.6: Ilustrando o caso (ii). O ponto  $x$  é carregado até o ponto  $y$  pela função  $\varphi_t$ . Em seguida,  $y$  é levado à  $z$  por  $\varphi_s$ . Isto equivale à  $x$  ser levado à  $z$  por  $\varphi_{s+t}$ .

**Definição 5** Considere o conjunto

$$\Omega = \{(t, x) \mid t \in I(x), \forall x \in \mathbb{E}\}.$$

O fluxo associado ao campo  $f$  é a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \Omega &\longrightarrow \mathbb{E} \\ (t, x) &\longmapsto \varphi_t(x). \end{aligned}$$

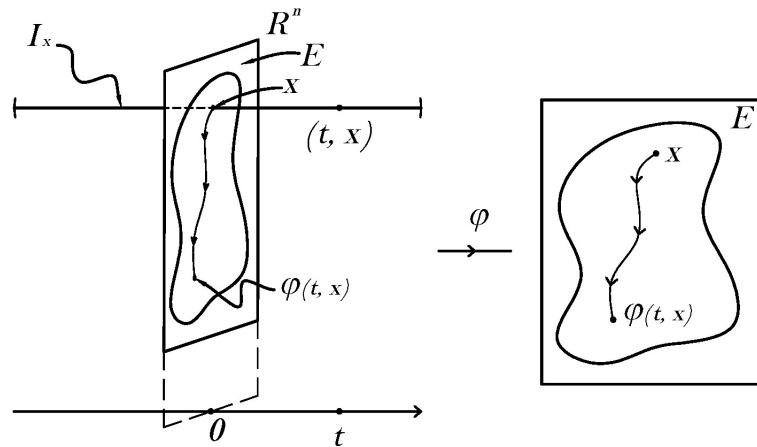


Figura 3.7: Aplicação Fluxo

**Teorema 6** Seja  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo de classe  $C^k$ . Então o conjunto

$$\Omega = \{(t, x) \mid t \in I(x), \forall x \in \mathbb{E}\}$$

é aberto e o fluxo associado,  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{E}$ , também é de classe  $C^k$ .

Para uma prova deste Teorema, veja Artur Lopes. Teorema 4.4.

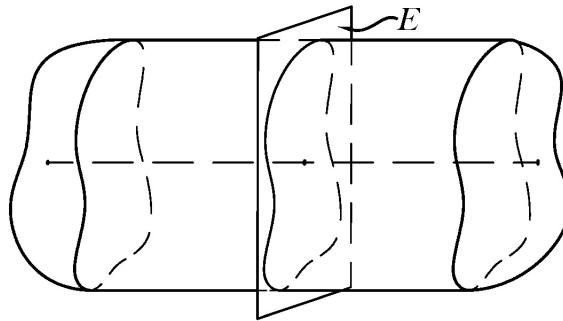


Figura 3.8: Esboço geométrico do domínio  $\Omega$  de um fluxo  $\varphi$ . Em destaque, o segmento de reta aberto  $I_x \times \{x\} \subset \Omega$ .

**Observação 7** *Há duas funções importantes embutidas na notação do fluxo:*

1. *ao fixarmos a variável temporal,  $t = t_0$ , e variarmos  $x \in \mathbb{E}$  então a aplicação  $\varphi(t_0, x)$  torna-se um difeomorfismo: é precisamente o fluxo no tempo  $t_0$  (definido anteriormente);*
2. *ao fixarmos a variável espacial,  $x = x_0$ , e variarmos  $t \in I_{x_0}$  então a aplicação  $\varphi(t, x_0)$  torna-se a solução máxima do problema  $x' = f(x), x(0) = x_0$ .*

*Em outras palavras, o fluxo de um campo é uma família de difeomorfismos que abrange todas as soluções da equação diferencial associada ao campo.*

É sempre possível reparametrizar um campo de tal modo que sua caracterização dinâmica seja preservada mas agora todos seus intervalos máximos sejam iguais a  $\mathbb{R}$ . Nesta situação, o domínio  $\Omega$ , na Figura 3.8, tornar-se-ia um cilindro.

## 3.4 Retratos de Fase de Campos Vetoriais

Seja  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo  $C^1$ . Usaremos a mesma notação de fluxo de um campo vetorial,  $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ , para nos referirmos à solução maximal do problema

$$x' = f(x), x(0) = p.$$

Chamamos de *órbita de  $f$  por  $p$*  ao conjunto

$$\gamma_p = \{\varphi(t, p) \in \mathbb{E} \mid t \in I_p\}.$$

Para quaisquer duas órbitas  $\gamma_p$  e  $\gamma_q$ , temos que: ou elas coincidem ou são disjuntas. De fato, se  $q \in \gamma_p$  então  $q = \varphi(t_1, p)$ , para algum  $t_1 \in I_p$ . Segue-se que,

$$\begin{aligned}\gamma_q &= \{\varphi(t, q) \mid t \in I_q\} \\ &= \{\varphi(t, \varphi(t_1, p)) \mid t \in I_q\} \\ &= \{\varphi(t + t_1, p) \mid t + t_1 \in I_q + t_1\} \\ &= \{\varphi(s, p) \mid s \in I_p\} \\ &= \gamma_p.\end{aligned}$$

Logo, o domínio  $\mathbb{E}$  é decomposto em uma união disjunta de órbitas de  $f$ .

Há algumas órbitas especiais que são chamadas de *elementos críticos*. São elas:

- *Pontos Singulares* (ou *Singularidades*) - são órbitas que se reduzem a um único ponto:  
 $\gamma_p = \{p\}$ ;
- *Órbitas fechadas* (ou *periódicas*) - são órbitas,  $\gamma_p = \{\varphi(t, p) \mid t \in I_p\}$ , para as quais existe um número real  $\tau > 0$  (chamado de *período*), tal que

$$\varphi(t + \tau, p) = \varphi(t, p), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e

$$\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2), \text{ se } |t_1 - t_2| < \tau.$$

À parte destas órbitas especiais, qualquer outra órbita é a imagem injetora de um intervalo aberto da reta.

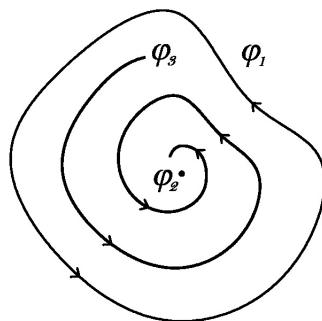


Figura 3.9: as órbitas  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são exemplos de: órbita periódica e singularidade. Já,  $\gamma_3$  é a imagem injetora de um intervalo aberto da reta.

Do ponto de vista físico, as órbitas podem ser interpretadas como um caminho percorrido por uma partícula. Por este motivo, também usamos as terminologias: *trajetórias*, quando nos referimos às órbitas em geral; e *pontos estacionários* ou *pontos de equilíbrio*, em alusão aos pontos singulares.

Para indicar a direção positiva das trajetórias, usamos setas. Por direção positiva queremos dizer: a direção na órbita para o qual a posição se desloca à medida que o parâmetro “t” (pensado como *tempo*) cresce. Esta marcação em setas forma o que chamamos de *órbitas orientadas*.

**Definição 6** O domínio  $\mathbb{E}$  do campo  $f$  munido da decomposição em órbitas orientadas disjuntas é chamado de *retrato de fase do campo f*.

Para esboçarmos o retrato de fase de um campo vetorial, destacamos algumas órbitas orientadas de  $f$  em quantidade suficiente (incluindo os elementos críticos) modo a revelar o comportamento global das órbitas em  $\mathbb{E}$ .

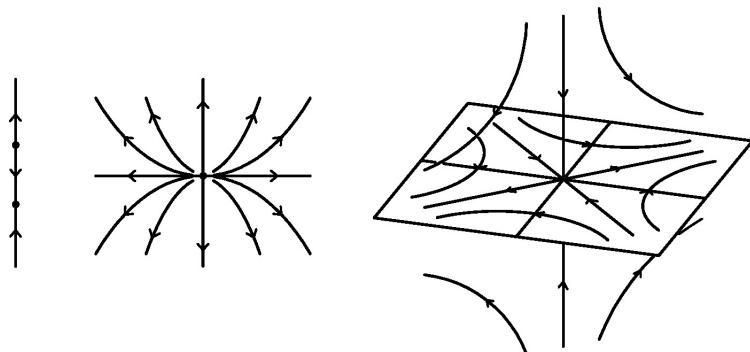


Figura 3.10: exemplos de retratos de fase de campos definidos na reta, no plano e no espaço.

## 3.5 Conjugação de Campos Vetoriais

Sejam  $f_1 : E_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $f_2 : \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  dois campos de vetores de classe  $C^r$  e seus respectivos fluxos  $\varphi_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\varphi_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $f_1$  e  $f_2$  são topologicamente conjugados se existe um homeomorfismo  $h : \mathbb{E}_1 \rightarrow \mathbb{E}_2$  que satisfaz a equação

$$h(\varphi_1(t, p)) = \varphi_2(t, h(p)), \quad \forall (t, p) \in \Omega_1.$$

Se  $h$  é uma função de classe  $C^r$ , então dizemos que  $f_1$  e  $f_2$  são  $C^r$ -conjugados. Chamamos tal função,  $h$ , de *conjugação topológica ou  $C^r$ -conjugação (conforme o caso)*.

Denote por  $I_1(\cdot)$  e  $I_2(\cdot)$  os intervalos máximos das órbitas (maximais) dos campos  $f_1$  e  $f_2$ . Se tais campos são conjugados então suas órbitas associadas estão definidas no mesmo intervalo máximo, isto é:

$$I_1(p) = I_2(h(p)), \quad \forall p \in E_1.$$

De fato,  $t \in I_1(p) \Leftrightarrow \varphi_1(t, p) \in E_1 \Leftrightarrow h(\varphi_1(t, p)) = \varphi_2(t, h(p)) \in E_2 \Leftrightarrow t \in I_2(h(p))$ .

Ademais, os pontos singulares e as órbitas periódicas (bem como seus respectivos períodos) são preservados. Mais precisamente, se  $p \in E_1$  é um ponto singular de  $f_1$  então  $h(p) \in E_2$  é um ponto singular de  $f_2$ . De fato, para cada  $t \in I_1(p)(= I_2(h(p)))$ , temos

$$\varphi_2(t, h(p)) = h(\varphi_1(t, p)) = h(p).$$

Agora, tratando da afirmação sobre as órbitas periódicas, se  $\gamma \subset \mathbb{E}_1$  é uma órbita  $\bar{t}$ -periódica de  $f_1$  por  $p \in \mathbb{E}_1$  então  $h(\gamma) \subset \mathbb{E}_2$  é uma órbita  $\bar{t}$ -periódica de  $f_2$ , por  $h(p) \in \mathbb{E}_2$ . De fato,

$$\varphi_2(\bar{t}, h(p)) = h(\varphi_1(\bar{t}, p)) = h(p).$$

## 3.6 Seções Transversais

Seja  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$  um fluxo  $C^r$  e  $A$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Dizemos que uma função  $C^r$   $s : A \rightarrow \mathbb{E}$  é uma *seção transversal local de  $f$*  se satisfaz:

$$f(s(p)) \notin Ds(p)(\mathbb{R}^{n-1}), \quad \forall p \in A,$$

onde  $Ds(p)$  denota a derivada da função  $s$  avaliada no ponto  $p$ . Em outras palavras,  $s$  é uma seção transversal local de  $f$  se o vetor gerado pelo campo em cada ponto  $p$  da superfície  $s(A)$  for transversal ao plano tangente à dita superfície. Considere o conjunto  $\Sigma = s(A)$  munido da topologia induzida. Se  $s : A \rightarrow \Sigma$  é um homeomorfismo, então dizemos que  $\Sigma$  é uma *seção transversal de  $f$* .

Seja  $p \in \mathbb{E}$ . Um exemplo de seção transversal de  $f$  contendo  $p$  (ou por  $p$ ) é o conjunto  $\Sigma = H_p \cap U_p$ , onde  $U_p \subset \mathbb{R}^n$  é aberto e  $H_p \subset \mathbb{R}^{n-1}$  é um plano contendo  $p$ , tal que  $f(p) \notin H_p$ .

**Teorema 8 (Fluxo Tubular)** *Seja  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo de classe  $C^r$ . Se  $p \in \mathbb{E}$  não é um ponto singular, então existe uma vizinhança  $V \subset \mathbb{R}^n$  do ponto  $p$  e uma função de classe  $C^r$ ,*

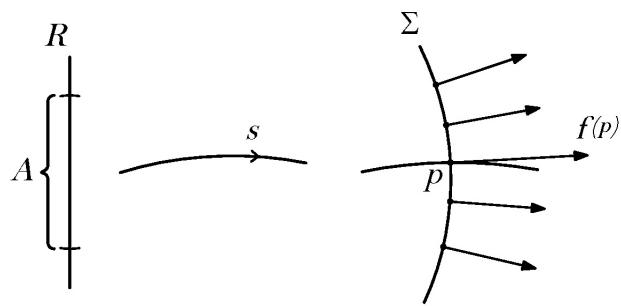
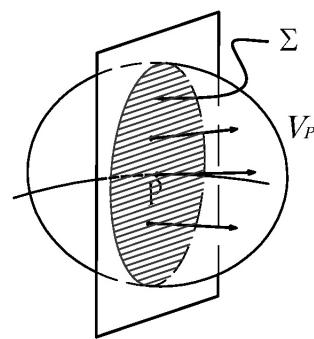


Figura 3.11: seção transversal unidimensional no plano.

Figura 3.12: seção transversal bidimensional no espaço, gerada por um plano contendo o ponto  $p$ .

$h : V \rightarrow (-\epsilon, \epsilon) \times B$ , para algum  $\epsilon > 0$  e alguma bola aberta  $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$  com centro na origem  $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ , tal que

- (a)  $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$ ;
- (b)  $h$  é uma  $C^r$ -conjugação entre o campo original restrito à vizinhança,  $f|_V$ , e o campo constante  $g : (-\epsilon, \epsilon) \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$  dado por  $g(p) = (1, 0, \dots, 0)$ .

**Observação 9** Uma consequência do Teorema do Fluxo Tubular é a existência de uma função de classe  $C^k$ ,  $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\varphi(\tau(q), q) \in \Sigma, \forall q \in V.$$

Detalhes deste fato pode se encontrado em [3, Corolário 9] (à página 223).

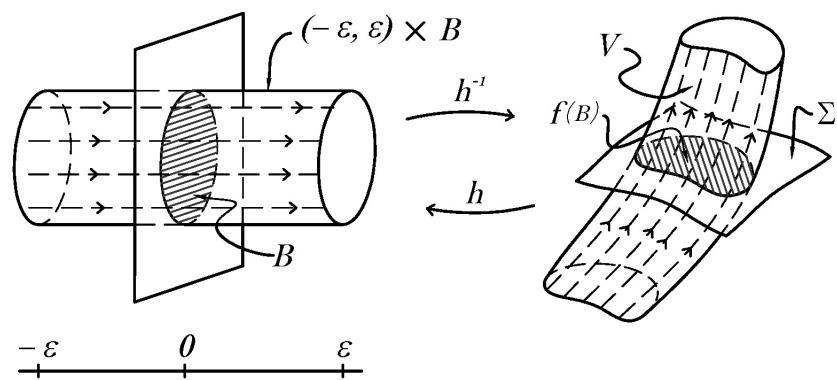


Figura 3.13:  $h$  conjuga o campo  $f$ , numa vizinhança de  $p$ , ao campo constante  $Y$

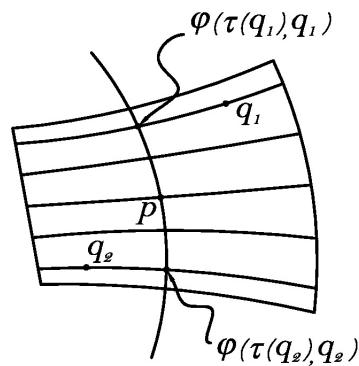


Figura 3.14:  $\tau(q_i)$  é o tempo exato para que o ponto  $q_i$ , pertencente à vizinhança  $V$ , atinja a seção transversal  $\Sigma$  ao se deslocar através do fluxo  $\varphi$ .

# Capítulo 4

## Teorema de Poincaré-Bendixson

Seja  $\mathbb{E}$  um conjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  e  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial de classe  $C^k$ . Recorde que a órbita de  $f$  por  $p$  é o conjunto

$$\gamma_p = \{\varphi(t, p) \in \mathbb{E} \mid t \in I_p\}.$$

Dizemos também que  $\varphi(t, p)$  é uma *curva integral do campo f por p*.

Definimos a *semi-órbita positiva* e a *semi-órbita negativa*, de  $f$  por  $p$ , como sendo os conjuntos

$$\begin{aligned}\gamma_p^+ &= \{\varphi(t, p) \in \mathbb{E} \mid t \in I_p \cap \mathbb{R}^+\}; \\ \gamma_p^- &= \{\varphi(t, p) \in \mathbb{E} \mid t \in I_p \cap \mathbb{R}^-\}.\end{aligned}$$

### 4.1 Conjuntos Invariantes

Passaremos a estudar o comportamento de uma órbita de um campo vetorial quando o tempo se torna tão grande quanto se queira, a saber, quando o tempo tende para o infinito. Tal conceito postula a ideia de *conjuntos invariantes*.

**Definição 7** Dado um conjunto  $W \subseteq \mathbb{E}$ , dizemos que  $W$  é um *conjunto invariante* se todo ponto  $p \in W$  tem sua órbita  $\gamma_p$  contida em  $W$ . De modo mais específico, dizemos que  $W$  é um *conjunto positivamente invariante* se  $\gamma_p^+ \subseteq W$ , e analogamente,  $W$  é um *conjunto negativamente invariante* se  $\gamma_p^- \subseteq W$ .

Pode-se observar que toda órbita contida em um conjunto invariante  $W$  não consegue escapar de  $W$ , sendo atraída para algum conjunto de pontos, podendo este estar contido em  $W$  ou até mesmo em seu fecho. Passamos a definir tais conjuntos.

**Definição 8** O conjunto ômega-limite de um ponto  $x \in \mathbb{E}$ , representado por  $\omega(x)$ , é o conjunto dos pontos  $p \in \mathbb{E}$  para os quais existe uma sequência de tempos  $t_n \rightarrow +\infty$ , tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(t_n, x) = p.$$

De modo similar, o conjunto alfa-limite de um ponto  $x \in \mathbb{E}$ , representado por  $\alpha(x)$ , é o conjunto dos pontos  $q \in \mathbb{E}$  para os quais existe uma sequência de tempos  $s_n \rightarrow -\infty$ , tal que

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \varphi(s_n, x) = q.$$

Em outros termos, a órbita de  $x$  tende à  $\omega(x)$  quando o tempo vai positivamente para o infinito; e tende à  $\alpha(x)$  quando o tempo vai negativamente para o infinito.

Pode ser demonstrado que os conjuntos  $\alpha$ -limite e  $\omega$ -limite é uma propriedade de órbitas e, não, de pontos; no seguinte sentido: se  $q \in \gamma_p$  então  $\omega(q) = \omega(p)$ . Em outras palavras, podemos falar em  $\omega$ -limite de órbitas,  $\omega(\gamma)$ , por não haver ambiguidade.

**Teorema 10** Seja  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , e  $K \subset \mathbb{E}$  um conjunto compacto. Se  $\gamma_p^+ \subset K$ , para algum  $p \in E$ , então o conjunto  $\omega(p)$  é:

- (a) não-vazio;
- (b) compacto;
- (c) invariante pelo campo, isto é: se  $q \in \omega(p)$  então  $\gamma(q) \subset \omega(p)$ ; e
- (d) conexo.

(Resultado análogo também vale para o conjunto  $\alpha$ -limite, desde que  $\gamma_p^- \subset K$ .)

**PROVA.** (a) O fluxo  $\varphi(t, p)$  é positivamente invariante no compacto  $K \subset \mathbb{E}$ . Considerando a propriedade de compacidade, a qual diz que toda sequência de pontos de um compacto possui uma subsequência convergente, então, pela hipótese, existe uma subsequência de pontos em  $\gamma_n^+(p)$  convergente a um ponto  $q \in \omega(p) \subset K$ .

(b) O conjunto  $\omega(p)$  é composto por pontos de acumulação de  $\gamma^+(p)$  então,  $\omega(p) \subseteq \overline{\gamma^+(p)} \subset K$  (lê-se  $\bar{\gamma}$  como o fecho de  $\gamma$ ), isto é,  $\omega(p)$  é limitado. Como queremos mostrar que  $\omega(p)$  é compacto, basta mostrar que  $\omega(p)$  também é fechado.

Seja  $C = R^n - \omega(p)$  o conjunto complementar de  $\omega(p)$ . Considere um ponto arbitrário  $q \in C$ . Defina uma vizinhança  $U_q$  de  $q$ . Ora, dado a sequência  $t_n \rightarrow +\infty$ , existe  $n_0 > 0$ , tal que  $\varphi(t_n, p) \notin U_q$  para todo  $n > n_0$ . Logo não existe uma subsequência  $p_n$  convergente à  $q$ , de

modo que  $p_n \notin U_q$  e consequentemente  $U_q \cap \omega(p) = \emptyset$ . Portanto, todo  $q$  é um ponto interno de  $C$ . Então  $\omega(p)$  é fechado.

(c) Dado um ponto qualquer  $q \in \omega(p)$ , existe uma sequência  $t_n \rightarrow +\infty$ , tal que  $\varphi(t_n, p) \rightarrow q$ . Fixado  $s$ , pela propriedade de grupo, temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(s + t_n, p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_s(\varphi(t_n, p)) = \varphi_s \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(t_n, p) \right) = \varphi_s(q) = \varphi(s, q)$$

e pela definição,  $\varphi(s+t_n, p)$  tende à  $w(p)$  quando  $s+t_n \rightarrow +\infty$ , implicando que  $\varphi(s, q) \in \omega(p)$ .

(d) Considere uma cisão de  $\omega(p)$  em conjuntos abertos  $A, B$  de  $\mathbb{R}^n$ , isto é:

$$\omega(p) \subset A \cup B, \quad A \cap B = \emptyset, \quad \omega(p) \cap A \neq \emptyset \quad \text{and} \quad \omega(p) \cap B \neq \emptyset.$$

Seja  $(t_n)$  e  $(s_n)$  tal que

$$\varphi(t_n, p) \rightarrow a \in A \quad \text{e} \quad \varphi(s_n, p) \rightarrow b \in B.$$

Assuma que  $t_n < s_n < t_{n+1}, \forall n$ . Uma vez que o segmento da órbita  $I_n = \{\varphi(t, p) \mid t \in [t_n, s_n]\}$  é conexo, então existe uma sequência  $(p_n)$  tal que  $p_n \in I_n \setminus (A \cup B), \forall n$ . Como  $p_n \in I_n \subset \overline{\gamma^+(p)} \subset K$  então  $(p_n)$  tem um ponto de acumulação, digamos,  $x$ . Mas  $x \in \omega(p)$ , pela definição de conjunto  $\omega$ -limite, e  $x \notin A \cup B$ , uma vez que  $A \cup B$  é aberto. Logo,  $\omega(p) \not\subset A \cap B$ ; absurdo.  $\square$

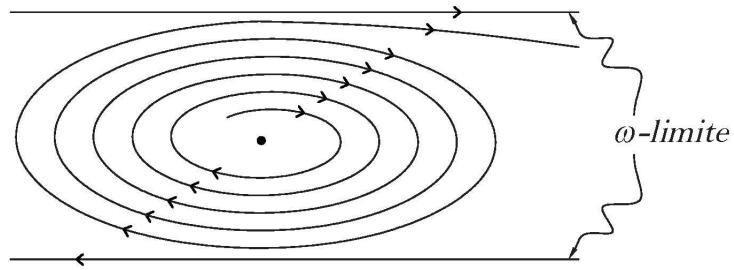


Figura 4.1: Exemplo em que o conjunto  $\omega$ -limite de uma órbita é desconexo.

## 4.2 Teorema de Poincaré-Bendixson

Definir a aplicação de Poincaré, ou aplicação de primeiro retorno.

**Teorema 11 (Poincaré-Bendixson)** Seja  $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , com finitas singularidades. Se a semi-órbita  $\gamma^+(p)$  está contida num compacto  $K \subset E$  então temos as seguintes alternativas:

1. Se  $\omega(p)$  contém somente pontos regulares, então  $\omega(p)$  é uma órbita periódica.
2. Se  $\omega(p)$  contém pontos regulares e singulares, então  $\omega(p)$  consiste de um conjunto de órbitas, cada uma das quais tende a um desses pontos singulares quando  $t \rightarrow \pm\infty$ .
3. Se  $\omega(p)$  não contém pontos regulares, então  $\omega(p)$  é um ponto singular.

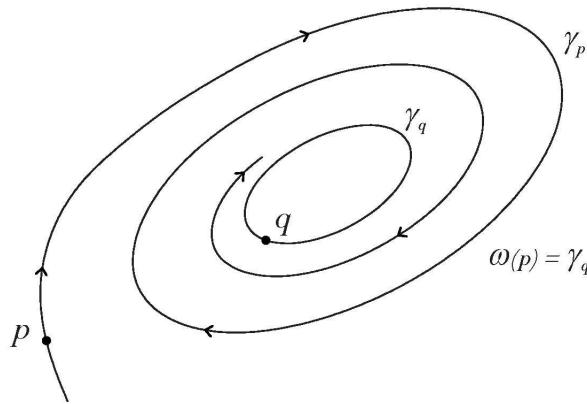


Figura 4.2: Caso (1): Conjunto  $\omega$ -limite da órbita  $\gamma_p$  contendo somente pontos regulares.

**Teorema 12 (Curva de Jordan)** O complementar no plano de uma curva fechada e sem auto-intersecções tem duas componentes conexas abertas disjuntas, uma limitada e a outra ilimitada, cuja fronteira comum é a curva.

O leitor encontrará uma prova do Teorema da Curva de Jordan à pagina 89 de [4].

Uma vez que  $E \subset \mathbb{R}^2$  então qualquer seção transversal  $S$  tem dimensão 1, mais precisamente, é um intervalo. Dessa forma,  $S$  possui uma relação de ordem total “ $\leq$ ”, permitindo-nos falar em sequências monótonas.

**Lema 1** Seja  $\Sigma$  e  $\gamma = \{\varphi(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$  uma seção transversal e uma órbita do campo  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Se  $p \in \Sigma \cap \omega(\gamma)$  então existe uma sequência de tempos  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $t_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ , tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n) = p$$

e  $\varphi(t_n) \in \Sigma$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

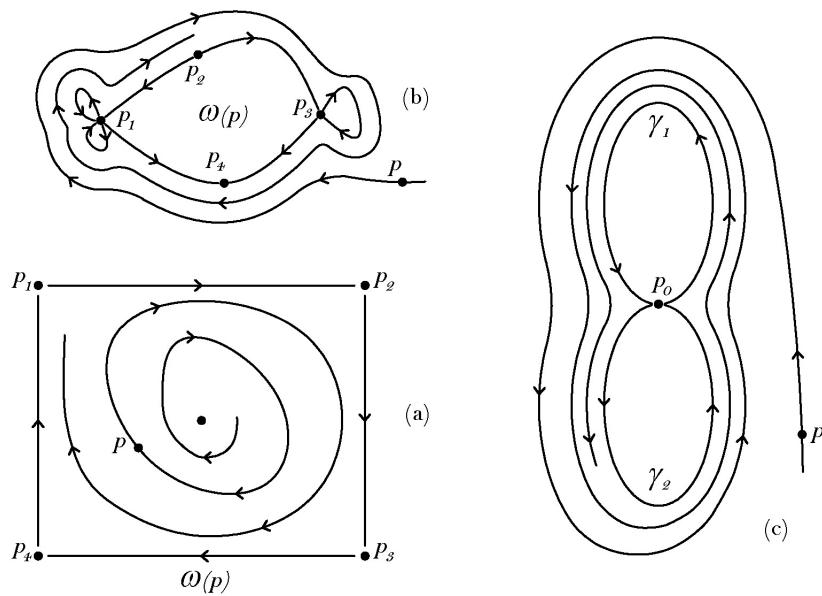


Figura 4.3: Caso (2): Conjunto  $\omega$ -limite da órbita  $\gamma_p$  contendo pontos regulares e singulares.

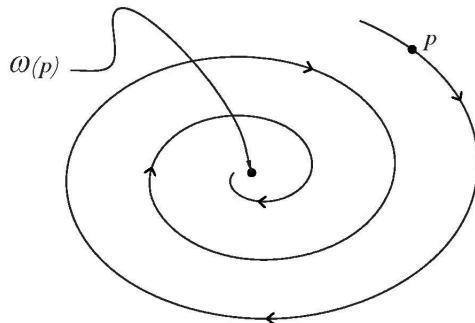


Figura 4.4: Caso (3): Conjunto  $\omega$ -limite da órbita  $\gamma_p$  não contendo pontos regulares.

Em outras palavras, qualquer ponto em  $\Sigma \cap \omega(\gamma)$  pode ser escrito como o limite de uma sequência cujos os pontos estão em  $\Sigma$  (além de estarem em  $\gamma$ , pela definição do conjunto  $\omega$ -limite).

**PROVA.** Assuma que  $\gamma$  é uma órbita por  $q$ . Seja  $V$  e  $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$  uma vizinhança e uma função dada pela observação 9. Considere uma sequência  $(s_n)$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(s_n, q) = p.$$

Denotada por  $x_n = \varphi(s_n, q)$ . Segue que  $\{x_n\}_{n > n_0} \subset V$ , para algum  $n_0 > 0$ , define a sequência

de tempos  $t_n = s_n + \tau(x_n)$ . Então

$$\begin{aligned}\varphi(t_n, q) &= \varphi(s_n + \tau(x_n), q) \\ &= \varphi(\tau(x_n), \varphi(s_n, q)) \\ &= \varphi(\tau(x_n), x_n) \in \Sigma, \quad \forall n > n_0.\end{aligned}$$

□

**Lema 2 (Sequências Monótonas)** *Sejam  $\Sigma$  e  $\gamma = \{\varphi(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$  uma seção transversal e uma órbita do campo  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Se  $p \in \Sigma \cap \gamma$  então a semi-órbita positiva  $\gamma^+(p) = \{\varphi(t, p) \mid t \geq 0\}$  intersecta  $\Sigma$  em uma sequência monótona.*

Em outras palavras, qualquer órbita que intersecta uma seção transversal faz monotonicamente.

**PROVA.** Dado  $p \in \Sigma \cap \gamma$ , considere a sequência de pontos  $(x_n) = \varphi(t_n, p)$ , de modo que  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subset \Sigma$ , está definida para uma sequência de tempos  $(t_n)$ , onde  $t_i < t_j$  para todo  $i < j$  conforme o lema anterior, com  $p = x_1$ . Ora, pelo fato de  $p$  ser um ponto regular, em consequência da propriedade do fluxo tubular, os vetores  $f(x_n)$  apontam para o mesmo lado da intersecção. Se  $x_i = x_j$  para todo  $i, j$ , então a órbita  $\gamma_p$  é fechada. Entretanto, se  $x_1 < x_2$ , iremos provar que  $x_2 < x_3$  e chegar a conclusão de que  $(x_n)$  é uma sequência monótona.

Considere a curva  $J$  de Jordan formada pela união do segmento da seção transversal  $\Sigma$  que une o ponto  $x_1$  ao ponto  $x_2$  com o segmento de curva  $\widehat{x_1 x_2} \subset \gamma_p^+$ , de modo que  $J$  separa o campo em duas componentes, a saber, o interior da curva e o exterior.

Defina um sentido para  $x_n$ . Diremos que, para  $(x_n)$  crescente, isto é,  $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < \dots$ , a semi-órbita  $\gamma_p^+$  estará orientada para o interior de  $J$  (figura 4.5-(a)). De igual modo, para  $x_n$  decrescente, a semi-órbita  $\gamma^+(p)$  estará orientada para o exterior de  $J$  (figura 4.5-(b)). Dito isto, se  $x_1 < x_2$ , então  $\gamma_{x_2}^+$  esta totalmente contida no interior de  $J$ . De fato,  $\gamma_{x_2}^+$  não pode cruzar  $\Sigma$  no sentido oposto ao do fluxo (figura 4.6-(a)), e também não pode interceptar  $J$  devido à unicidade de soluções (figura 4.6-(b)), então, segue que  $x_2 < x_3$ .

Com o resultado acima, analogamente, pode-se demonstrar para  $x_n$  decrescente.

□

**Lema 3** *Seja  $\Sigma$  uma seção transversal do campo  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Se  $p \in \mathbb{E}$ , então  $\omega(p)$  não intersecta  $\Sigma$  em mais de um ponto.*

**PROVA.** Considere a sequência monótona de pontos  $x_n = \varphi(t_n, p)$ . Segue que  $x_n$  é uma sequência de pontos de  $\gamma(p)$ , logo é limitada por  $\omega(p)$ . Ora, uma sequência monótona e limi-

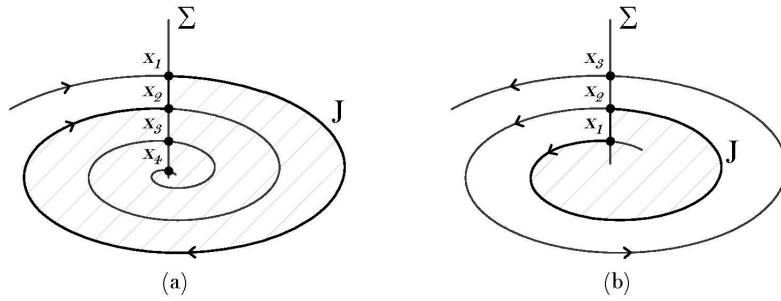
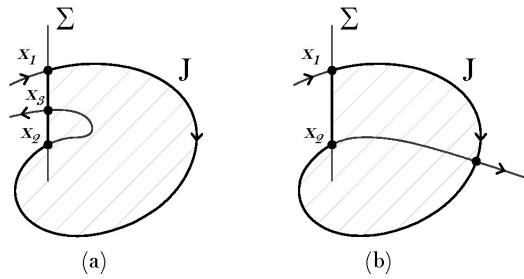
Figura 4.5: (a)  $(x_n)$  é crescente; (b)  $(x_n)$  é decrescente.

Figura 4.6: Ocasiões que não podem acontecer.

tada possui um mesmo ponto de aderência para qualquer subsequência. Seja  $q$  este ponto de aderência. Acarreta que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(t_n, p) = q$$

é o único ponto pertencente à  $\Sigma \cap \omega(p)$ .  $\square$

**Lema 4** *Seja  $\gamma_p^+$  uma semi-órbita positiva por  $p$  e  $\gamma$  uma órbita do campo  $f$ . Suponha que  $\gamma_p^+$  está contida em um compacto e  $\gamma \subset \omega(p)$ . Se  $\omega(\gamma)$  tem pontos regulares então  $\gamma$  é uma órbita periódica e  $\omega(p) = \gamma$ .*

**PROVA.** Seja  $q \in \omega(\gamma)$  e  $\Sigma_q$  um ponto regular e sua respectiva seção transversal. Como  $q \in \omega(\gamma) \cap \Sigma_q$ , segue que  $q$  é ponto de acumulação de uma sequência  $\gamma(t_n) \in \Sigma_q$ . Mas,  $\gamma(t_n) \in \omega(p)$ , e pelo lema anterior,  $\omega(p)$  intersecta  $\Sigma_q$  em apenas um ponto. Concluímos que o conjunto  $\{\gamma(t_n)\}$  é unitário, logo,  $\gamma$  é periódica.

Provaremos agora que  $\omega(p) = \gamma$ . Por hipótese, sabemos que  $\gamma \subset \omega(p)$ , precisamos apenas demonstrar que  $\omega(p) \subset \gamma$ .

Suponha que  $\omega(p) \not\subset \gamma$ , isto é,  $\omega(p) \setminus \gamma \neq \emptyset$ . Mas  $\gamma$  é uma órbita fechada em  $\mathbb{R}^2$ . Em particular,  $\gamma$  é fechada em  $\omega(p)$ , então o complementar  $B = \omega(p) \setminus \gamma$  de  $\gamma$  em  $\omega(p)$  é

aberto. Logo, existe uma sequência  $x_n$ , tal que  $\{x_n\} \subset B$ , de modo que  $x_n \rightarrow q \notin B$ . Ora,  $p \in \gamma \Rightarrow f(p) \neq 0$ . Seja, então,  $\Sigma_p$  uma seção transversal por  $p$ . Podemos considerar que  $\{x_n\} \subset \Sigma_p$ . Pelo lema 3,  $\omega(p) \cap \Sigma_p$  é unitário, implicando que  $x_n = p$ . Absurdo, pois  $p \in \gamma$  e  $x_n \notin \gamma$

□

PROVA.[Demonstração do Teorema de Poincaré-Bendixson]

- (i) Seja  $\gamma^+(p) \subset K$ , então  $\omega(p)$  é não vazio (Teorema 10-(a)). Dado  $q \in \omega(p)$ . Seja  $\omega(p)$  invariante (Teorema 10-(c)) então  $\gamma(q) \subset \omega(p)$ . Uma vez que  $\omega(p)$  é compacto (Teorema 10-(b)), então  $\omega(q)$  é não vazio (Teorema 10-(a)). [aqui,  $\omega(p)$  desempenha o papel do conjunto  $K$  do Teorema 10]. Além disso,

$$\omega(q) \subset \overline{\gamma(q)} \subset \omega(p).$$

Pela hipótese deste caso (i), qualquer ponto em  $\omega(q)$  é regular. Pelo lema 4,  $\gamma(q)$  é uma órbita periódica e  $\omega(p) = \gamma(q)$ .

- (ii) Assumindo que há dois pontos singulares distintos em  $\omega(p)$ . Então há uma curva ligando ambos os pontos (Teorema 10-(d)). Entretanto, tal curva deve ser composta apenas por pontos singulares, o que é um absurdo, pois os pontos singulares em  $f$  são finitos.
- (iii) Seja  $\gamma$  uma órbita regular de  $\omega(p)$ . Pelo lema 4,  $\omega(\gamma)$  não contém ponto regular (caso contrário, teríamos  $\omega(p) = \gamma$ , isto é,  $\omega(p)$  não teria pontos singulares). Em outras palavras,  $\omega(\gamma)$  possui apenas pontos singulares. Pelo argumento do item acima (ii),  $\omega(\gamma)$  é um (único) ponto singular (pertencente à  $\omega(p)$ ), uma vez que  $\omega(\gamma) \subset \overline{\gamma} \subset \omega(p)$ .

□

## 4.3 A Importância do Teorema da Curva de Jordan para o Teorema de Poincaré-Bendixson

Gostaríamos de enfatizar a importância do Teorema da Curva de Jordan para o Teorema de Poincaré-Bendixson.

Uma superfície *parametrizada regular* em  $\mathbb{R}^3$  é uma aplicação diferenciável  $s : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida em um conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^3$  cujas derivadas parciais  $s_u$  e  $s_v$  não se anulam em

ponto algum de seu domínio. Chamamos de *superfície* ao conjunto imagem  $S = s(U)$  de uma superfície parametrizada regular. Seu *espaço tangente*,  $T_p S$ , em cada ponto  $p = s(q) \in S$  é o plano gerado pelos vetores  $s_u(q)$  e  $s_v(q)$ .

Um campo  $f$  de classe  $C^1$  está definido sobre uma superfície  $S$  se  $f(p) \in T_p S$ , para todo  $p \in S$ .

Pelo fato do espaço tangente ser um plano, superfícies assim definidas são denominadas *bidimensionais*. Exemplos de superfícies bidimensionais são: a *esfera*,  $\mathbb{S}^2$ , (Figura 4.7) e o *toro*,  $\mathbb{T}^2$  (Figura 4.8).

Observe que na esfera, qualquer curva fechada sem auto-intersecção é uma *curva de Jordan*, isto é, satisfaz o Teorema 12. Por exemplo, na Figura 4.7, a curva fechada em questão é um “equador”, que separa o hemisfério norte do hemisfério sul. Esta propriedade da esfera tem um papel fundamental para a validade do Teorema de Poincaré-Bendixson em sua superfície. De fato, pode ser provado que: *se  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é um campo de classe  $C^1$  com um número finito de pontos singulares então o conjunto  $\omega$ -limite de uma órbita por um ponto  $p \in \mathbb{S}^2$  apresenta as mesmas possibilidades (a), (b) e (c) que no Teorema de Poincaré-Bendixson em  $\mathbb{R}^2$ .*

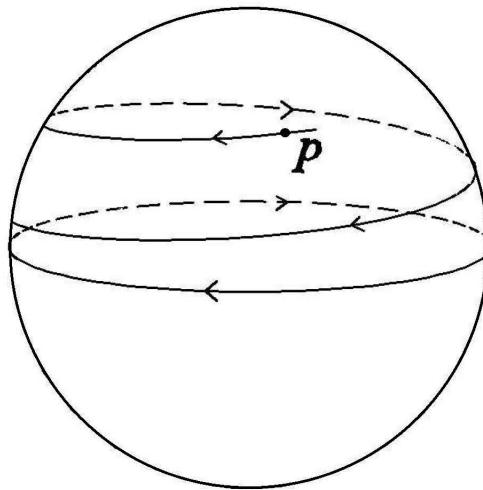


Figura 4.7: Uma órbita  $\gamma$  de um campo  $C^1$  na esfera  $\mathbb{T}^2$ , a qual o conjunto  $\omega$ -limite é uma órbita fechada.

Todavia, nem toda curva fechada sem auto-intersecção no toro bidimensional  $\mathbb{T}^2$  é uma curva de Jordan (Figura 4.8).

Por esse motivo não vale o Teorema de Poincaré-Bendixson em  $\mathbb{T}^2$ . Existe exemplo de campo em  $\mathbb{T}^2$  com somente uma singularidade e cujo conjunto  $\omega$ -limite de qualquer ponto é o

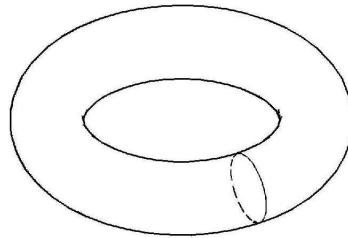


Figura 4.8: Uma órbita fechada que não é uma curva de Jordan.

próprio toro.

## 4.4 Aplicação do Teorema de Poincaré-Bendixson

Denotemos por  $\text{int}(A)$  e  $\bar{A}$  o interior e o fecho do conjunto  $A$ , respectivamente.

Nesta seção provaremos o seguinte Corolário do Teorema de Poincaré-Bendixson.

**Teorema 13** *Seja  $f : \mathbb{E} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo de classe  $C^1$ . Se  $\gamma$  é uma órbita fechada de  $f$  e o interior de  $\gamma$ ,  $\text{int}(\gamma)$ , está contido em  $\mathbb{E}$  então  $f$  possui um ponto singular em  $\text{int}(\gamma)$ .*

Para tanto, precisaremos de alguns resultados prévios.

**Lema 5** *Sejam  $\mu$  uma órbita periódica e  $\gamma_p$  uma órbita não periódica por  $p$  do campo  $f$ . Se  $\omega(p) = \mu$  então  $\alpha(p) \neq \mu$ . Analogamente, se  $\alpha(p) = \mu$  então  $\omega(p) \neq \mu$ .*

Em outras palavras, qualquer órbita não periódica não pode ter, como seus conjuntos  $\alpha$ -limite e  $\omega$ -limite, uma mesma órbita periódica.

**Definição 9** *Seja  $M$  um espaço métrico. Uma família  $(\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in L}$ , de subconjuntos de  $M$ , possui Propriedade da Intersecção Finita se, para qualquer subconjunto finito de índices  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset L$ , temos  $\mathcal{F}_{\lambda_1} \cap \dots \cap \mathcal{F}_{\lambda_n} \neq \emptyset$ .*

Em outras palavras, a intersecção de uma quantidade finita de elementos de tal família é sempre não vazia.

**Proposição 5** *Um espaço métrico  $M$  é compacto se, e somente se, toda família de conjuntos fechados  $(\mathcal{F})_{\lambda \in L}$  possuindo a Propriedade da Intersecção Finita satisfaz:*

$$\bigcap_{\lambda \in L} \mathcal{F}_\lambda \neq \emptyset.$$

Para uma prova deste resultado, veja Elon (Espaços Métricos).

Dizemos que “ $\leq$ ” é uma *relação de ordem sobre  $X$*  se, para todo  $x, y, z \in X$ , temos:

- (i)  $x \leq x$ ;
- (ii) se  $x \leq y$  e  $y \leq x$  então  $x = y$ ;
- (iii) se  $x \leq y$  e  $y \leq z$  então  $x \leq z$ .

Em tal caso, dizemos que  $X$  é um conjunto *parcialmente ordenado*.

Um ponto  $\mu \in X$  é um elemento maximal de  $X$  se  $x \leq \mu, \forall x \in X$ .

Seja  $Z$  um subconjunto de  $X$ . Um ponto  $c \in Z$  é uma *cota superior de  $Z$*  se  $z \leq c, \forall z \in Z$ . Dizemos que  $Z$  é *totalmente ordenado* (pela relação “ $\leq$ ”) se pudermos comparar quaisquer dois elementos de  $Z$ , isto é:  $x \leq y$  ou  $y \leq x$ , para quaisquer  $x, y \in Z$ .

**Lema 6 (Zorn)** *Seja  $X$  um conjunto não vazio parcialmente ordenado. Se todo subconjunto totalmente ordenado de  $X$  possuir uma cota superior então  $X$  tem um elemento maximal.*

PROVA.[Prova do Teorema 13] Suponha que  $f$  não possua ponto singular em  $\text{int}(\gamma)$ . Seja  $\Gamma$  o conjunto das órbitas fechadas de  $f$  contidas em  $\overline{\text{int}(\gamma)}$ . Defina a seguinte relação de ordem parcial em  $\Gamma$ :

$$\gamma_1 \leq \gamma_2 \longleftrightarrow \overline{\text{int}(\gamma_1)} \supseteq \overline{\text{int}(\gamma_2)}.$$

Afirmamos que *se  $S \subset \Gamma$  é totalmente ordenado então  $S$  possui uma cota superior*. De fato, a família de conjuntos fechados  $\left(\overline{\text{int}(\gamma_i)}\right)_{\gamma_i \in S}$  claramente possui a Propriedade da Intersecção Finita. (veja a Definição 9). Uma vez que  $\overline{\text{int}(\gamma)}$  é compacto então o conjunto

$$\sigma = \bigcap_{\gamma_i \in S} \overline{\text{int}(\gamma_i)}$$

é não-vazio (Proposição 5). Seja  $q \in \sigma$ . Como a semi-órbita positiva,  $\gamma_q^+$ , está contida no conjunto compacto  $\overline{\text{int}(\gamma)}$  e  $\omega(q)$  não possui singularidade, então  $\omega(q)$  é uma órbita periódica (Teorema de Poincaré-Bendixson - (i)). Dessa forma, temos que

$$\overline{\text{int}(\omega(q))} \subseteq \overline{\text{int}(\gamma_i)}, \quad \forall \gamma_i \in S.$$

Ou seja,  $\gamma_i \leq \omega(q), \forall \gamma_i \in S$ . Logo,  $\omega(q)$  é uma cota superior de  $S$ . Isto prova nossa afirmação.

Da Afirmação anterior e pelo Lema de Zorn, temos que  $\Gamma$  tem um elemento maximal, digamos  $\mu$ . Seja  $p \in \text{int}(\mu)$ . Então  $\gamma_p$  não é uma órbita periódica (caso contrário teríamos

$\mu < \gamma_p$ ). Além disso, pelo Teorema de Poincaré-Bendixson - (i), ambos conjuntos,  $\alpha(p)$  e  $\omega(p)$  são órbitas periódicas. Suponha, sem perda de generalidade, que  $\omega(p) = \mu$ . Então  $\alpha(p) \neq \mu$  (Lema 5). Mas  $\overline{\text{int}(\alpha(p))} \subset \overline{\text{int}(\mu)}$ , ou seja,  $\mu < \alpha(p)$ . Absurdo.

□

# Considerações Finais

Como aluno do curso de Licenciatura em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de Goiás, comprehendo e enalteço a importância da figura do professor. Muitos estudantes, em algum momento de suas vidas, foram marcados por esta figura: uma pessoa simples, que muitas das vezes não recebe as considerações devidas, mas que está sempre disposta a ensinar. Sim, a estas pessoas que desempenham este papel, o papel de ensinar, a elas eu devo o total respeito e consideração.

A palavra ensinar, em sua etimologia, se originou do termo em latim *insignare*, cujo o significado é: marcar com sinal; pôr uma marca. De fato, o papel do professor é marcar seu aluno com o conhecimento e o saber. Em alguns casos, o mesmo chega a marcar-lhe a vida, da mesma maneira que eu, durante o segundo ano letivo do Ensino Médio, fui marcado por um professor de Matemática, quem desencadeou em mim uma paixão por esta maravilhosa ciência, a matemática.

Posso considerar três atributos essenciais de um docente: o conhecimento; a metodologia de ensino e o carisma pessoal. Estes são os motivos e os atributos daquele professor que outrora marcou minha vida, e que por agora, fazem parte de minha ambição como professor. Além do mais, um dos propósitos deste trabalho era expandir e fortalecer o primeiro atributo mencionado, o que posso dizer com convicção, que foi bem sucedido.

Talvez o leitor facilmente tenha percebido que esta monografia foge do escopo proposto por um curso de Licenciatura. De fato, a proposta inicial era trabalhar com uma investigação na área da educação, visando os problemas do sistema de ensino atual. Entretanto, através de um forte desejo pelo conhecimento matemático, por hora, deixei de lado a proposta inicial e me aventurei neste campo do saber, o qual embasará meus estudos vindouros.

Este trabalho proporcionou a este graduando uma experiência inédita ao aproximá-lo da pesquisa matemática, permitindo-me entender como se organiza e como se constrói a matemática em sua essência teórica, iniciando-me, com todo auxílio do meu orientador, nos meus primeiros passos como matemático, um dos objetivos da minha carreira acadêmica.

# Referências Bibliográficas

- [1] C. I. Doering e A. O. Lopes. *Equações Diferenciais Ordinárias*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro (2005).
- [2] J. Boldrini, S. Costa, V. Figueiredo e H. Wetzler. *Álgebra Linear*, Harbra, 3<sup>a</sup> Edição (1986).
- [3] J. Sotomayor. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro (1979).
- [4] V. Guillemin e A. Pollack. *Differential Topology*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1974).