CS251: Homework #3

Due on October 29, 2019 at 2:00pm

Steven Libby Section A

Austen Nelson

Problem 1

$\forall(U \in \mathbb{C}^{n\times n})(a \in \mathbb{C}^n)(b \in \mathbb{C}^n).U(\langle a|b\rangle) = \langle a|b\rangle$,
$\forall(U \in \mathbb{C}^{n\times n})(a \in \mathbb{C}^n)(b \in \mathbb{C}^n).U(ab) = U(a)U(b)$,
$\forall a \in \mathbb{R}.\ (a \cdot a = a) \to (a = 0 \vee a = 1)$,
$\forall(a \in \mathbb{C}^n)(b \in \mathbb{C}^n).\langle a|b\rangle = (\langle a| \otimes \langle 0|)(|b\rangle \otimes |0\rangle)$,
$\forall(a \in \mathbb{C}^n)(b \in \mathbb{C}^n).(\langle a| \otimes \langle a|)(|b\rangle \otimes |b\rangle) = \langle a|b\rangle \cdot \langle a|b\rangle$,
$\vdash$
$((U(|a\rangle \otimes |0\rangle) = |a\rangle \otimes |a\rangle) \wedge (U(|b\rangle \otimes |0\rangle) = |b\rangle \otimes |b\rangle)) \to \langle a|b\rangle = 0 \vee \langle a|b\rangle = 1$

1.	$\forall(U \in \mathbb{C}^{n\times n})(a \in \mathbb{C}^n)(b \in \mathbb{C}^n).U(\langle a\|b\rangle) = \langle a\|b\rangle$	*Premise*
2.	$\forall(U \in \mathbb{C}^{n\times n})(a \in \mathbb{C}^n)(b \in \mathbb{C}^n).U(ab) = U(a)U(b)$	*Premise*
3.	$\forall a \in \mathbb{R}.\ (a \cdot a = a) \to (a = 0 \vee a = 1)$	*Premise*
4.	$\forall(a \in \mathbb{C}^n)(b \in \mathbb{C}^n).\langle a\|b\rangle = (\langle a\| \otimes \langle 0\|)(\|b\rangle \otimes \|0\rangle)$	*Premise*
5.	$\forall(a \in \mathbb{C}^n)(b \in \mathbb{C}^n).(\langle a\| \otimes \langle a\|)(\|b\rangle \otimes \|b\rangle) = \langle a\|b\rangle \cdot \langle a\|b\rangle$	*Premise*
6.	$[((U(\|a\rangle \otimes \|0\rangle) = \|a\rangle \otimes \|a\rangle) \wedge (U(\|b\rangle \otimes \|0\rangle) = \|b\rangle \otimes \|b\rangle))]$	*Assumption*
7.	$U(\|a\rangle \otimes \|0\rangle) = \|a\rangle \otimes \|a\rangle$	$\wedge E1, 6$
8.	$U(\|a\rangle \otimes \|0\rangle) = U(\|a\rangle) \otimes U(\|0\rangle)$	$\forall E, 2$
9.	$U(\|a\rangle) \otimes U(\|0\rangle) = \|a\rangle \otimes \|a\rangle$	$= E1, 7, 8$
10.	$U(\|a\rangle) = \|a\rangle$	$\forall E, 1$
11.	$U(\|0\rangle) = \|0\rangle$	$\forall E, 1$
12.	$\|a\rangle \otimes \|0\rangle = \|a\rangle \otimes \|a\rangle$	$= E1 * 2, 9, 10, 11$
13.	$U(\|b\rangle \otimes \|0\rangle) = \|b\rangle \otimes \|b\rangle$	$\wedge E2, 6$
14.	$U(\|b\rangle \otimes \|0\rangle) = U(\|b\rangle) \otimes U(\|0\rangle)$	$\forall E, 2$
15.	$U(\|b\rangle) \otimes U(\|0\rangle) = \|b\rangle \otimes \|b\rangle$	$= E1, 13, 14$
16.	$U(\|b\rangle) = \|b\rangle$	$\forall E, 1$
17.	$U(\|0\rangle) = \|0\rangle$	$\forall E, 1$
18.	$\|b\rangle \otimes \|0\rangle = \|b\rangle \otimes \|b\rangle$	$= E1 * 2, 15, 16, 17$
19.	$\langle a\|b\rangle = (\langle a\| \otimes \langle 0\|)(\|b\rangle \otimes \|0\rangle)$	$\forall E, 4$
20.	$\langle a\|b\rangle = (\langle a\| \otimes \langle 0\|)(\|b\rangle \otimes \|b\rangle)$	$= E1, 18, 19$
21.	$(\langle a\| \otimes \langle a\|)(\|b\rangle \otimes \|b\rangle) = \langle a\|b\rangle \cdot \langle a\|b\rangle$	$\forall E, 5$
22.	$(\langle a\| \otimes \langle 0\|)(\|b\rangle \otimes \|b\rangle) = \langle a\|b\rangle \cdot \langle a\|b\rangle$	$= E1, 12, 21$
23.	$\langle a\|b\rangle \cdot \langle a\|b\rangle = \langle a\|b\rangle$	$= E1, 20, 22$
24.	$(\langle a\|b\rangle \cdot \langle a\|b\rangle = \langle a\|b\rangle) \to (\langle a\|b\rangle = 0 \vee \langle a\|b\rangle = 1)$	$\forall E, 3$
25.	$\langle a\|b\rangle = 0 \vee \langle a\|b\rangle = 1$	$\to E, 23, 24$
26.	$((U(\|a\rangle \otimes \|0\rangle) = \|a\rangle \otimes \|a\rangle) \wedge (U(\|b\rangle \otimes \|0\rangle) = \|b\rangle \otimes \|b\rangle)) \to \langle a\|b\rangle = 0 \vee \langle a\|b\rangle = 1$	$\to I, 6 - 25$