

ulm university universität
uulm

Grundpraktikum der Elektrotechnik

Versuch 06: Karl Willy Wagner Versuch

Institut für Mikroelektronik
Universität Ulm



Grundpraktikum Elektrotechnik

Versuch 06: Karl Willy Wagner Versuch

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Filter 1. Ordnung	2
2.1	RC-Tiefpass	2
2.2	RL-Tiefpass	6
2.3	RC-Hochpass	7
2.4	RL-Hochpass	8
3	Filter 2. Ordnung	9
3.1	Tiefpass	9
3.2	Hochpass	11
3.3	Bandpass	12
3.4	Bandsperre	13
4	Vorbereitende Aufgaben	15
5	Versuchsdurchführung	16
5.1	Bestimmung der Grenzfrequenz	16
5.2	Zeitverhalten eines Hochpasses	16
5.3	Bandpass	16
5.4	Bandsperre	17
5.5	Frequenzbereich und Audio-Filterung	17
6	Evaluation	18

1 Einleitung

In diesem Versuch sollen einfache Filter behandelt werden. Filter werden bei allen nachrichtentechnischen Vorgängen in der Elektrotechnik eingesetzt, um störende und überflüssige Signalanteile zu entfernen oder um einen ganz bestimmten Frequenzgang einer Übertragungsstrecke zu erzeugen. Die Aufgabe von Filtern ist ganz allgemein, bestimmte Frequenzen durchzulassen und andere Frequenzen zu sperren. Durch geeigneten Aufbau lassen sich so Filter bauen, die fast beliebige Durchlass-Charakteristiken haben. Generell lassen sich die Filter in Hoch-, Tief- und Bandpässe einteilen, je nachdem ob hohe oder tiefe Frequenzen oder auch nur ein ganz bestimmtes Frequenzband durchgelassen werden soll. Ein Sonderfall ist hier die Bandsperre, die ein begrenztes Frequenzband sperrt. Zunächst sollen die Grundlagen der einfachsten Filter erklärt werden. Anschließend werden Messungen ihrer Eigenschaften sowohl im Zeit- wie auch im Frequenzbereich durchgeführt. Dazu soll aus einem Funktionsgenerator und einem Oszilloskop ein einfacher Spektrum-Analysator aufgebaut werden.

Hinweis: Eine Einführung in die für diesen Versuch benötigte komplexe Wechselstromrechnung finden Sie im Skript zur Vorlesung „Grundlagen der Elektrotechnik I“.

2 Filter 1. Ordnung

2.1 RC-Tiefpass

Der einfachste Tiefpass besteht aus einem ohmschen Widerstand und einer Kapazität in folgender Schaltung:

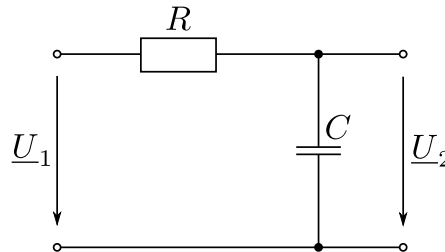


Abbildung 1: Tiefpass erster Ordnung

Der ohmsche Widerstand R ist für alle Frequenzen konstant, während der Betrag des Kondensatorwiderstand \underline{Z}_C mit steigender Frequenz abnimmt. Der Widerstand des Kondensators wird durch folgende Formel beschrieben:

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j2\pi fC} \quad (1)$$

Liegt nun am Eingang des Tiefpasses eine Wechselspannung mit einer niedrigen Frequenz an, so wird diese nahezu unverändert zum Ausgang durchgelassen. Bei höheren Frequenzen beginnt jedoch der Widerstand des Kondensators kleiner zu werden und die Ausgangsspannung wird immer stärker durch den Kondensator kurzgeschlossen.

2.1.1 Beschreibung des Tiefpass im Frequenzbereich

Eine grundlegende Charakteristik jedes linearen Systems oder Bauelementes, das Signale vom Ein- zum Ausgang übertragen soll, ist der sogenannte Frequenzgang. Damit ist das Verhältnis der Ausgangsspannung $\underline{U}_2(j\omega)$ zur Eingangsspannung $\underline{U}_1(j\omega)$ in Abhängigkeit der Frequenz gemeint. Zur Berechnung des Frequenzgangs des Tiefpasses wenden wir nun die Spannungsteilerformel an, nach der gilt:

$$\underline{A}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = Ae^{j\varphi}$$

Aus diesem komplexen Frequenzgang läßt sich nun der Betragsfrequenzgang berechnen, der das Verhältnis der Amplituden von Eingangs- und Ausgangssignal beschreibt. Dazu bildet man den Betrag des komplexen Frequenzgangs.

$$A = |\underline{A}(j\omega)| = \frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_1|} = \left| \frac{1}{1 + j\omega RC} \right| = \frac{1}{|1 + j\omega RC|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad (2)$$

Dieser Betragsfrequenzgang wird später im Versuch gemessen werden. Eine weitere wichtige Kenngröße ist der Phasenverlauf des Filters. Unter der Phase wird der Winkel verstanden, um den das Ausgangssignal bei einem sinusförmigen Eingangssignal gegenüber

dem Eingangssignal verschoben ist. Nach der komplexen Rechnung gilt für die Phase beim Tiefpass:

$$\varphi = \arg(\underline{A}(j\omega)) = \arctan\left(\frac{\Im\{\underline{A}\}}{\Re\{\underline{A}\}}\right) = -\arctan(\omega RC) \quad (3)$$

Hinweis: Bei der Berechnung der Phase muss berücksichtigt werden, dass der Arcustangens stets Winkel zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liefert, eventuell muss zur Berechnung der Phase noch π dazugezählt oder abgezogen werden.

Der Verlauf des Betrags- und des Phasenfrequenzgangs lässt sich in einem Diagramm auftragen. Ein Diagramm dieser Form wird Bode-Diagramm genannt und ist im nächsten Bild zu sehen.

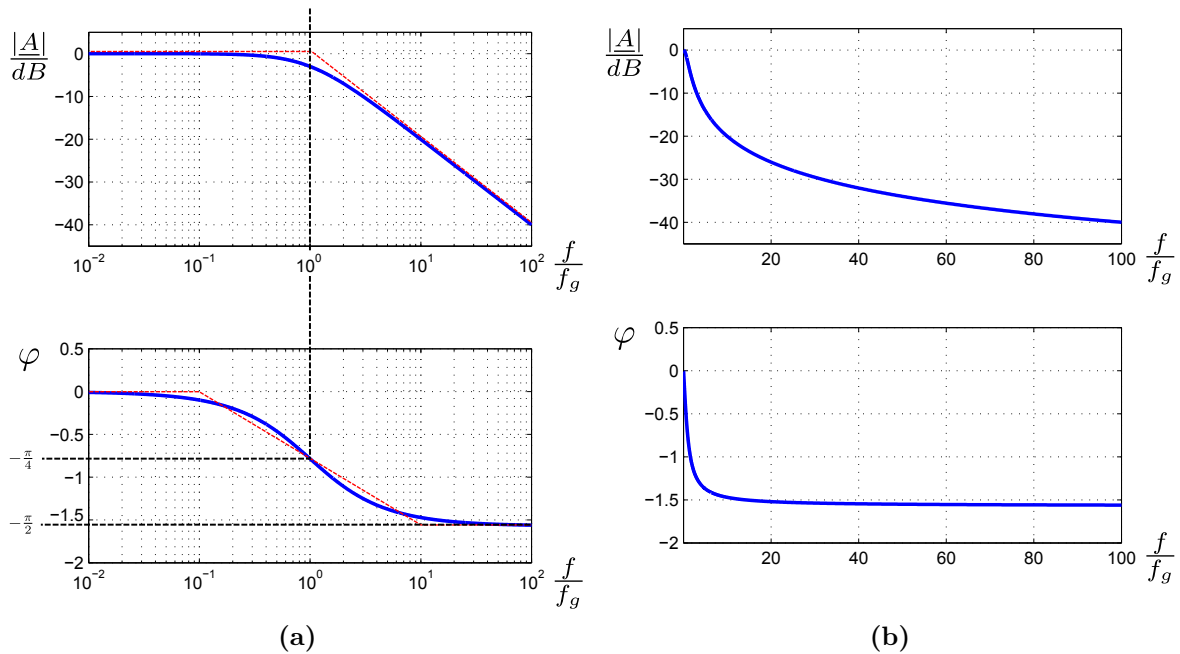


Abbildung 2: Bode-Diagramm eines Tiefpass erster Ordnung mit logarithmischer Frequenzachse (Abb. 2a) und mit linearer Frequenzachse (Abb. 2b).

Vorsicht ist bei der Betrachtung der Diagramme geboten. In Abb. 2a und in Abb. 2b ist jeweils der Frequenzgang eines RC-Tiefpasses abgebildet, einmal jedoch mit logarithmischer und einmal mit linearer Skalierung der Frequenzachse. Um einen Tiefpass mit einem einzigen Wert charakterisieren zu können, wird allgemein die sogenannte 3dB-Grenzfrequenz gewählt. Dies ist die Frequenz, bei der die Übertragungsfunktion um 3dB kleiner als ihr Maximalwert ist. Das entspricht für die betrachtete Schaltung folgendem Verhältnis:

$$\frac{|U_2(j\omega_g)|}{|U_1(j\omega_g)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Daraus folgt:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_g RC)^2}} \Rightarrow 2 = 1 + (\omega_g RC)^2 \quad (4)$$

Damit ergibt sich ω_g zu:

$$\omega_g = \frac{1}{RC} \quad \text{bzw.} \quad f_g = \frac{1}{2\pi RC}$$

Für die Phasenverschiebung gilt bei dieser Frequenz mit Gl. 3:

$$\varphi = \arg(\underline{U}(j\omega_g)) = -\arctan(\omega_g RC) = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4} \hat{=} -45^\circ \quad (5)$$

Aus dem logarithmischen Auftrag des Betragsfrequenzgangs läßt sich eine weitere wichtige Eigenschaft dieses einfachen RC-Tiefpasses ablesen. Wird oberhalb der Grenzfrequenz die Frequenz auf das 10-fache erhöht, so fällt die Ausgangsspannung etwa auf ein 10-tel ihres Wertes ab. Der Abfall der Verstärkung beträgt also 20db/Dekade oder 6db/Oktave.

2.1.2 Beschreibung im Zeitbereich

Gibt man einen Spannungssprung (vgl. Abb. 3 oben) auf den Eingang eines Tiefpasses, so nähert sich die Ausgangsspannung ihrem Endwert asymptotisch.

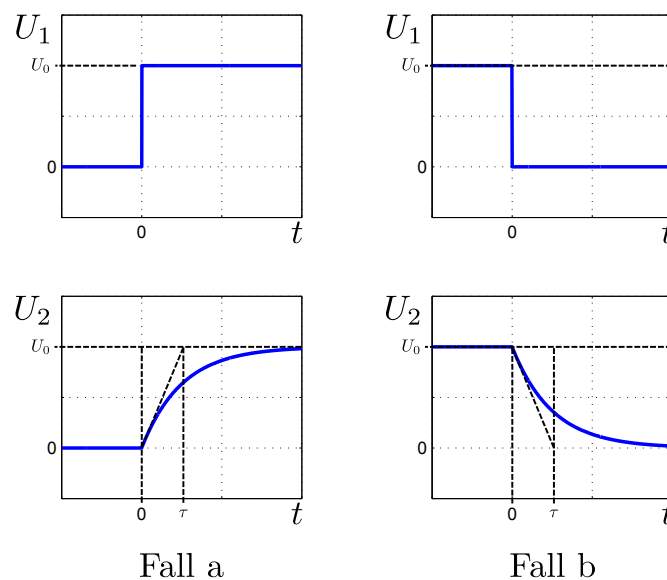


Abbildung 3: Sprungantwort eines Tiefpass erster Ordnung

Zur Berechnung dieses Verhaltens setzen wir die Knotenregel an und erhalten:

$$\frac{U_1 - U_2}{R} - I_C = 0$$

Mit $I_C = C \frac{dU_2}{dt}$ folgt daraus:

$$RC \frac{dU_2}{dt} + U_2 = U_1 \quad \text{mit} \quad U_1 = \begin{cases} U_0 & \text{für } t > 0 \text{ im Fall a} \\ 0 & \text{für } t > 0 \text{ im Fall b} \end{cases} \quad (6)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ergibt:

$$\text{Fall a:} \quad U_2(t) = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad (7)$$

$$\text{Fall b:} \quad U_2(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (8)$$

Die Zeitkonstante τ beschreibt die Zeitdauer nach der sprunghaften Änderung der Eingangsspannung, bis die Abweichung der Ausgangsspannung vom Endwert nur noch den e-ten Teil des Endwertes beträgt:

$$\tau = RC$$

Ein weiteres Maß zur Charakterisierung eines Tiefpasses ist die Anstiegszeit. Sie ist definiert als diejenige Zeit, die die Ausgangsspannung bei einem Sprung am Eingang benötigt, um von 10% auf 90% der Eingangsspannung zu gelangen. In Abb. 4 ist der Verlauf der Eingangs- und der Ausgangsspannung sowie die Definition der Anstiegszeit t_a zu sehen.

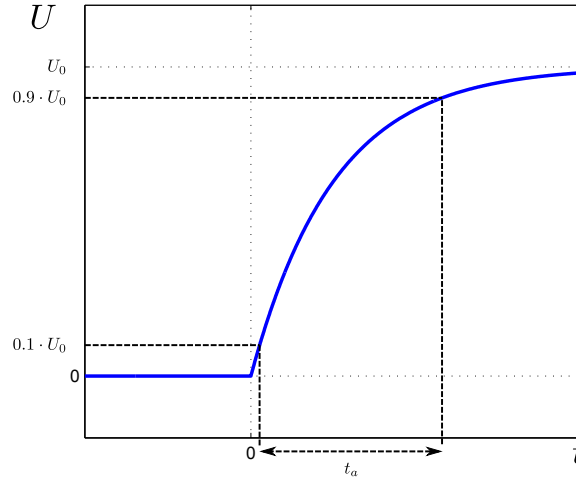


Abbildung 4: Definition der Anstiegszeit t_a .

Für die Anstiegszeit gilt:

$$t_a = t_{90\%} - t_{10\%} = \tau(\ln(0.9) - \ln(0.1)) = \tau \ln\left(\frac{0.9}{0.1}\right) = \tau \ln(9) \approx 2.2\tau \quad (9)$$

Mit $f_g = \frac{1}{2\pi\tau}$ ergibt sich für t_a :

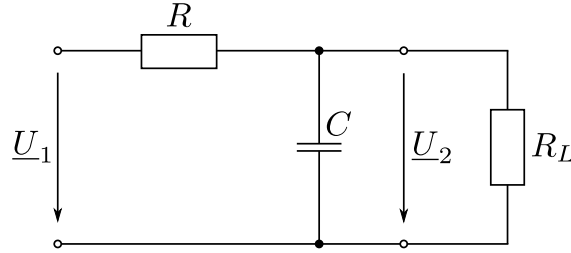
$$t_a \approx \frac{1}{3f_g} \quad (10)$$

2.1.3 Einfacher RC-Tiefpass mit reeller Last

Bisher wurde der Tiefpass unter der Voraussetzung betrachtet, dass der Ausgang der Schaltung unbelastet ist. Bei der Realisierung einer Filterstufe in einem Signalpfad ist das natürlich nicht der Fall. Daher soll im folgenden die Veränderung der Übertragungsfunktion des Tiefpasses durch einen reellen Widerstand untersucht werden. Die zu untersuchende Schaltung ist in Abb. 5 gegeben. In diesem einfachen Fall handelt es sich um eine reelle Last. Die Übertragungsfunktion lässt sich wie folgt berechnen:

$$\underline{U}_2 = \frac{\frac{R_L \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_L + \frac{1}{j\omega C}}}{R + \frac{R_L \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_L + \frac{1}{j\omega C}}} \underline{U}_1 = \frac{\frac{R_L}{j\omega C}}{RR_L + \frac{R}{j\omega C} + \frac{R_L}{j\omega C}} \underline{U}_1 \quad (11)$$

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_L} + j\omega RC} \quad (12)$$

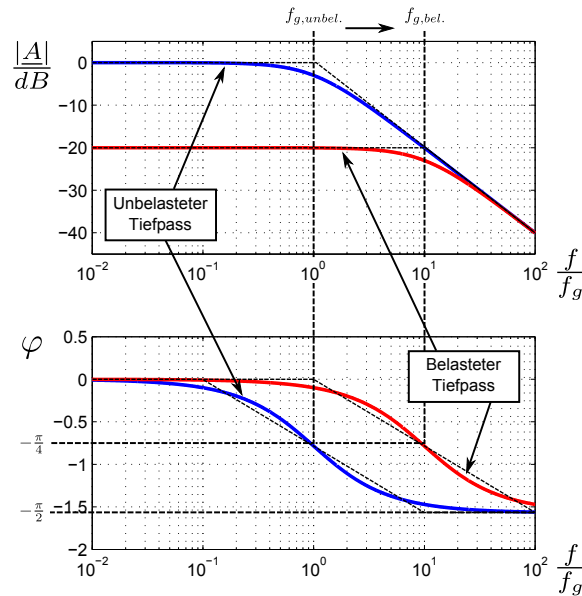
**Abbildung 5:** Belasteter Tiefpass erster Ordnung

Man erkennt, dass durch die Last der Realteil des Nenners um den Faktor $\frac{R}{R_L}$ größer geworden ist. Für die Berechnung von Betrag und Phase für das Bode-Diagramm ergibt sich daher:

$$A = |\underline{A}(j\omega)| = \frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_1|} = \left| \frac{1}{1 + \frac{R}{R_L} + j\omega RC} \right| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{R}{R_L}\right)^2 + (\omega RC)^2}} \quad (13)$$

$$\varphi = \arg(\underline{A}(j\omega)) = -\arctan\left(\frac{\omega RC}{1 + \frac{R}{R_L}}\right) = -\arctan\left(\frac{R_L R}{R_L + R} \omega C\right) \quad (14)$$

Betrachtet man das Bode-Diagramm der mit $R_L = 9R$ belasteten Schaltung in Abb. 6, erkennt man, dass für kleinere Frequenzen die Signalübertragung gedämpft ist gegenüber dem unbelasteten Filter. Außerdem verschiebt sich die Grenzfrequenz des belasteten gegenüber des unbelasteten Filters zu höheren Frequenzen.

**Abbildung 6:** Vergleich des Bode-Diagramms eines belasteten zu einem unbelasteten Tiefpass erster Ordnung aufgetragen über die Grenzfrequenz des unbelasteten Filters.

2.2 RL-Tiefpass

Um einen Tiefpass-Filter erster Ordnung zu realisieren, kann anstatt des Kondensators auch eine Spule verwendet werden. In diesem Fall ergibt sich die Schaltung aus Abb. 7.

Bei geeigneter Wahl der Induktivität kann die gleiche Tiefpass-Charakteristik erreicht

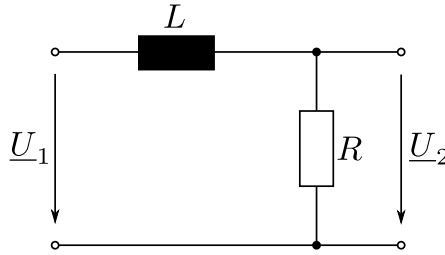


Abbildung 7: Tiefpass erster Ordnung mit Induktivität

werden. Der Widerstand der Spule wird durch folgende Formel beschrieben:

$$\underline{Z}_L = j\omega L = j2\pi fL \quad (15)$$

Die Übertragungsfunktion, aufgespalten nach Betrag und Phase ergibt sich dadurch zu:

$$\underline{A}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_R} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega \frac{L}{R}} = Ae^{j\varphi} \quad (16)$$

$$A = |\underline{A}(j\omega)| = \frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_1|} = \left| \frac{1}{1 + j\omega \frac{L}{R}} \right| = \frac{1}{|1 + j\omega \frac{L}{R}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\omega \frac{L}{R}\right)^2}} \quad (17)$$

$$\varphi = -\arctan\left(\omega \frac{L}{R}\right) \quad (18)$$

Damit ergibt sich ω_g zu:

$$\omega_g = \frac{R}{L} \quad \text{bzw.} \quad f_g = \frac{1}{2\pi \frac{L}{R}}$$

Die weiteren Betrachtungen bezüglich des Frequenz- und Zeitverhaltens, sowie die Betrachtung der Schaltung unter reeller Last sind analog zu den Betrachtungen des RC-Tiefpasses aus Kapitel 2.1.

2.3 RC-Hochpass

Ein Hochpass-Filter erster Ordnung kann realisiert werden, indem man einen Kondensator in Serie zu dem zu übertragenden Signal schaltet. Dadurch werden Signale mit tiefen Frequenzen nicht mehr durchgelassen und lediglich hohe Frequenzen können nahezu ungedämpft passieren. Die entsprechende Schaltung ist in Abb. 8 gezeigt.

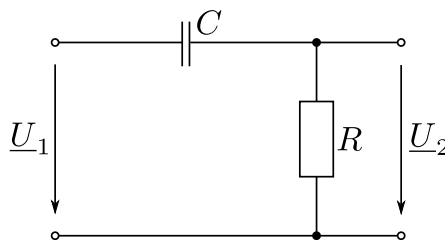


Abbildung 8: Hochpass erster Ordnung

Der frequenzabhängige Widerstand des Kondensators wurde bereits in Gl. (1) angegeben und die Übertragungsfunktion berechnet sich zu:

$$\underline{A}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = Ae^{j\varphi} \quad (19)$$

Betrag und Phase ergeben damit:

$$A = |\underline{A}(j\omega)| = \frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_1|} = \left| \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \right| = \frac{|j\omega RC|}{|1 + j\omega RC|} = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad (20)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega RC}{0}\right) - \arctan(\omega RC) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega RC) \quad (21)$$

Die dazu gehörige Grenzfrequenz beträgt:

$$\omega_g = \frac{1}{RC} \quad \text{bzw.} \quad f_g = \frac{1}{2\pi RC}$$

Auch hier ist wieder zu beachten, dass eine reelle oder komplexe Last die Übertragungsfunktion, sowie die Grenzfrequenz beeinflusst.

2.4 RL-Hochpass

Auch der Hochpass 1. Ordnung kann anstatt mit einem Kondensator auch mit einer Spule realisiert werden. Dafür muss die Spule parallel zum Signalpfad geschaltet werden, damit sich für kleine Frequenzen quasi ein Kurzschluss ergibt, der die übertragene Spannung dämpft. Hohe Frequenzen dagegen werden wieder nahezu dämpfungsfrei weitergeleitet. In Abb. 9 ist die entsprechende Schaltung dargestellt.. Durch geeignete Wahl der Induk-

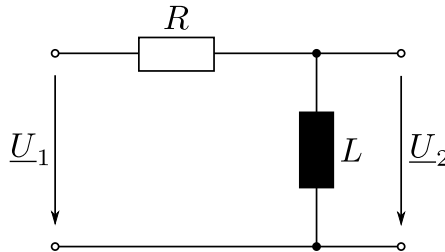


Abbildung 9: Hochpass erster Ordnung mit Induktivität

tivität, kann auch hier wieder die gleiche Hochpass-Charakteristik erreicht werden. Mit dem frequenzabhängigen Widerstand der Spule aus Gl. (15) ergibt sich für die Übertragungsfunktion, sowie deren Betrag und Phase:

$$\underline{A}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_R} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{j\omega \frac{L}{R}}{1 + j\omega \frac{L}{R}} = Ae^{j\varphi} \quad (22)$$

$$A = |\underline{A}(j\omega)| = \frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_1|} = \left| \frac{j\omega \frac{L}{R}}{1 + j\omega \frac{L}{R}} \right| = \frac{|j\omega \frac{L}{R}|}{|1 + j\omega \frac{L}{R}|} = \frac{\omega \frac{L}{R}}{\sqrt{1 + (\omega \frac{L}{R})^2}} \quad (23)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega \frac{L}{R}}{0}\right) - \arctan\left(\omega \frac{L}{R}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\omega \frac{L}{R}\right) \quad (24)$$

Damit ergibt ω_g :

$$\omega_g = \frac{R}{L} \quad \text{bzw.} \quad f_g = \frac{1}{2\pi \frac{L}{R}}$$

3 Filter 2. Ordnung

Die bisher betrachteten Filter bezeichnet man als Filter 1. Ordnung, da sie nur einen Energiespeicher (Kondensator oder Spule) enthalten. In diesem Kapitel werden Filter 2. Ordnung behandelt. Diese können entweder direkt aus den entsprechenden Bauteilen aufgebaut werden oder aus zwei Filtern 1. Ordnung zusammengesetzt werden. Aus den Überlegungen aus Kapitel 2.1 und 2.2 ging hervor, dass sowohl mit einem Kondensator, als auch mit einer Spule, ein Hoch- oder ein Tiefpass realisiert werden kann. Es gibt nun also vier verschiedene Möglichkeiten, zwei Filter 1. Ordnung hintereinander zu schalten, wobei wiederum jeder dieser Filter erster Ordnung auf zwei verschiedene Arten aufgebaut sein kann. Die sich daraus ergebenden Filter sind in Abb. 10 gezeigt und werden aufgeteilt nach ihren Funktionen in Hoch- bzw. Tiefpässe 2. Ordnung, sowie Bandpass-Filter und Bandsperren 1. Ordnung.

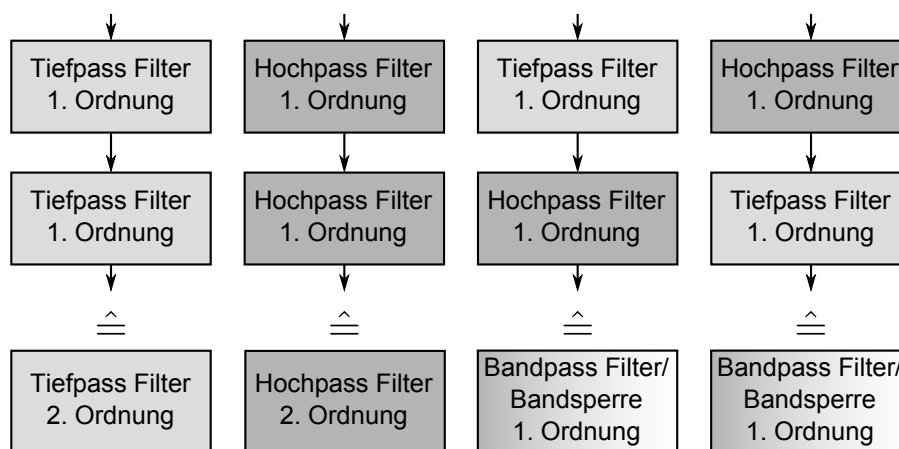


Abbildung 10: Mögliche Filter 2. Ordnung

Im Weiteren soll hier nur ein Tiefpass-Filter 2. Ordnung intensiver untersucht werden. Für die weiteren Filterarten 2. Ordnung wird anschließend jeweils ein Beispiel angegeben und ein Frequenzgang gezeigt.

3.1 Tiefpass

Um einen Tiefpass zweiter Ordnung zu erzeugen genügt es, einen Tiefpass erster Ordnung mit einem zusätzlichen, andersartigen Energiespeicher (Spule oder Kondensator) zu erweitern. In Abb. 11 ist dies für einen RC-Tiefpass gemacht worden. Die zusätzliche Spule im Signalpfad erhöht die Unterdrückung der Signalanteile mit hohen Frequenzen, während das Signal für kleine Frequenzen kaum gedämpft wird.

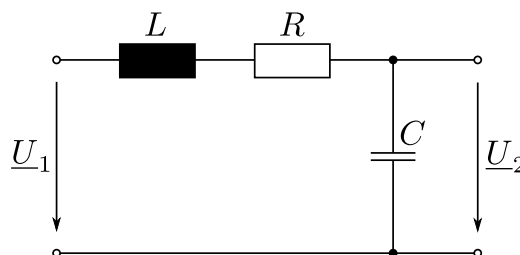


Abbildung 11: Unbelasteter Tiefpass zweiter Ordnung

Mit Hilfe der frequenzabhängigen Widerstände des Kondensators (Gl. 1) und der Spule (Gl. 15) berechnet sich die Übertragungsfunktion zu:

$$\underline{A}(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_{L+R}} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} = Ae^{j\varphi} \quad (25)$$

Betrag und Phase ergeben:

$$A = \left| \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} \right| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}} \quad (26)$$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC}\right) + \begin{cases} 0 & \text{für } \omega \leq \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \pi & \text{für } \omega > \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{cases} \quad (27)$$

Die Grenzfrequenz beträgt:

$$\omega_g = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{bzw.} \quad f_g = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Der dazugehörige Frequenzgang ist in Abb. 12 abgebildet. Die Pfeile geben an, wie sich die Kurven für steigende Werte des Ohmschen Widerstands verhalten.

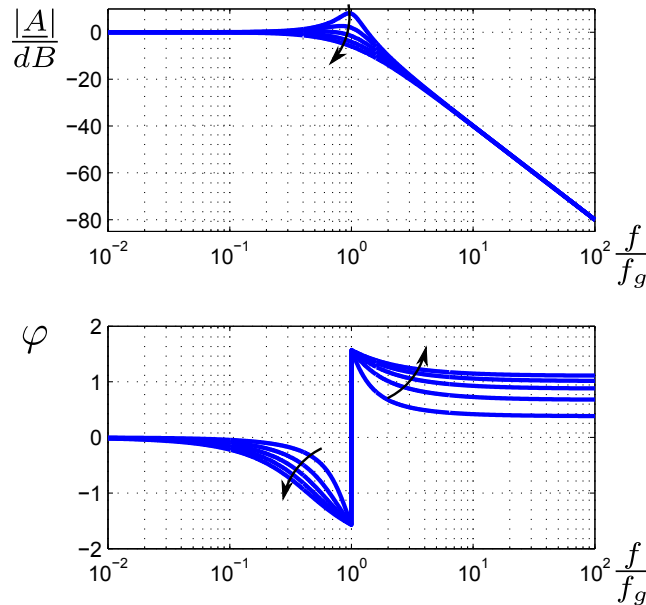


Abbildung 12: Bode-Diagramm eines Tiefpass 2. Ordnung

Eine weitere Methode einen Tiefpass-Filter 2. Ordnung zu realisieren besteht darin, zwei Tiefpass-Filter in Serie zu schalten. Die resultierende Schaltung ist in Abb. 13 gezeigt. Wichtig bei der Untersuchung dieses Tiefpass-Filters ist, dass der hintere Tiefpass eine komplexe Last für den vorderen Tiefpass darstellt. Somit ist, wie in Abb. 14 dargestellt, die Übertragungsfunktion des unbelasteten Filters 2. Ordnung aus Abb. 13 nicht gleich der Multiplikation der Übertragungsfunktionen der beiden unbelasteten Tiefpässe 1. Ordnung.

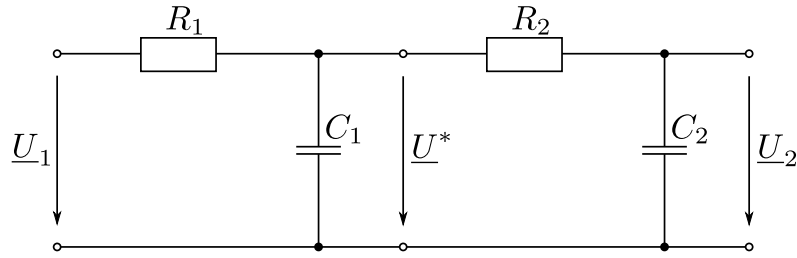


Abbildung 13: Alternative Realisierung eines Tiefpass zweiter Ordnung

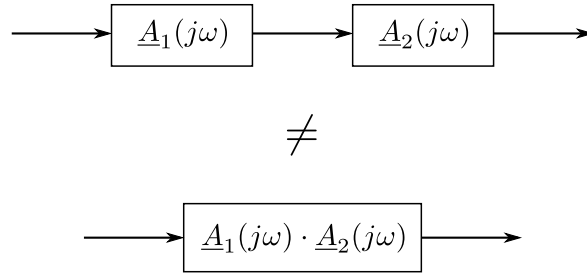


Abbildung 14: Serienschaltung zweier unbelasteter Tiefpässe

Wie sich die Belastung eines Tiefpasses erster Ordnung durch einen weiteren Tiefpass auf die Übertragungsfunktion auswirkt soll, zur Vorbereitung auf den durchzuführenden Versuch, im Rahmen der zu bearbeitenden Fragen und Aufgaben aus Kapitel 4 untersucht werden.

3.2 Hochpass

In Abb. 15 ist ein Hochpass zweiter Ordnung abgebildet.

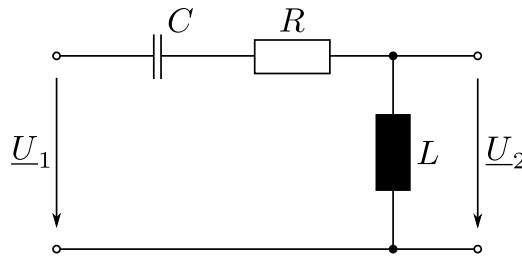


Abbildung 15: Unbelasteter Hochpass zweiter Ordnung

Die Übertragungsfunktion, sowie deren Betrag und Phase berechnen sich zu:

$$\underline{A}(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_{R+C}} = \frac{j\omega L}{R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L} = \frac{\omega^2 LC}{\omega^2 LC - 1 - j\omega RC} = Ae^{j\varphi} \quad (28)$$

$$A = \left| \frac{\omega^2 LC}{\omega^2 LC - 1 - j\omega RC} \right| = \frac{\omega^2 LC}{\sqrt{(\omega^2 LC - 1)^2 + (\omega RC)^2}} \quad (29)$$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{\omega RC}{\omega^2 LC - 1}\right) + \begin{cases} 0 & \text{für } \omega \geq \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \pi & \text{für } \omega < \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{cases} \quad (30)$$

Mit der Grenzfrequenz:

$$\omega_g = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{bzw.} \quad f_g = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Das dazugehörige Bode-Diagramm ist in Abb. 16 abgebildet. Wiederum geben die Pfeile an, wie sich die Kurven für steigende Werte des Ohmschen Widerstands verhalten.

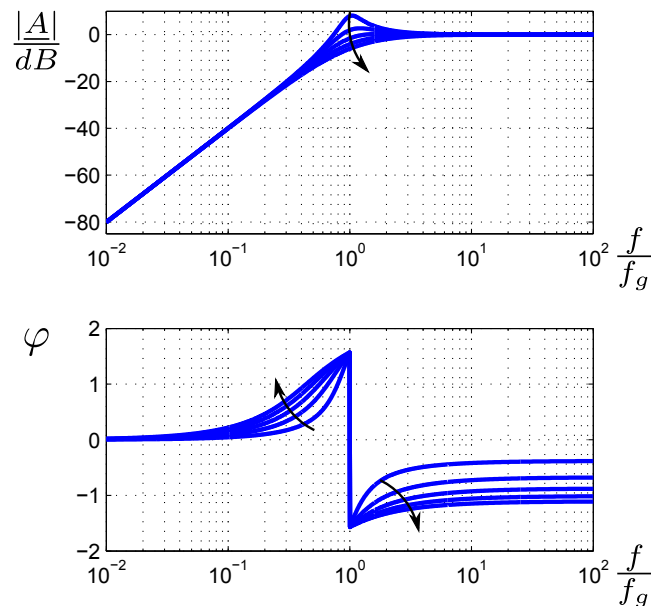


Abbildung 16: Bode-Diagramm eines Hochpass 2. Ordnung

3.3 Bandpass

Abb. 17 zeigt einen Bandpass erster Ordnung.

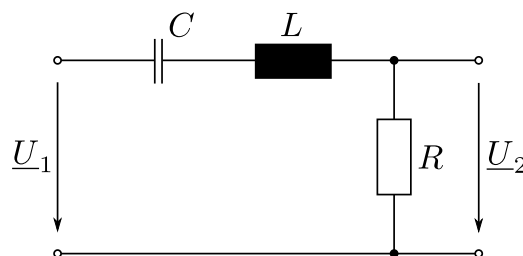


Abbildung 17: Unbelasteter Bandpass erster Ordnung

Die Übertragungsfunktion, sowie deren Betrag und Phase berechnen sich zu:

$$\underline{A}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_{L+C}} = \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} = Ae^{j\varphi} \quad (31)$$

$$(32)$$

$$A = \left| \frac{j\omega RC}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} \right| = \frac{\omega RC}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}} \quad (33)$$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC}\right) + \begin{cases} 0 & \text{für } \omega \leq \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \pi & \text{für } \omega > \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{cases} \quad (34)$$

Mit der Grenzfrequenz:

$$\omega_g = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{bzw.} \quad f_g = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Abb. 18 zeigt das dazugehörige Bode-Diagramm mit den Pfeile, die das Verhalten der Kurven für steigende Werte des Ohmschen Widerstands angeben.

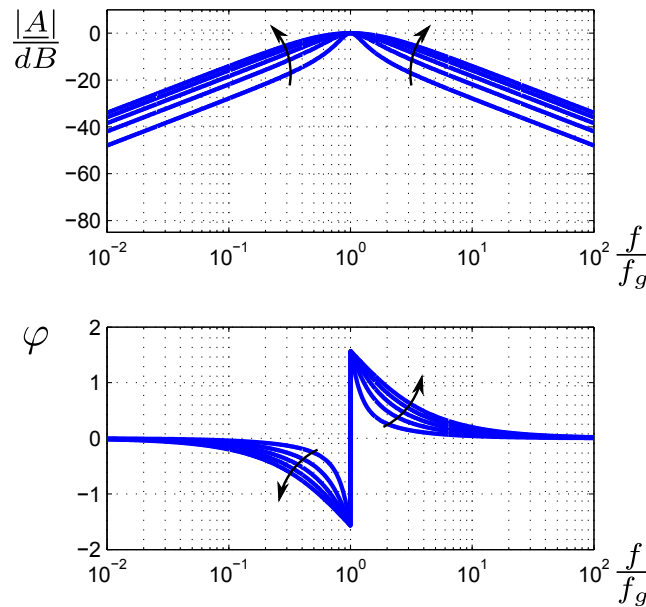


Abbildung 18: Bode-Diagramm eines Bandpasses 1. Ordnung

3.4 Bandsperre

In Abb. 19 ist eine Bandsperre erster Ordnung abgebildet.

Die Übertragungsfunktion, sowie deren Betrag und Phase berechnen sich zu:

$$\underline{A}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{Z}_{L+C}}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_{L+C}} = \frac{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1 - \omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} = Ae^{j\varphi} \quad (35)$$

$$A = \left| \frac{1 - \omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} \right| = \frac{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2}}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}} \quad (36)$$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC}\right) + \begin{cases} 0 & \text{für } \omega \leq \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \pi & \text{für } \omega > \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{cases} \quad (37)$$

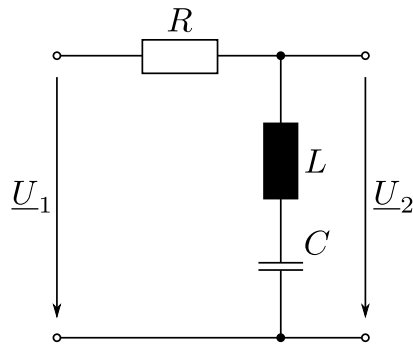


Abbildung 19: Unbelastete Bandsperre erster Ordnung

Mit der Grenzfrequenz:

$$\omega_g = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{bzw.} \quad f_g = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

In Abb. 20 ist das entsprechende Bode-Diagramm gezeigt. Das Verhalten der Kurven für steigende Werte des Ohmschen Widerstands wird wieder durch die Pfeile angegeben.

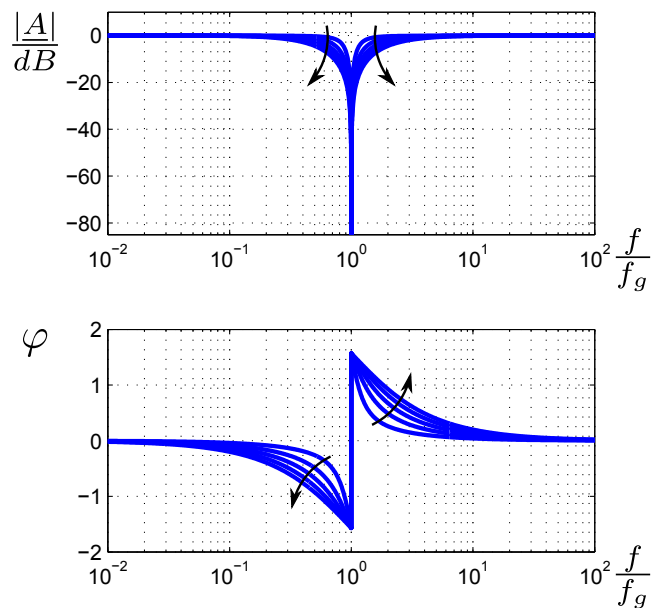


Abbildung 20: Bode-Diagramm einer Bandsperre 1. Ordnung

4 Vorbereitende Aufgaben

Die folgenden Aufgaben müssen noch *vor* dem Praktikumstermin bearbeitet werden. Übertragen Sie ihre Antworten direkt in die vorliegende Versuchsanleitung.

1. Wie würden Sie eine Bandpass nur aus Widerständen und Kondensatoren aufbauen?
2. Nennen Sie eine Einsatzmöglichkeit eines Hochpasses!
3. Welche Eigenschaft muss der Eingang eines Messgerätes besitzen, um die Übertragungsfunktion eines Filters möglichst exakt zu messen? Begründung!
4. Welchen zeitlichen Verlauf der Ausgangsspannung erwarten Sie, wenn Sie eine periodische Rechteckschwingung ($\dots +U_0, -U_0, +U_0, -U_0, \dots$) auf den Eingang eines Tiefpasses geben? (Nur den schematischen Verlauf skizzieren.)
5. Welchen zeitlichen Verlauf der Ausgangsspannung erwarten Sie, wenn Sie eine periodische Rechteckschwingung ($\dots +U_0, -U_0, +U_0, -U_0, \dots$) auf den Eingang eines Hochpasses geben? (Nur den schematischen Verlauf skizzieren.)
6. In welchem Frequenzbereich befinden sich Audio-Signale?
7. Welche Auswirkung haben Leitungs- und sonstige parasitäre Widerstände eines Filters auf ein gefiltertes, akustisches Signal?

5 Versuchsdurchführung

Führen Sie die folgenden Experimente gemäß Vorgaben durch.

5.1 Bestimmung der Grenzfrequenz

Bestimmen Sie die Grenzfrequenz eines RC-Tiefpasses ($R = 1k\Omega$ und $C = 2.2\mu F$) mit Hilfe des Oszilloskops. Berechnen Sie damit und mit der Formel aus Gl. 13 den Innenwiderstand des Oszilloskops.

1. Messen Sie mit dem Multimeter die exakten Werte R und C der Bauteile.
2. Bauen Sie die Schaltung auf und messen Sie mit Hilfe des Oszilloskops die Grenzfrequenz f_g . Gehen Sie möglichst sorgfältig vor.
3. Geben Sie eine geeignete Formel zur Bestimmung des Innenwiderstands des Oszilloskops an.
4. Bestimmen Sie den Innenwiderstand für die gemessene Frequenz bei einem Messfehler (der Grenzfrequenz) von $\pm 1\%$. Also R_{i,f_g} , $R_{i,f_g+1\%}$ und $R_{i,f_g-1\%}$.
5. Bestimmen Sie den Innenwiderstand R_i des Oszilloskops mit Hilfe des Multimeters.
6. Wie groß ist der Innenwiderstand R_i laut Beschreibung des Oszilloskops?
7. Geben Sie ein kurzes Fazit für diesen Teil des Versuchs.

5.2 Zeitverhalten eines Hochpasses

Messen Sie die Abfallzeit der Schaltung aus Abb. 8 für folgende Bauteil- und Spannungswerte:

$$\begin{array}{ll} R &= 100\Omega \\ C &= 2.2\mu F \end{array} \quad \underline{U}_1 = \begin{cases} t < 0 & -2.5V \\ t \geq 0 & 2.5V \end{cases}$$

1. Bauen Sie das Filter aus Abb. 8 auf und messen Sie die Abfallzeit einmal von Hand und einmal mit Hilfe der eingebauten Rise-/Faltime Messung.
2. Berechnen Sie den theoretisch zu erwartenden Wert.

5.3 Bandpass

Im Folgenden soll das Übertragungsverhalten eines Bandpasses 1.Ordnung untersucht werden. Bauen Sie dazu das Bandpass-Filter aus Abb. 17 mit $R = 100\Omega$ und $C = 2.2\mu F$ auf. Als Induktivität verwenden Sie eine Spule mit 250 Windungen.

Nehmen Sie die Übertragungsfunktion mit Hilfe der Matlab-GUI (100 Punkte, $1V_{pp}$, 100 Hz–100 kHz, log) auf und fügen Sie das Diagramm in Ihr Protokoll ein. Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.

5.4 Bandsperre

Weiter soll das Übertragungsverhalten einer Bandsperre 1.Ordnung untersucht werden. Bauen Sie dazu die Bandsperre aus Abb. 19 mit $R = 100\,\Omega$ und $C = 2.2\,\mu\text{F}$ auf. Als Induktivität verwenden Sie eine Spule mit 250 Windungen.

Nehmen Sie die Übertragungsfunktion mit Hilfe der Matlab-GUI (100 Punkte, $1\,\text{V}_{pp}$, 100 Hz–100 kHz, log) auf und fügen Sie das Diagramm in Ihr Protokoll ein. Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.

5.5 Frequenzbereich und Audio-Filterung

(Vorsicht: Bei der Verwendung des Kopfhörers immer zuerst die Lautstärke anpassen!)

1. Hören Sie sich zunächst das Audio-Sprach-Signal an. In welchem Frequenzbereich befindet sich die Störung?
2. Realisieren Sie mit zwei Kondensatoren ($C = 2.2\,\mu\text{F}$) und einer Spule (500 Windungen) ein Hochpass-Filter in T-Schaltung und zeigen Sie den Aufbau Ihrem Tutor.
3. Bestimmen Sie den ohmschen Widerstand des Kopfhörers.
4. Messen Sie die Übertragungsfunktion des Hochpass-Filter einmal ohne und einmal mit angeschlossener Last (Kopfhörer) und stellen Sie diese in zwei Diagrammen dar (200 Punkte, 100 Hz–100 kHz, log.). Verwenden Sie dazu die Matlab-GUI ($500\,\text{mV}_{pp}$). Speichern Sie die Plots und fügen Sie diese in Ihr Protokoll ein. Erklären Sie die Verläufe der Funktionen für kleine und große Frequenzen.
5. Hören Sie sich einmal das ungefilterte und einmal das gefilterte Audio-Sprach-Signal an. Welche Person spricht da und welchen Satz sagt sie am Ende?

6 Evaluation

Auf der Moodleseite gibt es zu jedem Versuch eine Umfrage zur Evaluation. Bitte helfen Sie die Qualität des Praktikums zu verbessern, indem Sie uns Rückmeldung geben wie Sie die Versuchsdurchführung empfunden haben!

Loggen Sie Sich beide einzeln vom Praktikumsrechner aus ein und beantworten Sie die Umfrage noch direkt nach der Versuchsdurchführung bevor Sie das Praktikum verlassen!