

# Grundlagen der Rechnerarchitektur

Tim Luchterhand, Paul Nykiel (Abgabegruppe 117)

1. Dezember 2018

**Hinweis:** Jede Zahl, bei der keine Basis spezifiziert ist, ist im 10er System zu interpretieren, sofern nicht anders angegeben.

## 1 Boolesche Algebra

### 1.1

Beweis durch Nachrechnen:

#### 1.1.1 Absorbierendes Element

$$\begin{aligned}\text{kgV}(1, 30) &= 30 \\ \text{kgV}(2, 30) &= 30 \\ \text{kgV}(3, 30) &= 30 \\ \text{kgV}(5, 30) &= 30 \\ \text{kgV}(6, 30) &= 30 \\ \text{kgV}(10, 30) &= 30 \\ \text{kgV}(15, 30) &= 30\end{aligned}$$

### 1.1.2 Neutrales Element

$$\begin{aligned}
 \text{ggT}(1, 30) &= 1 \\
 \text{ggT}(2, 30) &= 2 \\
 \text{ggT}(3, 30) &= 3 \\
 \text{ggT}(5, 30) &= 5 \\
 \text{ggT}(6, 30) &= 6 \\
 \text{ggT}(10, 30) &= 10 \\
 \text{ggT}(15, 30) &= 15
 \end{aligned}$$

## 1.2

(a)

$$\begin{aligned}
 \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} &= \overline{x_1 + x_2} \\
 \Leftrightarrow (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}) \cdot (x_1 + x_2) &= \overline{(x_1 + x_2)} \cdot (x_1 + x_2) \\
 \stackrel{\text{H4'}}{\Leftrightarrow} (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}) \cdot x_1 + (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}) \cdot x_2 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (\overline{x_1} \cdot x_1) \cdot \overline{x_2} + (\overline{x_2} \cdot x_2) \cdot \overline{x_1} &= 0 \\
 \stackrel{\text{H4'}}{\Leftrightarrow} 0 \cdot \overline{x_2} + 0 \cdot \overline{x_1} &= 0 \\
 \Leftrightarrow 0 + 0 &= 0 \\
 \stackrel{\text{H3}}{\Leftrightarrow} 0 &= 0
 \end{aligned}$$

(b) Es wird  $\overline{\overline{a}} = a$  genutzt, Beweis siehe Vorlesung.

$$\overline{x_1} + \overline{x_2} = \overline{\overline{\overline{x_1} + \overline{x_2}}} \stackrel{(a)}{=} \overline{\overline{\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}}} = \overline{x_1 \cdot x_2}$$

## 2 Minimierung Boolescher Funktionen

### 2.3

(a)

$$f(x_1) = \overline{x_1} \cdot (x_1 + (x_1 \cdot \overline{x_1})) \stackrel{\text{P9}}{=} \overline{x_1} \cdot (x_1 + 0) \stackrel{\text{P5'}}{=} \overline{x_1} \cdot x_1 \stackrel{\text{P9}}{=} 0$$

(b)

$$f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot (\overline{x_2} \cdot 1) \stackrel{\text{P5}}{=} x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot \overline{x_2} \stackrel{\text{P4}}{=} x_1 \cdot (x_2 + \overline{x_2}) \stackrel{\text{P9'}}{=} x_1 \cdot 1 \stackrel{\text{P5}}{=} x_1$$

(c)

$$f(x_1, x_2) = x_1 \cdot (\overline{x_1} \cdot (\overline{x_2} + \overline{x_2})) \stackrel{P7}{=} x_1 \cdot (\overline{x_1} \cdot (x_2 + \overline{x_2})) \stackrel{P9'}{=} x_1 \cdot (\overline{x_1} \cdot 1) \stackrel{P5}{=} x_1 \cdot \overline{x_1} \stackrel{P9}{=} 0$$

(d)

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{(x_1 \cdot x_2)} + ((x_3 + 0) \cdot \overline{x_3}) \stackrel{P5'}{=} \overline{(x_1 \cdot x_2)} + (x_3 \cdot \overline{x_3}) \stackrel{P9}{=} \overline{(x_1 \cdot x_2)} + 0 \stackrel{P5^*}{=} \overline{(x_1 \cdot x_2)}$$

(e)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (\overline{x_1} \cdot (x_3 + \overline{x_3}) \cdot x_2) + (\overline{x_1} \cdot x_3) + \overline{(x_1 + x_4)} \\ &\stackrel{P9'}{=} (\overline{x_1} \cdot 1 \cdot x_2) + (\overline{x_1} \cdot x_3) + \overline{(x_1 + x_4)} \\ &\stackrel{P5}{=} \overline{x_1} \cdot x_2 + \overline{x_1} \cdot x_3 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_4} \\ &\stackrel{P4}{=} \overline{x_1} \cdot (x_2 + x_3 + \overline{x_4}) \end{aligned}$$

## 2.4

1.

$$\begin{aligned} &\overline{(\overline{x_1} + \overline{x_2}) \cdot (x_1 + \overline{x_3}) \cdot (x_2 + x_3)} \\ &\stackrel{P8}{=} \overline{(\overline{x_1} + \overline{x_2}) \cdot (x_1 + \overline{x_3})} + \overline{(x_2 + x_3)} \\ &\stackrel{P8}{=} \overline{(\overline{x_1} + \overline{x_2})} + \overline{(x_1 + \overline{x_3})} + \overline{(x_2 + x_3)} \\ &\stackrel{P8'}{=} (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}) \cdot (\overline{x_1} \cdot \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) \\ &\stackrel{P7}{=} (x_1 \cdot x_2) \cdot (\overline{x_1} \cdot x_3) \cdot (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} &\overline{\overline{(x_1 \cdot (\overline{x_2} \cdot x_2))} \cdot ((\overline{x_1} \cdot x_1) \cdot x_2)} \\ &\stackrel{P8}{=} \overline{(x_1 \cdot (\overline{x_2} \cdot x_2))} + \overline{((\overline{x_1} \cdot x_1) \cdot x_2)} \\ &\stackrel{P7}{=} (x_1 \cdot (\overline{x_2} \cdot x_2)) + ((\overline{x_1} \cdot x_1) \cdot x_2) \\ &\stackrel{P3}{=} x_1 \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot x_2 \end{aligned}$$

### 3 Shannon Zerlegung und Erweiterung

#### 3.5

(a)

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2) &= x_1 \cdot (1 \cdot x_2 + 1 \cdot \overline{x_2} + 0 \cdot x_2) + \overline{x_1} \cdot (0 \cdot x_2 + 0 \cdot \overline{x_2} + 1 \cdot x_2) \\&= x_1 \cdot (x_2 + \overline{x_2}) + \overline{x_1} \cdot (x_2) \\&= x_1 \cdot (x_2 \cdot (1 + 0) + \overline{x_2} \cdot (0 + 1)) + \overline{x_1} \cdot (x_2 \cdot (1) + \overline{x_2} \cdot (0)) \\&= x_1 + \overline{x_1} \cdot x_2\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, x_3) &= x_1 \cdot (x_2 x_3 + x_2 \overline{x_3}) + \overline{x_1} \cdot (\overline{x_2} x_3) \\&= x_1 \cdot (x_2 \cdot (x_3 + \overline{x_3})) + \overline{x_1} \cdot (\overline{x_2} x_3) = x_1 \cdot x_2 + \overline{x_1} \cdot (\overline{x_2} x_3) \\&= x_1 x_2 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} x_3\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, x_3) &= x_1 \cdot (x_2 x_3 + \overline{x_2} x_3) + \overline{x_1} \cdot (x_2 \overline{x_3} + \overline{x_2} x_3 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) \\&= x_1 \cdot (x_2 x_3 + \overline{x_2} x_3) + \overline{x_1} \cdot (x_2 \cdot (\overline{x_3}) + \overline{x_2} \cdot (x_3 + \overline{x_3})) \\&= x_1 \cdot (x_3 \cdot (x_2 + \overline{x_2})) + \overline{x_1} \cdot (x_2 \cdot (\overline{x_3}) + \overline{x_2} \cdot (x_3 + \overline{x_3})) \\&= x_1 x_3 + \overline{x_1} \cdot (x_2 \overline{x_3} + \overline{x_2}) = x_1 x_3 + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}\end{aligned}$$

#### 3.6

(a)

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, x_3) &= f(0, 0, 0) \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + f(0, 0, 1) \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} x_3 \\&+ f(0, 1, 0) \overline{x_1} x_2 \cdot \overline{x_3} + f(0, 1, 1) \overline{x_1} x_2 x_3 \\&+ f(1, 0, 0) x_1 \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + f(1, 0, 1) x_1 \overline{x_2} x_3 \\&+ f(1, 1, 0) x_1 x_2 \overline{x_3} + f(1, 1, 1) x_1 x_2 x_3 \\&= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + \overline{x_1} x_2 \cdot \overline{x_3} + x_1 \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_1 x_2 \overline{x_3} + x_1 x_2 x_3\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= f(0, 0, 0, 0) \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} \\ &\quad + f(0, 0, 0, 1) \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 \\ &\quad + f(0, 0, 1, 0) \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \\ &\quad + f(0, 0, 1, 1) \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4 \\ &\quad + f(0, 1, 0, 0) \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} \\ &\quad + f(0, 1, 0, 1) \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 \\ &\quad + f(0, 1, 1, 0) \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} \\ &\quad + f(0, 1, 1, 1) \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 \\ &\quad + f(1, 0, 0, 0) x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} \\ &\quad + f(1, 0, 0, 1) x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 \\ &\quad + f(1, 0, 1, 0) x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \\ &\quad + f(1, 0, 1, 1) x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 \\ &\quad + f(1, 1, 0, 0) x_1 x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} \\ &\quad + f(1, 1, 0, 1) x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \\ &\quad + f(1, 1, 1, 0) x_1 x_2 x_3 \overline{x_4} \\ &\quad + f(1, 1, 1, 1) x_1 x_2 x_3 x_4 \\ &= \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 \\ &\quad + \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4 \\ &\quad + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 \\ &\quad + \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 \\ &\quad + x_1 x_2 x_3 \overline{x_4} \\ &\quad + x_1 x_2 x_3 x_4 \end{aligned}$$