Grundlagen der Rechnerarchitektur

Tim Luchterhand, Paul Nykiel (Abgabegruppe 117)

9. Januar 2019

Hinweis: Jede Zahl, bei der keine Basis spezifiziert ist, ist im 10er System zu interpretieren, sofern nicht anders angegeben.

1 Boolesche Algebra

1.1

Beweis durch Nachrechnen:

1.1.1 Absorbierendes Element

$$
\begin{aligned}
\mathrm{kgV}(1,30) &= 30\\
\mathrm{kgV}(2,30) &= 30\\
\mathrm{kgV}(3,30) &= 30\\
\mathrm{kgV}(5,30) &= 30\\
\mathrm{kgV}(6,30) &= 30\\
\mathrm{kgV}(10,30) &= 30\\
\mathrm{kgV}(15,30) &= 30
\end{aligned}
$$

1.1.2 Neutrales Element

$$\begin{aligned}
\mathrm{ggT}(1,30) &= 1\\
\mathrm{ggT}(2,30) &= 2\\
\mathrm{ggT}(3,30) &= 3\\
\mathrm{ggT}(5,30) &= 5\\
\mathrm{ggT}(6,30) &= 6\\
\mathrm{ggT}(10,30) &= 10\\
\mathrm{ggT}(15,30) &= 15
\end{aligned}$$

1.2

(a)

$$\begin{aligned}
\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} &= \overline{x_1 + x_2}\\
\Leftrightarrow (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}) \cdot (x_1 + x_2) &= \overline{(x_1 + x_2)} \cdot (x_1 + x_2)\\
\overset{\text{H4'}}{\Leftrightarrow} (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}) \cdot x_1 + (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}) \cdot x_2 &= 0\\
\Leftrightarrow (\overline{x_1} \cdot x_1) \cdot \overline{x_2} + (\overline{x_2} \cdot x_2) \cdot \overline{x_1} &= 0\\
\overset{\text{H4'}}{\Leftrightarrow} 0 \cdot \overline{x_2} + 0 \cdot \overline{x_1} &= 0\\
\Leftrightarrow 0 + 0 &= 0\\
\overset{\text{H3}}{\Leftrightarrow} 0 &= 0
\end{aligned}$$

(b) Es wird $\overline{\overline{a}} = a$ genutzt, Beweis siehe Vorlesung.

$$\overline{x_1} + \overline{x_2} = \overline{\overline{\overline{x_1} + \overline{x_2}}} \overset{\text{(a)}}{=} \overline{\overline{\overline{x_1}} \cdot \overline{\overline{x_2}}} = \overline{x_1 \cdot x_2}$$

2 Minimierung Boolescher Funktionen

2.3

(a)

$$f(x_1) = \overline{x_1} \cdot (x_1 + (x_1 \cdot \overline{x_1})) \overset{\text{P9}}{=} \overline{x_1} \cdot (x_1 + 0) \overset{\text{P5'}}{=} \overline{x_1} \cdot x_1 \overset{\text{P9}}{=} 0$$

(b)

$$f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot (\overline{x_2} \cdot 1) \overset{\text{P5}}{=} x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot \overline{x_2} \overset{\text{P4}}{=} x_1 \cdot (x_2 + \overline{x_2}) \overset{\text{P9'}}{=} x_1 \cdot 1 \overset{\text{P5}}{=} x_1$$

(c)

$$f(x_1, x_2) = x_1 \cdot (\overline{x_1} \cdot (\overline{\overline{x_2}} + \overline{x_2})) \overset{\text{P7}}{=} x_1 \cdot (\overline{x_1} \cdot (x_2 + \overline{x_2})) \overset{\text{P9'}}{=} x_1 \cdot (\overline{x_1} \cdot 1) \overset{\text{P5}}{=} x_1 \cdot \overline{x_1} \overset{\text{P9}}{=} 0$$

(d)

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{(x_1 \cdot x_2)}+((x_3+0)\cdot\overline{x_3}) \overset{\text{P5'}}{=} \overline{(x_1 \cdot x_2)}+(x_3\cdot\overline{x_3}) \overset{\text{P9}}{=} \overline{(x_1 \cdot x_2)}+0 \overset{\text{P5*}}{=} \overline{(x_1 \cdot x_2)}$$

(e)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (\overline{x_1} \cdot (x_3 + \overline{x_3}) \cdot x_2) + (\overline{x_1} \cdot x_3) + \overline{(x_1 + x_4)} \\ &\overset{\text{P9'}}{=} (\overline{x_1} \cdot 1 \cdot x_2) + (\overline{x_1} \cdot x_3) + \overline{(x_1 + x_4)} \\ &\overset{\text{P5}}{=} \overline{x_1} \cdot x_2 + \overline{x_1} \cdot x_3 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_4} \\ &\overset{\text{P4}}{=} \overline{x_1} \cdot (x_2 + x_3 + \overline{x_4}) \end{aligned}$$

2.4

1.

$$\begin{aligned} &\overline{(\overline{x_1} + \overline{x_2}) \cdot (x_1 + \overline{x_3}) \cdot (x_2 + x_3)} \\ \overset{\text{P8}}{=} \quad &\overline{(\overline{x_1} + \overline{x_2}) \cdot (x_1 + \overline{x_3})} + \overline{(x_2 + x_3)} \\ \overset{\text{P8}}{=} \quad &\overline{(\overline{x_1} + \overline{x_2})} + \overline{(x_1 + \overline{x_3})} + \overline{(x_2 + x_3)} \\ \overset{\text{P8'}}{=} \quad &(\overline{\overline{x_1}} \cdot \overline{\overline{x_2}}) \cdot (\overline{x_1} \cdot \overline{\overline{x_3}}) \cdot (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) \\ \overset{\text{P7}}{=} \quad &(x_1 \cdot x_2) \cdot (\overline{x_1} \cdot x_3) \cdot (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} &\overline{\overline{(x_1 \cdot \overline{(x_2 \cdot x_2)})} \cdot \overline{(\overline{(x_1 \cdot x_1)} \cdot x_2)}} \\ \overset{\text{P8}}{=} \quad &\overline{\overline{(x_1 \cdot \overline{(x_2 \cdot x_2)})}} + \overline{\overline{(\overline{(x_1 \cdot x_1)} \cdot x_2)}} \\ \overset{\text{P7}}{=} \quad &(x_1 \cdot \overline{(x_2 \cdot x_2)}) + (\overline{(x_1 \cdot x_1)} \cdot x_2) \\ \overset{\text{P3}}{=} \quad &x_1 \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot x_2 \end{aligned}$$

3 Shannon Zerlegung und Erweiterung

3.5

(a)

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2) &= x_1 \cdot (1 \cdot x_2 + 1 \cdot \overline{x_2} + 0 \cdot x_2) + \overline{x_1} \cdot (0 \cdot x_2 + 0 \cdot \overline{x_2} + 1 \cdot x_2) \\
&= x_1 \cdot (x_2 + \overline{x_2}) + \overline{x_1} \cdot (x_2) \\
&= x_1 \cdot (x_2 \cdot (1 + 0) + \overline{x_2} \cdot (0 + 1)) + \overline{x_1} \cdot (x_2 \cdot (1) + \overline{x_2} \cdot (0)) \\
&= x_1 + \overline{x_1} \cdot x_2
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= x_1 \cdot (x_2 x_3 + x_2 \overline{x_3}) + \overline{x_1} \cdot (\overline{x_2} x_3) \\
&= x_1 \cdot (x_2 \cdot (x_3 + \overline{x_3})) + \overline{x_1} \cdot (\overline{x_2} x_3) = x_1 \cdot x_2 + \overline{x_1} \cdot (\overline{x_2} x_3) \\
&= x_1 x_2 + \overline{x_1}\ \overline{x_2} x_3
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= x_1 \cdot (x_2 x_3 + \overline{x_2} x_3) + \overline{x_1} \cdot (x_2 \overline{x_3} + \overline{x_2} x_3 + \overline{x_2}\ \overline{x_3}) \\
&= x_1 \cdot (x_2 x_3 + \overline{x_2} x_3) + \overline{x_1} \cdot (x_2 \cdot (\overline{x_3}) + \overline{x_2} \cdot (x_3 + \overline{x_3})) \\
&= x_1 \cdot (x_3 \cdot (x_2 + \overline{x_2})) + \overline{x_1} \cdot (x_2 \cdot (\overline{x_3}) + \overline{x_2} \cdot (x_3 + \overline{x_3})) \\
&= x_1 x_3 + \overline{x_1} \cdot (x_2 \overline{x_3} + \overline{x_2}) = x_1 x_3 + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} + \overline{x_1}\ \overline{x_2}
\end{aligned}$$

3.6

(a)

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= f(0,0,0)\overline{x_1}\ \overline{x_2}\ \overline{x_3} + f(0,0,1)\overline{x_1}\ \overline{x_2} x_3 \\
&+ f(0,1,0)\overline{x_1} x_2\ \overline{x_3} + f(0,1,1)\overline{x_1} x_2 x_3 \\
&+ f(1,0,0) x_1 \overline{x_2}\ \overline{x_3} + f(1,0,1) x_1 \overline{x_2} x_3 \\
&+ f(1,1,0) x_1 x_2 \overline{x_3} + f(1,1,1) x_1 x_2 x_3 \\
&= \overline{x_1}\ \overline{x_2}\ \overline{x_3} + \overline{x_1} x_2\ \overline{x_3} + x_1 \overline{x_2}\ \overline{x_3} + x_1 x_2 \overline{x_3} + x_1 x_2 x_3
\end{aligned}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3,x_4) &= f(0,0,0,0)\overline{x_1}\ \overline{x_2}\ \overline{x_3}\ \overline{x_4} \\
&\quad +f(0,0,0,1)\overline{x_1}\ \overline{x_2}\ \overline{x_3}x_4 \\
&\quad +f(0,0,1,0)\overline{x_1}\ \overline{x_2}x_3\overline{x_4} \\
&\quad +f(0,0,1,1)\overline{x_1}\ \overline{x_2}x_3x_4 \\
&\quad +f(0,1,0,0)\overline{x_1}x_2\overline{x_3}\ \overline{x_4} \\
&\quad +f(0,1,0,1)\overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4 \\
&\quad +f(0,1,1,0)\overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4} \\
&\quad +f(0,1,1,1)\overline{x_1}x_2x_3x_4 \\
&\quad +f(1,0,0,0)x_1\overline{x_2}\ \overline{x_3}\ \overline{x_4} \\
&\quad +f(1,0,0,1)x_1\overline{x_2}\ \overline{x_3}x_4 \\
&\quad +f(1,0,1,0)x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4} \\
&\quad +f(1,0,1,1)x_1\overline{x_2}x_3x_4 \\
&\quad +f(1,1,0,0)x_1x_2\overline{x_3}\ \overline{x_4} \\
&\quad +f(1,1,0,1)x_1x_2\overline{x_3}x_4 \\
&\quad +f(1,1,1,0)x_1x_2x_3\overline{x_4} \\
&\quad +f(1,1,1,1)x_1x_2x_3x_4 \\
&= \overline{x_1}\ \overline{x_2}\ \overline{x_3}x_4 \\
&\quad +\overline{x_1}\ \overline{x_2}x_3x_4 \\
&\quad +\overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4 \\
&\quad +\overline{x_1}x_2x_3x_4 \\
&\quad +x_1x_2x_3\overline{x_4} \\
&\quad +x_1x_2x_3x_4
\end{aligned}
$$