

Grundlagen der Rechnerarchitektur

Tim Luchterhand, Paul Nykiel (Abgabegruppe 117)

1. Dezember 2018

Hinweis: Jede Zahl, bei der keine Basis spezifiziert ist, ist im 10er System zu interpretieren, sofern nicht anders angegeben.

1 Schaltalgebra

1.1

- (a) Die Schaltalgebra ist eine Teilmenge der Booleschen Algebra mit einer zweiwertigen Trägermenge. Das heißt es gibt nur zwei möglichen Werte, anstatt beliebig vielen Werten bei einer Booleschen Algebra.

- (b) (i) Nur mit NAND-Gattern:

$$x_1 \cdot x_2 = \overline{\overline{x_1 \cdot x_2}} = \overline{\overline{x_1 \cdot x_2} \cdot \overline{x_1 \cdot x_2}}$$

Nur mit NOR-Gattern:

$$x_1 \cdot x_2 = \overline{\overline{x_1 \cdot x_2}} = \overline{\overline{x_1} + \overline{x_2}} = \overline{\overline{x_1 + 0} + \overline{x_2 + 0}}$$

- (ii) Nur mit NAND-Gattern:

$$x_1 \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot x_2 = x_1 \cdot \overline{x_2 \cdot x_2} + \overline{x_1 \cdot x_1} \cdot x_2 = \overline{\overline{x_1 \cdot x_2 \cdot x_2} + \overline{x_1 \cdot x_1 \cdot x_2}} = \overline{\overline{x_1 \cdot x_2 \cdot x_2} \cdot \overline{\overline{x_1 \cdot x_1 \cdot x_2}}}$$

Nur mit NOR-Gattern:

1.2

1.3

(a) DKNF:

$$\begin{aligned}f_{\text{DKNF}}(x) = & \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \\& + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \\& + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \\& + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \\& + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3\end{aligned}$$

KKNF:

$$\begin{aligned}f_{\text{KKNF}}(x) = & (x_1 + x_2 + x_3) \\& \cdot (\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3}) \\& \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3)\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
f_{\text{DKNF}}(x) &= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \\
&\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \\
&\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \\
&\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \\
&\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \\
&= \overline{x_1} \cdot (\overline{x_2} \cdot x_3 + x_2 \cdot \overline{x_3} + x_2 \cdot x_3) \\
&\quad + x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) \\
&= \overline{x_1} \cdot (x_2 + x_3) + x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) \\
&= \overline{x_1} \cdot (x_2 + x_3) + x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) \\
&= (\overline{x_1} \cdot (x_2 + x_3)) \cdot (\overline{x_1} \cdot (x_2 \cdot x_3 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3})) \\
&= (x_1 + (x_2 + x_3)) \cdot (\overline{x_1} + (x_2 \cdot x_3 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3})) \\
&= (x_1 + (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3})) \cdot (\overline{x_1} + ((x_2 \cdot x_3) \cdot (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3}))) \\
&= (x_1 + (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3})) \cdot (\overline{x_1} + ((\overline{x_2} + \overline{x_3}) \cdot (x_2 + x_3))) \\
&= (x_1 + (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3})) \cdot (\overline{x_1} + (x_2 \cdot \overline{x_2} + x_2 \cdot \overline{x_3} + x_3 \cdot \overline{x_2} + x_3 \cdot \overline{x_3})) \\
&= (x_1 + (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3})) \cdot (\overline{x_1} + x_2 \cdot \overline{x_3} + x_3 \cdot \overline{x_2}) \\
&= \overline{x_1} \cdot \overline{x_1} + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \\
&\quad + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \\
&= \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \\
&= \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \\
&= (\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3) \cdot (\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3}) \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \\
&= f_{\text{KKNF}}(x)
\end{aligned}$$

(c) Karnaugh-Veitch-Diagramm:

		x_2			
		1	1	0	0
x_1	0	1	1	1	0
	1	0	1	0	1
		0	1	1	0
		x_3			

Daraus ergibt sich:

$$f_{\text{Min}}(x) = \overline{x_1} \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot \overline{x_1} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$$

(d) DKNF:

$$\begin{aligned}
g_{\text{DKNF}}(x) &= (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3) \\
&\quad + (\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}) \\
&\quad + (x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) \\
&\quad + (x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3) \\
&\quad + (x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}) \\
&\quad + (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)
\end{aligned}$$

KKNF:

$$\begin{aligned}
g_{\text{KKNF}}(x) &= (x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3}) \\
&\quad \cdot (x_1 + x_2 + x_3)
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
g_{\text{DKNF}}(x) &= (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3) \\
&\quad + (\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}) \\
&\quad + (x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) \\
&\quad + (x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3) \\
&\quad + (x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}) \\
&\quad + (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3) \\
&= \overline{x_1} \cdot (\overline{x_2} \cdot x_3 + x_2 \cdot \overline{x_3}) \\
&\quad + x_1 \cdot (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + \overline{x_2} \cdot x_3 + x_2 \cdot \overline{x_3} + \overline{x_2} \cdot x_3) \\
&= \overline{x_1} \cdot (\overline{x_2} \cdot x_3 + x_2 \cdot \overline{x_3}) + x_1 \\
&= \overline{\overline{x_1} \cdot (\overline{x_2} \cdot x_3 + x_2 \cdot \overline{x_3}) + x_1} \\
&= \overline{(\overline{x_1} \cdot (\overline{x_2} \cdot x_3 + x_2 \cdot \overline{x_3})) \cdot \overline{x_1}} \\
&= \overline{(x_1 + (\overline{x_2} \cdot x_3 + x_2 \cdot \overline{x_3})) \cdot \overline{x_1}} \\
&= \overline{(x_1 + (\overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3})) \cdot \overline{x_1}} \\
&= \overline{(x_1 + (x_2 + \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_2} + x_3)) \cdot \overline{x_1}} \\
&= \overline{x_1 \cdot \overline{x_1} + (x_2 + \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_2} + x_3) \cdot \overline{x_1}} \\
&= \overline{(x_2 + \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_2} + x_3) \cdot \overline{x_1}} \\
&= \overline{(x_2 \cdot \overline{x_2} + x_2 \cdot x_3 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_3 \cdot \overline{x_3}) \cdot \overline{x_1}} \\
&= \overline{(x_2 \cdot x_3 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) \cdot \overline{x_1}} \\
&= \overline{(x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_1}) + (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_1})} \\
&= \overline{(x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_1}) \cdot (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_1})} \\
&= (\overline{x_2} + \overline{x_3} + x_1) \cdot (x_2 + x_3 + x_1) \\
&= g_{\text{KKNF}}(x)
\end{aligned}$$

(f) Karnaugh-Veitch-Diagramm:

		x_2			
		1	1	0	0
x_1	0	1	0	1	0
	1	1	1	1	1
		0	1	1	0
		x_3			

Daraus ergibt sich:

$$g_{\text{Min}}(x) = x_1 + \overline{x_2} \cdot x_3 + x_2 \cdot \overline{x_3}$$

2 Shannon Expansion

2.4

(a)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot f(0, 0, 0) \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot f(0, 0, 1) \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot f(0, 1, 0) \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot f(0, 1, 1) \\ &\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot f(1, 0, 0) \\ &\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot f(1, 0, 1) \\ &\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot f(1, 1, 0) \\ &\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot f(1, 1, 1) \\ &= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot 0 \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot 1 \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot 1 \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot 1 \\ &\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot 1 \\ &\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot 0 \\ &\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot 1 \\ &\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot 0 \\ &= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \\ &\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \\ &\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot f(0, 0, 0) \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot f(0, 0, 1) \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot f(0, 1, 0) \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot f(0, 1, 1) \\ &\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot f(1, 0, 0) \\ &\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot f(1, 0, 1) \\ &\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot f(1, 1, 0) \\ &\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot f(1, 1, 1) \\ &= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot 1 \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot 1 \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot 1 \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot 1 \\ &\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot 0 \\ &\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot 1 \\ &\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot 0 \\ &\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot 0 \\ &= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \\ &\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \end{aligned}$$