

# Grundlagen der Rechnerarchitektur

Tim Luchterhand, Paul Nykiel (Abgabegruppe 117)

11. Januar 2019

**Hinweis:** Jede Zahl, bei der keine Basis spezifiziert ist, ist im 10er System zu interpretieren, sofern nicht anders angegeben.

# 1 Schaltalgebra

## 1.1

- (a) Die Schaltalgebra ist eine Teilmenge der Booleschen Algebra mit einer zweiwertigen Trägersmenge. Das heißt es gibt nur zwei möglichen Werte, anstatt beliebig vielen Werten bei einer Booleschen Algebra.
- (b) (i) Nur mit NAND-Gattern:

$$x_1 \cdot x_2 \stackrel{\text{P7}}{=} \overline{\overline{x_1 \cdot x_2}} \stackrel{\text{P3}}{=} \overline{\overline{x_1 \cdot x_2 \cdot x_1 \cdot x_2}}$$

Nur mit NOR-Gattern:

$$x_1 \cdot x_2 \stackrel{\text{P3}}{=} \overline{\overline{x_1 \cdot x_2}} \stackrel{\text{P8}}{=} \overline{\overline{x_1 + x_2}} \stackrel{\text{P5}}{=} \overline{\overline{x_1 + 0 + x_2 + 0}}$$

- (ii) Nur mit NAND-Gattern:

$$x_1 \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot x_2 \stackrel{\text{P3}}{=} x_1 \cdot \overline{x_2 \cdot x_2} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_1 \cdot x_2} \stackrel{\text{P7}}{=} \overline{\overline{x_1 \cdot \overline{x_2 \cdot x_2}} + \overline{\overline{x_1 \cdot x_2}}} \stackrel{\text{P8'}}{=} \overline{x_1 \cdot \overline{x_2 \cdot x_2} \cdot \overline{x_1 \cdot x_2}}$$

Nur mit NOR-Gattern:

$$\begin{array}{lcl}
x_1 \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot x_2 & \stackrel{\text{1b}}{=} & \overline{\overline{x_1 + 0} + \overline{x_2} + 0} + \overline{\overline{x_1} + 0} + \overline{x_2 + 0} \\
& \stackrel{\text{P5'}, \text{P7}}{=} & \overline{\overline{x_1 + 0} + x_2} + \overline{x_1 + x_2 + 0} \\
& \stackrel{\text{P5'}, \text{P7}}{=} & \overline{\overline{x_1 + 0} + x_2 + x_1 + \overline{x_2 + 0} + 0}
\end{array}$$

## 1.2

(a) Wertetabelle

$2^3 = x_3$	$2^2 = x_2$	$2^1 = x_1$	$2^0 = x_0$	$f(x)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

(b)

$$\begin{aligned}
 f_{\text{DKNF}} = & x_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_0 x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + x_0 x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_0 \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \\
 & + x_0 \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_0 x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_0 x_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \\
 & + x_0 x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_0 \bar{x}_1 x_2 x_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{\text{KKNF}} = & (x_0 + x_1 + x_2 + x_3) \cdot (\bar{x}_0 + x_1 + x_2 + \bar{x}_3) \cdot (x_0 + \bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3) \cdot (x_0 + x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \\
 & \cdot (x_0 + \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_0 + \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)
 \end{aligned}$$

(c) Da DKNF und KKNF äquivalent sind wird auf Basis der Wahrheitstabelle minimiert.

Karnaugh-Veitch-Diagramm:

		$x_1$					
		0	1	1	0		
$x_2$	0	0	1	1	1	0	$x_4$
	1	1	1	1	1	0	
	1	0	1	0	0	1	
	0	1	0	1	0	1	
		0	0	1	1		
		$x_3$					

Daraus ergibt sich:

$$f_{\text{Min}}(x) = \overline{x_4} \cdot x_3 + \overline{x_4} \cdot x_1 \cdot \overline{x_3} + \overline{x_3} \cdot x_2 \cdot \overline{x_4} + x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_1 + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4$$

### 1.3

(a) DKNF:

$$\begin{aligned} f_{\text{DKNF}}(x) &= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \\ &\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \\ &\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \end{aligned}$$

KKNF:

$$\begin{aligned} f_{\text{KKNF}}(x) &= (x_1 + x_2 + x_3) \\ &\quad \cdot (\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3}) \\ &\quad \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
f_{\text{DKNF}}(x) &= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \\
&\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \\
&\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \\
&\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \\
&\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \\
&= \overline{x_1} \cdot (\overline{x_2} \cdot x_3 + x_2 \cdot \overline{x_3} + x_2 \cdot x_3) \\
&\quad + x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) \\
&= \overline{x_1} \cdot (x_2 + x_3) + x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) \\
&= \overline{x_1} \cdot (x_2 + x_3) + x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) \\
&= \overline{(\overline{x_1} \cdot (x_2 + x_3))} \cdot \overline{(x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}))} \\
&= \overline{(x_1 + (x_2 + x_3))} \cdot \overline{(x_1 + (x_2 \cdot x_3 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}))} \\
&= \overline{(x_1 + (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3}))} \cdot \overline{(x_1 + ((x_2 \cdot x_3) \cdot (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3})))} \\
&= \overline{(x_1 + (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3}))} \cdot \overline{(x_1 + ((\overline{x_2} + \overline{x_3}) \cdot (x_2 + x_3)))} \\
&= \overline{(x_1 + (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3}))} \cdot \overline{(x_1 + (x_2 \cdot \overline{x_2} + x_2 \cdot \overline{x_3} + x_3 \cdot \overline{x_2} + x_3 \cdot \overline{x_3}))} \\
&= \overline{(x_1 + (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3}))} \cdot \overline{(x_1 + x_2 \cdot \overline{x_3} + x_3 \cdot \overline{x_2})} \\
&= \overline{x_1 \cdot \overline{x_1} + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3} \\
&\quad + \overline{x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}} \\
&= \overline{x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}} \\
&= \overline{x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}} \\
&= (\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3) \cdot (\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3}) \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \\
&= f_{\text{KKNF}}(x)
\end{aligned}$$

(c) Karnaugh-Veitch-Diagramm:

		$x_2$			
		1	1	0	0
$x_1$	0	1	1	1	0
	1	0	1	0	1
		0	1	1	0
		$x_3$			

Daraus ergibt sich:

$$f_{\text{Min}}(x) = \overline{x_1} \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot \overline{x_1} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$$

(d) DKNF:

$$\begin{aligned}
g_{\text{DKNF}}(x) &= (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3) \\
&\quad + (\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}) \\
&\quad + (x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) \\
&\quad + (x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3) \\
&\quad + (x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}) \\
&\quad + (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)
\end{aligned}$$

KKNF:

$$\begin{aligned}
g_{\text{KKNF}}(x) &= (x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3}) \\
&\quad \cdot (x_1 + x_2 + x_3)
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
g_{\text{DKNF}}(x) &= (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3) \\
&\quad + (\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}) \\
&\quad + (x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) \\
&\quad + (x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3) \\
&\quad + (x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}) \\
&\quad + (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3) \\
&= \overline{x_1} \cdot (\overline{x_2} \cdot x_3 + x_2 \cdot \overline{x_3}) \\
&\quad + x_1 \cdot (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + \overline{x_2} \cdot x_3 + x_2 \cdot \overline{x_3} + \overline{x_2} \cdot x_3) \\
&= \overline{x_1} \cdot (\overline{x_2} \cdot x_3 + x_2 \cdot \overline{x_3}) + x_1 \\
&= \overline{\overline{x_1} \cdot (\overline{x_2} \cdot x_3 + x_2 \cdot \overline{x_3})} + x_1 \\
&= \overline{(\overline{x_1} \cdot (\overline{x_2} \cdot x_3 + x_2 \cdot \overline{x_3}))} \cdot \overline{x_1} \\
&= \overline{(x_1 + (\overline{x_2} \cdot x_3 + x_2 \cdot \overline{x_3}))} \cdot \overline{x_1} \\
&= \overline{(x_1 + (\overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}))} \cdot \overline{x_1} \\
&= \overline{(x_1 + (x_2 + \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_2} + x_3))} \cdot \overline{x_1} \\
&= \overline{x_1 \cdot \overline{x_1} + (x_2 + \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_2} + x_3) \cdot \overline{x_1}} \\
&= \overline{(x_2 + \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_2} + x_3) \cdot \overline{x_1}} \\
&= \overline{(x_2 \cdot \overline{x_2} + x_2 \cdot x_3 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_3 \cdot \overline{x_3}) \cdot \overline{x_1}} \\
&= \overline{(x_2 \cdot x_3 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) \cdot \overline{x_1}} \\
&= \overline{(x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_1}) + (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_1})} \\
&= \overline{(x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_1}) \cdot (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_1})} \\
&= (\overline{x_2} + \overline{x_3} + x_1) \cdot (x_2 + x_3 + x_1) \\
&= g_{\text{KKNF}}(x)
\end{aligned}$$

(f) Karnaugh-Veitch-Diagramm:

		$x_2$			
		1	1	0	0
$x_1$	0	1	0	1	0
	1	1	1	1	1
		0	1	1	0
		$x_3$			

Daraus ergibt sich:

$$g_{\text{Min}}(x) = x_1 + \overline{x_2} \cdot x_3 + x_2 \cdot \overline{x_3}$$

## 2 Shannon Expansion

### 2.4

(a)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot f(0, 0, 0) \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot f(0, 0, 1) \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot f(0, 1, 0) \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot f(0, 1, 1) \\ &\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot f(1, 0, 0) \\ &\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot f(1, 0, 1) \\ &\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot f(1, 1, 0) \\ &\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot f(1, 1, 1) \\ &= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot 0 \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot 1 \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot 1 \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot 1 \\ &\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot 1 \\ &\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot 0 \\ &\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot 1 \\ &\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot 0 \\ &= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \\ &\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \\ &\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot f(0, 0, 0) \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot f(0, 0, 1) \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot f(0, 1, 0) \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot f(0, 1, 1) \\ &\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot f(1, 0, 0) \\ &\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot f(1, 0, 1) \\ &\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot f(1, 1, 0) \\ &\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot f(1, 1, 1) \\ &= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot 1 \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot 1 \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot 1 \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot 1 \\ &\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot 0 \\ &\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot 1 \\ &\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot 0 \\ &\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot 0 \\ &= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \\ &\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \end{aligned}$$