

Grundlagen der Rechnerarchitektur

Tim Luchterhand, Paul Nykiel (Abgabegruppe 117)

26. November 2018

Hinweis: Jede Zahl, bei der keine Basis spezifiziert ist, ist im 10er System zu interpretieren, sofern nicht anders angegeben.

1 Boolesche Algebra

1.1

Beweis durch Nachrechnen:

1.1.1 Absorbierendes Element

$$\begin{aligned}\text{kgV}(1, 30) &= 30 \\ \text{kgV}(2, 30) &= 30 \\ \text{kgV}(3, 30) &= 30 \\ \text{kgV}(5, 30) &= 30 \\ \text{kgV}(6, 30) &= 30 \\ \text{kgV}(10, 30) &= 30 \\ \text{kgV}(15, 30) &= 30\end{aligned}$$

1.1.2 Neutrales Element

$$\begin{aligned}\text{ggT}(1, 30) &= 1 \\ \text{ggT}(2, 30) &= 2 \\ \text{ggT}(3, 30) &= 3 \\ \text{ggT}(5, 30) &= 5 \\ \text{ggT}(6, 30) &= 6 \\ \text{ggT}(10, 30) &= 10 \\ \text{ggT}(15, 30) &= 15\end{aligned}$$

1.2

(a)

$$\begin{aligned}\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} &= \overline{x_1 + x_2} \\ \Leftrightarrow (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}) \cdot (x_1 + x_2) &= \overline{(x_1 + x_2)} \cdot (x_1 + x_2) \\ \stackrel{\text{H4}}{\Leftrightarrow} (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}) \cdot x_1 + (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}) \cdot x_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\overline{x_1} \cdot x_1) \cdot \overline{x_2} + (\overline{x_2} \cdot x_2) \cdot \overline{x_1} &= 0 \\ \stackrel{\text{H4}}{\Leftrightarrow} 0 \cdot \overline{x_2} + 0 \cdot \overline{x_1} &= 0 \\ \Leftrightarrow 0 + 0 &= 0 \\ \stackrel{\text{H3}}{\Leftrightarrow} 0 &= 0\end{aligned}$$

(b) Es wird $\overline{\overline{a}} = a$ genutzt, Beweis siehe Vorlesung.

$$\overline{x_1} + \overline{x_2} = \overline{\overline{\overline{x_1} + \overline{x_2}}} \stackrel{(a)}{=} \overline{\overline{\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}}} = \overline{x_1 \cdot x_2}$$

2 Minimierung Boolescher Funktionen

2.3

(a)

$$f(x_1) = \overline{x_1} \cdot (x_1 + (x_1 \cdot \overline{x_1})) = \overline{x_1} \cdot (x_1 + 0) = \overline{x_1} \cdot x_1 = 0$$

(b)

$$f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot (\overline{x_2} \cdot 1) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot \overline{x_2} = x_1 \cdot (x_2 + \overline{x_2}) = x_1 \cdot 1 = x_1$$

(c)

$$f(x_1, x_2) = x_1 \cdot (\overline{x_1} \cdot (\overline{\overline{x_2}} + \overline{x_2})) = x_1 \cdot (\overline{x_1} \cdot (x_2 + \overline{x_2})) = x_1 \cdot (\overline{x_1} \cdot 1) = x_1 \cdot \overline{x_1} = 0$$

(d)

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{(x_1 \cdot x_2)} + ((x_3 + 0) \cdot \overline{x_3}) = \overline{(x_1 \cdot x_2)} + (x_3 \cdot \overline{x_3}) = \overline{(x_1 \cdot x_2)} + 0 = \overline{(x_1 \cdot x_2)}$$

(e)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (\overline{x_1} \cdot (x_3 + \overline{x_3}) \cdot x_2) + (\overline{x_1} \cdot x_3) + \overline{(x_1 + x_4)} \\ &= (\overline{x_1} \cdot 1 \cdot x_2) + (\overline{x_1} \cdot x_3) + \overline{(x_1 + x_4)} \\ &= \overline{x_1} \cdot x_2 + \overline{x_1} \cdot x_3 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_4} \\ &= \overline{x_1} \cdot (x_2 + x_3 + \overline{x_4}) \end{aligned}$$

2.4

1.

$$\begin{aligned} &\overline{(\overline{x_1} + \overline{x_2}) \cdot (x_1 + \overline{x_3}) \cdot (x_2 + x_3)} \\ \stackrel{2b}{=} &\overline{(\overline{x_1} + \overline{x_2}) \cdot (x_1 + \overline{x_3})} + \overline{(x_2 + x_3)} \\ \stackrel{2b}{=} &\overline{(\overline{x_1} + \overline{x_2})} + \overline{(x_1 + \overline{x_3})} + \overline{(x_2 + x_3)} \\ \stackrel{2a}{=} &(\overline{\overline{x_1}} \cdot \overline{\overline{x_2}}) \cdot (\overline{x_1} \cdot \overline{\overline{x_3}}) \cdot (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) \\ \stackrel{P7}{=} &(x_1 \cdot x_2) \cdot (\overline{x_1} \cdot x_3) \cdot (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} &\overline{\overline{(x_1 \cdot (x_2 \cdot x_2))} \cdot \overline{((x_1 \cdot x_1) \cdot x_2)}} \\ \stackrel{2b}{=} &\overline{(x_1 \cdot (x_2 \cdot x_2))} + \overline{((x_1 \cdot x_1) \cdot x_2)} \\ \stackrel{P7}{=} &(x_1 \cdot \overline{(x_2 \cdot x_2)}) + (\overline{(x_1 \cdot x_1)} \cdot x_2) \\ \stackrel{P3}{=} &x_1 \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot x_2 \end{aligned}$$

3 Shannon Zerlegung und Erweiterung

3.5

(a)

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2) &= x_1 \cdot (1 \cdot x_2 + 1 \cdot \overline{x_2} + 0 \cdot x_2) + \overline{x_1} \cdot (0 \cdot x_2 + 0 \cdot \overline{x_2} + 1 \cdot x_2) \\&= x_1 \cdot (x_2 + \overline{x_2}) + \overline{x_1} \cdot (x_2) \\&= x_1 \cdot (x_2 \cdot (1 + 0) + \overline{x_2} \cdot (0 + 1)) + \overline{x_1} \cdot (x_2 \cdot (1) + \overline{x_2} \cdot (0)) \\&= x_1 + \overline{x_1} \cdot x_2\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, x_3) &= x_1 \cdot (x_2 x_3 + x_2 \overline{x_3}) + \overline{x_1} \cdot (\overline{x_2} x_3) \\&= x_1 \cdot (x_2 \cdot (x_3 + \overline{x_3})) + \overline{x_1} \cdot (\overline{x_2} x_3) = x_1 \cdot x_2 + \overline{x_1} \cdot (\overline{x_2} x_3) \\&= x_1 x_2 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} x_3\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, x_3) &= x_1 \cdot (x_2 x_3 + \overline{x_2} x_3) + \overline{x_1} \cdot (x_2 \overline{x_3} + \overline{x_2} x_3 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) \\&= x_1 \cdot (x_2 x_3 + \overline{x_2} x_3) + \overline{x_1} \cdot (x_2 \cdot (\overline{x_3}) + \overline{x_2} \cdot (x_3 + \overline{x_3})) \\&= x_1 \cdot (x_3 \cdot (x_2 + \overline{x_2})) + \overline{x_1} \cdot (x_2 \cdot (\overline{x_3}) + \overline{x_2} \cdot (x_3 + \overline{x_3})) \\&= x_1 x_3 + \overline{x_1} \cdot (x_2 \overline{x_3} + \overline{x_2}) = x_1 x_3 + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}\end{aligned}$$

3.6

(a)

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, x_3) &= f(0, 0, 0) \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + f(0, 0, 1) \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} x_3 \\&+ f(0, 1, 0) \overline{x_1} x_2 \cdot \overline{x_3} + f(0, 1, 1) \overline{x_1} x_2 x_3 \\&+ f(1, 0, 0) x_1 \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + f(1, 0, 1) x_1 \overline{x_2} x_3 \\&+ f(1, 1, 0) x_1 x_2 \overline{x_3} + f(1, 1, 1) x_1 x_2 x_3 \\&= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + \overline{x_1} x_2 \cdot \overline{x_3} + x_1 \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_1 x_2 \overline{x_3} + x_1 x_2 x_3\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= f(0, 0, 0, 0)\overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} \\ &+ f(0, 0, 0, 1)\overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 \\ &+ f(0, 0, 1, 0)\overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \\ &+ f(0, 0, 1, 1)\overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4 \\ &+ f(0, 1, 0, 0)\overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} \\ &+ f(0, 1, 0, 1)\overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 \\ &+ f(0, 1, 1, 0)\overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} \\ &+ f(0, 1, 1, 1)\overline{x_1} x_2 x_3 x_4 \\ &+ f(1, 0, 0, 0)x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} \\ &+ f(1, 0, 0, 1)x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 \\ &+ f(1, 0, 1, 0)x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \\ &+ f(1, 0, 1, 1)x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 \\ &+ f(1, 1, 0, 0)x_1 x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} \\ &+ f(1, 1, 0, 1)x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \\ &+ f(1, 1, 1, 0)x_1 x_2 x_3 \overline{x_4} \\ &+ f(1, 1, 1, 1)x_1 x_2 x_3 x_4 \\ &= \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 \\ &+ \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4 \\ &+ \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 \\ &+ \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 \\ &+ x_1 x_2 x_3 \overline{x_4} \\ &+ x_1 x_2 x_3 x_4 \end{aligned}$$