

# Grundlagen der Rechnerarchitektur

Tim Luchterhand, Paul Nykiel (Abgabegruppe 117)

1. Dezember 2018

**Hinweis:** Jede Zahl, bei der keine Basis spezifiziert ist, ist im 10er System zu interpretieren, sofern nicht anders angegeben.

# 1 Schaltalgebra

## 1.1

- (a) Die Schaltalgebra ist eine Teilmenge der Booleschen Algebra mit einer zweiwertigen Trägersmenge. Das heißt es gibt nur zwei möglichen Werte, anstatt beliebig vielen Werten bei einer Booleschen Algebra.
- (b) (i) Nur mit NAND-Gattern:

$$x_1 \cdot x_2 \stackrel{\text{P7}}{=} \overline{\overline{x_1 \cdot x_2}} \stackrel{\text{P3}}{=} \overline{\overline{x_1 \cdot x_2 \cdot x_1 \cdot x_2}}$$

Nur mit NOR-Gattern:

$$x_1 \cdot x_2 \stackrel{\text{P3}}{=} \overline{\overline{x_1 \cdot x_2}} \stackrel{\text{P8}}{=} \overline{\overline{x_1 + x_2}} \stackrel{\text{P5}}{=} \overline{\overline{x_1 + 0 + x_2 + 0}}$$

- (ii) Nur mit NAND-Gattern:

$$x_1 \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot x_2 \stackrel{\text{P3}}{=} x_1 \cdot \overline{x_2 \cdot x_2} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_1 \cdot x_2} \stackrel{\text{P7}}{=} \overline{\overline{x_1 \cdot \overline{x_2 \cdot x_2}} + \overline{\overline{x_1 \cdot x_2}}} \stackrel{\text{P8'}}{=} \overline{x_1 \cdot \overline{x_2 \cdot x_2} \cdot \overline{x_1 \cdot x_2}}$$

Nur mit NOR-Gattern:

$$\begin{array}{lcl}
x_1 \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot x_2 & \stackrel{\text{1b}}{=} & \overline{\overline{x_1 + 0} + \overline{x_2} + 0} + \overline{\overline{x_1} + 0} + \overline{x_2 + 0} \\
& \stackrel{\text{P5}', \text{P7}}{=} & \overline{\overline{x_1 + 0} + x_2} + \overline{x_1 + \overline{x_2 + 0}} \\
& \stackrel{\text{P5}', \text{P7}}{=} & \overline{\overline{x_1 + 0} + x_2 + x_1 + \overline{x_2 + 0} + 0}
\end{array}$$

## 1.2

(a) Wertetabelle

$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$	$f(x)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

(b)

$$\begin{aligned}
 f_{\text{DKNF}} &= x_0 \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} + \overline{x_0} x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} + x_0 x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} + \overline{x_0} \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \\
 &+ x_0 \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} + \overline{x_0} x_1 x_2 \overline{x_3} + x_0 x_1 x_2 \overline{x_3} + \overline{x_0} \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \\
 &+ x_0 x_1 \overline{x_2} x_3 + x_0 \overline{x_1} x_2 x_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{\text{KKNF}} &= (x_0 + x_1 + x_2 + x_3) \cdot (\overline{x_0} + x_1 + x_2 + \overline{x_3}) \cdot (x_0 + \overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3}) \cdot (x_0 + x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3}) \\
 &\cdot (\overline{x_0} + \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_0} + \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3})
 \end{aligned}$$

## 1.3

(a) DKNF:

$$\begin{aligned}
 f_{\text{DKNF}}(x) &= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \\
 &+ \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \\
 &+ \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \\
 &+ x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \\
 &+ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3
 \end{aligned}$$

KKNF:

$$\begin{aligned}
 f_{\text{KKNF}}(x) &= (x_1 + x_2 + x_3) \\
 &\quad \cdot (\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3}) \\
 &\quad \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3)
 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 f_{\text{DKNF}}(x) &= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \\
 &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \\
 &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \\
 &\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \\
 &\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \\
 &= \overline{x_1} \cdot (\overline{x_2} \cdot x_3 + x_2 \cdot \overline{x_3} + x_2 \cdot x_3) \\
 &\quad + x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) \\
 &= \overline{x_1} \cdot (x_2 + x_3) + x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) \\
 &= \overline{x_1} \cdot (x_2 + x_3) + x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) \\
 &= \overline{(\overline{x_1} \cdot (x_2 + x_3))} \cdot \overline{(x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}))} \\
 &= \overline{(x_1 + (\overline{x_2} + \overline{x_3}))} \cdot \overline{(\overline{x_1} + (x_2 \cdot x_3 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}))} \\
 &= \overline{(x_1 + (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3}))} \cdot \overline{(\overline{x_1} + ((x_2 \cdot x_3) \cdot (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3})))} \\
 &= \overline{(x_1 + (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3}))} \cdot \overline{(\overline{x_1} + ((\overline{x_2} + \overline{x_3}) \cdot (x_2 + x_3)))} \\
 &= \overline{(x_1 + (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3}))} \cdot \overline{(\overline{x_1} + (x_2 \cdot \overline{x_2} + x_2 \cdot \overline{x_3} + x_3 \cdot \overline{x_2} + x_3 \cdot \overline{x_3}))} \\
 &= \overline{(x_1 + (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3}))} \cdot \overline{(\overline{x_1} + x_2 \cdot \overline{x_3} + x_3 \cdot \overline{x_2})} \\
 &= \overline{x_1 \cdot \overline{x_1} + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3} \\
 &\quad + \overline{\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}} \\
 &= \overline{x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}} \\
 &= \overline{x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}} \cdot \overline{x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3} \cdot \overline{\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}} \\
 &= (\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3) \cdot (\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3}) \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \\
 &= f_{\text{KKNF}}(x)
 \end{aligned}$$

(c) Karnaugh-Veitch-Diagramm:

		$x_2$			
		1	1	0	0
$x_1$	0	1	1	1	0
	1	0	1	0	1
		0	1	1	0
		$x_3$			

Daraus ergibt sich:

$$f_{\text{Min}}(x) = \overline{x_1} \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot \overline{x_1} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$$

(d) DKNF:

$$\begin{aligned} g_{\text{DKNF}}(x) &= (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3) \\ &\quad + (\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}) \\ &\quad + (x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) \\ &\quad + (x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3) \\ &\quad + (x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}) \\ &\quad + (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3) \end{aligned}$$

KKNF:

$$\begin{aligned} g_{\text{KKNF}}(x) &= (x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3}) \\ &\quad \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
g_{\text{DKNF}}(x) &= (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3) \\
&\quad + (\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}) \\
&\quad + (x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) \\
&\quad + (x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3) \\
&\quad + (x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}) \\
&\quad + (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3) \\
&= \overline{x_1} \cdot (\overline{x_2} \cdot x_3 + x_2 \cdot \overline{x_3}) \\
&\quad + x_1 \cdot (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + \overline{x_2} \cdot x_3 + x_2 \cdot \overline{x_3} + \overline{x_2} \cdot x_3) \\
&= \overline{x_1} \cdot (\overline{x_2} \cdot x_3 + x_2 \cdot \overline{x_3}) + x_1 \\
&= \overline{\overline{x_1} \cdot (\overline{x_2} \cdot x_3 + x_2 \cdot \overline{x_3}) + x_1} \\
&= \overline{(\overline{x_1} \cdot (\overline{x_2} \cdot x_3 + x_2 \cdot \overline{x_3})) \cdot \overline{x_1}} \\
&= \overline{(x_1 + (\overline{x_2} \cdot x_3 + x_2 \cdot \overline{x_3})) \cdot \overline{x_1}} \\
&= \overline{(x_1 + (\overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3})) \cdot \overline{x_1}} \\
&= \overline{(x_1 + (x_2 + \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_2} + x_3)) \cdot \overline{x_1}} \\
&= \overline{x_1 \cdot \overline{x_1} + (x_2 + \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_2} + x_3) \cdot \overline{x_1}} \\
&= \overline{(x_2 + \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_2} + x_3) \cdot \overline{x_1}} \\
&= \overline{(x_2 \cdot \overline{x_2} + x_2 \cdot x_3 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_3 \cdot \overline{x_3}) \cdot \overline{x_1}} \\
&= \overline{(x_2 \cdot x_3 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) \cdot \overline{x_1}} \\
&= \overline{(x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_1}) + (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_1})} \\
&= \overline{(x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_1}) \cdot (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_1})} \\
&= (\overline{x_2} + \overline{x_3} + x_1) \cdot (x_2 + x_3 + x_1) \\
&= g_{\text{KKNF}}(x)
\end{aligned}$$

(f) Karnaugh-Veitch-Diagramm:

		$x_2$			
		1	1	0	0
$x_1$	0	1	0	1	0
	1	1	1	1	1
		0	1	1	0
		$x_3$			

Daraus ergibt sich:

$$g_{\text{Min}}(x) = x_1 + \overline{x_2} \cdot x_3 + x_2 \cdot \overline{x_3}$$

## 2 Shannon Expansion

### 2.4

(a)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot f(0, 0, 0) \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot f(0, 0, 1) \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot f(0, 1, 0) \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot f(0, 1, 1) \\ &\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot f(1, 0, 0) \\ &\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot f(1, 0, 1) \\ &\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot f(1, 1, 0) \\ &\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot f(1, 1, 1) \\ &= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot 0 \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot 1 \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot 1 \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot 1 \\ &\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot 1 \\ &\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot 0 \\ &\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot 1 \\ &\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot 0 \\ &= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \\ &\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \\ &\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot f(0, 0, 0) \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot f(0, 0, 1) \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot f(0, 1, 0) \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot f(0, 1, 1) \\ &\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot f(1, 0, 0) \\ &\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot f(1, 0, 1) \\ &\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot f(1, 1, 0) \\ &\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot f(1, 1, 1) \\ &= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot 1 \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot 1 \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot 1 \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot 1 \\ &\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot 0 \\ &\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot 1 \\ &\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot 0 \\ &\quad + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot 0 \\ &= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \\ &\quad + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \\ &\quad + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \end{aligned}$$