

Zusammenfassung Höhere Mathematik

Paul Nykiel

1. März 2017

Inhaltsverzeichnis

I	Zusammenfassung	4
1	Vorkurs	5
1.1	Aussagenlogik	5
1.1.1	Definition Aussage	5
1.1.2	Verknüpfungen	5
1.1.3	Mehr zu Implikationen	6
1.1.4	Bezeichnung von Aussagen	6
1.1.5	Satz der Identität	6
1.2	Mengen	7
1.2.1	Defintion: Mengen nach Cantor	7
1.2.2	Begrifflichkeiten und Schreibweise	7
1.2.3	Leere Menge, Teilmengen	7
1.2.4	Transitivität u.a.	7
1.2.5	Verknüpfung von Mengen	8
1.2.6	Potenzmenge	8
1.2.7	Rechenregeln für Mengen	8
1.2.8	Komplement	9
1.2.9	Bemerkung	9
1.2.10	Verknüpfungen über mehrere Elemente	9
1.2.11	Wichtige Zusammenhänge	9
2	Grenzwerte	10
2.1	Gruppen und Körper	10
2.1.1	Gruppen	10
2.1.2	Körper	10
2.1.3	Angeordnete Körper	11
2.1.4	Minimum und Maximum	12
2.1.5	Obere und untere Schranke	13
2.1.6	Supremum und Infimum	13
2.2	Folgen	13
2.2.1	Konvergenz	13
2.2.2	Bestimmte Divergenz	14
2.2.3	Beschränktheit	14
2.2.4	Zusammenhang Konvergenz — Beschränktheit	14

2.2.5	Grenzwertrechenregeln	14
2.2.6	Sandwich Theorem u.a.	15
2.2.7	Monotonie	15
2.2.8	Zusammenhang Monotonie und Beschränktheit	15
2.3	Häufungswerte	15
2.3.1	Teilfolgen	15
2.3.2	Teilfolgen einer Konvergenten Folge	15
2.3.3	Häufungswerte	15
2.3.4	Limes superior/inferior	16
2.3.5	Charakterisierung limsup/liminf	16
2.3.6	Konvergenz und limsup/liminf	16
2.3.7	Satz von Bolzano-Weierstraß	16
2.3.8	Cauchy-Kriterium	16
2.4	Unendliche Reihen	17
2.4.1	Definition	17
2.4.2	Cauchy-Kriterium für unendliche Reihen	17
2.4.3	Grenzwertrechenregeln für unendliche Reihen	17
2.4.4	Positive Folgen	18
2.4.5	Leibniz-Kriterium	18
2.4.6	Absolute Konvergenz	18
2.4.7	Majorantenkriterium	18
2.4.8	Minorantenkriterium	19
2.4.9	Wurzel- und Quotientenkriterium	19
2.4.10	Umordnung einer Reihe	19
2.4.11	Cauchy-Produkt	20
2.4.12	Cauchy-Verdichtungssatz	20
2.5	Potenzreihen	20
2.5.1	Definition	20
2.5.2	Hadamard (Konvergenzradius mit Wurzelkriterium)	20
2.5.3	Konvergenzradius mit Quotientenkriterium	21
2.5.4	Hinweis	21
2.5.5	Integration und Differentiation von Potenzreihen	21
2.5.6	Cauchy-Produkt für Potenzreihen	21
2.5.7	Wichtige Potenzreihen	21
2.5.8	Alternative Definition der Exponentialfunktion	22
2.6	Funktionsgrenzwerte	22
2.6.1	Bemerkung	22
2.6.2	Epsilon-Umgebung	22
2.6.3	Funktionsgrenzwerte (über Delta-Epsilon-Kriterium)	22
2.6.4	Folgenkriterium	23
2.6.5	Rechenregeln für Funktionsgrenzwerte	23
2.6.6	Cauchy-Kriterium für Funktionsgrenzwerte	24
2.6.7	Bestimmte Divergenz	24
2.6.8	Monotone Funktionen	24
2.6.9	Grenzwerte an Intervallgrenzen	24
2.7	Stetigkeit	25

2.7.1	Anschaulich	25
2.7.2	Stetigkeit: Delta-Epsilon-Kriterium	25
2.7.3	Bemerkungen	25
2.7.4	Rechenregeln für Stetigkeit	25
2.7.5	Stetigkeit von Potenzreihen	25
2.7.6	Umgebung positiver Funktionswerte	26
2.7.7	Zwischenwertsatz	26
2.7.8	Existenz des Logarithmus	26
2.7.9	Maximum/Minimum/Infimum/Supremum einer Funktion	26
2.7.10	Beschränktheit einer stetigen Funktion	27
2.7.11	Weierstraß: Existenz von Min und Max	27
2.7.12	Zusammenhang Injektivität — Stetigkeit	27
2.7.13	Existenz und Monotonie der Umkehrfunktion	27
2.7.14	Gleichmäßige Stetigkeit	27
3	Differentialrechnung	28
3.1	Ableitung	28
3.1.1	Definition Differenzen-Quotient	28
3.1.2	Rechtsseitige und linksseitige Ableitung	28
3.1.3	Ableitungsrechenregeln	28
3.1.4	Alternative Definition der Ableitung	29
3.1.5	Zusammenhang Differenzierbarkeit — Stetigkeit	29
3.1.6	Differentiation von Potenzreihen	29
3.1.7	Ableitung der Umkehrfunktion	29
3.1.8	Kettenregel	29
3.2	Mittelwertsätze	29
3.2.1	Satz von Rolle	29
3.2.2	Definition lokaler Extrempunkt	30
3.2.3	Notwendige Bedingung für lokale Extrema	30
3.2.4	2. Mittelwertsatz	30
3.2.5	1. Mittelwertsatz (Folgerung aus 2. Mittelwertsatz)	30
3.2.6	L'Hospital	30
3.2.7	Satz von Taylor	31
II	Appendix/Beweisansätze	32
4	Grenzwerte	33
4.1	Konvergenzkriterien	33
4.2	Beweis-Ansätze	34

Teil I

Zusammenfassung

Kapitel 1

Vorkurs

1.1 Aussagenlogik

1.1.1 Definition Aussage

Eine Aussage ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch ist.

Bemerkung

Wir beschäftigen uns mit der klassischen zweiwertigen Logik. Es gibt auch Logiken mit 3 bzw. 4 Werten.

1.1.2 Verknüpfungen

Formal kann eine Oder-Verknüpfung mit dem \vee -Zeichen durch eine Wahrheitstabelle definiert werden:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Analog kann eine Und-Verknüpfung mit dem \wedge -Zeichen durch eine Wahrheitstabelle definiert werden:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Und eine Negation wird definiert durch:

A	$\neg A$
1	0
0	1

Eine sog. Implikation wird durch das \Rightarrow -Zeichen dargestellt und ist definiert durch:

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Bemerkung

Bei mehr als einer Verknüpfung muss klar sein welche Verknüpfung als erstes ausgewertet werden muss, hierfür werden Klammern verwendet.

1.1.3 Mehr zu Implikationen

Bei der Aussage $A \Rightarrow B$ bezeichnet man A als hinreichende Bedingung und B als notwendige Bedingung.

Die Aussage $A \Rightarrow B$ ist äquivalent zu $\neg B \Rightarrow \neg A$.

1.1.4 Bezeichnung von Aussagen

Eine Aussageform heißt:

- (a) Allgemeingültig (oder Tautologie), wenn sie als Wahrheitswert stets den Wert wahr annimmt.
- (b) Erfüllbar, wenn die Wahrheitstabelle mindestens einmal den Wert wahr enthält.
- (c) Unerfüllbar (oder Kontradiction), wenn die Wahrheitstabelle nur falsch-Einträge enthält.

1.1.5 Satz der Identität

Mit $A \Leftrightarrow B$ kürzen wir die Aussage:

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

ab.

Bemerkung

Für den allg. Fall sagt man zu $A \Leftrightarrow B$: A ist äquivalent zu B . Das heißt aber nicht, dass $A = B$ ist.

1.2 Mengen

1.2.1 Defintion: Mengen nach Cantor

Unter einer Menge versteht man eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterscheidbarer Objekte unsere Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

1.2.2 Begrifflichkeiten und Schreibweise

Objekte einer Menge bezeichnet man als Elemente einer Menge.

Schreibweise:

- (a) $x \in M$ oder $x \notin M$
- (b) Mengen können durch Aufzählen der Elemente beschrieben werden: $M = \{a, b, c\}$
- (c) Mengen können durch Eigenschaften der Elemente beschrieben werden: $M = \{x : x \text{ hat Eigenschaft} \dots\}$

1.2.3 Leere Menge, Teilmengen

- (a) Die Menge, die kein Element enthält, heißt leere Menge. Wir bezeichnen diese mit \emptyset .
- (b) Eine Menge M_1 heißt Teilmenge einer Menge M_2 (Schreibweise $M_1 \subseteq M_2$) falls jedes Element von M_1 auch Element von M_2 ist. D.h. es gilt:

$$x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2$$

- (c) Zwei Mengen sind gleich wenn gilt:

$$M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_1$$

- (d) M_1 heißt echte Teilmenge von M_2 wenn gilt:

$$M_1 \subseteq M_2 \wedge M_1 \neq M_2$$

Schreibweise: $M_1 \subset M_2$ oder $M_1 \subsetneq M_2$.

1.2.4 Transitivität u.a.

Für Mengen M, M_1, M_2, M_3 gilt stets:

- (a) Aus $M_1 \subseteq M_2$ und $M_2 \subseteq M_3$ folgt stets: $M_1 \subseteq M_3$
- (b) $M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_1$
- (c) $M \subseteq M$ und $\emptyset \subseteq M$

1.2.5 Verknüpfung von Mengen

Für Mengen M_1 und M_2 definiert man:

- (a) Die Vereinigung von M_1 und M_2 durch:

$$M_1 \cup M_2 := \{x : x \in M_1 \vee x \in M_2\}$$

- (b) Den Schnitt von M_1 und M_2 durch:

$$M_1 \cap M_2 := \{x : x \in M_1 \wedge x \in M_2\}$$

- (c) Die Differenz von M_1 und M_2 durch:

$$M_1 \setminus M_2 := \{x : x \in M_1 \wedge x \notin M_2\}$$

- (d) Das Kartesische Produkt von M_1 und M_2 durch:

$$M_1 \times M_2 := \{(a, b) : a \in M_1 \wedge b \in M_2\}$$

- (e) Das Kartesische Produkt von M_1 und M_1 durch;

$$(M_1)^2 := M_1 \times M_1$$

1.2.6 Potenzmenge

Für eine Menge M ist durch

$$P(M) := \{A : A \subseteq M\}$$

die Potenzmenge definiert (Menge aller Teilmengen von M).

Bemerkung

Hier gilt $\emptyset \in P(M)$.

1.2.7 Rechenregeln für Mengen

Für bel. Mengen M_1, M_2, M_3 gilt:

- (a)

$$M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1 \text{ und } M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1 \text{ (Kommutativität)}$$

- (b)

$$(M_1 \cup M_2) \cup M_3 = M_1 \cup (M_2 \cup M_3) \text{ und } (M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3) \text{ (Assoziativität)}$$

- (c)

$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3) \text{ und } M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3) \text{ (Distributivgesetz)}$$

1.2.8 Komplement

Ist X eine feste Menge und $M \subseteq X$ beliebig, so heißt

$$M^c := X \setminus M$$

das Komplement von M (bzgl. X).

1.2.9 Bemerkung

Die Schreibweise erfordert dass X aus dem Kontext bekannt sein muss.

1.2.10 Verknüpfungen über mehrere Elemente

Für Mengen M_1, M_2, \dots, M_n mit $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Notation:

(a)

$$\bigcup_{k=1}^n M_k = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n$$

(b)

$$\bigcap_{k=1}^n M_k = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n$$

(c)

$$\bigtimes_{k=1}^n M_k = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$$

1.2.11 Wichtige Zusammenhänge

(a) $(M^c)^c = M$

(b) $M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow M_2^c \subseteq M_1^c$

(c) $(M_1 \cup M_2)^c = M_1^c \cap M_2^c$

Kapitel 2

Grenzwerte

2.1 Gruppen und Körper

2.1.1 Gruppen

Eine Gruppe ist definiert als ein Tuppel aus einer (nicht-leeren) Menge und einer Verknüpfung. Eine Gruppe erfüllt die folgenden Axiome (seien $a, b, c \in \mathbb{G}$):

$$\begin{array}{ll} a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c & \text{(Assoziativität)} \\ a \circ \varepsilon = a & \text{(Rechtsneutrales Element)} \\ a \circ a' = \varepsilon & \text{(Rechtsinverses Element)} \end{array}$$

Eine abelsche Gruppe erfüllt des weiteren:

$$a \circ b = b \circ a \quad \text{(Kommutativität)}$$

2.1.2 Körper

Ein Körper ist definiert als eine Menge mit mindestens zwei Elementen (0 und 1) und zwei Verknüpfungen.

$$\begin{array}{ll} + : \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \rightarrow \mathbb{K} \\ \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \rightarrow \mathbb{K} \end{array}$$

\mathbb{K} ist bezüglich der Addition und der Multiplikation (genauer: $\mathbb{K} \setminus \{0\}$) ein abelscher Körper, das heißt es gilt (seien $a, b, c \in \mathbb{K}$):

$$\begin{aligned}
 a + (b + c) &= (a + b) + c && \text{(Assoziativität bez. der Addition)} \\
 a + 0 &= a && \text{(Existenz einer 0)} \\
 a + (-a) &= 0 && \text{(Existenz eines Inversen bez. der Addition)} \\
 a + b &= b + a && \text{(Kommutativität bez. der Addition)} \\
 a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c && \text{(Assoziativität bez. der Multiplikation)} \\
 a \cdot 1 &= a && \text{(Existenz einer 1)} \\
 a \cdot a^{-1} &= 1 \quad \forall a \neq 0 && \text{(Existenz eines Inversen bez. der Multiplikation)} \\
 a \cdot b &= b \cdot a && \text{(Kommutativität bezüglich der Multiplikation)}
 \end{aligned}$$

außerdem gilt:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad \text{(Distributivgesetz)}$$

Bemerkung

\mathbb{Q} , \mathbb{R} und \mathbb{C} sind Körper. \mathbb{Z} und \mathbb{N} nicht (kein additiv inverses bei \mathbb{N} , kein multiplikativ inverses bei beiden).

2.1.3 Angeordnete Körper

Ein Körper heißt angeordnet wenn folgende Axiome erfüllt sind (seien $a, b, c \in \mathbb{K}$):

$$\begin{aligned}
 a < b \vee b < a \vee a &= b \\
 a < b \wedge b < c &\Rightarrow a < c \\
 a < b &\Rightarrow a + c < b + c \\
 a < b \wedge c > 0 &\Rightarrow a * c < b * c
 \end{aligned}$$

Bemerkung

\mathbb{Q} und \mathbb{R} sind angeordnete Körper. Für \mathbb{C} kann keine Ordnungsrelation definiert werden so das alle Axiome erfüllt sind.

Gebräuchliche Definition zu angeordneten Körpern

Für gewöhnlich gilt $0 < 1$.

Die Ordnungsrelation wird dann definiert durch:

$$\begin{aligned}
 2 &:= 1 + 1 \\
 3 &:= 2 + 1 \\
 4 &:= 3 + 1 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Die Natürlichen Zahlen werden Induktiv definiert:

1. $1 \in \mathbb{N}$
2. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n + 1) \in \mathbb{N}$

Bemerkung

Aus 2. lässt sich direkt ableiten das \mathbb{N} nach oben unbeschränkt ist (Archimedisches Prinzip).

Vollständig Angeordnete Körper

Ein Körper heißt Vollständig, falls jede nach oben beschränkte, nicht-leere Teilmenge ein Supremum besitzt.

$\Rightarrow \mathbb{R}$ ist der einzige Vollständig angeordnete Körper.

Bemerkung

\mathbb{Q} ist nicht vollständig angeordnet, da $A := \{x | x^2 \leq 2\} \subset \mathbb{Q}$ kein obere Schranke besitzt (obere Schranke ist $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

2.1.4 Minimum und Maximum

Sei \mathbb{K} ein angeordneter Körper und $A \subset \mathbb{K}$ dann heißt m Minimum falls gilt:

1. $m \in \mathbb{K}$
2. $a \geq m \forall a \in A$

Analog ist das Maximum definiert: Sei \mathbb{K} ein angeordneter Körper und $A \subset \mathbb{K}$ dann heißt m Maximum falls gilt:

1. $m \in \mathbb{K}$
2. $a \leq m \forall a \in A$

Schreibweisen: $m = \min(A)$ bzw. $m = \max(A)$

Bemerkung

Minimum und Maximum existieren nicht immer.

Beispiel: $A := \{x | x > 0\} \subset \mathbb{R}$ hat nicht 0 als Minimum da $0 \notin A$ und kein beliebiges m da $\tilde{m} := \frac{m}{2} < m \forall m \in A$

2.1.5 Obere und untere Schranke

Sei \mathbb{K} ein angeordneter Körper und $A \subset \mathbb{K}$ dann ist s untere Schranke falls gilt:

- $s \leq a \quad \forall a \in A$

Analog ist die obere Schranke definiert: Sei \mathbb{K} ein angeordneter Körper und $A \subset \mathbb{K}$ dann ist s obere Schranke falls gilt:

- $s \geq a \quad \forall a \in A$

Bemerkung

Hat eine Menge eine obere (bzw. untere) Schranke heißt er nach oben (bzw. unten) beschränkt. Ist eine Menge nach unten und oben beschränkt bezeichnet man sie als beschränkt.

2.1.6 Supremum und Infimum

s heißt Infimum (größte untere Schranke) falls gilt:

- s ist untere Schranke
- Falls \tilde{s} ebenfalls untere Schranke ist gilt $s \geq \tilde{s}$

Analog ist das Supremum definiert: s heißt Supremum (kleinste obere Schranke) falls gilt:

- s ist obere Schranke
- Falls \tilde{s} ebenfalls obere Schranke ist gilt $s \leq \tilde{s}$

Bemerkung

Wenn Minimum (bzw. Maximum) existieren sind diese gleich dem Infimum (bzw. Supremum).

Schreibweise: $s = \inf(A)$ bzw. $s = \sup(A)$

2.2 Folgen

Eine Folge a_n ist definiert als eine Funktion:

$$a_n := \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{M} \subset \mathbb{R}$$

oder auch $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

2.2.1 Konvergenz

Eine Folge a_n heißt konvergent wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > n_0(\varepsilon)$$

Bemerkung

Der Grenzwert ist eindeutig, d.h. es existiert nur ein Grenzwert.

Schreibweise

Falls a_n gegen a konvergiert schreibt man:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

2.2.2 Bestimmte Divergenz

Eine Folge a_n heißt bestimmt Divergent wenn gilt

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n(x) : a_n > x \text{ bzw. } a_n < x$$

Schreibweise:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ bzw. } -\infty$$

2.2.3 Beschränktheit

Eine Folge heißt beschränkt wenn gilt:

$$|a_n| < c \quad \forall n$$

Beschränktheit nach oben/unten

Eine Folge heißt nach oben (bzw. unten) beschränkt wenn gilt:

$$a_n < c \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ bzw. } a_n > c \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2.2.4 Zusammenhang Konvergenz — Beschränktheit

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

2.2.5 Grenzwertrechenregeln

Seien $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ Folgen in \mathbb{C} mit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

Dann gilt:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- Falls $b \neq 0$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

2.2.6 Sandwich Theorem u.a.

Seien $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty, (c_n)_{n=1}^\infty$ Folgen in \mathbb{R} mit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \text{ und } \gamma \in \mathbb{R}$$

Dann gilt:

- $a_n \leq \gamma \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq \gamma$
- $a_n \geq \gamma \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \geq \gamma$
- $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq b$
- $a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \wedge a = b \Rightarrow c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a = b$

2.2.7 Monotonie

Eine Folge $(a_n)_{n=1}^\infty$ in \mathbb{R} heißt:

- Monoton wachsend falls: $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (Schreibweise: $a_n \nearrow$)
- Monoton fallend falls: $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (Schreibweise: $a_n \searrow$)
- Streng monoton wachsend falls: $a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (Schreibweise: $a_n \uparrow$)
- Streng monoton fallend falls: $a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (Schreibweise: $a_n \downarrow$)

2.2.8 Zusammenhang Monotonie und Beschränktheit

Jede Monotone und beschränkte Folge konvergiert.

2.3 Häufungswerte

Häufungswerte sind Grenzwerte einer Teilfolge.

2.3.1 Teilfolgen

Eine Folge $(b_n)_{n=1}^\infty$ heißt Teilfolge von $(a_n)_{n=1}^\infty$, wenn eine streng monotone Funktion $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ existiert mit $b_n = a_{\varphi(n)}$.

2.3.2 Teilfolgen einer Konvergenten Folge

Sei $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine konvergente Folge in \mathbb{C} mit: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $(b_n)_{n=1}^\infty$ sei eine Teilfolge. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

2.3.3 Häufungswerte

Sei $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge in \mathbb{C} . Dann heißt $a \in \mathbb{C}$ ein Häufungswert einer Folge, falls eine Teilfolge gegen a konvergiert.

2.3.4 Limes superior/inferior

Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine reelle Folge, dann heißt:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \sup\{x \in \mathbb{R}, a_n > x \text{ } \infty\text{-oft}\}$$

der Limes superior von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ und

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \inf\{x \in \mathbb{R}, a_n < x \text{ } \infty\text{-oft}\}$$

der Limes inferior von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

2.3.5 Charakterisierung limsup/liminf

Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine reelle Folge und $s \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(a)

$$s = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt:}$$

i $a_n < s + \varepsilon$ für fast alle n

ii $a_n > s - \varepsilon$ für ∞ -viele n

(b)

$$s = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt:}$$

i $a_n > s - \varepsilon$ für fast alle n

ii $a_n < s + \varepsilon$ für ∞ -viele n

2.3.6 Konvergenz und limsup/liminf

Eine beschränkte Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ in \mathbb{R} konvergiert \Leftrightarrow

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$$

2.3.7 Satz von Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge in \mathbb{C} besitzt eine konvergente Teilfolge.

2.3.8 Cauchy-Kriterium

Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in \mathbb{C} , dann gilt

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ konv. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : |a_n - a_m| < \varepsilon \forall n, m > n_0(\varepsilon)$$

Bemerkung

Im Gegensatz zur Definition der Folgenkonvergenz muss der Grenzwert nicht bekannt sein.

2.4 Unendliche Reihen

2.4.1 Definition

Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in \mathbb{C} , dann heißt die durch

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

definiert Folge $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von Partialsummen der unendlichen Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Falls die Folge $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert setzen wir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n =: \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

2.4.2 Cauchy-Kriterium für unendliche Reihen

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine ∞ -Reihe, dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon \quad \forall n, m > n_0(\varepsilon)$$

und:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

2.4.3 Grenzwertrechenregeln für unendliche Reihen

Seien

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} b_k \text{ gegeben und } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

dann gilt:

(a)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} b_k \text{ konv.:} \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) \text{ konv.} \\ \text{und: } \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_k \end{aligned}$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}(a_k) \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im}(a_k) \text{ konv.}$$

(c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Leftrightarrow \text{die Restreihe } R_n := \sum_{k=n}^{\infty} a_k \text{ konv. gegen } 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$$

2.4.4 Positive Folgen

Es sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge mit $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in [0, \infty)$ dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Leftrightarrow \text{Folge der Partialsummen } \sum_{k=1}^n a_k \text{ ist beschr.}$$

2.4.5 Leibniz-Kriterium

Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine monoton fallende, stetige Folge. Dann gilt falls $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ist, konv. die sogenannte alternierende Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

2.4.6 Absolute Konvergenz

Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, wenn

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert.

Bemerkung

Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent.

2.4.7 Majorantenkriterium

Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ mit $b_k \geq 0$ gegeben.
Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konv. und ein $c > 0$ ex. mit

$$|a_k| \leq c \cdot |b_k|$$

für fast alle k , dann konv. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

2.4.8 Minorantenkriterium

Falls ein $c > 0$ ex. mit $a_k \geq c \cdot b_k > 0$ für fast alle k , dann:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ div.} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ div.}$$

2.4.9 Wurzel- und Quotientenkriterium

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ gegeben. Dann gilt:

(a) Wenn

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

gilt, dann konv. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

Wenn

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

gilt, dann div. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

(b) Wenn $a_n \neq 0 \forall n$ und

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

gilt, dann konv. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

Wenn $a_n \neq 0 \forall n$ und

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$$

gilt, dann divergiert. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Bemerkung

Wenn das Wurzelkriterium keine Aussage macht, kann das Quotientenkriterium trotzdem eine Aussage machen.

2.4.10 Umordnung einer Reihe

Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ heißt Umordnung der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, wenn eine bij. Abb $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ex. mit $b_k = a_{\varphi(k)}$.

Bemerkung

Die Reihe konvergiert nur gegen den selben Wert, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent ist.

2.4.11 Cauchy-Produkt

Die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ seien absolut konv.. Dann gilt:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k a_j \cdot b_{k-j}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

und $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konv. ebenfalls absolut.

2.4.12 Cauchy-Verdichtungssatz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ konv.}$$

2.5 Potenzreihen

2.5.1 Definition

Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in \mathbb{C} und $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k$$

eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt z_0 und Koeffizienten a_n .

Bemerkung

Viele wichtige Funktionen können als Potenzreihen dargestellt werden.

2.5.2 Hadamard (Konvergenzradius mit Wurzelkriterium)

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ eine PR. Definiere

$$R := \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Dabei sei $R := \infty$, falls $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ und $R = 0$ falls $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$.

Dann konv. die PR absolut, falls $|z - z_0| < R$ und divergiert falls $|z - z_0| > R$.

Bemerkung I

Für $|z - z_0| = R$ wird keine Aussage gemacht.

Bemerkung II

R heißt der Konvergenzradius der Potenzreihe.

2.5.3 Konvergenzradius mit Quotientenkriterium

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ eine PR. Der Potenzradius kann ebenfalls berechnet werden durch:

$$R = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

2.5.4 Hinweis

Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

2.5.5 Integration und Differentiation von Potenzreihen

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ mit Konvergenzradius R . Dann besitzen auch die Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a_k(z - z_0)^{k-1} \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (z - z_0)^{k+1}$$

den Konvergenzradius R .

2.5.6 Cauchy-Produkt für Potenzreihen

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z - z_0)^k$ Potenzreihen, die den Konvergenzradius R_1 bzw. R_2 besitzen. Dann besitzt

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k \text{ mit } c_k = \sum_{l=0}^k a_l \cdot b_{k-l}$$

den Konvergenzradius $R = \min\{R_1, R_2\}$.

2.5.7 Wichtige Potenzreihen

(a) Die Exponentialfunktion ist definiert durch:

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

(b) Die Trigonometrischen Funktionen sind definiert durch:

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \sin(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \\ \cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \cos(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \end{aligned}$$

(c) Tangens und Cotangens sind dann definiert als:

$$\begin{aligned}\tan : \{z \in \mathbb{C} : \cos(z) \neq 0\} &\rightarrow \mathbb{C} & z \mapsto \tan(z) &:= \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \\ \cot : \{z \in \mathbb{C} : \sin(z) \neq 0\} &\rightarrow \mathbb{C} & z \mapsto \cot(z) &:= \frac{\cos(z)}{\sin(z)}\end{aligned}$$

2.5.8 Alternative Definition der Exponentialfunktion

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp(z)$$

2.6 Funktionsgrenzwerte

2.6.1 Bemerkung

In diesem Intervall bezeichnet I stets ein offenes Intervall und \bar{I} dessen sog. Abschluss z.B.:

- (a) $I = (a, b)$ und $\bar{I} = [a, b]$
- (b) $I = (-\infty, b)$ und $\bar{I} = (-\infty, b]$
- (c) $I = (a, \infty)$ und $\bar{I} = [a, \infty)$
- (d) $I = (\infty, \infty)$ und $\bar{I} = (\infty, \infty)$

2.6.2 Epsilon-Umgebung

Für $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ heißt

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

die ε -Umgebung von x_0 . Und

$$\dot{U}_\varepsilon(x_0) := U_\varepsilon(x_0) \setminus \{0\} = (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$$

die punktierte ε -Umgebung von x_0 .

2.6.3 Funktionsgrenzwerte (über Delta-Epsilon-Kriterium)

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$

- (a) f konv. gegen ein $a \in \mathbb{R}$ für $x \rightarrow x_0$ (kurz: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$) wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : |f(x) - a| < \varepsilon \quad \forall x \text{ mit } |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \text{ und } x \neq x_0$$

Schreibweise:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \text{ oder } f(x) = a \text{ für } x \rightarrow x_0$$

(b) Sei $x_0 \in I$, dann konv. f einseitig von links gegen $a \in \mathbb{R}$ wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : |f(x) - a| < \varepsilon \quad \forall x \in (x_0 - \delta\varepsilon, x_0)$$

Schreibweise:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$$

(c) Sei $x_0 \in I$, dann konv. f einseitig von rechts gegen $a \in \mathbb{R}$ wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : |f(x) - a| < \varepsilon \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta\varepsilon)$$

Schreibweise:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$$

(d) Sei $I = (\alpha, \infty)$ (bzw. $I = (-\infty, \beta)$) dann konv. f gegen a für $x \rightarrow \infty$ (bzw. $x \rightarrow -\infty$) wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_1(\varepsilon) : |f(x) - a| < \varepsilon \quad \forall x \in I : x > x_1(\varepsilon) \text{ (bzw. } x < x_1(\varepsilon))$$

2.6.4 Folgenkriterium

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in \bar{I}, u \in \mathbb{R}$ dann gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \Leftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Für eine beliebige Folge } (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ mit} \\ \text{(i) } x_n \neq x_0 \forall n \\ \text{(ii) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \\ \text{gilt stets:} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a \end{array} \right.$$

2.6.5 Rechenregeln für Funktionsgrenzwerte

Seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$ und gelte

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$$

Dann gilt:

(a)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha \cdot f(x)) = \alpha \cdot a$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) + f(x)) = a + b$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) \cdot f(x)) = a \cdot b$$

(d)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{a}{b} \quad \text{falls } b \neq 0$$

2.6.6 Cauchy-Kriterium für Funktionsgrenzwerte

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$ dann ex. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : |f(x) - f(y)| < \varepsilon \forall x, y \in I \text{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \text{ und } 0 < |y - x_0| < \delta(\varepsilon)$$

2.6.7 Bestimmte Divergenz

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ dann definieren wir die bestimmte Divergenz (uneigentliche Konvergenz) von $(f \rightarrow \infty)$ durch

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall c > 0 \exists \delta(c) : f(x) > c \forall x \text{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta(c)$$

Analog definieren man links- und rechtsseitig Divergenz gegen ∞ bzw. $-\infty$.

2.6.8 Monotone Funktionen

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dann heißt (auf I)

- (a) monoton wachsend ($f \nearrow$), falls gilt

$$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

- (b) streng monoton wachsend ($f \uparrow$), falls gilt

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

- (c) monoton fallend ($f \searrow$), falls gilt

$$x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

- (d) streng monoton fallend ($f \downarrow$)

$$x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

- (e) monoton fallend falls f monoton fallend oder monoton steigend ist

- (f) streng monoton falls f streng monoton fallend oder streng monoton steigend ist

- (g) Beschränkt falls gilt:

$$\exists c : |f(x)| < c \forall x \in I$$

2.6.9 Grenzwerte an Intervallgrenzen

Sei $a \leq b$ und $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ monoton und beschränkt, dann ex.

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \text{ und } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

2.7 Stetigkeit

2.7.1 Anschaulich

Graph einer Funktion kann ohne Absetzen gezeichnet werden \Leftrightarrow

Es gibt keine Sprünge \Leftrightarrow

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ an keiner Stelle $x_0 \in I$ ist ein Sprung \Leftrightarrow

$$\forall x_0 \in I : \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

2.7.2 Stetigkeit: Delta-Epsilon-Kriterium

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$, dann ist f in x_0 stetig falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in I \text{ mit } |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$$

Und f ist stetig (auf I), wenn f in jedem $x_0 \in I$ stetig ist.

2.7.3 Bemerkungen

(a) f ist stetig in $x_0 \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

gilt.

(b) f ist stetig in x_0 dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

2.7.4 Rechenregeln für Stetigkeit

Sind $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann sind auch die Funktionen

(a) $c \cdot f$ (für $c \in \mathbb{R}$)

(b) $f + g$

(c) $f \cdot g$

(d) und falls $g(x) \neq 0 \forall x \in I$ $\frac{f}{g}$

stetig.

Ist $f : I \rightarrow J, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ und beide stetig dann ist auch $g \circ f$ stetig.

2.7.5 Stetigkeit von Potenzreihen

Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$, dann gilt für $x_1 \in U_R(x_0)$, dass $\lim_{x \rightarrow x_1} f(x) = f(x_1)$ (d.h. Potenzreihen sind innerhalb des Konvergenzradius stetig).

2.7.6 Umgebung positiver Funktionswerte

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in x_0 , dann gilt:

$$f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : f(x) > 0 \quad \forall x \in I \text{ mit } |x - x_0| < \delta$$

2.7.7 Zwischenwertsatz

Sei $D = [a, b]$ (also abgeschlossen) und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig dann ex. zu jedem y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.

Genauer:

$$\forall y \in [m, M] \quad \exists x \in [a, b] \text{ mit } f(x) = y$$

Wobei $m = \min\{f(a), f(b)\}$ und $M = \max\{f(a), f(b)\}$.

Bemerkung

Bei einer Funktion ist das Bild eines Intervalls wieder ein Intervall. D.h.

$$f([a, b]) = [c, d]$$

2.7.8 Existenz des Logarithmus

Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ist bijektiv. Das heißt es existiert eine Umkehrfunktion, diese wird $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ genannt.

2.7.9 Maximum/Minimum/Infimum/Supremum einer Funktion

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$, dann heißt im Fall der Existenz:

(a)

$$\max_{x \in D} f(x) := \max_D f(x) := \max\{f(x) \mid x \in D\}$$

das Maximum von f auf D .

(b)

$$\min_{x \in D} f(x) := \min_D f(x) := \min\{f(x) \mid x \in D\}$$

das Minimum von f auf D .

(c)

$$\sup_{x \in D} f(x) := \sup_D f(x) := \sup\{f(x) \mid x \in D\}$$

das Supremum von f auf D .

(d)

$$\inf_{x \in D} f(x) := \inf_D f(x) := \inf\{f(x) \mid x \in D\}$$

das Infimum von f auf D .

2.7.10 Beschränktheit einer stetigen Funktion

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, dann ist f beschränkt. (d.h. $\sup_{[a,b]} f < \infty$ und $\inf_{[a,b]} f > -\infty$).

2.7.11 Weierstraß: Existenz von Min und Max

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann ex.:

$$\min_{[a,b]} f \text{ und } \max_{[a,b]} f$$

2.7.12 Zusammenhang Injektivität — Stetigkeit

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$f \text{ inj. auf } I \Leftrightarrow f \text{ ist streng monoton}$$

2.7.13 Existenz und Monotonie der Umkehrfunktion

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton auf einem Intervall I . Dann ex. auf $J := f(I)$ die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \rightarrow I$ und diese ist im gleichen Sinn wie f streng Monoton und stetig.

2.7.14 Gleichmäßige Stetigkeit

Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig auf I , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \forall x_1, x_2 \in I \text{ mit } |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$$

Bemerkung

Im Gegensatz zur normalen Stetigkeit wird bei der gleichmäßigen Stetigkeit eine Funktion $\delta(\varepsilon)$ für die ganze Funktion bestimmt und nicht nur für jeden Punkt einzeln (also $\delta(x_0, \varepsilon)$). Es wird also zwischen Stetigkeit in einem Punkt und Stetigkeit auf einem Intervall unterschieden.

Kapitel 3

Differentialrechnung

3.1 Ableitung

3.1.1 Definition Differenzen-Quotient

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt f in $x_0 \in D$ differentierbar, falls

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

für alle $x_0 \in D$ existiert.

3.1.2 Rechtsseitige und linksseitige Ableitung

Im Fall der Existenz heißen

$$\begin{aligned} f'(x_0^+) &:= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ bzw.} \\ f'(x_0^-) &:= \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

die rechts- bzw. linksseitige Ableitung in x_0

Bemerkung

$$f'(x_0) \text{ ex.} \Leftrightarrow f'(x_0^+) \text{ und } f'(x_0^-) \text{ ex. und } f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$$

3.1.3 Ableitungsregeln

Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ differentierbar in $x_0 \in D$, dann gilt:

- (a) $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- (b) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

(c) Falls $g(x_0) \neq 0$: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

3.1.4 Alternative Definition der Ableitung

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. Dann gilt: f differenzierbar in $x_0 \Leftrightarrow$

$$\exists A \in \mathbb{R} \text{ und } r : D \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \lim_{x \rightarrow x_0} r(x) = 0 \text{ so dass gilt: } f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + r(x) \cdot (x - x_0)$$

3.1.5 Zusammenhang Differenzierbarkeit — Stetigkeit

Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D \Rightarrow f$ stetig in x_0

3.1.6 Differentiation von Potenzreihen

Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ eine Potenzreihe mit $R > 0$, dann ist f für x mit $|x - x_0| < R$ differenzierbar, und es gilt:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (x - x_0)^{k-1}$$

Bemerkung

Der Konvergenzradius von $f'(x)$ ebenfalls R ist.

3.1.7 Ableitung der Umkehrfunktion

Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $f : I \rightarrow J$ sei differenzierbar und bijektiv, dann ist auch $f^{-1} : J \rightarrow I$ differenzierbar und es gilt:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{d}{dx} f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \forall y_0 \in J \text{ für ein } y_0 = f(x_0) \text{ und } f'(y_0) \neq 0$$

3.1.8 Kettenregel

Seien $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ mit $A, B \subseteq \mathbb{R}$ differenzierbar auf A bzw. B , dann ist auch $g \circ f$ auf A differenzierbar und es gilt:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \quad \forall x_0 \in A$$

3.2 Mittelwertsätze

3.2.1 Satz von Rolle

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Falls $f(a) = f(b)$ gilt, existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$

3.2.2 Definition lokaler Extrempunkt

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. Dann besitzt f in x_0 ein lokales Maximum (bzw. Minimum): \Leftrightarrow

$$\exists \delta > 0 : f(x) \leq f(x_0) \text{ (bzw. } f(x) \geq f(x_0)) \quad \forall x \in D \cap U_\delta(x_0)$$

3.2.3 Notwendige Bedingung für lokale Extrema

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D$ und x_0 sei kein Randpunkt, dann gilt:
Liegt bei x_0 ein lokales Maximum/Minimum $\Rightarrow f'(x_0) = 0$.

3.2.4 2. Mittelwertsatz

Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) \cdot (g(b) - g(a)) = g'(x_0) \cdot (f(b) - f(a))$$

Bzw. falls nicht durch Null geteilt wird:

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

3.2.5 1. Mittelwertsatz (Folgerung aus 2. Mittelwertsatz)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar

$$\Rightarrow \exists x_0 \in (a, b) \text{ mit } f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

3.2.6 L'Hospital

Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a < b, b \in (\mathbb{R} \cup \infty)$) differenzierbar auf (a, b) mit $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$. Falls der Grenzwert $\alpha = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ex. und:

(a) $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$ oder

(b) $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = \infty$

dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3.2.7 Satz von Taylor

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $n + 1$ mal differentierbar auf (a, b) und $x_0 \in (a, b)$. Dann gilt für ein $\xi \in (x_0, x)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

Teil II

Appendix/Beweisansätze

Kapitel 4

Grenzwerte

4.1 Konvergenzkriterien

Zusammenfassung verschiedener Konvergenzkriterien nach Wikipedia (Seite: Konvergenzkriterium):

Kriterium	nur f. mon. F.	Konv.	Div.	abs. Konv.	Absch.	Fehlerabsch.
Nullfolgenkriterium			x			
Monotoniekriterium		x		x		
Leibniz-Kriterium	x	x			x	x
Cauchy-Kriterium		x	x			
Abel-Kriterium	x	x				
Dirichlet-Kriterium	x	x				
Majorantenkriterium		x		x		
Minorantenkriterium			x			
Wurzelkriterium		x	x	x		x
Integralkriterium	x	x	x	x	x	
Cauchy-Kriterium	x	x	x	x		
Grenzwertkriterium		x	x			
Quotientenkriterium		x	x	x		x
Gauß-Kriterium		x	x	x		
Raabe-Kriterium		x	x	x		
Kummer-Kriterium		x	x	x		
Bertrand-Kriterium		x	x	x		
Ermakoff-Kriterium	x	x	x	x		

4.2 Beweis-Ansätze

Lemma / Satz	Beweisansatz
Eindeutigkeit des GW einer Folge	Zeige, dass $\text{GW } a = \text{GW } b$, nahrhafte 0
Konvergente Folgen sind beschränkt	Nahrhafte 0, Dreiecks-ugl.
Grenzwertrechenregeln	Nahrhafte 0, Dreiecks-ugl.
$a_n \leq \gamma \ \forall n \Rightarrow a \leq \gamma$	Ausgehend von a über nahrh. 0 zu Def Konvergenz
$a_n \leq b_n \ \forall n \Rightarrow a \leq b$	Definiere Hilfsfolge, argumentiere nach s.o
Sandwich-Theorem	Zeige, dass $-\varepsilon < c_n < \varepsilon$ (Quasi Epsilon-Schlauch)
Monotoniekriterium	Da $ a_n < c \ \forall n$, argumentiere über das Supremum der Menge, die aus a_n besteht
GW einer konv. Folge = GW jeder Teilfolge	Def. Konvergenz + Def Teilfolge
Charakterisierung \limSup und \limInf	Argumentiere über Eigenschaften \sup und \inf
Folge konv. $\overline{\lim} = \underline{\lim}$	Hin: Eindeutigkeit des GW; Rück: Charakterisierung \limSup und \limInf
Bolzano-Weierstraß	Zunächst für reelle Folge (trivial), dann für komplex: Realteil ist klar, Imaginärteil: Teilfolge konstruieren
Cauchy Kriterium	Hin: nahrhafte 0; Rück: zeige Beschränktheit, dann folge daraus, dass ein HW ex und benutze diesen als GW-Kandidat
Reihe konv. Folge ist Nullfolge	Cauchy für Reihen
GWRR für Reihen	GWRR für Folgen
Reihe konv g. 0	Restreihe als Differenz darstellen
Leibniz	Cauchy für Reihen
Absolut konv. \Rightarrow konv.	Cauchy und Dreiecks-ugl.
Majorantenkrit.	Cauchy
Minorantenkrit.	Kontradiktion von Majorantenkrit.
Wurzelkriterium	Majorantenkrit: geom. Summe über $Q := q + \varepsilon < 1$, in q das Wurzelkrit einsetzen, Char. \limSup
Quotientenkrit.	Majorantenkrit: setze in q das Quotientenkrit ein u. arg. über \limSup
Hadamard	Wurzelkrit + Fallunterscheidung für Sonderfälle
Differenzieren / Integrieren von PR	Wurzelkriterium
Lemma zu \sin , \cos und \exp	Cauchy-Produkt + Definitionen

$e^z \neq 0$ und $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$	Inverses Element der Multiplikation
Pythagoras	3. binomische Formel
$e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$	Betrachte $x \geq 0$, angeordneter Körper
$1 + x \leq e^x \ \forall x \in \mathbb{R}$	Bernoulli
$x < y \Rightarrow e^x < e^y$	nährhafte 0
Folgenkriterium	Hin: Def. Folgenkonv. und dann Def FunktionsGW einsetzen; Rück: Wähle versch. δ und zeige Widerspruch
Cauchy für Funktionen	Hin: Def. FunktionsGW + nährhafte 0; Rück: Cauchy für Folgen
Grenzwerte an Intervallgrenzen	Argumentiere über Supremum / Infimum
Verknüpfungen stetiger Fnkt. stetig	Folgenkriterium
Potenzreihen sind innerhalb des KR stetig	Abschätzung: $\exists r > 0 : x - x_0 \text{ bzw. } x_1 \leq r$, dann einfach $ f(x) - f(x_1) $ nach oben abschätzen
Umgebung pos. Funktionswerte	Wähle $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$, Def. Stetigkeit
Zwischenwertsatz	Definiere $x_0 := \sup\{x \in [a, b] : f(x) \leq y\}$ und zwei Hilfsfolgen, die gegen x_0 konvergieren
Existenz log	Zeigen exp ist bijektiv (Zwischenwertsatz)
Beschr. stet. Fkt.	Annahme f nicht beschr. Folgenkriterium
Weierstraß ex. min bzw. max	Zeigen das sup = max
