

# Zusammenfassung HM I — Übungsklausur 2

Paul Nykiel

7. Februar 2017

# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Grenzwerte</b>	<b>4</b>
<b>1</b>	<b>Gruppen und Körper</b>	<b>4</b>
1.1	Gruppen . . . . .	4
1.2	Körper . . . . .	4
1.3	Angeordnete Körper . . . . .	5
1.3.1	Gebräuchliche Definition zu angeordneten Körpern . . . .	5
1.3.2	Vollständig Angeordnete Körper . . . . .	5
1.4	Minimum und Maximum . . . . .	5
1.5	Obere und untere Schranke . . . . .	6
1.6	Supremum und Infimum . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Folgen</b>	<b>6</b>
2.1	Konvergenz . . . . .	7
2.1.1	Schreibweise . . . . .	7
2.2	Bestimmte Divergenz . . . . .	7
2.3	Beschränktheit . . . . .	7
2.3.1	Beschränktheit nach oben/unten . . . . .	7
2.4	Zusammenhang Konvergenz — Beschränktheit . . . . .	7
2.5	Grenzwertrechenregeln . . . . .	7
2.6	Sandwich Theorem u.a. . . . .	8
2.7	Monotonie . . . . .	8
2.8	Zusammenhang Monotonie und Beschränktheit . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Häufungswerte</b>	<b>8</b>
3.1	Teilfolgen . . . . .	8
3.2	Teilfolgen einer Konvergenten Folge . . . . .	9
3.3	Häufungswerte . . . . .	9
3.4	Limes superior/inferior . . . . .	9
3.5	Konvergenz und limsup/liminf . . . . .	9
3.6	Satz von Bolzano-Weierstraß . . . . .	9
3.7	Cauchy-Kriterium . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Unendliche Reihen</b>	<b>9</b>
4.1	Definition . . . . .	9
4.2	Cauchy-Kriterium für unendliche Reihen . . . . .	10
4.3	Grenzwertrechenregeln für unendliche Reihen . . . . .	10
4.4	Positive Folgen . . . . .	11
4.5	Leibniz-Kriterium . . . . .	11
4.6	Absolute Konvergenz . . . . .	11
4.7	Majorantenkriterium . . . . .	11
4.8	Minorantenkriterium . . . . .	11
4.9	Wurzel- und Quotientenkriterium . . . . .	11

4.10	Umordnung einer Reihe . . . . .	12
4.11	Cauchy-Produkt . . . . .	12
4.12	Cauchy-Verdichtungssatz . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Potenzreihen</b>	<b>13</b>
5.1	Definition . . . . .	13
5.2	Hadamard . . . . .	13
5.3	Hinweis . . . . .	13
5.4	Integration und Differentiation von Potenzreihen . . . . .	13
5.5	Cauchy-Produkt für Potenzreihen . . . . .	13
5.6	Wichtige Potenzreihen . . . . .	14
5.7	Alternative Definition der Exponentialfunktion . . . . .	14
<b>6</b>	<b>Funktionsgrenzwerte</b>	<b>14</b>
6.1	Bemerkung . . . . .	14
6.2	Epsilon-Umgebung . . . . .	14
6.3	Funktionsgrenzwerte (über Delta-Epsilon-Kriterium) . . . . .	15
6.4	Folgenkriterium . . . . .	15
6.5	Rechenregeln für Funktionsgrenzwerte . . . . .	16
6.6	Cauchy-Kriterium für Funktionsgrenzwerte . . . . .	16
6.7	Bestimmte Divergenz . . . . .	16
6.8	Monotone Funktionen . . . . .	16
6.9	Grenzwerte an Intervallgrenzen . . . . .	17
<b>7</b>	<b>Stetigkeit</b>	<b>17</b>
7.1	Anschaulich . . . . .	17
7.2	Stetigkeit: Delta-Epsilon-Kriterium . . . . .	17
7.3	Bemerkungen . . . . .	17
7.4	Rechenregeln für Stetigkeit . . . . .	18
7.5	Stetigkeit von Potenzreihen . . . . .	18
7.6	Umgebung positiver Funktionswerte . . . . .	18
7.7	Zwischenwertsatz . . . . .	18
<b>II</b>	<b>Appendix</b>	<b>19</b>
<b>8</b>	<b>Konvergenzkriterien</b>	<b>19</b>
<b>9</b>	<b>Beweis-Ansätze</b>	<b>20</b>

## Teil I

# Grenzwerte

## 1 Gruppen und Körper

### 1.1 Gruppen

Eine Gruppe ist definiert als ein Tupple aus einer (nicht-leeren) Menge und einer Verknüpfung. Eine Gruppe erfüllt die folgenden Axiome (seien  $a, b, c \in \mathbb{G}$ ):

$$\begin{aligned}a \circ (b \circ c) &= (a \circ b) \circ c && \text{(Assoziativität)} \\a \circ \varepsilon &= a && \text{(Rechtsneutrales Element)} \\a \circ a' &= \varepsilon && \text{(Rechtsinverses Element)}\end{aligned}$$

Eine abelsche Gruppe erfüllt des weiteren:

$$a \circ b = b \circ a \quad \text{(Kommutativität)}$$

### 1.2 Körper

Ein Körper ist definiert als eine Menge mit mindestens zwei Elementen (0 und 1) und zwei Verknüpfungen.

$$\begin{aligned}+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{K} \\ \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{K}\end{aligned}$$

$\mathbb{K}$  ist bezüglich der Addition und der Multiplikation (genauer:  $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ ) ein abelscher Körper, das heißt es gilt (seien  $a, b, c \in \mathbb{K}$ ):

$$\begin{aligned}a + (b + c) &= (a + b) + c && \text{(Assoziativität bez. der Addition)} \\a + 0 &= a && \text{(Existenz einer 0)} \\a + (-a) &= 0 && \text{(Existenz eines Inversen bez. der Addition)} \\a + b &= b + a && \text{(Kommutativität bez. der Addition)} \\a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c && \text{(Assoziativität bez. der Multiplikation)} \\a \cdot 1 &= a && \text{(Existenz einer 1)} \\a \cdot a^{-1} &= 1 \quad \forall a \neq 0 && \text{(Existenz eines Inversen bez. der Multiplikation)} \\a \cdot b &= b \cdot a && \text{(Kommutativität bezüglich der Multiplikation)}\end{aligned}$$

außerdem gilt:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad \text{(Distributivgesetz)}$$

**Bem.:**  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  sind Körper.  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{N}$  nicht (kein additiv inverses bei  $\mathbb{N}$ , kein multiplikativ inverses bei beiden).

### 1.3 Angeordnete Körper

Ein Körper heißt angeordnet wenn folgende Axiome erfüllt sind (seien  $a, b, c \in \mathbb{K}$ ):

$$\begin{aligned} a < b \vee b < a \vee a &= b \\ a < b \wedge b < c &\Rightarrow a < c \\ a < b &\Rightarrow a + c < b + c \\ a < b \wedge c > 0 &\Rightarrow a * c < b * c \end{aligned}$$

**Bem.:**  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$  sind angeordnete Körper. Für  $\mathbb{C}$  kann keine Ordnungsrelation definiert werden so dass alle Axiome erfüllt sind.

#### 1.3.1 Gebräuchliche Definition zu angeordneten Körpern

Für gewöhnlich gilt  $0 < 1$ .

Die Ordnungsrelation wird dann definiert durch:

$$\begin{aligned} 2 &:= 1 + 1 \\ 3 &:= 2 + 1 \\ 4 &:= 3 + 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Die Natürlichen Zahlen werden Induktiv definiert:

1.  $1 \in \mathbb{N}$
2.  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n + 1) \in \mathbb{N}$

**Bem:** Aus 2. lässt sich direkt ableiten dass  $\mathbb{N}$  nach oben unbeschränkt ist (Archimedisches Prinzip).

#### 1.3.2 Vollständig Angeordnete Körper

Ein Körper heißt Vollständig, falls jede nach oben beschränkte, nicht-leere Teilmenge ein Supremum besitzt.

$\Rightarrow \mathbb{R}$  ist der einzige Vollständig angeordnete Körper.

**Bem:**  $\mathbb{Q}$  ist nicht vollständig angeordnet, da  $A := \{x | x^2 \leq 2\} \subset \mathbb{Q}$  kein obere Schranke besitzt (obere Schranke ist  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ).

### 1.4 Minimum und Maximum

Sei  $\mathbb{K}$  ein angeordneter Körper und  $A \subset \mathbb{K}$  dann heißt  $m$  Minimum falls gilt:

1.  $m \in \mathbb{K}$
2.  $a \geq m \forall a \in A$

Analog ist das Maximum definiert: Sei  $\mathbb{K}$  ein angeordneter Körper und  $A \subset \mathbb{K}$  dann heißt  $m$  Maximum falls gilt:

1.  $m \in \mathbb{K}$
2.  $a \leq m \quad \forall a \in A$

**Schreibweisen:**  $m = \min(A)$  bzw.  $m = \max(A)$

**Bem.:** Minimum und Maximum existieren nicht immer.

**Beispiel:**  $A := \{x | x > 0\} \subset \mathbb{R}$  hat nicht 0 als Minimum da  $0 \notin A$  und kein beliebiges  $m$  da  $\tilde{m} := \frac{m}{2} < m \quad \forall m \in A$

## 1.5 Obere und untere Schranke

Sei  $\mathbb{K}$  ein angeordneter Körper und  $A \subset \mathbb{K}$  dann ist  $s$  untere Schranke falls gilt:

- $s \leq a \quad \forall a \in A$

Analog ist die obere Schranke definiert: Sei  $\mathbb{K}$  ein angeordneter Körper und  $A \subset \mathbb{K}$  dann ist  $s$  obere Schranke falls gilt:

- $s \geq a \quad \forall a \in A$

**Bem.:** Hat eine Menge eine obere (bzw. untere) Schranke heißt er nach oben (bzw. unten) beschränkt. Ist eine Menge nach unten und oben beschränkt bezeichnet man sie als beschränkt.

## 1.6 Supremum und Infimum

$s$  heißt Infimum (größte untere Schranke) falls gilt:

- $s$  ist untere Schranke
- Falls  $\tilde{s}$  ebenfalls untere Schranke ist gilt  $s \geq \tilde{s}$

Analog ist das Supremum definiert:  $s$  heißt Supremum (kleinste obere Schranke) falls gilt:

- $s$  ist obere Schranke
- Falls  $\tilde{s}$  ebenfalls obere Schranke ist gilt  $s \leq \tilde{s}$

**Bem.:** Wenn Minimum (bzw. Maximum) existieren sind diese gleich dem Infimum (bzw. Supremum).

**Schreibweise:**  $s = \inf(A)$  bzw.  $s = \sup(A)$

## 2 Folgen

Eine Folge  $a_n$  ist definiert als eine Funktion:

$$a_n := \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{M} \subset \mathbb{R}$$

oder auch  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ .

## 2.1 Konvergenz

Eine Folge  $a_n$  heißt konvergent wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > n_0(\varepsilon)$$

**Bem.:** Der Grenzwert ist eindeutig, d.h. es existiert nur ein Grenzwert.

### 2.1.1 Schreibweise

Falls  $a_n$  gegen  $a$  konvergiert schreibt man:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

## 2.2 Bestimmte Divergenz

Eine Folge  $a_n$  heißt bestimmt Divergent wenn gilt

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n(x) : a_n > x \text{ bzw. } a_n < x$$

**Schreibweise:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ bzw. } -\infty$$

## 2.3 Beschränktheit

Eine Folge heißt beschränkt wenn gilt:

$$|a_n| < c \quad \forall n$$

### 2.3.1 Beschränktheit nach oben/unten

Eine Folge heißt nach oben (bzw. unten) beschränkt wenn gilt:

$$a_n < c \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ bzw. } a_n > c \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

## 2.4 Zusammenhang Konvergenz — Beschränktheit

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

## 2.5 Grenzwertrechenregeln

Seien  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ,  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ ,  $(c_n)_{n=1}^{\infty}$  Folgen in  $\mathbb{C}$  mit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

Dann gilt:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- Falls  $b \neq 0$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

## 2.6 Sandwich Theorem u.a.

Seien  $(a_n)_{n=1}^\infty$ ,  $(b_n)_{n=1}^\infty$ ,  $(c_n)_{n=1}^\infty$  Folgen in  $\mathbb{R}$  mit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \text{ und } \gamma \in \mathbb{R}$$

Dann gilt:

- $a_n \leq \gamma \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq \gamma$
- $a_n \geq \gamma \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \geq \gamma$
- $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq b$
- $a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \wedge a = b \Rightarrow c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a = b$

## 2.7 Monotonie

Eine Folge  $(a_n)_{n=1}^\infty$  in  $\mathbb{R}$  heißt:

- Monoton wachsend falls:  $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (Schreibweise:  $a_n \nearrow$ )
- Monoton fallend falls:  $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (Schreibweise:  $a_n \searrow$ )
- Streng monoton wachsend falls:  $a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (Schreibweise:  $a_n \uparrow$ )
- Streng monoton fallend falls:  $a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (Schreibweise:  $a_n \downarrow$ )

## 2.8 Zusammenhang Monotonie und Beschränktheit

Jede Monotone und beschränkte Folge konvergiert.

# 3 Häufungswerte

Häufungswerte sind Grenzwerte einer Teilfolge.

## 3.1 Teilfolgen

Eine Folge  $(b_n)_{n=1}^\infty$  heißt Teilfolge von  $(a_n)_{n=1}^\infty$ , wenn eine streng monotone Funktion  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  existiert mit  $b_n = a_{\varphi(n)}$ .



### 3.2 Teilfolgen einer Konvergenten Folge

Sei  $(a_n)_{n=1}^\infty$  eine konvergente Folge in  $\mathbb{C}$  mit:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $(b_n)_{n=1}^\infty$  sei eine Teilfolge. Dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ .

### 3.3 Häufungswerte

Sei  $(a_n)_{n=1}^\infty$  eine Folge in  $\mathbb{C}$ . Dann heißt  $a \in \mathbb{C}$  ein Häufungswert einer Folge, falls eine Teilfolge gegen  $a$  konvergiert.

### 3.4 Limes superior/inferior

Sei  $(a_n)_{n=1}^\infty$  eine reelle Folge, dann heißt:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \sup\{x \in \mathbb{R}, a_n > x \text{ } \infty\text{-oft}\}$$

der Limes superior von  $(a_n)_{n=1}^\infty$  und

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \inf\{x \in \mathbb{R}, a_n < x \text{ } \infty\text{-oft}\}$$

der Limes inferior von  $(a_n)_{n=1}^\infty$ .

### 3.5 Konvergenz und limsup/liminf

Eine beschränkte Folge  $(a_n)_{n=1}^\infty$  in  $\mathbb{R}$  konvergiert  $\Leftrightarrow$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$$

### 3.6 Satz von Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge in  $\mathbb{C}$  besitzt eine konvergente Teilfolge.

### 3.7 Cauchy-Kriterium

Sei  $(a_n)_{n=1}^\infty$  eine Folge in  $\mathbb{C}$ , dann gilt

$$(a_n)_{n=1}^\infty \text{ konv. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m > n_0(\varepsilon)$$

**Bem.:** Im Gegensatz zur Definition der Folgenkonvergenz muss der Grenzwert nicht bekannt sein.

## 4 Unendliche Reihen

### 4.1 Definition

Sei  $(a_n)_{n=1}^\infty$  eine Folge in  $\mathbb{C}$ , dann heißt die durch

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

definiert Folge  $(s_n)_{n=1}^{\infty}$  eine Folge von Partialsummen der unendlichen Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Falls die Folge  $(s_n)_{n=1}^{\infty}$  konvergiert setzen wir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n =: \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

## 4.2 Cauchy-Kriterium für unendliche Reihen

Sei  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  eine  $\infty$ -Reihe, dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon \quad \forall n, m > n_0(\varepsilon)$$

und:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

## 4.3 Grenzwertrechenregeln für unendliche Reihen

Seien

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} b_k \text{ gegeben und } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

dann gilt:

(a)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} b_k \text{ konv.:} \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) \text{ konv.} \\ \text{und: } \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_k \end{aligned}$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}(a_k) \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im}(a_k) \text{ konv.}$$

(c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Leftrightarrow \text{die Restreihe } R_n := \sum_{k=n}^{\infty} a_k \text{ konv. gegen } 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$$

#### 4.4 Positive Folgen

Es sei  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  eine Folge mit  $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in [0, \infty)$  dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Leftrightarrow \text{Folge der Partialsummen } \sum_{k=1}^n a_k \text{ ist beschr.}$$

#### 4.5 Leibniz-Kriterium

Sei  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  eine monoton fallende, stetige Folge. Dann gilt falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  ist, konv. die sogenannte alternierende Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

#### 4.6 Absolute Konvergenz

Eine Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  heißt absolut konvergent, wenn

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert.

**Bem.:** Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent.

#### 4.7 Majorantenkriterium

Seien  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  mit  $b_k \geq 0$  gegeben.  
Wenn  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  konv. und ein  $c > 0$  ex. mit

$$|a_k| \leq c \cdot |b_k|$$

für fast alle k, dann konv.  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut.

#### 4.8 Minorantenkriterium

Falls ein  $c > 0$  ex. mit  $a_k \geq c \cdot b_k > 0$  für fast alle k, dann:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ div.} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ div.}$$

#### 4.9 Wurzel- und Quotientenkriterium

Sei  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  gegeben. Dann gilt:

(a) Wenn

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

gilt, dann konv.  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut.

Wenn

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

gilt, dann div.  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

(b) Wenn  $a_n \neq 0 \forall n$  und

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

gilt, dann konv.  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut.

Wenn  $a_n \neq 0 \forall n$  und

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$$

gilt, dann divergiert.  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

**Bem.:** Wenn das Wurzelkriterium keine Aussage macht, kann das Quotientenkriterium trotzdem eine Aussage machen.

#### 4.10 Umordnung einer Reihe

Eine Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  heißt Umordnung der Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , wenn eine bij. Abb  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ex. mit  $b_k = a_{\varphi(k)}$ .

**Bem.:** Die Reihe konvergiert nur gegen den selben Wert, wenn  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut konvergent ist.

#### 4.11 Cauchy-Produkt

Die Reihen  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  seien absolut konv.. Dann gilt:

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^k a_j \cdot b_{k-j} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

und  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  konv. ebenfalls absolut.

#### 4.12 Cauchy-Verdichtungssatz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ konv.}$$

## 5 Potenzreihen

### 5.1 Definition

Sei  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  eine Folge in  $\mathbb{C}$  und  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k$$

eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt  $z_0$  und Koeffizienten  $a_n$ .

**Bem.:** Viele wichtige Funktionen können als Potenzreihen dargestellt werden.

### 5.2 Hadamard

Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  eine PR. Definiere

$$R := \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Dabei sei  $R := \infty$ , falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$  und  $R = 0$  falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ .

Dann konv. die PR absolut, falls  $|z - z_0| < R$  und divergiert falls  $|z - z_0| > R$ .

**Bem. I:** Für  $|z - z_0| = R$  wird keine Aussage gemacht.

**Bem. II:**  $R$  heißt der Konvergenzradius der Potenzreihe.

### 5.3 Hinweis

Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

### 5.4 Integration und Differentiation von Potenzreihen

Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  mit Konvergenzradius  $R$ . Dann besitzen auch die Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1} \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (z - z_0)^{k+1}$$

den Konvergenzradius  $R$ .

### 5.5 Cauchy-Produkt für Potenzreihen

Seien  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k$  Potenzreihen, die den Konvergenzradius  $R_1$  bzw.  $R_2$  besitzen. Dann besitzt

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \text{ mit } c_k = \sum_{l=0}^k a_l \cdot b_{k-l}$$

den Konvergenzradius  $R = \min\{R_1, R_2\}$ .

## 5.6 Wichtige Potenzreihen

(a) Die Exponentialfunktion ist definiert durch:

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

(b) Die Trigonometrischen Funktionen sind definiert durch:

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \sin(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \\ \cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \cos(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \end{aligned}$$

(c) Tangens und Cotangens sind dann definiert als:

$$\begin{aligned} \tan : \{z \in \mathbb{C} : \cos(z) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \tan(z) &:= \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \\ \cot : \{z \in \mathbb{C} : \sin(z) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \cot(z) &:= \frac{\cos(z)}{\sin(z)} \end{aligned}$$

## 5.7 Alternative Definition der Exponentialfunktion

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp(z)$$

## 6 Funktionsgrenzwerte

### 6.1 Bemerkung

In diesem Intervall bezeichnet  $I$  stets ein offenes Intervall und  $\bar{I}$  dessen sog. Abschluss z.B.:

- (a)  $I = (a, b)$  und  $\bar{I} = [a, b]$
- (b)  $I = (-\infty, b)$  und  $\bar{I} = (-\infty, b]$
- (c)  $I = (a, \infty)$  und  $\bar{I} = [a, \infty)$
- (d)  $I = (\infty, \infty)$  und  $\bar{I} = (\infty, \infty)$

### 6.2 Epsilon-Umgebung

Für  $x_0 \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$  heißt

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

die  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x_0$ . Und

$$\dot{U}_\varepsilon(x_0) := U_\varepsilon(x_0) \setminus \{0\} = (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$$

die punktierte  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x_0$ .

### 6.3 Funktionsgrenzwerte (über Delta-Epsilon-Kriterium)

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in I$

- (a)  $f$  konv. gegen ein  $a \in \mathbb{R}$  für  $x \rightarrow x_0$  (kurz:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ) wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : |f(x) - a| < \varepsilon \forall x \text{ mit } |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \text{ und } x \neq x_0$$

Schreibweise:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \text{ oder } f(x) = a \text{ für } x \rightarrow x_0$$

- (b) Sei  $x_0 \in I$ , dann konv.  $f$  einseitig von links gegen  $a \in \mathbb{R}$  wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : |f(x) - a| < \varepsilon \forall x \in (x_0 - \delta\varepsilon, x_0)$$

Schreibweise:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$$

- (c) Sei  $x_0 \in I$ , dann konv.  $f$  einseitig von rechts gegen  $a \in \mathbb{R}$  wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : |f(x) - a| < \varepsilon \forall x \in (x_0, x_0 + \delta\varepsilon)$$

Schreibweise:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$$

- (d) Sei  $I = (\alpha, \infty)$  (bzw.  $I = (-\infty, \beta)$ ) dann konv.  $f$  gegen  $a$  für  $x \rightarrow \infty$  (bzw.  $x \rightarrow -\infty$ ) wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_1(\varepsilon) : |f(x) - a| < \varepsilon \forall x \in I : x > x_1(\varepsilon) \text{ (bzw. } x < x_1(\varepsilon))$$

### 6.4 Folgenkriterium

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in \bar{I}, u \in \mathbb{R}$  dann gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \Leftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Für eine beliebige Folge } (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ mit} \\ \text{(i) } x_n \neq x_0 \forall n \\ \text{(ii) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \\ \text{gilt stets:} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a \end{array} \right.$$

## 6.5 Rechenregeln für Funktionsgrenzwerte

Seien  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in I$  und gelte

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$$

Dann gilt:

(a)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha \cdot f(x)) = \alpha \cdot a$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) + f(x)) = a + b$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) \cdot f(x)) = a \cdot b$$

(d)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{a}{b} \quad \text{falls } b \neq 0$$

## 6.6 Cauchy-Kriterium für Funktionsgrenzwerte

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in I$  dann ex.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in I \text{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \text{ und } 0 < |y - x_0| < \delta(\varepsilon)$$

## 6.7 Bestimmte Divergenz

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$  dann definieren wir die bestimmte Divergenz (uneigentliche Konvergenz) von  $(f \rightarrow \infty)$  durch

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall c > 0 \exists \delta(c) : f(x) > c \quad \forall x \text{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta(c)$$

Analog definieren man links- und rechtsseitig Divergenz gegen  $\infty$  bzw.  $-\infty$ .

## 6.8 Monotone Funktionen

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dann heißt (auf  $I$ )

(a) monoton wachsend ( $f \nearrow$ ), falls gilt

$$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

(b) streng monoton wachsend ( $f \uparrow$ ), falls gilt

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$



(c) monoton fallend ( $f \searrow$ ), falls gilt

$$x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

(d) streng monoton fallend ( $f \downarrow$ )

$$x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

(e) monoton fallend falls  $f$  monoton fallend oder monoton steigend ist

(f) streng monoton falls  $f$  streng monoton fallend oder streng monoton steigend ist

(g) Beschränkt falls gilt:

$$\exists c : |f(x)| < c \quad \forall x \in I$$

## 6.9 Grenzwerte an Intervallgrenzen

Sei  $a \leq b$  und  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  monoton und beschränkt, dann ex.

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \text{ und } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

## 7 Stetigkeit

### 7.1 Anschaulich

Graph einer Funktion kann ohne Absetzen gezeichnet werden  $\Leftrightarrow$

Es gibt keine Sprünge  $\Leftrightarrow$

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$  an keiner Stelle  $x_0 \in I$  ist ein Sprung  $\Leftrightarrow$

$$\forall x_0 \in I : \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

### 7.2 Stetigkeit: Delta-Epsilon-Kriterium

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in I$ , dann ist  $f$  in  $x_0$  stetig falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in I \text{ mit } |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$$

Und  $f$  ist stetig (auf  $I$ ), wenn  $f$  in jedem  $x_0 \in I$  stetig ist.

### 7.3 Bemerkungen

(a)  $f$  ist stetig in  $x_0 \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

gilt.

(b)  $f$  ist stetig in  $x_0$  dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

## 7.4 Rechenregeln für Stetigkeit

Sind  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, dann sind auch die Funktionen

- (a)  $c \cdot f$  (für  $c \in \mathbb{R}$ )
- (b)  $f + g$
- (c)  $f \cdot g$
- (d) und falls  $g(x) \neq 0 \forall x \in I$   $\frac{f}{g}$

stetig.

Ist  $f : I \rightarrow J, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  und beide stetig dann ist auch  $g \circ f$  stetig.

## 7.5 Stetigkeit von Potenzreihen

Sei  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R > 0$ , dann gilt für  $x_1 \in U_R(x_0)$ , dass  $\lim_{x \rightarrow x_1} f(x) = f(x_1)$  (d.h. Potenzreihen sind innerhalb des Konvergenzradius stetig).

## 7.6 Umgebung positiver Funktionswerte

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0$ , dann gilt:

$$f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : f(x) > 0 \forall x \in I \text{ mit } |x - x_0| < \delta$$

## 7.7 Zwischenwertsatz

Sei  $D = [a, b]$  (also abgeschlossen) und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig dann ex. zu jedem  $y$  zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  ein  $x \in [a, b]$  mit  $f(x) = y$ .

**Genauer:**

$$\forall y \in [m, M] \exists x \in [a, b] \text{ mit } f(x) = y$$

Wobei  $m = \min\{f(a), f(b)\}$  und  $M = \max\{f(a), f(b)\}$ .

**Bem.:** Bei einer Funktion ist das Bild eines Intervalls wieder ein Intervall. D.h.

$$f([a, b]) = [c, d]$$

## Teil II

# Appendix

## 8 Konvergenzkriterien

Zusammenfassung verschiedener Konvergenzkriterien nach Wikipedia (Seite: Konvergenzkriterium):

Kriterium	nur f. mon. F.	Konv.	Div.	abs. Konv.	Absch.	Fehlerabsch.
Nullfolgenkriterium			x			
Monotoniekriterium		x		x		
Leibniz-Kriterium	x	x			x	x
Cauchy-Kriterium		x	x			
Abel-Kriterium	x	x				
Dirichlet-Kriterium	x	x				
Majorantenkriterium		x		x		
Minorantenkriterium			x			
Wurzelkriterium		x	x	x		x
Integralkriterium	x	x	x	x	x	
Cauchy-Kriterium	x	x	x	x		
Grenzwertkriterium		x	x			
Quotientenkriterium		x	x	x		x
Gauß-Kriterium		x	x	x		
Raabe-Kriterium		x	x	x		
Kummer-Kriterium		x	x	x		
Bertrand-Kriterium		x	x	x		
Ermakoff-Kriterium	x	x	x	x		

## 9 Beweis-Ansätze

Ansatz für die einzelnen Beweise.

Lemma / Satz	Beweisansatz
Eindeutigkeit des GW einer Folge	Zeige, dass $\text{GW } a = \text{GW } b$ , nahrhafte 0
Konvergente Folgen sind beschränkt	Nahrhafte 0, Dreiecks-ugl.
Grenzwertrechenregeln	Nahrhafte 0, Dreiecks-ugl.
$a_n < \gamma \ \forall n \Rightarrow a < \gamma$	Ausgehend von a über nahrh. 0 zu Def Konvergenz
$a_n < b_n \ \forall n \Rightarrow a < b$	Definiere Hilfsfolge, argumentiere nach s.o
SWT	Zeige, dass $-\varepsilon < c_n < \varepsilon$ (Quasi Epsilon-Schlauch)
Monotoniekriterium	Da $ a_n  < c \forall n$ , argumentiere über das Supremum der Menge, die aus besteht
GW einer konv. Folge = GW jeder Teilfolge	Def. Konvergenz + Def Teilfolge
Charakterisierung $\limSup$ und $\limInf$	Argumentiere über Eigenschaften $\sup$ und $\inf$
Folge konv $\limSup = \limInf$	Hin: Eindeutigkeit des GW; Rück: Charakterisierung $\limSup$ und $\limInf$
Bolzano-Weierstraß	Zunächst für reelle Folge (trivial), dann für komplex: Realteil ist klar, Imaginärteil: Teilfolge konstruieren
Cauchy Kriterium	Hin: nahrhafte 0; Rück: zeige Beschränktheit, dann folge daraus, dass ein HW ex und benutze diesen als GW-Kandidat
Reihe konv. Folge ist Nullfolge	Cauchy für Reihen
GWRR für Reihen	GWRR für Folgen
Reihe konv 0	Restreihe als Differenz darstellen
Leibniz	Cauchy für Reihen
Absolut konv. konv.	Cauchy und Dreiecks-ugl.
Majorantenkrit.-Kriterium	Cauchy
Minorantenkrit.	Kontradiktion von Majorantenkrit.
Wurzelkriterium	Majorantenkrit: geom. Summe über $Q := q + \varepsilon < 1$ , in $q$ das Wurzelkrit einsetzen, Char. $\limSup$

Quotientenkrit.	Majorantenkrit: setze in $q$ das Quotientenkrit ein u. arg. über LimSup
Hadamard	Wurzelkrit + Fallunterscheidung für Sonderfälle
Differenzieren / Integrieren von PR	Wurzelkriterium
Lemma zu sin, cos und exp	Cauchy-Produkt + Definitionen
$e^z \neq 0$ und $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$	Inverses Element der Multiplikation
Pythagoras	3. binomische Formel
$e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$	Betrachte $x \geq 0$ , angeordneter Körper
$1 + x \leq e^x \forall x \in \mathbb{R}$	Bernoulli
$x < y \Rightarrow e^x < e^y$	nährhafte 0

---