

# Zusammenfassung Höhere Mathematik

Paul Nykiel

4. März 2017

# Inhaltsverzeichnis

|          |                                                      |          |
|----------|------------------------------------------------------|----------|
| <b>I</b> | <b>Zusammenfassung</b>                               | <b>5</b> |
| <b>1</b> | <b>Vorkurs</b>                                       | <b>6</b> |
| 1.1      | Aussagenlogik . . . . .                              | 6        |
| 1.1.1    | Definition Aussage . . . . .                         | 6        |
| 1.1.2    | Verknüpfungen . . . . .                              | 6        |
| 1.1.3    | Mehr zu Implikationen . . . . .                      | 7        |
| 1.1.4    | Bezeichnung von Aussagen . . . . .                   | 7        |
| 1.1.5    | Satz der Identität . . . . .                         | 7        |
| 1.2      | Mengen . . . . .                                     | 8        |
| 1.2.1    | Defintion: Mengen nach Cantor . . . . .              | 8        |
| 1.2.2    | Begrifflichkeiten und Schreibweise . . . . .         | 8        |
| 1.2.3    | Leere Menge, Teilmengen . . . . .                    | 8        |
| 1.2.4    | Transitivität u.a. . . . .                           | 8        |
| 1.2.5    | Verknüpfung von Mengen . . . . .                     | 9        |
| 1.2.6    | Potenzmenge . . . . .                                | 9        |
| 1.2.7    | Rechenregeln für Mengen . . . . .                    | 9        |
| 1.2.8    | Komplement . . . . .                                 | 10       |
| 1.2.9    | Bemerkung . . . . .                                  | 10       |
| 1.2.10   | Verknüpfungen über mehrere Elemente . . . . .        | 10       |
| 1.2.11   | Wichtige Zusammenhänge . . . . .                     | 10       |
| 1.3      | Vollständige Induktion . . . . .                     | 10       |
| 1.3.1    | Summen und Produktzeichen . . . . .                  | 10       |
| 1.3.2    | Prinzip der Vollständigen Induktion . . . . .        | 11       |
| 1.3.3    | Rechenregeln für Summen . . . . .                    | 11       |
| 1.3.4    | Doppelsummen . . . . .                               | 12       |
| 1.3.5    | Fakultät und Binomialkoeffizient . . . . .           | 12       |
| 1.3.6    | Rechenregeln für den Binomialkoeffizienten . . . . . | 12       |
| 1.3.7    | Binomischer Lehrsatz . . . . .                       | 12       |
| 1.3.8    | Definition Betrag . . . . .                          | 12       |
| 1.3.9    | Dreiecksungleichung . . . . .                        | 13       |
| 1.4      | Funktion und Differentiation . . . . .               | 13       |
| 1.4.1    | Injektivität, Surjektivität, Bijektivität . . . . .  | 13       |
| 1.4.2    | Verknüpfung von Funktionen . . . . .                 | 14       |
| 1.4.3    | Verkettung von Funktionen . . . . .                  | 14       |

|          |                                                         |           |
|----------|---------------------------------------------------------|-----------|
| 1.4.4    | Stetigkeit und Differenzierbarkeit . . . . .            | 14        |
| 1.4.5    | Zusammenhang Differenzierbarkeit — Stetigkeit . . . . . | 14        |
| 1.4.6    | Verkettung differenzierbarer Funktionen . . . . .       | 15        |
| 1.4.7    | Differentiation von Monomen . . . . .                   | 15        |
| 1.4.8    | Kettenregel . . . . .                                   | 15        |
| 1.4.9    | Ableitung der Umkehrfunktion . . . . .                  | 15        |
| 1.5      | Elementare Funktionen . . . . .                         | 15        |
| 1.6      | Integralrechnung . . . . .                              | 15        |
| 1.7      | Komplexe Zahlen . . . . .                               | 15        |
| 1.8      | Elementare Differentialgleichungen . . . . .            | 15        |
| 1.8.1    | Definition Rechteck . . . . .                           | 15        |
| 1.8.2    | Lineare DGL 1. Ordnung . . . . .                        | 16        |
| <b>2</b> | <b>Grenzwerte</b> . . . . .                             | <b>17</b> |
| 2.1      | Gruppen und Körper . . . . .                            | 17        |
| 2.1.1    | Gruppen . . . . .                                       | 17        |
| 2.1.2    | Körper . . . . .                                        | 17        |
| 2.1.3    | Angeordnete Körper . . . . .                            | 18        |
| 2.1.4    | Minimum und Maximum . . . . .                           | 19        |
| 2.1.5    | Obere und untere Schranke . . . . .                     | 20        |
| 2.1.6    | Supremum und Infimum . . . . .                          | 20        |
| 2.2      | Folgen . . . . .                                        | 20        |
| 2.2.1    | Konvergenz . . . . .                                    | 20        |
| 2.2.2    | Bestimmte Divergenz . . . . .                           | 21        |
| 2.2.3    | Beschränktheit . . . . .                                | 21        |
| 2.2.4    | Zusammenhang Konvergenz — Beschränktheit . . . . .      | 21        |
| 2.2.5    | Grenzwertrechenregeln . . . . .                         | 21        |
| 2.2.6    | Sandwich Theorem u.a. . . . .                           | 22        |
| 2.2.7    | Monotonie . . . . .                                     | 22        |
| 2.2.8    | Zusammenhang Monotonie und Beschränktheit . . . . .     | 22        |
| 2.3      | Häufungswerte . . . . .                                 | 22        |
| 2.3.1    | Teilfolgen . . . . .                                    | 22        |
| 2.3.2    | Teilfolgen einer Konvergenten Folge . . . . .           | 22        |
| 2.3.3    | Häufungswerte . . . . .                                 | 22        |
| 2.3.4    | Limes superior/inferior . . . . .                       | 23        |
| 2.3.5    | Charakterisierung limsup/liminf . . . . .               | 23        |
| 2.3.6    | Konvergenz und limsup/liminf . . . . .                  | 23        |
| 2.3.7    | Satz von Bolzano-Weierstraß . . . . .                   | 23        |
| 2.3.8    | Cauchy-Kriterium . . . . .                              | 23        |
| 2.4      | Unendliche Reihen . . . . .                             | 24        |
| 2.4.1    | Definition . . . . .                                    | 24        |
| 2.4.2    | Cauchy-Kriterium für unendliche Reihen . . . . .        | 24        |
| 2.4.3    | Grenzwertrechenregeln für unendliche Reihen . . . . .   | 24        |
| 2.4.4    | Positive Folgen . . . . .                               | 25        |
| 2.4.5    | Leibniz-Kriterium . . . . .                             | 25        |
| 2.4.6    | Absolute Konvergenz . . . . .                           | 25        |

|          |                                                              |           |
|----------|--------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.4.7    | Majorantenkriterium . . . . .                                | 25        |
| 2.4.8    | Minorantenkriterium . . . . .                                | 26        |
| 2.4.9    | Wurzel- und Quotientenkriterium . . . . .                    | 26        |
| 2.4.10   | Umordnung einer Reihe . . . . .                              | 26        |
| 2.4.11   | Cauchy-Produkt . . . . .                                     | 27        |
| 2.4.12   | Cauchy-Verdichtungssatz . . . . .                            | 27        |
| 2.5      | Potenzreihen . . . . .                                       | 27        |
| 2.5.1    | Definition . . . . .                                         | 27        |
| 2.5.2    | Hadamard (Konvergenzradius mit Wurzelkriterium) . . . . .    | 27        |
| 2.5.3    | Konvergenzradius mit Quotientenkriterium . . . . .           | 28        |
| 2.5.4    | Hinweis . . . . .                                            | 28        |
| 2.5.5    | Integration und Differentiation von Potenzreihen . . . . .   | 28        |
| 2.5.6    | Cauchy-Produkt für Potenzreihen . . . . .                    | 28        |
| 2.5.7    | Wichtige Potenzreihen . . . . .                              | 28        |
| 2.5.8    | Alternative Definition der Exponentialfunktion . . . . .     | 29        |
| 2.6      | Funktionsgrenzwerte . . . . .                                | 29        |
| 2.6.1    | Bemerkung . . . . .                                          | 29        |
| 2.6.2    | Epsilon-Umgebung . . . . .                                   | 29        |
| 2.6.3    | Funktionsgrenzwerte (über Delta-Epsilon-Kriterium) . . . . . | 29        |
| 2.6.4    | Folgenkriterium . . . . .                                    | 30        |
| 2.6.5    | Rechenregeln für Funktionsgrenzwerte . . . . .               | 30        |
| 2.6.6    | Cauchy-Kriterium für Funktionsgrenzwerte . . . . .           | 31        |
| 2.6.7    | Bestimmte Divergenz . . . . .                                | 31        |
| 2.6.8    | Monotone Funktionen . . . . .                                | 31        |
| 2.6.9    | Grenzwerte an Intervallgrenzen . . . . .                     | 31        |
| 2.7      | Stetigkeit . . . . .                                         | 32        |
| 2.7.1    | Anschaulich . . . . .                                        | 32        |
| 2.7.2    | Stetigkeit: Delta-Epsilon-Kriterium . . . . .                | 32        |
| 2.7.3    | Bemerkungen . . . . .                                        | 32        |
| 2.7.4    | Rechenregeln für Stetigkeit . . . . .                        | 32        |
| 2.7.5    | Stetigkeit von Potenzreihen . . . . .                        | 32        |
| 2.7.6    | Umgebung positiver Funktionswerte . . . . .                  | 33        |
| 2.7.7    | Zwischenwertsatz . . . . .                                   | 33        |
| 2.7.8    | Existenz des Logarithmus . . . . .                           | 33        |
| 2.7.9    | Maximum/Minimum/Infimum/Supremum einer Funktion . . . . .    | 33        |
| 2.7.10   | Beschränktheit einer stetigen Funktion . . . . .             | 34        |
| 2.7.11   | Weierstraß: Existenz von Min und Max . . . . .               | 34        |
| 2.7.12   | Zusammenhang Injektivität — Stetigkeit . . . . .             | 34        |
| 2.7.13   | Existenz und Monotonie der Umkehrfunktion . . . . .          | 34        |
| 2.7.14   | Gleichmäßige Stetigkeit . . . . .                            | 34        |
| <b>3</b> | <b>Differentialrechnung</b>                                  | <b>35</b> |
| 3.1      | Ableitung . . . . .                                          | 35        |
| 3.1.1    | Definition Differenzen-Quotient . . . . .                    | 35        |
| 3.1.2    | Rechtsseitige und linksseitige Ableitung . . . . .           | 35        |
| 3.1.3    | Ableitungsrechenregeln . . . . .                             | 35        |

|       |                                                               |    |
|-------|---------------------------------------------------------------|----|
| 3.1.4 | Alternative Definition der Ableitung . . . . .                | 36 |
| 3.1.5 | Zusammenhang Differentierbarkeit — Stetigkeit . . . . .       | 36 |
| 3.1.6 | Differentiation von Potenzreihen . . . . .                    | 36 |
| 3.1.7 | Ableitung der Umkehrfunktion . . . . .                        | 36 |
| 3.1.8 | Kettenregel . . . . .                                         | 36 |
| 3.2   | Mittelwertsätze . . . . .                                     | 36 |
| 3.2.1 | Satz von Rolle . . . . .                                      | 36 |
| 3.2.2 | Definition lokaler Extrempunkt . . . . .                      | 37 |
| 3.2.3 | Notwendige Bedingung für lokale Extrema . . . . .             | 37 |
| 3.2.4 | 2. Mittelwertsatz . . . . .                                   | 37 |
| 3.2.5 | 1. Mittelwertsatz (Folgerung aus 2. Mittelwertsatz) . . . . . | 37 |
| 3.2.6 | L'Hospital . . . . .                                          | 37 |
| 3.2.7 | Satz von Taylor . . . . .                                     | 38 |

## II Appendix/Beweisansätze 39

|     |                               |    |
|-----|-------------------------------|----|
| 4   | Grenzwerte . . . . .          | 40 |
| 4.1 | Konvergenzkriterien . . . . . | 40 |
| 4.2 | Beweis-Ansätze . . . . .      | 41 |

## Teil I

# Zusammenfassung

# Kapitel 1

## Vorkurs

### 1.1 Aussagenlogik

#### 1.1.1 Definition Aussage

Eine Aussage ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch ist.

#### Bemerkung

Wir beschäftigen uns mit der klassischen zweiwertigen Logik. Es gibt auch Logiken mit 3 bzw. 4 Werten.

#### 1.1.2 Verknüpfungen

Formal kann eine Oder-Verknüpfung mit dem  $\vee$ -Zeichen durch eine Wahrheitstabelle definiert werden:

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ |
|-----|-----|------------|
| 1   | 1   | 1          |
| 1   | 0   | 1          |
| 0   | 1   | 1          |
| 0   | 0   | 0          |

Analog kann eine Und-Verknüpfung mit dem  $\wedge$ -Zeichen durch eine Wahrheitstabelle definiert werden:

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ |
|-----|-----|--------------|
| 1   | 1   | 1            |
| 1   | 0   | 0            |
| 0   | 1   | 0            |
| 0   | 0   | 0            |

Und eine Negation wird definiert durch:

| $A$ | $\neg A$ |
|-----|----------|
| 1   | 0        |
| 0   | 1        |

Eine sog. Implikation wird durch das  $\Rightarrow$ -Zeichen dargestellt und ist definiert durch:

| $A$ | $B$ | $A \Rightarrow B$ |
|-----|-----|-------------------|
| 1   | 1   | 1                 |
| 1   | 0   | 0                 |
| 0   | 1   | 1                 |
| 0   | 0   | 1                 |

### Bemerkung

Bei mehr als einer Verknüpfung muss klar sein welche Verknüpfung als erstes ausgewertet werden muss, hierfür werden Klammern verwendet.

### 1.1.3 Mehr zu Implikationen

Bei der Aussage  $A \Rightarrow B$  bezeichnet man  $A$  als hinreichende Bedingung und  $B$  als notwendige Bedingung.

Die Aussage  $A \Rightarrow B$  ist äquivalent zu  $\neg B \Rightarrow \neg A$ .

### 1.1.4 Bezeichnung von Aussagen

Eine Aussageform heißt:

- (a) Allgemeingültig (oder Tautologie), wenn sie als Wahrheitswert stets den Wert wahr annimmt.
- (b) Erfüllbar, wenn die Wahrheitstabelle mindestens einmal den Wert wahr enthält.
- (c) Unerfüllbar (oder Kontradiction), wenn die Wahrheitstabelle nur falsch-Einträge enthält.

### 1.1.5 Satz der Identität

Mit  $A \Leftrightarrow B$  kürzen wir die Aussage:

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

ab.

### Bemerkung

Für den allg. Fall sagt man zu  $A \Leftrightarrow B$ :  $A$  ist äquivalent zu  $B$ . Das heißt aber nicht, dass  $A = B$  ist.



## 1.2 Mengen

### 1.2.1 Defintion: Mengen nach Cantor

Unter einer Menge versteht man eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterscheidbarer Objekte unsere Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

### 1.2.2 Begrifflichkeiten und Schreibweise

Objekte einer Menge bezeichnet man als Elemente einer Menge.  
Schreibweise:

- (a)  $x \in M$  oder  $x \notin M$
- (b) Mengen können durch Aufzählen der Elemente beschrieben werden:  $M = \{a, b, c\}$
- (c) Mengen können durch Eigenschaften der Elemente beschrieben werden:  
 $M = \{x : x \text{ hat Eigenschaft} \dots\}$

### 1.2.3 Leere Menge, Teilmengen

- (a) Die Menge, die kein Element enthält, heißt leere Menge. Wir bezeichnen diese mit  $\emptyset$ .
- (b) Eine Menge  $M_1$  heißt Teilmenge einer Menge  $M_2$  (Schreibweise  $M_1 \subseteq M_2$ ) falls jedes Element von  $M_1$  auch Element von  $M_2$  ist. D.h. es gilt:

$$x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2$$

- (c) Zwei Mengen sind gleich wenn gilt:

$$M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_1$$

- (d)  $M_1$  heißt echte Teilmenge von  $M_2$  wenn gilt:

$$M_1 \subseteq M_2 \wedge M_1 \neq M_2$$

Schreibweise:  $M_1 \subset M_2$  oder  $M_1 \subsetneq M_2$ .

### 1.2.4 Transitivität u.a.

Für Mengen  $M, M_1, M_2, M_3$  gilt stets:

- (a) Aus  $M_1 \subseteq M_2$  und  $M_2 \subseteq M_3$  folgt stets:  $M_1 \subseteq M_3$
- (b)  $M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_1$
- (c)  $M \subseteq M$  und  $\emptyset \subseteq M$

### 1.2.5 Verknüpfung von Mengen

Für Mengen  $M_1$  und  $M_2$  definiert man:

- (a) Die Vereinigung von  $M_1$  und  $M_2$  durch:

$$M_1 \cup M_2 := \{x : x \in M_1 \vee x \in M_2\}$$

- (b) Den Schnitt von  $M_1$  und  $M_2$  durch:

$$M_1 \cap M_2 := \{x : x \in M_1 \wedge x \in M_2\}$$

- (c) Die Differenz von  $M_1$  und  $M_2$  durch:

$$M_1 \setminus M_2 := \{x : x \in M_1 \wedge x \notin M_2\}$$

- (d) Das Kartesische Produkt von  $M_1$  und  $M_2$  durch:

$$M_1 \times M_2 := \{(a, b) : a \in M_1 \wedge b \in M_2\}$$

- (e) Das Kartesische Produkt von  $M_1$  und  $M_1$  durch;

$$(M_1)^2 := M_1 \times M_1$$

### 1.2.6 Potenzmenge

Für eine Menge  $M$  ist durch

$$P(M) := \{A : A \subseteq M\}$$

die Potenzmenge definiert (Menge aller Teilmengen von  $M$ ).

#### Bemerkung

Hier gilt  $\emptyset \in P(M)$ .

### 1.2.7 Rechenregeln für Mengen

Für bel. Mengen  $M_1, M_2, M_3$  gilt:

- (a) Kommutativität:

$$M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1 \text{ und } M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$$

- (b) Assoziativität:

$$(M_1 \cup M_2) \cup M_3 = M_1 \cup (M_2 \cup M_3) \text{ und } (M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3)$$

- (c) Distributivgesetz:

$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3) \text{ und } M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$$

### 1.2.8 Komplement

Ist  $X$  eine feste Menge und  $M \subseteq X$  beliebig, so heißt

$$M^c := X \setminus M$$

das Komplement von  $M$  (bzgl.  $X$ ).

### 1.2.9 Bemerkung

Die Schreibweise erfordert das  $X$  aus dem Kontext bekannt sein muss.

### 1.2.10 Verknüpfungen über mehrere Elemente

Für Mengen  $M_1, M_2, \dots, M_n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir die Notation:

(a)

$$\bigcup_{k=1}^n M_k = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n$$

(b)

$$\bigcap_{k=1}^n M_k = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n$$

(c)

$$\prod_{k=1}^n M_k = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$$

### 1.2.11 Wichtige Zusammenhänge

(a)  $(M^c)^c = M$

(b)  $M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow M_2^c \subseteq M_1^c$

(c)  $(M_1 \cup M_2)^c = M_1^c \cap M_2^c$

## 1.3 Vollständige Induktion

### 1.3.1 Summen und Produktzeichen

Für  $m, n \in \mathbb{Z}, m \leq n$  und  $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  definieren wir:

$$\sum_{k=m}^n a_k := a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$$

und

$$\prod_{k=m}^n a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_n$$

Falls  $m > n$  ist definieren wir  $\sum_{k=m}^n a_k := 0$  und  $\prod_{k=m}^n a_k := 1$

### 1.3.2 Prinzip der Vollständigen Induktion

Gegen seien Aussagen  $A(n)$  für  $n \geq n_0$  mit  $n_0, n \in \mathbb{Z}$  ( $n_0$  beliebig aber fest).  
Und es gelte:

- (a)  $A(n_0)$  ist wahr
- (b) Für alle  $n \geq n_0$  gilt:  $A(n) \Rightarrow A(n+1)$

#### Bemerkung

- (a)  $n_0$  wird als Induktionsanfang,  $n$  als Induktionsschritt bezeichnet
- (b) Nachteil: wir wissen nicht wieso etwas gilt, nur dass es gilt

### 1.3.3 Rechenregeln für Summen

Für  $m, n \in \mathbb{Z}$  und  $a_k, b_k, c \in \mathbb{R}$  gilt:

- (a) Indexverschiebung:

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m+l}^{n+l} a_{k-l}$$

für beliebiges  $l \in \mathbb{Z}$

- (b) Trennen von Summen:

$$\sum_{k=m}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k$$

- (c) Konstante Faktoren können aus der Summe “gezogen” werden:

$$\sum_{k=m}^n c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=m}^n a_k$$

- (d) “Teleskopsummen”:

$$\sum_{k=m}^n (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}$$

- (e) Summe über Konstanten:

$$\sum_{k=m}^n c = c \cdot (n - m + 1)$$

### 1.3.4 Doppelsummen

Für  $n \in \mathbb{N}$  und  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq j \leq n$  gilt:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{ij}$$

### 1.3.5 Fakultät und Binomialkoeffizient

Für  $n \in \mathbb{N}_0$  und ein  $\alpha \in \mathbb{R}$  heißt

(a) die Fakultät von  $n$

$$n! := \begin{cases} n \cdot (n-1)! & ; n \neq 0 \\ 1 & ; n = 0 \end{cases}$$

(b) den Binomialkoeffizienten

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\prod_{k=1}^n (\alpha - k + 1)}{n!}$$

### 1.3.6 Rechenregeln für den Binomialkoeffizienten

Für  $n, m \in \mathbb{N}_0$  mit  $m \geq n$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt:

(a)

$$\binom{\alpha}{n} + \binom{\alpha}{n+1} = \binom{\alpha+1}{n+1}$$

(b)

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

### 1.3.7 Binomischer Lehrsatz

Für  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

### 1.3.8 Definition Betrag

Für  $x \in \mathbb{R}$  heißt

$$|x| := \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

der Betrag von  $x$

### Bemerkung

Es gilt:

- (a)  $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- (b)  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- (c)  $|x - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$
- (d)  $|x| = \max\{x, -x\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

### 1.3.9 Dreiecksungleichung

Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:

- (a)  $|x + y| \leq |x| + |y|$  (obere Dreiecksungleichung)
- (b)  $|x + y| \geq ||x| - |y||$  (untere Dreiecksungleichung)

### Bemerkung

Es gilt  $x \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

## 1.4 Funktion und Differentiation

Eine Funktion (bzw. Abbildung, Operator)  $f$  von  $X$  nach  $Y$  ist eine Vorschrift, die jedem  $x \in X$  ein eindeutig bestimmtes  $y \in Y$  zuordnet. Das  $x \in X$  zugeordnete Element aus  $Y$  wird mit  $f(x)$  bezeichnet.

### Schreibweise

$$f : X \rightarrow Y, \quad x \mapsto f(x)$$

### Bemerkung

$X$  heißt Definitionsbereich,  $Y := \{y \in Y : \exists x \in X \text{ mit } y = f(x)\}$  die Zielmenge.

### 1.4.1 Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

- (a) Eine Funktion heißt injektiv, falls gilt:

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) \text{ for all } x, y \in X$$

- (b) Eine Funktion heißt surjektiv, falls gilt:

$$\forall y \in Y \exists x \in X : y = f(x)$$

- (c) Eine Funktion heißt bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

### 1.4.2 Verknüpfung von Funktionen

Gegeben seien  $f, g : X \rightarrow Y$  und  $c \in \mathbb{R}$ . Dann definieren wir die Funktionen

$$\begin{aligned} c \cdot f : X &\rightarrow Y, & x &\mapsto (cf)(x) := c \cdot f(x) \\ f + g : X &\rightarrow Y, & x &\mapsto (f+g)(x) := f(x) + g(x) \\ f \cdot g : X &\rightarrow Y, & x &\mapsto (fg)(x) := f(x) \cdot g(x) \\ \frac{f}{g} : X &\rightarrow Y, & x &\mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \text{ für } x \text{ mit } g(x) \neq 0 \end{aligned}$$

### 1.4.3 Verkettung von Funktionen

Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  gegeben, dann heißt die Funktion

$$g \circ f : X \rightarrow Z, x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

die Verkettung von  $g$  mit  $f$  oder das Kompositum von  $g$  mit  $f$

### 1.4.4 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

- (a)  $f$  heißt stetig in  $x_0$ , wenn  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  gilt
- (b)  $f$  heißt stetig auf  $I$ , wenn  $f$  in jedem  $x_0 \in I$  stetig ist.
- (c)  $f$  heißt differenzierbar in  $x_0$ , wenn der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  existiert.

#### Bemerkung

Im Fall der Differenzierbarkeit bezeichnen wir den Grenzwert mit  $f'(x_0)$  (Newton Notation) oder  $\frac{d}{dx}f(x_0)$  (Leibniz Notation).

### 1.4.5 Zusammenhang Differenzierbarkeit — Stetigkeit

Eine differenzierbare Funktion ist stets stetig.

#### Bemerkung

Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion muss hingegen nicht stetig sein.

### 1.4.6 Verkettung differentierbarer Funktionen

Seien  $g, f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differentierbar, dann sind  $cf$ ,  $f + g$ ,  $f \cdot g$  und im Fall  $g(x) \neq 0 \forall x \in I$  auch  $\frac{f}{g}$  differentierbare Funktionen, und es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(c \cdot f)(x) &= (c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x) \\ \frac{d}{dx}(f + g)(x) &= (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) \\ \frac{d}{dx}(f \cdot g)(x) &= (f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}\end{aligned}$$

### 1.4.7 Differentiation von Monomen

Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto x^n = f(x)$  und  $n \in \mathbb{Z}$ . Dann ist  $f$  differentierbar mit  $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ .

### 1.4.8 Kettenregel

Gegeben seien Intervalle  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  und differentierbare Funktionen  $f : I \rightarrow J, g : J \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist auch  $g \circ f$  differentierbar und es gilt:

$$\frac{d}{dx}(g \circ f)(x) = \frac{d}{dx}g(f(x)) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

### 1.4.9 Ableitung der Umkehrfunktion

Sei  $f : I \rightarrow J$  bijektiv und differentierbar dann ist die Umkehrfunktion  $f^{-1} : J \rightarrow I$  ebenfalls differentierbar und es gilt:

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

## 1.5 Elementare Funktionen

## 1.6 Integralrechnung

## 1.7 Komplexe Zahlen

## 1.8 Elementare Differentialgleichungen

### 1.8.1 Definition Rechteck

- (a)  $I_1, I_2, \dots, I_n \subseteq \mathbb{R}^n$  seien nicht leeren Intervalle. Dann heißt die Menge  $M = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$  ein (n-Dimensionales) Rechteck.



- (b) Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Rechteck und  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann heißt eine Funktion  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  die Lösung der Differentialgleichung (1. Ordnung)

$$y' = \varphi(t; y)$$

wenn gilt:

- i  $y$  ist stetig differentierbar
  - ii  $(t, y(t)) \in M \forall t \in I$
  - iii  $y'(t) = \varphi(t, y(t)) \forall t \in I$
- (c) Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Rechteck,  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $(t_0, y_0) \in M$ . Dann heißt  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung des Anfangswertproblems (AWP)

$$y' = \varphi(t, y); y(t_0) = y_0$$

wenn  $y$  eine Lösung von  $y' = f(t, y)$  ist und  $y(t_0) = y_0$  gilt.

### Bemerkung

Eine DGL  $n$ -ter Ordnung mit  $n \geq 2$  ist nicht direkt durch die Definition beschrieben.

Wenn wir aber eine Funktion  $\vec{y} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definiert mit:

$$\begin{aligned} y(t) &= \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \\ y_1(t) &= x(t) \\ y_2(t) &= \dot{y}_1(t) - \dot{x}(t) \\ \dot{y}_2(t) &= \ddot{x}(t) = -\frac{a_1}{a_2}\dot{x}(t) - \frac{a_0}{a_2}x(t) = -\frac{a_1}{a_2}y_2(t) - \frac{a_0}{a_2}y_1(t) \end{aligned}$$

### 1.8.2 Lineare DGL 1. Ordnung

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $t_0$  ein Punkt in  $I$  mit  $t_0 - \delta; t_0 + \delta \subseteq I$  (d.h. nicht auf dem Rand von  $I$ ). Weiter seien  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

Definiere

$$\begin{aligned} y_0 &: I \rightarrow \mathbb{R} \\ y_0(t) &= \exp\left(\int_{t_0}^t f(u) du\right) \\ y &: I \rightarrow \mathbb{R} \\ y(t) &= \left(y_0 \cdot \int_{t_0}^t \frac{g(u)}{y_0(u)} du\right) \cdot y_0(t) \end{aligned}$$

Dann ist:

- (a)  $y_0$  eine Lösung von  $y' = f(t)y; y(t_0) = 1$
- (b)  $y$  eine Lösung von  $y' = f(t)y + g(t); y(t_0) = y_0$

# Kapitel 2

## Grenzwerte

### 2.1 Gruppen und Körper

#### 2.1.1 Gruppen

Eine Gruppe ist definiert als ein Tuppel aus einer (nicht-leeren) Menge und einer Verknüpfung. Eine Gruppe erfüllt die folgenden Axiome (seien  $a, b, c \in \mathbb{G}$ ):

$$\begin{array}{ll} a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c & \text{(Assoziativität)} \\ a \circ \varepsilon = a & \text{(Rechtsneutrales Element)} \\ a \circ a' = \varepsilon & \text{(Rechtsinverses Element)} \end{array}$$

Eine abelsche Gruppe erfüllt des weiteren:

$$a \circ b = b \circ a \quad \text{(Kommutativität)}$$

#### 2.1.2 Körper

Ein Körper ist definiert als eine Menge mit mindestens zwei Elementen (0 und 1) und zwei Verknüpfungen.

$$\begin{array}{ll} + : \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \rightarrow \mathbb{K} \\ \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \rightarrow \mathbb{K} \end{array}$$

$\mathbb{K}$  ist bezüglich der Addition und der Multiplikation (genauer:  $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ ) ein abelscher Körper, das heißt es gilt (seien  $a, b, c \in \mathbb{K}$ ):

$$\begin{array}{ll}
 a + (b + c) = (a + b) + c & \text{(Assoziativität bez. der Addition)} \\
 a + 0 = a & \text{(Existenz einer 0)} \\
 a + (-a) = 0 & \text{(Existenz eines Inversen bez. der Addition)} \\
 a + b = b + a & \text{(Kommutativität bez. der Addition)} \\
 a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c & \text{(Assoziativität bez. der Multiplikation)} \\
 a \cdot 1 = a & \text{(Existenz einer 1)} \\
 a \cdot a^{-1} = 1 \quad \forall a \neq 0 & \text{(Existenz eines Inversen bez. der Multiplikation)} \\
 a \cdot b = b \cdot a & \text{(Kommutativität bezüglich der Multiplikation)}
 \end{array}$$

außerdem gilt:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad \text{(Distributivgesetz)}$$

### Bemerkung

$\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  sind Körper.  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{N}$  nicht (kein additiv inverses bei  $\mathbb{N}$ , kein multiplikativ inverses bei beiden).

### 2.1.3 Angeordnete Körper

Ein Körper heißt angeordnet wenn folgende Axiome erfüllt sind (seien  $a, b, c \in \mathbb{K}$ ):

$$\begin{array}{lll}
 a < b \vee b < a & \vee & a = b \\
 a < b \wedge b < c & \Rightarrow & a < c \\
 a < b & \Rightarrow & a + c < b + c \\
 a < b \wedge c > 0 & \Rightarrow & a * c < b * c
 \end{array}$$

### Bemerkung

$\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$  sind angeordnete Körper. Für  $\mathbb{C}$  kann keine Ordnungsrelation definiert werden so das alle Axiome erfüllt sind.

### Gebräuchliche Definition zu angeordneten Körpern

Es gilt  $0 < 1$ , sonst Widerspruch in (O3).

Die Ordnungsrelation wird dann definiert durch:

$$\begin{array}{ll}
 2 & := 1 + 1 \\
 3 & := 2 + 1 \\
 4 & := 3 + 1 \\
 & \vdots
 \end{array}$$

Die Natürlichen Zahlen werden Induktiv definiert:

1.  $1 \in \mathbb{N}$
2.  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n + 1) \in \mathbb{N}$

### **Bemerkung**

Aus 2. lässt sich direkt ableiten das  $\mathbb{N}$  nach oben unbeschränkt ist (Archimedisches Prinzip).

### **Vollständig Angeordnete Körper**

Ein Körper heißt Vollständig, falls jede nach oben beschränkte, nicht-leere Teilmenge ein Supremum besitzt.

$\Rightarrow \mathbb{R}$  ist der einzige Vollständig angeordnete Körper.

### **Bemerkung**

$\mathbb{Q}$  ist nicht vollständig angeordnet, da  $A := \{x | x^2 \leq 2\} \subset \mathbb{Q}$  kein Supremum besitzt (Supremum ist  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ).

### **2.1.4 Minimum und Maximum**

Sei  $\mathbb{K}$  ein angeordneter Körper und  $A \subset \mathbb{K}$  dann heißt  $m$  Minimum falls gilt:

1.  $m \in \mathbb{K}$
2.  $a \geq m \forall a \in A$

Analog ist das Maximum definiert: Sei  $\mathbb{K}$  ein angeordneter Körper und  $A \subset \mathbb{K}$  dann heißt  $m$  Maximum falls gilt:

1.  $m \in \mathbb{K}$
2.  $a \leq m \forall a \in A$

**Schreibweisen:**  $m = \min(A)$  bzw.  $m = \max(A)$

### **Bemerkung**

Minimum und Maximum existieren nicht immer.

**Beispiel:**  $A := \{x | x > 0\} \subset \mathbb{R}$  hat nicht 0 als Minimum da  $0 \notin A$  und kein beliebiges  $m$  da  $\tilde{m} := \frac{m}{2} < m \forall m \in A$

### 2.1.5 Obere und untere Schranke

Sei  $\mathbb{K}$  ein angeordneter Körper und  $A \subset \mathbb{K}$  dann ist  $s$  untere Schranke falls gilt:

- $s \leq a \quad \forall a \in A$

Analog ist die obere Schranke definiert: Sei  $\mathbb{K}$  ein angeordneter Körper und  $A \subset \mathbb{K}$  dann ist  $s$  obere Schranke falls gilt:

- $s \geq a \quad \forall a \in A$

#### Bemerkung

Hat eine Menge eine obere (bzw. untere) Schranke heißt er nach oben (bzw. unten) beschränkt. Ist eine Menge nach unten und oben beschränkt bezeichnet man sie als beschränkt.

### 2.1.6 Supremum und Infimum

$s$  heißt Infimum (größte untere Schranke) falls gilt:

- $s$  ist untere Schranke
- Falls  $\tilde{s}$  ebenfalls untere Schranke ist gilt  $s \geq \tilde{s}$

Analog ist das Supremum definiert:  $s$  heißt Supremum (kleinste obere Schranke) falls gilt:

- $s$  ist obere Schranke
- Falls  $\tilde{s}$  ebenfalls obere Schranke ist gilt  $s \leq \tilde{s}$

**Schreibweise:**  $s = \inf(A)$  bzw.  $s = \sup(A)$

#### Bemerkung

Wenn Minimum (bzw. Maximum) existieren sind diese gleich dem Infimum (bzw. Supremum).

## 2.2 Folgen

Eine Folge  $a_n$  ist definiert als eine Funktion:

$$a_n := \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{M} \subset \mathbb{R}$$

oder auch  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ .

### 2.2.1 Konvergenz

Eine Folge  $a_n$  heißt konvergent wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > n_0(\varepsilon)$$

### Bemerkung

Der Grenzwert ist eindeutig, d.h. es existiert nur ein Grenzwert.

### Schreibweise

Falls  $a_n$  gegen  $a$  konvergiert schreibt man:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

### 2.2.2 Bestimmte Divergenz

Eine Folge  $a_n$  heißt bestimmt Divergent wenn gilt

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n(x) : a_n > x \text{ bzw. } a_n < x$$

### Schreibweise:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ bzw. } -\infty$$

### 2.2.3 Beschränktheit

Eine Folge heißt beschränkt wenn gilt:

$$|a_n| < c \quad \forall n$$

### Beschränktheit nach oben/unten

Eine Folge heißt nach oben (bzw. unten) beschränkt wenn gilt:

$$a_n < c \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ bzw. } a_n > c \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

### 2.2.4 Zusammenhang Konvergenz — Beschränktheit

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

### 2.2.5 Grenzwertrechenregeln

Seien  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ,  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ ,  $(c_n)_{n=1}^{\infty}$  Folgen in  $\mathbb{C}$  mit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

Dann gilt:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- Falls  $b \neq 0$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

### 2.2.6 Sandwich Theorem u.a.

Seien  $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty, (c_n)_{n=1}^\infty$  Folgen in  $\mathbb{R}$  mit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \text{ und } \gamma \in \mathbb{R}$$

Dann gilt:

- $a_n \leq \gamma \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq \gamma$
- $a_n \geq \gamma \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \geq \gamma$
- $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq b$
- $a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \wedge a = b \Rightarrow c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a = b$

### 2.2.7 Monotonie

Eine Folge  $(a_n)_{n=1}^\infty$  in  $\mathbb{R}$  heißt:

- Monoton wachsend falls:  $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (Schreibweise:  $a_n \nearrow$ )
- Monoton fallend falls:  $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (Schreibweise:  $a_n \searrow$ )
- Streng monoton wachsend falls:  $a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (Schreibweise:  $a_n \uparrow$ )
- Streng monoton fallend falls:  $a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (Schreibweise:  $a_n \downarrow$ )

### 2.2.8 Zusammenhang Monotonie und Beschränktheit

Jede Monotone und beschränkte Folge konvergiert.

## 2.3 Häufungswerte

Häufungswerte sind Grenzwerte einer Teilfolge.

### 2.3.1 Teilfolgen

Eine Folge  $(b_n)_{n=1}^\infty$  heißt Teilfolge von  $(a_n)_{n=1}^\infty$ , wenn eine streng monotone Funktion  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  existiert mit  $b_n = a_{\varphi(n)}$ .

### 2.3.2 Teilfolgen einer Konvergenten Folge

Sei  $(a_n)_{n=1}^\infty$  eine konvergente Folge in  $\mathbb{C}$  mit:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $(b_n)_{n=1}^\infty$  sei eine Teilfolge. Dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ .

### 2.3.3 Häufungswerte

Sei  $(a_n)_{n=1}^\infty$  eine Folge in  $\mathbb{C}$ . Dann heißt  $a \in \mathbb{C}$  ein Häufungswert einer Folge, falls eine Teilfolge gegen  $a$  konvergiert.

### 2.3.4 Limes superior/inferior

Sei  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  eine reelle Folge, dann heißt:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \sup\{x \in \mathbb{R}, a_n > x \text{ } \infty\text{-oft}\}$$

der Limes superior von  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  und

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \inf\{x \in \mathbb{R}, a_n < x \text{ } \infty\text{-oft}\}$$

der Limes inferior von  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ .

### 2.3.5 Charakterisierung limsup/liminf

Sei  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  eine reelle Folge und  $s \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

(a)

$$s = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt:}$$

i  $a_n < s + \varepsilon$  für fast alle  $n$

ii  $a_n > s - \varepsilon$  für  $\infty$ -viele  $n$

(b)

$$s = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt:}$$

i  $a_n > s - \varepsilon$  für fast alle  $n$

ii  $a_n < s + \varepsilon$  für  $\infty$ -viele  $n$

### 2.3.6 Konvergenz und limsup/liminf

Eine beschränkte Folge  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  in  $\mathbb{R}$  konvergiert  $\Leftrightarrow$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$$

### 2.3.7 Satz von Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge in  $\mathbb{C}$  besitzt eine konvergente Teilfolge.

### 2.3.8 Cauchy-Kriterium

Sei  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  eine Folge in  $\mathbb{C}$ , dann gilt

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ konv. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : |a_n - a_m| < \varepsilon \forall n, m > n_0(\varepsilon)$$

#### Bemerkung

Im Gegensatz zur Definition der Folgenkonvergenz muss der Grenzwert nicht bekannt sein.



## 2.4 Unendliche Reihen

### 2.4.1 Definition

Sei  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  eine Folge in  $\mathbb{C}$ , dann heißt die durch

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

definiert Folge  $(s_n)_{n=1}^{\infty}$  eine Folge von Partialsummen der unendlichen Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Falls die Folge  $(s_n)_{n=1}^{\infty}$  konvergiert setzen wir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n =: \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

### 2.4.2 Cauchy-Kriterium für unendliche Reihen

Sei  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  eine  $\infty$ -Reihe, dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon \quad \forall n, m > n_0(\varepsilon)$$

und:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

### 2.4.3 Grenzwertrechenregeln für unendliche Reihen

Seien

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} b_k \text{ gegeben und } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

dann gilt:

(a)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} b_k \text{ konv.:} \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) \text{ konv.} \\ \text{und: } \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_k \end{aligned}$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}(a_k) \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im}(a_k) \text{ konv.}$$

(c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Leftrightarrow \text{die Restreihe } R_n := \sum_{k=n}^{\infty} a_k \text{ konv. gegen } 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$$

#### 2.4.4 Positive Folgen

Es sei  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  eine Folge mit  $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in [0, \infty)$  dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Leftrightarrow \text{Folge der Partialsummen } \sum_{k=1}^n a_k \text{ ist beschr.}$$

#### 2.4.5 Leibniz-Kriterium

Sei  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  eine monoton fallende, reelle Folge. Dann gilt falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  ist, konv. die sogenannte alternierende Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

#### 2.4.6 Absolute Konvergenz

Eine Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  heißt absolut konvergent, wenn

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert.

#### Bemerkung

Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent.

#### 2.4.7 Majorantenkriterium

Seien  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  mit  $b_k \geq 0$  gegeben.  
Wenn  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  konv. und ein  $c > 0$  ex. mit

$$|a_k| \leq c \cdot |b_k|$$

für fast alle  $k$ , dann konv.  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut.

### 2.4.8 Minorantenkriterium

Falls ein  $c > 0$  ex. mit  $a_k \geq c \cdot b_k > 0$  für fast alle  $k$ , dann:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ div.} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ div.}$$

### 2.4.9 Wurzel- und Quotientenkriterium

Sei  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  gegeben. Dann gilt:

(a) Wenn

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

gilt, dann konv.  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut.

Wenn

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

gilt, dann div.  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

(b) Wenn  $a_n \neq 0 \forall n$  und

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

gilt, dann konv.  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut.

Wenn  $a_n \neq 0 \forall n$  und

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$$

gilt, dann divergiert.  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

### Bemerkung

Wenn das Wurzelkriterium keine Aussage macht, kann das Quotientenkriterium trotzdem eine Aussage machen.

### 2.4.10 Umordnung einer Reihe

Eine Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  heißt Umordnung der Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , wenn eine bij. Abb  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ex. mit  $b_k = a_{\varphi(k)}$ .

### Bemerkung

Die Reihe konvergiert nur gegen den selben Wert, wenn  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut konvergent ist.

### 2.4.11 Cauchy-Produkt

Die Reihen  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  seien absolut konv.. Dann gilt:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k a_j \cdot b_{k-j}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

und  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  konv. ebenfalls absolut.

### 2.4.12 Cauchy-Verdichtungssatz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ konv.}$$

## 2.5 Potenzreihen

### 2.5.1 Definition

Sei  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  eine Folge in  $\mathbb{C}$  und  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k$$

eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt  $z_0$  und Koeffizienten  $a_n$ .

#### Bemerkung

Viele wichtige Funktionen können als Potenzreihen dargestellt werden.

### 2.5.2 Hadamard (Konvergenzradius mit Wurzelkriterium)

Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  eine PR. Definiere

$$R := \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Dabei sei  $R := \infty$ , falls  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$  und  $R = 0$  falls  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ .

Dann konv. die PR absolut, falls  $|z - z_0| < R$  und divergiert falls  $|z - z_0| > R$ .

#### Bemerkung I

Für  $|z - z_0| = R$  wird keine Aussage gemacht.

#### Bemerkung II

$R$  heißt der Konvergenzradius der Potenzreihe.

### 2.5.3 Konvergenzradius mit Quotientenkriterium

Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  eine PR. Der Potenzradius kann ebenfalls berechnet werden durch:

$$R = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

### 2.5.4 Hinweis

Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

### 2.5.5 Integration und Differentiation von Potenzreihen

Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  mit Konvergenzradius  $R$ . Dann besitzen auch die Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a_k(z - z_0)^{k-1} \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (z - z_0)^{k+1}$$

den Konvergenzradius  $R$ .

### 2.5.6 Cauchy-Produkt für Potenzreihen

Seien  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z - z_0)^k$  Potenzreihen, die den Konvergenzradius  $R_1$  bzw.  $R_2$  besitzen. Dann besitzt

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k \text{ mit } c_k = \sum_{l=0}^k a_l \cdot b_{k-l}$$

den Konvergenzradius  $R = \min\{R_1, R_2\}$ .

### 2.5.7 Wichtige Potenzreihen

(a) Die Exponentialfunktion ist definiert durch:

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

(b) Die Trigonometrischen Funktionen sind definiert durch:

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \sin(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \\ \cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \cos(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \end{aligned}$$

(c) Tangens und Cotangens sind dann definiert als:

$$\begin{aligned}\tan : \{z \in \mathbb{C} : \cos(z) \neq 0\} &\rightarrow \mathbb{C} & z \mapsto \tan(z) &:= \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \\ \cot : \{z \in \mathbb{C} : \sin(z) \neq 0\} &\rightarrow \mathbb{C} & z \mapsto \cot(z) &:= \frac{\cos(z)}{\sin(z)}\end{aligned}$$

### 2.5.8 Alternative Definition der Exponentialfunktion

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp(z)$$

## 2.6 Funktionsgrenzwerte

### 2.6.1 Bemerkung

In diesem Intervall bezeichnet  $I$  stets ein offenes Intervall und  $\bar{I}$  dessen sog. Abschluss z.B.:

- (a)  $I = (a, b)$  und  $\bar{I} = [a, b]$
- (b)  $I = (-\infty, b)$  und  $\bar{I} = (-\infty, b]$
- (c)  $I = (a, \infty)$  und  $\bar{I} = [a, \infty)$
- (d)  $I = (\infty, \infty)$  und  $\bar{I} = (\infty, \infty)$

### 2.6.2 Epsilon-Umgebung

Für  $x_0 \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$  heißt

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

die  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x_0$ . Und

$$\dot{U}_\varepsilon(x_0) := U_\varepsilon(x_0) \setminus \{0\} = (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$$

die punktierte  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x_0$ .

### 2.6.3 Funktionsgrenzwerte (über Delta-Epsilon-Kriterium)

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in I$

- (a)  $f$  konv. gegen ein  $a \in \mathbb{R}$  für  $x \rightarrow x_0$  (kurz:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ) wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : |f(x) - a| < \varepsilon \quad \forall x \text{ mit } |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \text{ und } x \neq x_0$$

Schreibweise:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \text{ oder } f(x) = a \text{ für } x \rightarrow x_0$$

(b) Sei  $x_0 \in I$ , dann konv.  $f$  einseitig von links gegen  $a \in \mathbb{R}$  wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : |f(x) - a| < \varepsilon \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$$

Schreibweise:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$$

(c) Sei  $x_0 \in I$ , dann konv.  $f$  einseitig von rechts gegen  $a \in \mathbb{R}$  wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : |f(x) - a| < \varepsilon \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

Schreibweise:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$$

(d) Sei  $I = (\alpha, \infty)$  (bzw.  $I = (-\infty, \beta)$ ) dann konv.  $f$  gegen  $a$  für  $x \rightarrow \infty$  (bzw.  $x \rightarrow -\infty$ ) wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_1(\varepsilon) : |f(x) - a| < \varepsilon \quad \forall x \in I : x > x_1(\varepsilon) \text{ (bzw. } x < x_1(\varepsilon))$$

## 2.6.4 Folgenkriterium

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in \bar{I}, u \in \mathbb{R}$  dann gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \Leftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Für eine beliebige Folge } (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ mit} \\ \text{(i) } x_n \neq x_0 \forall n \\ \text{(ii) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \\ \text{gilt stets:} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a \end{array} \right.$$

## 2.6.5 Rechenregeln für Funktionsgrenzwerte

Seien  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in I$  und gelte

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$$

Dann gilt:

(a)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha \cdot f(x)) = \alpha \cdot a$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) + f(x)) = a + b$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) \cdot f(x)) = a \cdot b$$

(d)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{a}{b} \quad \text{falls } b \neq 0$$

### 2.6.6 Cauchy-Kriterium für Funktionsgrenzwerte

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in I$  dann ex.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : |f(x) - f(y)| < \varepsilon \forall x, y \in I \text{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \text{ und } 0 < |y - x_0| < \delta(\varepsilon)$$

### 2.6.7 Bestimmte Divergenz

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$  dann definieren wir die bestimmte Divergenz (uneigentliche Konvergenz) von  $(f \rightarrow \infty)$  durch

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall c > 0 \exists \delta(c) : f(x) > c \forall x \text{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta(c)$$

Analog definieren man links- und rechtsseitig Divergenz gegen  $\infty$  bzw.  $-\infty$ .

### 2.6.8 Monotone Funktionen

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dann heißt (auf  $I$ )

- (a) monoton wachsend ( $f \nearrow$ ), falls gilt

$$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

- (b) streng monoton wachsend ( $f \uparrow$ ), falls gilt

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

- (c) monoton fallend ( $f \searrow$ ), falls gilt

$$x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

- (d) streng monoton fallend ( $f \downarrow$ )

$$x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

- (e) monoton falls  $f$  monoton fallend oder monoton steigend ist

- (f) streng monoton falls  $f$  streng monoton fallend oder streng monoton steigend ist

- (g) Beschränkt falls gilt:

$$\exists c : |f(x)| < c \forall x \in I$$

### 2.6.9 Grenzwerte an Intervallgrenzen

Sei  $a \leq b$  und  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  monoton und beschränkt, dann ex.

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \text{ und } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$



## 2.7 Stetigkeit

### 2.7.1 Anschaulich

Graph einer Funktion kann ohne Absetzen gezeichnet werden  $\Leftrightarrow$

Es gibt keine Sprünge  $\Leftrightarrow$

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$  an keiner Stelle  $x_0 \in I$  ist ein Sprung  $\Leftrightarrow$

$$\forall x_0 \in I : \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

### 2.7.2 Stetigkeit: Delta-Epsilon-Kriterium

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in I$ , dann ist  $f$  in  $x_0$  stetig falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in I \text{ mit } |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$$

Und  $f$  ist stetig (auf  $I$ ), wenn  $f$  in jedem  $x_0 \in I$  stetig ist.

### 2.7.3 Bemerkungen

(a)  $f$  ist stetig in  $x_0 \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

gilt.

(b)  $f$  ist stetig in  $x_0$  dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

### 2.7.4 Rechenregeln für Stetigkeit

Sind  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, dann sind auch die Funktionen

(a)  $c \cdot f$  (für  $c \in \mathbb{R}$ )

(b)  $f + g$

(c)  $f \cdot g$

(d) und falls  $g(x) \neq 0 \forall x \in I$   $\frac{f}{g}$

stetig.

Ist  $f : I \rightarrow J, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  und beide stetig dann ist auch  $g \circ f$  stetig.

### 2.7.5 Stetigkeit von Potenzreihen

Sei  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R > 0$ , dann gilt für  $x_1 \in U_R(x_0)$ , dass  $\lim_{x \rightarrow x_1} f(x) = f(x_1)$  (d.h. Potenzreihen sind innerhalb des Konvergenzradius stetig).

### 2.7.6 Umgebung positiver Funktionswerte

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0$ , dann gilt:

$$f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : f(x) > 0 \quad \forall x \in I \text{ mit } |x - x_0| < \delta$$

### 2.7.7 Zwischenwertsatz

Sei  $D = [a, b]$  (also abgeschlossen) und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig dann ex. zu jedem  $y$  zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  ein  $x \in [a, b]$  mit  $f(x) = y$ .

**Genauer:**

$$\forall y \in [m, M] \quad \exists x \in [a, b] \text{ mit } f(x) = y$$

Wobei  $m = \min\{f(a), f(b)\}$  und  $M = \max\{f(a), f(b)\}$ .

### Bemerkung

Bei einer Funktion ist das Bild eines Intervalls wieder ein Intervall. D.h.

$$f([a, b]) = [c, d]$$

### 2.7.8 Existenz des Logarithmus

Die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  ist bijektiv. Das heißt es existiert eine Umkehrfunktion, diese wird  $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  genannt.

### 2.7.9 Maximum/Minimum/Infimum/Supremum einer Funktion

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}$ , dann heißt im Fall der Existenz:

(a)

$$\max_{x \in D} f(x) := \max_D f(x) := \max\{f(x) \mid x \in D\}$$

das Maximum von  $f$  auf  $D$ .

(b)

$$\min_{x \in D} f(x) := \min_D f(x) := \min\{f(x) \mid x \in D\}$$

das Minimum von  $f$  auf  $D$ .

(c)

$$\sup_{x \in D} f(x) := \sup_D f(x) := \sup\{f(x) \mid x \in D\}$$

das Supremum von  $f$  auf  $D$ .

(d)

$$\inf_{x \in D} f(x) := \inf_D f(x) := \inf\{f(x) \mid x \in D\}$$

das Infimum von  $f$  auf  $D$ .

### 2.7.10 Beschränktheit einer stetigen Funktion

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und eine stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben, dann ist  $f$  beschränkt. (d.h.  $\sup_{[a,b]}(f) < \infty$  und  $\inf_{[a,b]}(f) > -\infty$ ).

### 2.7.11 Weierstraß: Existenz von Min und Max

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, dann ex.:

$$\min_{[a,b]} f \text{ und } \max_{[a,b]} f$$

### 2.7.12 Zusammenhang Injektivität — Stetigkeit

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf einem Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$f \text{ inj. auf } I \Leftrightarrow f \text{ ist streng monoton}$$

### 2.7.13 Existenz und Monotonie der Umkehrfunktion

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und streng monoton auf einem Intervall  $I$ . Dann ex. auf  $J := f(I)$  die Umkehrfunktion  $f^{-1} : J \rightarrow I$  und diese ist im gleichen Sinn wie  $f$  streng Monoton und stetig.

### 2.7.14 Gleichmäßige Stetigkeit

Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt gleichmäßig stetig auf  $I$ , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \forall x_1, x_2 \in I \text{ mit } |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$$

#### Bemerkung

Im Gegensatz zur normalen Stetigkeit wird bei der gleichmäßigen Stetigkeit eine Funktion  $\delta(\varepsilon)$  für die ganze Funktion bestimmt und nicht nur für jeden Punkt einzeln (also  $\delta(x_0, \varepsilon)$ ). Es wird also zwischen Stetigkeit in einem Punkt und Stetigkeit auf einem Intervall unterschieden.

## Kapitel 3

# Differentialrechnung

### 3.1 Ableitung

#### 3.1.1 Definition Differenzen-Quotient

Sei  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann heißt  $f$  in  $x_0 \in D$  differentierbar, falls

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

für alle  $x_0 \in D$  existiert.

#### 3.1.2 Rechtsseitige und linksseitige Ableitung

Im Fall der Existenz heißen

$$\begin{aligned} f'(x_0^+) &:= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ bzw.} \\ f'(x_0^-) &:= \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

die rechts- bzw. linksseitige Ableitung in  $x_0$

#### Bemerkung

$$f'(x_0) \text{ ex.} \Leftrightarrow f'(x_0^+) \text{ und } f'(x_0^-) \text{ ex. und } f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$$

#### 3.1.3 Ableitungsregeln

Seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  differentierbar in  $x_0 \in D$ , dann gilt:

- (a)  $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- (b)  $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

(c) Falls  $g(x_0) \neq 0$ :  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

### 3.1.4 Alternative Definition der Ableitung

Sei  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in D$ . Dann gilt:  $f$  differenzierbar in  $x_0 \Leftrightarrow$

$\exists A \in \mathbb{R}$  und  $r : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\lim_{x \rightarrow x_0} r(x) = 0$  so dass gilt:  $f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + r(x) \cdot (x - x_0)$

### 3.1.5 Zusammenhang Differentierbarkeit — Stetigkeit

Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0 \in D \Rightarrow f$  stetig in  $x_0$

### 3.1.6 Differentiation von Potenzreihen

Sei  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$  eine Potenzreihe mit  $R > 0$ , dann ist  $f$  für  $x$  mit  $|x - x_0| < R$  differenzierbar, und es gilt:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (x - x_0)^{k-1}$$

#### Bemerkung

Der Konvergenzradius von  $f'(x)$  ist ebenfalls  $R$ .

### 3.1.7 Ableitung der Umkehrfunktion

Seien  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  Intervalle und  $f : I \rightarrow J$  sei differenzierbar und bijektiv, dann ist auch  $f^{-1} : J \rightarrow I$  differenzierbar und es gilt:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{d}{dx} f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \forall y_0 \in J \text{ für ein } y_0 = f(x_0) \text{ und } f'(y_0) \neq 0$$

### 3.1.8 Kettenregel

Seien  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  differenzierbar auf  $A$  bzw.  $B$ , dann ist auch  $g \circ f$  auf  $A$  differenzierbar und es gilt:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \quad \forall x_0 \in A$$

## 3.2 Mittelwertsätze

### 3.2.1 Satz von Rolle

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar. Falls  $f(a) = f(b)$  gilt, existiert ein  $x_0 \in (a, b)$  mit  $f'(x_0) = 0$

### 3.2.2 Definition lokaler Extrempunkt

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in D$ . Dann besitzt  $f$  in  $x_0$  ein lokales Maximum (bzw. Minimum): $\Leftrightarrow$

$$\exists \delta > 0 : f(x) \leq f(x_0) \text{ (bzw. } f(x) \geq f(x_0)) \quad \forall x \in D \cap U_\delta(x_0)$$

### 3.2.3 Notwendige Bedingung für lokale Extrema

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0 \in D$  und  $x_0$  sei kein Randpunkt, dann gilt:  
Liegt bei  $x_0$  ein lokales Maximum/Minimum  $\Rightarrow f'(x_0) = 0$ .

### 3.2.4 2. Mittelwertsatz

Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar dann existiert ein  $x_0 \in (a, b)$  mit

$$f'(x_0) \cdot (g(b) - g(a)) = g'(x_0) \cdot (f(b) - f(a))$$

Bzw. falls nicht durch Null geteilt wird:

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

### 3.2.5 1. Mittelwertsatz (Folgerung aus 2. Mittelwertsatz)

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar

$$\Rightarrow \exists x_0 \in (a, b) \text{ mit } f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

### 3.2.6 L'Hospital

Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $a < b, b \in (\mathbb{R} \cup \infty)$ ) differenzierbar auf  $(a, b)$  mit  $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ . Falls der Grenzwert  $\alpha = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  ex. und:

(a)  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$  oder

(b)  $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = \infty$

dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

### 3.2.7 Satz von Taylor

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$   $n + 1$  mal differentierbar auf  $(a, b)$  und  $x_0 \in (a, b)$ . Dann gilt für ein  $\xi \in (x_0, x)$ :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

## Teil II

# Appendix/Beweisansätze



# Kapitel 4

## Grenzwerte

### 4.1 Konvergenzkriterien

Zusammenfassung verschiedener Konvergenzkriterien nach Wikipedia (Seite: Konvergenzkriterium):

| Kriterium           | nur f. mon. F. | Konv. | Div. | abs. Konv. | Absch. | Fehlerabsch. |
|---------------------|----------------|-------|------|------------|--------|--------------|
| Nullfolgenkriterium |                |       | x    |            |        |              |
| Monotoniekriterium  |                | x     |      | x          |        |              |
| Leibniz-Kriterium   | x              | x     |      |            | x      | x            |
| Cauchy-Kriterium    |                | x     | x    |            |        |              |
| Abel-Kriterium      | x              | x     |      |            |        |              |
| Dirichlet-Kriterium | x              | x     |      |            |        |              |
| Majorantenkriterium |                | x     |      | x          |        |              |
| Minorantenkriterium |                |       | x    |            |        |              |
| Wurzelkriterium     |                | x     | x    | x          |        | x            |
| Integralkriterium   | x              | x     | x    | x          | x      |              |
| Cauchy-Kriterium    | x              | x     | x    | x          |        |              |
| Grenzwertkriterium  |                | x     | x    |            |        |              |
| Quotientenkriterium |                | x     | x    | x          |        | x            |
| Gauß-Kriterium      |                | x     | x    | x          |        |              |
| Raabe-Kriterium     |                | x     | x    | x          |        |              |
| Kummer-Kriterium    |                | x     | x    | x          |        |              |
| Bertrand-Kriterium  |                | x     | x    | x          |        |              |
| Ermakoff-Kriterium  | x              | x     | x    | x          |        |              |

## 4.2 Beweis-Ansätze

| Lemma / Satz                                            | Beweisansatz                                                                                                       |
|---------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Eindeutigkeit des GW einer Folge                        | Zeige, dass $\text{GW } a = \text{GW } b$ , nahrhafte 0                                                            |
| Konvergente Folgen sind beschränkt                      | Nahrhafte 0, Dreiecks-ugl.                                                                                         |
| Grenzwertrechenregeln                                   | Nahrhafte 0, Dreiecks-ugl.                                                                                         |
| $a_n \leq \gamma \ \forall n \Rightarrow a \leq \gamma$ | Ausgehend von a über nahrh. 0 zu Def Konvergenz                                                                    |
| $a_n \leq b_n \ \forall n \Rightarrow a \leq b$         | Definiere Hilfsfolge, argumentiere nach s.o                                                                        |
| Sandwich-Theorem                                        | Zeige, dass $-\varepsilon < c_n < \varepsilon$ (Quasi Epsilon-Schlauch)                                            |
| Monotoniekriterium                                      | Da $ a_n  < c \ \forall n$ , argumentiere über das Supremum der Menge, die aus $a_n$ besteht                       |
| GW einer konv. Folge = GW jeder Teilfolge               | Def. Konvergenz + Def Teilfolge                                                                                    |
| Charakterisierung $\limsup$ und $\liminf$               | Argumentiere über Eigenschaften $\sup$ und $\inf$                                                                  |
| Folge konv. $\overline{\lim} = \underline{\lim}$        | Hin: Eindeutigkeit des GW; Rück: Charakterisierung $\limsup$ und $\liminf$                                         |
| Bolzano-Weierstraß                                      | Zunächst für reelle Folge (trivial), dann für komplex: Realteil ist klar, Imaginärteil: Teilfolge konstruieren     |
| Cauchy Kriterium                                        | Hin: nahrhafte 0; Rück: zeige Beschränktheit, dann folge daraus, dass ein HW ex und benutze diesen als GW-Kandidat |
| Reihe konv. Folge ist Nullfolge                         | Cauchy für Reihen                                                                                                  |
| GWRR für Reihen                                         | GWRR für Folgen                                                                                                    |
| Reihe konv g. 0                                         | Restreihe als Differenz darstellen                                                                                 |
| Leibniz                                                 | Cauchy für Reihen                                                                                                  |
| Absolut konv. $\Rightarrow$ konv.                       | Cauchy und Dreiecks-ugl.                                                                                           |
| Majorantenkrit.                                         | Cauchy                                                                                                             |
| Minorantenkrit.                                         | Kontradiktion von Majorantenkrit.                                                                                  |
| Wurzelkriterium                                         | Majorantenkrit: geom. Summe über $Q := q + \varepsilon < 1$ , in $q$ das Wurzelkrit einsetzen, Char. $\limsup$     |
| Quotientenkrit.                                         | Majorantenkrit: setze in $q$ das Quotientenkrit ein u. arg. über $\limsup$                                         |
| Hadamard                                                | Wurzelkrit + Fallunterscheidung für Sonderfälle                                                                    |
| Differenzieren / Integrieren von PR                     | Wurzelkriterium                                                                                                    |
| Lemma zu $\sin$ , $\cos$ und $\exp$                     | Cauchy-Produkt + Definitionen                                                                                      |

|                                             |                                                                                                                            |
|---------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $e^z \neq 0$ und $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$   | Inverses Element der Multiplikation                                                                                        |
| Pythagoras                                  | 3. binomische Formel                                                                                                       |
| $e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$        | Betrachte $x \geq 0$ , angeordneter Körper                                                                                 |
| $1 + x \leq e^x \ \forall x \in \mathbb{R}$ | Bernoulli                                                                                                                  |
| $x < y \Rightarrow e^x < e^y$               | nährhafte 0                                                                                                                |
| Folgenkriterium                             | Hin: Def. Folgenkonv. und dann Def<br>FunktionsGW einsetzen; Rück: Wähle<br>versch. $\delta$ und zeige Widerspruch         |
| Cauchy für Funktionen                       | Hin: Def. FunktionsGW + nährhafte 0;<br>Rück: Cauchy für Folgen                                                            |
| Grenzwerte an Intervallgrenzen              | Argumentiere über Supremum / Infimum                                                                                       |
| Verknüpfungen stetiger Fnkt. stetig         | Folgenkriterium                                                                                                            |
| Potenzreihen sind innerhalb des KR stetig   | Abschätzung: $\exists r > 0 :  x - x_0 \text{ bzw. } x_1  \leq r$ , dann einfach<br>$ f(x) - f(x_1) $ nach oben abschätzen |
| Umgebung pos. Funktionswerte                | Wähle $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ , Def. Stetigkeit                                                                   |
| Zwischenwertsatz                            | Definiere $x_0 := \sup\{x \in [a, b] : f(x) \leq y\}$ und zwei Hilfsfolgen, die gegen $x_0$<br>konvergieren                |
| Existenz log                                | Zeigen exp ist bijektiv (Zwischenwertsatz)                                                                                 |
| Beschr. stet. Fkt.                          | Annahme $f$ nicht beschr. Folgenkriterium                                                                                  |
| Weierstraß ex. min bzw. max                 | Zeigen das sup = max                                                                                                       |

---