Zusammenfassung HM I — Übungsklausur 2

Paul Nykiel

1. Februar 2017

Inhaltsverzeichnis

Teil I
Grenzwerte

1 Gruppen und Körper

1.1 Gruppen

Eine Gruppe ist definiert als ein Tuppel aus einer (nicht-leeren) Menge und einer Gruppe. Eine Gruppe erfüllt die folgenden Axiome (seien $a, b, c \in \mathbb{G}$):

$$\begin{aligned} a \circ (b \circ c) &= (a \circ b) \circ c && \text{(Assoziativität)} \\ a \circ \varepsilon &= a && \text{(Rechtsneutrales Element)} \\ a \circ a' &= \varepsilon && \text{(Rechtsinverses Element)} \end{aligned}$$

Eine abelsche Gruppe erfüllt des weiteren:

$$a \circ b = b \circ a \qquad \text{(Kommutativität)}$$

1.2 Körper

Ein Körper ist definiert als eine Menge mit mindestens zwei Elementen (0 und 1) und zwei Verknüfungen.

$$\begin{aligned} + : \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{K} \\ \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{K} \end{aligned}$$

$\mathbb{K}$ ist bezüglich der Addition und der Multiplikation (genauer: $\mathbb{K} \backslash \{0\}$) ein abelscher Körper, das heißt es gilt (seien $a, b, c \in \mathbb{K}$):

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= (a + b) + c && \text{(Assoziativität bez. der Addition)} \\ a + 0 &= a && \text{(Existenz einer Null)} \\ a + (-a) &= 0 && \text{(Existenz eines Inversen bez. der Addition)} \\ a + b &= b + a && \text{(Kommutativität bez. der Addition)} \\ a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c && \text{(Assoziativität bez. der Multiplikation)} \\ a \cdot 1 &= a && \text{(Existenz einer 1)} \\ a \cdot a^{-}1 &= 1 && \text{(Existenz eines Inversen bez. der Multiplikation)} \\ a \cdot b &= b \cdot a && \text{(Kommutativität bezüglich der Multiplikation)} \end{aligned}$$

außerdem gilt:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \qquad \text{(Distributivgesetz)}$$

Bem.: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind Körper. $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ nicht (kein additiv inverses bei $\mathbb{N}$, kein multiplikativ inverses bei beiden).

1.3 Angeordnete Körper

Ein Körper heißt angeordent wenn folgende Axiome erfüllt sind (seien $a, b, c \in \mathbb{K}$):

$$\begin{array}{rcl} a < b \vee & b < a & \vee\, a = b \\ a < b \;\wedge\; b < c & \Rightarrow & a < c \\ a < b & \Rightarrow & a + c < b + c \\ a < b \wedge c > 0 & \Rightarrow & a * c < b * c \end{array}$$

Bem.: $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind angeordnete Körper. Für $\mathbb{C}$ kann keine Ordnungsrelation definiert werden so das alle Axiome erfüllt sind.

1.3.1 Gebräuchliche Definition zu angeordenten Körpern

Für gewöhnlich gilt $0 < 1$.
Die Ordnungsrelation wird dann definiert durch:

$$\begin{array}{rcl} 2 & := & 1 + 1 \\ 3 & := & 2 + 1 \\ 4 & := & 3 + 1 \\ & \cdots & \end{array}$$

Die Natürlichen Zahlen werden Induktiv definiert:

1. $1 :\in \mathbb{N}$
2. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n + 1) \in \mathbb{N}$

Bem: Aus 2. lässt sich direkt ableiten das $\mathbb{N}$ nach oben unbeschränkt ist (Archimedisches Prinzip).

1.3.2 Vollständig Angeordnete Körper

Ein Körper heißt Vollständig, falls jede nach oben beschränkte, nicht-leere teilmenge ein Supremum besitzt.
$\Rightarrow \mathbb{R}$ ist der einzige Vollständig angeordnete Körper.
Bem: $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig angeordnet, da $A := \{x|x^2 \leq 2\} \subset \mathbb{Q}$ kein obere Schrank besitzt (obere Schranke ist $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

1.4 Minimum und Maximum

Sei $\mathbb{K}$ ein angeordnter Körper und $A \subset \mathbb{K}$ dann heißt m Minimum falls gilt:

1. $m \in \mathbb{K}$
2. $a \geq m \ \forall a \in A$

Analog ist das Maximum definiert: Sei $\mathbb{K}$ ein angeordnter Körper und $A \subset \mathbb{K}$ dann heißt m Maximum falls gilt:

1. $m \in \mathbb{K}$
2. $a \leq m \ \forall a \in A$

Schreibweisen: $m = \min(A)$ bzw. $m = \max(A)$
Bem.: Minimum und Maximum exisitieren nicht immer.
Beispiel: $A := \{x|x > 0\} \subset \mathbb{R}$ hat nicht 0 als Minimum da $0 \notin A$ und kein beliebiges m da $\tilde{m} := \frac{m}{2} < m \ \forall m \in A$

1.5 Obere und untere Schranke

Sei $\mathbb{K}$ ein angeordenter Körper und $A \subset \mathbb{K}$ dann ist s untere Schranke falls gilt:

- $s \geq a \ \forall a \in A$

Analog ist die obere Schranke definiert: Sei $\mathbb{K}$ ein angeordenter Körper und $A \subset \mathbb{K}$ dann ist s obere Schranke falls gilt:

- $s \leq a \ \forall a \in A$

Bem.: Hat eine Menge eine obere (bzw. untere) Schranke heißt er nach oben (bzw. unten) beschränkt. Ist eine Menge nach unten und oben beschränkt bezeichnet man sie als beschränkt.

1.6 Supremum und Infimum

s heißt Infimum (größte untere Schranke) falls gilt:

- s ist untere Schranke
- Falls $\tilde{s}$ ebenfalls untere Schranke ist gilt $s \geq \tilde{s}$

Analog ist das Supremum definiert: s heißt Supremum (kleinste obere Schranke) falls gilt:

- s ist obere Schranke
- Falls $\tilde{s}$ ebenfalls obere Schranke ist gilt $s \leq \tilde{s}$

Bem.: Wenn Minimum (bzw. Maximum) existieren sind diese gleich dem Infimum (bzw. Supremum).
Schreibweise: $s = \inf(A)$ bzw. $s = \sup(A)$

2 Folgen

Eine Folge a_n ist definiert als eine Funktion:

$$a_n := \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{M} \subset \mathbb{R}$$

oder auch $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

2.1 Konvergenz

Eine Folge a_n heißt konvergent wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_0(\varepsilon) : \ |a_n - a| < \varepsilon \ \forall \varepsilon > n_0(\varepsilon)$$

Bem.: Der Grenzwert ist eindeutig, d.h. es existiert nur ein Grenzwert.

2.1.1 Schreibweise

Falls a_n gegen a konvergiert schreibt man:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

2.2 Bestimmte Divergenz

Eine Folge a_n heißt bestimmt Divergent wenn gilt

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n(x):\ a_n > x \text{ bzw. } a_n < x$$

Schreibweise:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ bzw. } -\infty$$

2.3 Beschränktheit

Eine Folge heißt beschränkt wenn gilt:

$$|a_n| < c\ \forall n$$

2.3.1 Beschränktheit nach oben/unten

Eine Folge heißt nach oben (bzw. unten) beschränkt wenn gilt:

$$a_n < n\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ bzw. } a_n > c\ \forall n \in \mathbb{N}$$

2.4 Zusammenhang Konvergenz — Beschränktheit

Jede Konvergente Folge ist beschränkt.

2.5 Grenzwertrechenregeln

Seien $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ Folgen in $\mathbb{C}$ mit:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ und } \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

Dann gilt:

- $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- Falls $b \neq 0$: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

2.6 Sandwich Theorem u.a.

Seien $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim_{n\to\infty} b_n = b \text{ und } \gamma \in \mathbb{R}$$

Dann gilt:

- $a_n \leq \gamma\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq \gamma$
- $a_n \geq \gamma\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \geq \gamma$
- $a_n \leq b_n\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq b$
- $a_n \leq c_n \leq b_n\ \forall n \in \mathbb{N} \wedge a = b \Rightarrow c = \lim_{n\to\infty} c_n = a = b$

2.7 Monotonie

Eine Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\mathbb{R}$ heißt:

- Monoton wachsend falls: $a_{n+1} \geq a_n\ \forall n \in \mathbb{N}$ (Schreibweise: $a_n \nearrow$)
- Monoton fallend falls: $a_{n+1} \leq a_n\ \forall n \in \mathbb{N}$ (Schreibweise: $a_n \searrow$)
- Streng Monoton wachsend falls: $a_{n+1} > a_n\ \forall n \in \mathbb{N}$ (Schreibweise: $a_n \uparrow$)
- Streng Monoton fallend falls: $a_{n+1} < a_n\ \forall n \in \mathbb{N}$ (Schreibweise: $a_n \downarrow$)

2.8 Zusammenhang Monotonie und Beschränktheit

Jede Monotone und beschränkte Folge konvergiert.

3 Häufungswerte

Häufungswerte sind Grenzwerte einer Teilfolge.

3.1 Teilfolgen

Eine Folge $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ heißt Teilfolge von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, wenn eine streng monotone Funktion $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ exisitiert mit $b_n = a_{\varphi(n)}$.

3.2 Teilfolgen einer Konvergenten Folge

Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{C}$ mit: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ sei eine Teilfolge. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

3.3 Häufungswerte

Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Dann heißt $a \in \mathbb{C}$ ein Häufungswert einer Folge, falls eine Teilfolge gegen a konvergiert.

3.4 Limes superior/inferior

Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine reele Folge, dann heißt:

$$\lim_{n\to\infty} \sup a_n := \overline{\lim}\, n \to \infty a_n := \sup\{x \in \mathbb{R}, a_n > x\ \infty\text{-oft}\}$$

der Limes superior von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ und

$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n := \underline{\lim}\, n \to \infty a_n := \inf\{x \in \mathbb{R}, a_n < x\ \infty\text{-oft}\}$$

der Limes inferior von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

3.5 Konvergenz und limsup/liminf

Eine beschränkte Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert $\Leftrightarrow$

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \varliminf_{n\to\infty} a_n$$

3.6 Satz von Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge in $\mathbb{C}$ besitzt eine konvergente Teilfolge

3.7 Cauchy-Kriterium

Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, dann gilt

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ konv.} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) :\ |a_n - a_m| < \varepsilon\ \forall n, m > n_0(\varepsilon)$$

Bem: Im Gegensatz zur Definition der Folgenkonvergenz muss der Grenzwert nicht bekannt sein.

4 Unendliche Reihen

4.1 Definition

Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, dan heißt die durch

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

definiert Folge $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von Partialsummen der unendlichen Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Falls die Folge $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert setzten wir:

$$\lim_{n\to\infty} s_n =: \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

4.2 Cauchy-Kriterium für unendliche Reihen

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine ∞-Reihe, dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0(\varepsilon) : \left| \sum_{k=m}^{n} \right| < \varepsilon \; \forall n, m > n_0(\varepsilon)$$

und:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

4.3 Grenzwertrechenregeln für unendliche Reihen

Seien

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} b_k \text{ gegeben und } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

dann gilt:

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} b_k \text{ konv.:}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k \quad + \quad \beta b_k) \text{ konv.}$$

$$\text{und: } \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k) \quad = \quad \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_k$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}(a_k) \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Im}(a_k) \text{ konv.}$$

(c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Leftrightarrow \text{ die Restreihe } R_n := \sum_{k=n}^{\infty} a_k \text{ konv. gegen } 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

4.4 Positive Folgen

Es sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge mit $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in [0,\infty)$ dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv. } \Leftrightarrow \text{ Folge der Partialsummen } \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ ist beschr.}$$

4.5 Leibniz-Kriterium