Zusammenfassung Höhere Mathematik

Paul Nykiel

27. Mai 2017

This Page exists solely for printing purposes — Schlagzahl erhöhen.

Inhaltsverzeichnis

Teil I

HM 1 — Zusammenfassung

Kapitel 1

Vorkurs

1.1 Aussagenlogik

1.1.1 Definition Aussage

Eine Aussage ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch ist.

Bemerkung

Wir beschäftigen uns mit der klassischen zweiwertigen Logik. Es gibt auch Logiken mit 3 bzw. 4 Werten.

1.1.2 Verknüpfungen

Formal kann eine Oder-Verknüfung mit dem $\vee$-Zeichen durch eine Wahrheitstabelle definiert werden:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Analog kann eine Und-Verknüpfung mit dem $\wedge$-Zeichen durch eine Wahrheitstabelle definiert werden:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Und eine Negation wird definiert durch:

A	$\neg A$
1	0
0	1

Eine sog. Implikation wird durch das $\Rightarrow$-Zeichen dargestellt und ist definiert durch:

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Bemerkung

Bei mehr als einer Verknüpfung muss klar sein welche Verknüpfung als erstes ausgewerted werden muss, hierfür werden Klammern verwendet.

1.1.3 Mehr zu Implikationen

Bei der Aussage $A \Rightarrow B$ bezeichnet man A als hinreichende Bedingung und B als notwendige Bedingung.
Die Aussage $A \Rightarrow B$ ist äquivalent zu $\neg B \Rightarrow \neg A$.

1.1.4 Bezeichnung von Aussagen

Eine Aussageform heißt:

(a) Allgemeingültig (oder Tautologie), wenn sie als Wahrheitswert stets den Wert wahr annimmt.

(b) Erfüllbar, wenn die Wahrheitstabelle mindestens einmal den Wert wahr enthält.

(c) Unerfüllbar (oder Kontradiction), wenn die Wahrheitstabelle nur falsch-Einträge enthält.

1.1.5 Satz der Identität

Mit $A \Leftrightarrow B$ kürzen wir die Aussage:

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

ab.

Bemerkung

Für den allg. Fall sagt man zu $A \Leftrightarrow B$: A ist äquivalent zu B. Das heißt aber nicht, dass $A = B$ ist.

1.2 Mengen

1.2.1 Defintion: Mengen nach Cantor

Unter einer Menge versteht man eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterscheidbarer Objekte unsere Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

1.2.2 Begrifflichkeiten und Schreibweise

Objekte einer Menge bezeichnet man als Elemente einer Menge.
Schreibweise:

(a) $x \in M$ oder $x \notin M$

(b) Mengen können durch Aufzählen der Elemente beschrieben werden: $M = \{a, b, c\}$

(c) Mengen können durch Eigenschaften der Elemente beschrieben werden: $M = \{x : x \text{ hat Eigenschaft}\dots\}$

1.2.3 Leere Menge, Teilmengen

(a) Die Menge, die kein Element enthält, heißt leere Menge. Wir bezeichnen diese mit $\emptyset$.

(b) Eine Menge M_1 heißt Teilmenge einer Menge M_2 (Schreibweise $M_1 \subseteq M_2$) falls jedes Element von M_1 auch Element von M_2 ist. D.h. es gilt:

$$x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2$$

(c) Zwei Mengen sind gleich wenn gilt:

$$M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_1$$

(d) M_1 heißt echte Teilmenge von M_2 wenn gilt:

$$M_1 \subseteq M_2 \wedge M_1 \neq M_2$$

Schreibweise: $M_1 \subset M_2$ oder $M_1 \subsetneq M_2$.

1.2.4 Transitivität u.a.

Für Mengen M, M_1, M_2, M_3 gilt stets:

(a) Aus $M_1 \subseteq M_2$ und $M_2 \subseteq M_3$ folgt stets: $M_1 \subseteq M_3$

(b) $M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_1$

(c) $M \subseteq M$ und $\emptyset \subseteq M$

1.2.5 Verknüpfung von Mengen

Für Mengen M_1 und M_2 definiert man:

(a) Die Vereinigung von M_1 und M_2 durch:

$$M_1 \cup M_2 := \{x : x \in M_1 \vee x \in M_2\}$$

(b) Den Schnitt von M_1 und M_2 durch:

$$M_1 \cap M_2 := \{x : x \in M_1 \wedge x \in M_2\}$$

(c) Die Differenz von M_1 und M_2 durch:

$$M_1 \backslash M_2 := \{x : x \in M_1 \wedge x \notin M_2\}$$

(d) Das Kartesische Produkt von M_1 und M_2 durch:

$$M_1 \times M_2 := \{(a, b) : a \in M_1 \wedge b \in M_2\}$$

(e) Das Kartesische Produkt von M_1 und M_1 durch;

$$(M_1)^2 := M_1 \times M_1$$

1.2.6 Potenzmenge

Für eine Menge M ist durch

$$P(M) := \{A : A \subseteq M\}$$

die Potenzmenge definiert (Menge aller Teilmengen von M).

Bemerkung

Hier gilt $\emptyset \in P(M)$.

1.2.7 Rechenregeln für Mengen

Für bel. Mengen M_1, M_2, M_3 gilt:

(a) Kommutativität:

$$M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1 \text{ und } M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$$

(b) Assoziativität:

$$(M_1 \cup M_2) \cup M_3 = M_1 \cup (M_2 \cup M_3) \text{ und } (M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3)$$

(c) Distributivgesetz:

$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3) \text{ und } M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$$

1.2.8 Komplement

Ist X eine feste Menge und $M \subseteq X$ beliebig, so heißt

$$M^c := X \backslash M$$

das Komplement von M (bzgl, X).

1.2.9 Bemerkung

Die Schreibweise erfordert das X aus dem Kontext bekannt sein muss.

1.2.10 Verknüpfungen über mehrere Elemente

Für Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ mit $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Notation:

(a)

$$\bigcup_{k=1}^{n} M_k = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n$$

(b)

$$\bigcap_{k=1}^{n} M_k = M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n$$

(c)

$$\mathop{\times}_{k=1}^{n} M_k = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$$

1.2.11 Wichtige Zusammenhänge

(a) $(M^c)^c = M$

(b) $M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow {M_2}^c \subseteq {M_1}^c$

(c) $(M_1 \cup M_2)^c = {M_1}^c \cap {M_2}^c$

1.3 Vollständige Induktion

1.3.1 Summen und Produktzeichen

Für $m, n \in \mathbb{Z}, m \leq n$ und $a_m, a_{m+1}, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ definieren wir:

$$\sum_{k=n}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$$

und

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n$$

Falls $m > n$ ist definieren wir $\sum_{k=m}^{n} a_k := 0$ und $\prod_{k=m}^{n} a_k := 1$

1.3.2 Prinzip der Vollständigen Induktion

Gegen seien Aussagen $A(n)$ für $n \geq n_0$ mit $n_0, n \in \mathbb{Z}$ (n_0 beliebig aber fest). Und es gelte:

(a) $A(n_0)$ ist wahr

(b) Für alle $n \geq n_0$ gilt: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$

Bemerkung

(a) n_0 wird als Induktionsanfang, n als Induktionsschritt bezeichnet

(b) Nachteil: wir wissen nicht wieso etwas gilt, nur dass es gilt

1.3.3 Rechenregeln für Summen

Für $m, n \in \mathbb{Z}$ und $a_k, b_k, c \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) Indexverschiebung:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+l}^{n+l} a_{k-l}$$

für beliebiges $l \in \mathbb{Z}$

(b) Trennen von Summen:

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k$$

(c) Konstante Faktoren können aus der Summe "gezogen" werden:

$$\sum_{k=m}^{n} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k$$

(d) "Teleskopsummen":

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}$$

(e) Summe über Konstanten:

$$\sum_{k=m}^{n} c = c \cdot (n - m + 1)$$

1.3.4 Doppelsummen

Für $n \in \mathbb{N}$ und $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq j \leq n$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_{ij}$$

1.3.5 Fakultät und Binomialkoeffizient

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt

(a) die Fakultät von n

$$n! := \begin{cases} n \cdot (n-1)! & ; n \neq 0 \\ 1 & ; n = 0 \end{cases}$$

(b) den Binomielkoeffizienten

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} (\alpha - k + 1)}{n!}$$

1.3.6 Rechenregeln für den Binomialkoeffizienten

Für $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $m \geq n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

(a)

$$\binom{\alpha}{n} + \binom{\alpha}{n+1} = \binom{\alpha+1}{n+1}$$

(b)

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

1.3.7 Binomischer Lehrsatz

Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

1.3.8 Definition Betrag

Für $x \in \mathbb{R}$ heißt

$$|x| := \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

der Betrag von x

Bemerkung

Es gilt:

(a) $|x| \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

(b) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

(c) $|x - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$

(d) $|x| = \max \{x, -x\} \ \forall x \in \mathbb{R}$

1.3.9 Dreiecksungleichung

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (obere Dreiecksungleichung)

(b) $|x + y| \geq \big||x| - |y|\big|$ (untere Dreiecksungleichung)

Bemerkung

Es gilt $x \leq |x| \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

1.4 Funktion und Differentiation

Eine Funktion (bzw. Abbildung, Operator) f von X nach Y ist eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ ein eindeutig bestimmtes $y \in Y$ zuordnet. Das $x \in X$ zugeordnete Element aus Y wird mit $f(x)$ bezeichnet.

Schreibweise

$$f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$$

Bemerkung

X heißt Definitionsbereich, $Y := \{y \in Y : \exists x \in X \text{ mit } y = f(x)\}$ die Zielmenge.

1.4.1 Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

(a) Eine Funktion heißt injektiv, falls gilt:

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) \ forall x, y \in X$$

(b) Eine Funktion heißt surjektiv, falls gilt:

$$\forall y \in Y \ \exists x \in X : y = f(x)$$

(c) Eine Funktion heißt bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

1.4.2 Verknüpfung von Funktionen

Gegeben seien $f, g : X \to Y$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann definieren wir die Funktionen

$$\begin{aligned}
c \cdot f: &\quad X \to Y, \quad x \mapsto (cf)(x) := c \cdot f(x) \\
f + g: &\quad X \to Y, \quad x \mapsto (f+g)(x) := f(x) + g(x) \\
f \cdot g: &\quad X \to Y, \quad x \mapsto (fg)(x) := f(x) \cdot g(x) \\
\frac{f}{g}: &\quad X \to Y, \quad x \mapsto (\frac{f}{g})(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \text{ für } x \text{ mit } g(x) \neq 0
\end{aligned}$$

1.4.3 Verkettung von Funktionen

Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ gegeben, dann heißt die Funktion

$$g \circ f : X \to Z, x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

die Verkettung von g mitt f oder das Kompositum von g mit f

1.4.4 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$

(a) f heißt stetig in x_0, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt

(b) f heißt stetig auf I, wenn f in jedem $x_0 \in I$ stetig ist.

(c) f heißt differenzierbar in x_0, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert.

Bemerkung

Im Fall der Differenzierbarkeit bezeichnen wir den Grenzwert mit $f'(x_0)$ (Newton Notation) oder $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x_0)$ (Leibniz Notation).

1.4.5 Zusammenhang Differentierbarkeit — Stetigkeit

Eine differentierbare Funktion ist stets stetig.

Bemerkung

Die Ableitung einer differentierbaren Funktion muss hingegen nicht stetig sein.

1.4.6 Verkettung differentierbarer Funktionen

Seien $g, f : I \to \mathbb{R}$ differentierbar, dann sind cf, $f+g$, $f \cdot g$ und im Fall $g(x) \neq 0 \forall x \in I$ auch $\frac{f}{g}$ differntierbare Funktionen, und es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(c \cdot f)(x) = \quad & (c \cdot f)'(x) = \quad && c \cdot f'(x) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f + g)(x) = \quad & (f + g)'(x) = \quad && f'(x) + g'(x) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f \cdot g)(x) = \quad & (f \cdot g)'(x) = \quad && f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \quad & \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \quad && \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}
\end{aligned}$$

1.4.7 Differentiation von Monomen

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^n = f(x)$ und $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist f differentierbar mit $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

1.4.8 Kettenregel

Gegeben seien Intervalle $I, J \subseteq \mathbb{R}$ und differentierbare Funktionen $f : I \to J, g : J \to \mathbb{R}$. Dann ist auch $g \circ f$ differentierbar und es gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g \circ f)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(f(x)) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

1.4.9 Ableitung der Umkehrfunktion

Sei $f : I \to J$ bijektiv und differentierbar dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \to I$ ebenfalls differentierbar und es gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

1.5 Elementare Funktionen

1.6 Integralrechnung

1.7 Komplexe Zahlen

1.8 Elementare Differentialgleichungen

1.8.1 Definition Rechteck

(a) $I_1, I_2, \ldots, I_n \subseteq \mathbb{R}^n$ seien nicht leeren Intervalle. Dann heißt die Menge $M = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ ein (n-Dimensionales) Rechteck.

(b) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Rechteck und $\varphi : M \to R$ stetig. Dann heißt eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ die Lösung der Differentialgleichung (1. Ordnung)

$$y' = \varphi(t; y)$$

wenn gilt:

i y ist stetig differentierbar

ii $(t, y(t)) \in M \forall t \in I$

iii $y'(t) = \varphi(t, y(t)) \forall t \in I$

(c) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Rechteck, $\varphi : M \to \mathbb{R}$ stetig und $(t_0, y_0) \in M$. Dann heißt $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems (AWP)

$$y' = \varphi(t, y);\ y(t_0) = y_0$$

wenn y eine Lösung von $y' = f(t, y)$ ist und $y(t_0) = y_0$ gilt.

Bemerkung

Eine DGL n-ter Ordnung mit $n \geq 2$ ist nicht direkt durch die Definition beschrieben.
Wenn wir aber eine Funktion $\vec{y} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definiert mit:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \\
y_1(t) &= x(t) \\
y_2(t) &= \dot{y}_1(t) - \dot{x}(t) \\
\dot{y}_2(t) &= \ddot{x}(t) = -\frac{a_1}{a_2}\dot{x}(t) - \frac{a_0}{a_2}x(t) = -\frac{a_1}{a_2}y_2(t) - \frac{a_0}{a_2}y_1(t)
\end{aligned}$$

1.8.2 Lineare DGL 1. Ordnung

Sei $I \subseteq R$ ein Interval und t_0 ein Punkt in I mit $t_0 - \delta; t_0 + \delta) \subseteq I$ (d.h. nicht auf dem Rand von I). Weiter seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetig.
Definiere

$$\begin{aligned}
y_0 &: I \to \mathbb{R} \\
y_0(t) &= \exp\left(\int_{t_0}^{t} f(u)\mathrm{d}u\right) \\
y &: I \to \mathbb{R} \\
y(t) &= \left(y_0 \cdot \int_{t_0}^{t} \frac{g(u)}{y_0(u)}\mathrm{d}u\right) \cdot y_0(t)
\end{aligned}$$

Dann ist:

(a) y_0 eine Lösung von $y' = f(t)y;\ y(t_0) = 1$

(b) y eine Lösung von $y' = f(t)y + g(t);\ y(t_0) = y_0$

Kapitel 2

Grenzwerte

2.1 Gruppen und Körper

2.1.1 Gruppen

Eine Gruppe ist definiert als ein Tuppel aus einer (nicht-leeren) Menge und einer Verknüpfung. Eine Gruppe erfüllt die folgenden Axiome (seien $a, b, c \in \mathbb{G}$):

$$\begin{aligned} a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c & \qquad \text{(Assoziativität)} \\ a \circ \varepsilon = a & \qquad \text{(Rechtsneutrales Element)} \\ a \circ a' = \varepsilon & \qquad \text{(Rechtsinverses Element)} \end{aligned}$$

Eine abelsche Gruppe erfüllt des weiteren:

$$a \circ b = b \circ a \qquad \text{(Kommutativität)}$$

2.1.2 Körper

Ein Körper ist definiert als eine Menge mit mindestens zwei Elementen (0 und 1) und zwei Verknüfungen.

$$\begin{aligned} + : \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \rightarrow \mathbb{K} \\ \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \rightarrow \mathbb{K} \end{aligned}$$

$\mathbb{K}$ ist bezüglich der Addition und der Multiplikation (genauer: $\mathbb{K}\backslash\{0\}$) ein abelscher Körper, das heißt es gilt (seien $a, b, c \in \mathbb{K}$):

$$
\begin{array}{ll}
a + (b + c) = (a + b) + c & \text{(Assoziativität bez. der Addition)} \\
a + 0 = a & \text{(Existenz einer 0)} \\
a + (-a) = 0 & \text{(Existenz eines Inversen bez. der Addition)} \\
a + b = b + a & \text{(Kommutativität bez. der Addition)} \\
a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c & \text{(Assoziativität bez. der Multiplikation)} \\
a \cdot 1 = a & \text{(Existenz einer 1)} \\
a \cdot a^{-1} = 1 \quad \forall a \neq 0 & \text{(Existenz eines Inversen bez. der Multiplikation)} \\
a \cdot b = b \cdot a & \text{(Kommutativität bezüglich der Multiplikation)}
\end{array}
$$

außerdem gilt:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \qquad \text{(Distributivgesetz)}$$

Bemerkung

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind Körper. $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ nicht (kein additiv inverses bei $\mathbb{N}$, kein multiplikativ inverses bei beiden).

2.1.3 Angeordnete Körper

Ein Körper heißt angeordent wenn folgende Axiome erfüllt sind (seien $a, b, c \in \mathbb{K}$):

$$
\begin{array}{rcl}
a < b \lor \quad b < a & & \lor\ a = b \\
a < b\ \land\ b < c & \Rightarrow & a < c \\
a < b & \Rightarrow & a + c < b + c \\
a < b \land c > 0 & \Rightarrow & a * c < b * c
\end{array}
$$

Bemerkung

$\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind angeordnete Körper. Für $\mathbb{C}$ kann keine Ordnungsrelation definiert werden so das alle Axiome erfüllt sind.

Gebräuchliche Definition zu angeordenten Körpern

Es gilt $0 < 1$, sonst Widerspruch in (O3).
Die Ordnungsrelation wird dann definiert durch:

$$
\begin{array}{rcl}
2 & := & 1 + 1 \\
3 & := & 2 + 1 \\
4 & := & 3 + 1 \\
& \vdots &
\end{array}
$$

Die Natürlichen Zahlen werden Induktiv definiert:

1. $1 \in \mathbb{N}$
2. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n+1) \in \mathbb{N}$

Bemerkung

Aus 2. lässt sich direkt ableiten das $\mathbb{N}$ nach oben unbeschränkt ist (Archimedisches Prinzip).

Vollständig Angeordnete Körper

Ein Körper heißt Vollständig, falls jede nach oben beschränkte, nicht-leere Teilmenge ein Supremum besitzt.
$\Rightarrow \mathbb{R}$ ist der einzige Vollständig angeordnete Körper.

Bemerkung

$\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig angeordnet, da $A := \{x|x^2 \leq 2\} \subset \mathbb{Q}$ kein Supremum besitzt (Supremum ist $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

2.1.4 Minimum und Maximum

Sei $\mathbb{K}$ ein angeordnter Körper und $A \subset \mathbb{K}$ dann heißt m Minimum falls gilt:

1. $m \in \mathbb{K}$
2. $a \geq m \ \forall a \in A$

Analog ist das Maximum definiert: Sei $\mathbb{K}$ ein angeordnter Körper und $A \subset \mathbb{K}$ dann heißt m Maximum falls gilt:

1. $m \in \mathbb{K}$
2. $a \leq m \ \forall a \in A$

Schreibweisen: $m = \min(A)$ bzw. $m = \max(A)$

Bemerkung

Minimum und Maximum exisitieren nicht immer.
Beispiel: $A := \{x|x > 0\} \subset \ \mathbb{R}$ hat nicht 0 als Minimum da $0 \notin A$ und kein beliebiges m da $\tilde{m} := \frac{m}{2} < m \ \forall m \in A$

2.1.5 Obere und untere Schranke

Sei $\mathbb{K}$ ein angeordenter Körper und $A \subset \mathbb{K}$ dann ist s untere Schranke falls gilt:

- $s \leq a \ \forall a \in A$

Analog ist die obere Schranke definiert: Sei $\mathbb{K}$ ein angeordenter Körper und $A \subset \mathbb{K}$ dann ist s obere Schranke falls gilt:

- $s \geq a \ \forall a \in A$

Bemerkung

Hat eine Menge eine obere (bzw. untere) Schranke heißt er nach oben (bzw. unten) beschränkt. Ist eine Menge nach unten und oben beschränkt bezeichnet man sie als beschränkt.

2.1.6 Supremum und Infimum

s heißt Infimum (größte untere Schranke) falls gilt:

- s ist untere Schranke
- Falls $\tilde{s}$ ebenfalls untere Schranke ist gilt $s \geq \tilde{s}$

Analog ist das Supremum definiert: s heißt Supremum (kleinste obere Schranke) falls gilt:

- s ist obere Schranke
- Falls $\tilde{s}$ ebenfalls obere Schranke ist gilt $s \leq \tilde{s}$

Schreibweise: $s = \inf(A)$ bzw. $s = \sup(A)$

Bemerkung

Wenn Minimum (bzw. Maximum) existieren sind diese gleich dem Infimum (bzw. Supremum).

2.2 Folgen

Eine Folge a_n ist definiert als eine Funktion:

$$a_n := \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{M} \subset \mathbb{R}$$

oder auch $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

2.2.1 Konvergenz

Eine Folge a_n heißt konvergent wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_0(\varepsilon) : \ |a_n - a| < \varepsilon \ \forall n > n_0(\varepsilon)$$

Bemerkung

Der Grenzwert ist eindeutig, d.h. es existiert nur ein Grenzwert.

Schreibweise

Falls a_n gegen a konvergiert schreibt man:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

2.2.2 Bestimmte Divergenz

Eine Folge a_n heißt bestimmt Divergent wenn gilt

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n(x):\ \ a_n > x \text{ bzw. } a_n < x$$

Schreibweise:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ bzw. } -\infty$$

2.2.3 Beschränktheit

Eine Folge heißt beschränkt wenn gilt:

$$|a_n| < c\ \forall n$$

Beschränktheit nach oben/unten

Eine Folge heißt nach oben (bzw. unten) beschränkt wenn gilt:

$$a_n < c\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ bzw. } a_n > c\ \forall n \in \mathbb{N}$$

2.2.4 Zusammenhang Konvergenz — Beschränktheit

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

2.2.5 Grenzwertrechenregeln

Seien $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ Folgen in $\mathbb{C}$ mit:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ und } \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

Dann gilt:

- $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- Falls $b \neq 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$

2.2.6 Sandwich Theorem u.a.

Seien $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \ \lim_{n\to\infty} b_n = b \text{ und } \gamma \in \mathbb{R}$$

Dann gilt:

- $a_n \leq \gamma \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq \gamma$
- $a_n \geq \gamma \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \geq \gamma$
- $a_n \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq b$
- $a_n \leq c_n \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N} \wedge a = b \Rightarrow c = \lim_{n\to\infty} c_n = a = b$

2.2.7 Monotonie

Eine Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\mathbb{R}$ heißt:

- Monoton wachsend falls: $a_{n+1} \geq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ (Schreibweise: $a_n \nearrow$)
- Monoton fallend falls: $a_{n+1} \leq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ (Schreibweise: $a_n \searrow$)
- Streng monoton wachsend falls: $a_{n+1} > a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ (Schreibweise: $a_n \uparrow$)
- Streng monoton fallend falls: $a_{n+1} < a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ (Schreibweise: $a_n \downarrow$)

2.2.8 Zusammenhang Monotonie und Beschränktheit

Jede Monotone und beschränkte Folge konvergiert.

2.3 Häufungswerte

Häufungswerte sind Grenzwerte einer Teilfolge.

2.3.1 Teilfolgen

Eine Folge $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ heißt Teilfolge von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, wenn eine streng monotone Funktion $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ exisitiert mit $b_n = a_{\varphi(n)}$.

2.3.2 Teilfolgen einer Konvergenten Folge

Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{C}$ mit: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ sei eine Teilfolge. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

2.3.3 Häufungswerte

Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Dann heißt $a \in \mathbb{C}$ ein Häufungswert einer Folge, falls eine Teilfolge gegen a konvergiert.

2.3.4 Limes superior/inferior

Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine reele Folge, dann heißt:

$$\lim_{n\to\infty} \sup a_n := \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \sup\{x \in \mathbb{R}, a_n > x\ \infty\text{-oft}\}$$

der Limes superior von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ und

$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n := \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \inf\{x \in \mathbb{R}, a_n < x\ \infty\text{-oft}\}$$

der Limes inferior von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

2.3.5 Charakterisierung limsup/liminf

Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine reelle Folge und $s \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(a)

$$s = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt:}$$

i $a_n < s + \varepsilon$ für fast alle n

ii $a_n > s - \varepsilon$ für ∞-viele n

(b)

$$s = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt:}$$

i $a_n > s - \varepsilon$ für fast alle n

ii $a_n < s + \varepsilon$ für ∞-viele n

2.3.6 Konvergenz und limsup/liminf

Eine beschränkte Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert $\Leftrightarrow$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$$

2.3.7 Satz von Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge in $\mathbb{C}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

2.3.8 Cauchy-Kriterium

Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, dann gilt

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ konv.} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) : |a_n - a_m| < \varepsilon\ \forall n, m > n_0(\varepsilon)$$

Bemerkung

Im Gegensatz zur Definition der Folgenkonvergenz muss der Grenzwert nicht bekannt sein.

2.4 Unendliche Reihen

2.4.1 Definition

Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, dan heißt die durch

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

definiert Folge $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von Partialsummen der unendlichen Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Falls die Folge $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert setzten wir:

$$\lim_{n\to\infty} s_n =: \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

2.4.2 Cauchy-Kriterium für unendliche Reihen

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine ∞-Reihe, dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) : \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon\ \forall n, m > n_0(\varepsilon)$$

und:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

2.4.3 Grenzwertrechenregeln für unendliche Reihen

Seien

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} b_k \text{ gegeben und } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

dann gilt:

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} b_k \text{ konv.:}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k &+& \beta b_k) \text{ konv.} \\ \text{und: } &\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k) &=& \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_k \end{aligned}$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}(a_k) \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Im}(a_k) \text{ konv.}$$

(c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Leftrightarrow \text{ die Restreihe } R_n := \sum_{k=n}^{\infty} a_k \text{ konv. gegen } 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

2.4.4 Positive Folgen

Es sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge mit $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in [0, \infty)$ dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv. } \Leftrightarrow \text{ Folge der Partialsummen } \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ ist beschr.}$$

2.4.5 Leibniz-Kriterium

Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine monoton fallende, reele Folge. Dann gilt falls $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ist, konv. die sogennante alternierende Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

2.4.6 Absolute Konvergenz

Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, wenn

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert.

Bemerkung

Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent.

2.4.7 Majorantenkriterium

Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ mit $b_k \geq 0$ gegeben.
Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konv. und ein $c > 0$ ex. mit

$$|a_k| \leq c \cdot |b_k|$$

für fast alle k, dann konv. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

2.4.8 Minorantenkriterium

Falls ein $c > 0$ ex. mit $a_k \geq c \cdot b_k > 0$ für fast alle k, dann:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ div. } \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ div.}$$

2.4.9 Wurzel- und Quotientenkriterium

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ gegeben. Dann gilt:

(a) Wenn

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

gilt, dann konv. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

Wenn

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

gilt, dann div. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

(b) Wenn $a_n \neq 0 \; \forall n$ und

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

gilt, dann konv. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

Wenn $a_n \neq 0 \; \forall n$ und

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$$

gilt, dann divergiert. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Bemerkung

Wenn das Wurzelkriterium keine Aussage macht, kann das Quotientenkriterium trotzdem eine Aussage machen.

2.4.10 Umordnung einer Reihe

Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ heißt Umordnung der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, wenn eine bij. Abb $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ex. mit $b_k = a_{\varphi(k)}$.

Bemerkung

Die Reihe konvergiert nur gegen den selben Wert, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent ist.

2.4.11 Cauchy-Produkt

Die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ seien absolut konv.. Dann gilt:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j \cdot b_{k-j}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

und $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konv. ebenfalls absolut.

2.4.12 Cauchy-Verdichtungssatz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv. } \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ konv.}$$

2.5 Potenzreihen

2.5.1 Definition

Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k$$

eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt z_0 und Koeffizienten a_n.

Bemerkung

Viele wichtige Funktionen können als Potenzreihen dargestellt werden.

2.5.2 Hadamard (Konvergenzradius mit Wurzelkriterium)

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_o)^k$ eine PR. Definiere

$$R := \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Dabei sei $R := \infty$, falls $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ und $R = 0$ falls $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$.
Dann konv. die PR absolut, falls $|z - z_0| < R$ und divergiert falls $|z - z_0| > R$.

Bemerkung I

Für $|z - z_0| = R$ wird keine Aussage gemacht.

Bemerkung II

R heißt der Konvergenzradius der Potenzreihe.

2.5.3 Konvergenzradius mit Quotientenkriterium

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ eine PR. Der Potenzradius kann ebenfalls berechnet werden durch:

$$R = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

2.5.4 Hinweis

Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

2.5.5 Integration und Differentiation von Potenzreihen

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ mit Konvergenzradius R. Dann besitzen auch die Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\, a_k (z-z_0)^{k-1} \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (z-z_0)^{k+1}$$

den Konvergenzradius R.

2.5.6 Cauchy-Produkt für Potenzreihen

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^k$ Potenzreihen, die den Konvergenzradius R_1 bzw. R_2 besitzen. Dann besitzt

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k \text{ mit } c_k = \sum_{l=0}^{k} a_l \cdot b_{k-l}$$

den Konvergenzradius $R = \min\{R_1, R_2\}$.

2.5.7 Wichtige Potenzreihen

(a) Die Expontentialfunktion ist definiert durch:

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

(b) Die Trigonometrischen Funktionen sind definiert durch:

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \sin(z) \quad &:= \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \\ \cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \cos(z) \quad &:= \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \end{aligned}$$

(c) Tangens und Cotangens sind dann definiert als:

$$\tan : \{z \in \mathbb{C} : \cos(z) \neq 0\} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \tan(z) \quad := \quad \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$$
$$\cot : \{z \in \mathbb{C} : \sin(z) \neq 0\} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \cot(z) \quad := \quad \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$$

2.5.8 Alternative Definiton der Exponentialfunktion

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ gilt } \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp(z)$$

2.6 Funktionsgrenzwerte

2.6.1 Bemerkung

In diesem Intervall bezeichnet I stets ein offenes Intervall und $\overline{I}$ dessen sog. Abschluss z.B.:

(a) $I = (a, b)$ und $\overline{I} = [a, b]$

(b) $I = (-\infty, b)$ und $\overline{I} = (-\infty, b]$

(c) $I = (a, \infty)$ und $\overline{I} = [a, \infty)$

(d) $I = (\infty, \infty)$ und $\overline{I} = (\infty, \infty)$

2.6.2 Epsilon-Umgebung

Für $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ heißt

$$U_e(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

die ε-Umgebung von x_0. Und

$$\dot{U}_e(x_0) := U_e(x_0) \backslash \{0\} = (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$$

die punktierte ε-Umgebung von x_0.

2.6.3 Funktionsgrenzwerte (über Delta-Epsilon-Kriterium)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$

(a) f konv. gegen ein $a \in \mathbb{R}$ für $x \to x_0$ (kurz: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$) wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) : \left|f(x) - a\right| < \varepsilon \ \forall x \text{ mit } |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \text{ und } x \neq x_0$$

Schreibweise:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \text{ oder } f(x) = a \text{ für } x \to x_0$$

(b) Sei $x_o \in I$, dann konv. f einseitig von links gegen $a \in \mathbb{R}$ wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) : \; \big| f(x) - a \big| < \varepsilon \; \forall x \in (x_0 - \delta\varepsilon, x_0)$$

Schreibweise:

$$\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = a$$

(c) Sei $x_o \in I$, dann konv. f einseitig von rechts gegen $a \in \mathbb{R}$ wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) : \; \big| f(x) - a \big| < \varepsilon \; \forall x \in (x_0, x_0 + \delta\varepsilon)$$

Schreibweise:

$$\lim_{x \to x_{0+}} f(x) = a$$

(d) Sei $I = (\alpha, \infty)$ (bzw. $I = (-\infty, \beta)$) dann konv. f gegen a für $x \to \infty$ (bzw. $x \to -\infty$) wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists x_1(\varepsilon) : \; \big| f(x) - a \big| < \varepsilon \; \forall x \in I : \; x > x_1(\varepsilon) \text{ (bzw. } x < x_1(\varepsilon))$$

2.6.4 Folgenkriterium

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \overline{I}, u \in \mathbb{R}$ dann gilt $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \text{Für eine beliebe Folge } (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ mit} \\ \text{(i)} x_n \neq x_0 \forall n \\ \text{(ii) } \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0 \\ \text{gilt stets:} \\ \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = a \end{cases}$$

2.6.5 Rechenregeln für Funktionsgrenzwerte

Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$ und gelte

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a, \; \lim_{x \to x_0} g(x) = b$$

Dann gilt:

(a)
$$\lim_{x \to x_0} (\alpha \cdot f(x)) = \alpha \cdot a$$

(b)
$$\lim_{x \to x_0} (g(x) + f(x)) = a + b$$

(c)
$$\lim_{x \to x_0} (g(x) \cdot f(x)) = a \cdot b$$

(d)
$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{a}{b} \qquad \text{falls } b \neq 0$$

2.6.6 Cauchy-Kriterium für Funktionsgrenzwerte

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$ dann ex. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(\varepsilon) : \big|f(x) - f(y)\big| < \varepsilon \, \forall x, y \in I$ mit $0 < |x - x_o| < \delta(\varepsilon)$ und $0 < |y - x_0| < \delta(\varepsilon)$

2.6.7 Bestimmte Divergenz

Sei $f : I \to \mathbb{R},\ x_0 \in I$ dann definieren wir die bestimmte Divergenz (uneigentliche Konvergenz) von $(f \to \infty)$ durch

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall c > 0 \ \exists \delta(c) : f(x) > c \ \forall x \text{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta(c)$$

Analog definieren man links- und rechtsseitig Divergenz gegen ∞ bzw. $-\infty$.

2.6.8 Monotone Funktionen

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ dann heißt (auf I)

(a) monoton wachsend ($f \nearrow$), falls gilt

$$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

(b) streng monoton wachsend ($f \uparrow$), falls gilt

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

(c) monoton fallend ($f \searrow$), falls gilt

$$x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

(d) streng monoton fallend ($f \downarrow$)

$$x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

(e) monoton falls f monoton fallend oder monoton steigend ist

(f) streng monoton falls f streng monoton fallend oder streng monoton steigend ist

(g) Beschränkt falls gilt:

$$\exists c : \big|f(x)\big| < c \ \forall x \in I$$

2.6.9 Grenzwerte an Intervallgrenzen

Sei $a \leq b$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ monoton und beschränkt, dann ex.

$$\lim_{x \to b^-} f(x) \text{ und } \lim_{x \to a^+} f(x)$$

2.7 Stetigkeit

2.7.1 Anschaulich

Graph einer Funktion kann ohne Absetzen gezeichnet werden $\Leftrightarrow$
Es gibt keine Sprünge $\Leftrightarrow$
$f : I \to \mathbb{R}$ an keiner Stelle $x_0 \in I$ ist ein Sprung $\Leftrightarrow$
$\forall x_0 \in I : \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

2.7.2 Stetigkeit: Delta-Epsilon-Kriterium

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$, dann ist f in x_0 stetig falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) : \left| f(x) - f(x_0) \right| < \varepsilon \; \forall x \in I \text{ mit } |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$$

Und f ist stetig (auf I), wenn f in jedem $x_0 \in I$ stetig ist.

2.7.3 Bemerkungen

(a) f ist stetig in $x_0 \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

gilt.

(b) f ist stetig in x_0 dann gilt:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

2.7.4 Rechenregeln für Stetigkeit

Sind $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetig, dann sind auch die Funktionen

(a) $c \cdot f$ (für $c \in \mathbb{R}$)

(b) $f + g$

(c) $f \cdot g$

(d) und falls $g(x) \neq 0 \forall x \in I \, \frac{f}{g}$

stetig.
Ist $f : I \to J, g : I \to \mathbb{R}$ und beide stetig dann ist auch $g \circ f$ stetig.

2.7.5 Stetigkeit von Potenzreihen

Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ eine Potenzereihe mit Konvergenzradius $R > 0$, dann gilt für $x_1 \in U_R(x_0)$, dass $\lim\limits_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$ (d.h. Potenzreihen sind innerhalb des Konvergenzradius stetig).

2.7.6 Umgebung positiver Funktionswerte

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig in x_0, dann gilt:

$$f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \; f(x) > 0 \; \forall x \in I \text{ mit } |x - x_0| < \delta$$

2.7.7 Zwischenwertsatz

Sei $D = [a, b]$ (also abgeschlossen) und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig dann ex. zu jedem y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.
Genauer:

$$\forall y \in [m, M] \; \exists x \in [a, b] \text{ mit } f(x) = y$$

Wobei $m = \min\{f(a), f(b)\}$ und $M = \max\{f(a), f(b)\}$.

Bemerkung

Bei einer Funktion ist das Bild eines Intervals wieder ein Interval. D.h.

$$f([a, b]) = [c, d]$$

2.7.8 Existenz des Logarithmus

Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist bijektiv. Das heißt es existiert eine Umkehrfunktion, diese wird $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ genannt.

2.7.9 Maximum/Minimum/Infimum/Supremum einer Funktion

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$, dann heißt im Fall der Existenz:

(a)
$$\max_{x \in D} f(x) := \max_{D} f(x) := \max\{f(x) \; x \in D\}$$
das Maximum von f auf D.

(b)
$$\min_{x \in D} f(x) := \min_{D} f(x) := \min\{f(x) \; x \in D\}$$
das Minimum von f auf D.

(c)
$$\sup_{x \in D} f(x) := \sup_{D} f(x) := \sup\{f(x) \; x \in D\}$$
das Supremum von f auf D.

(d)
$$\inf_{x \in D} f(x) := \inf_{D} f(x) := \inf\{f(x) \; x \in D\}$$
das Infimum von f auf D.

2.7.10 Beschränktheit einer stetigen Funktion

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeben, dann ist f beschränkt. (d.h. $\sup\limits_{[a,b]}(f) < \infty$ und $\inf\limits_{[a,b]}(f) > \infty$).

2.7.11 Weierstraß: Existenz von Min und Max

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ex.:

$$\min_{[a,b]} f \text{ und } \max_{[a,b]} f$$

2.7.12 Zusammenhang Injektivität — Stetigkeit

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$f \text{ inj. auf } I \Leftrightarrow f \text{ ist streng monoton}$$

2.7.13 Existenz und Monotonie der Umkehrfunktion

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton auf einem Intervall I. Dann ex. auf $J := f(I)$ die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \to I$ und diese ist im gleichen Sinn wie f streng Monoton und stetig.

2.7.14 Gleichmäßige Stetigkeit

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig auf I, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) \; \big| f(x_1) - f(x_2) \big| < \varepsilon \; \forall x_1, x_2 \in I \text{ mit } |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$$

Bemerkung

Im Gegensatz zur normalen Stetigkeit wird bei der gleichmäßigen Stetigkeit eine Funktion $\delta(\varepsilon)$ für die ganze Funktion bestimmt und nicht nur für jeden Punkt einzeln (also $\delta(x_0, \varepsilon)$). Es wird also zwischen Stetigkeit in einem Punkt und Stetigkeit auf einem Intervall unterschieden.

Kapitel 3

Differentialrechnung

3.1 Ableitung

3.1.1 Definition Differenzen-Quotient

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann heißt f in $x_0 \in D$ differentierbar, falls

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

für alle $x_0 \in D$ existiert.

3.1.2 Rechtsseitige und linksseitige Ableitung

Im Fall der Existenz heißen

$$\begin{aligned} f'(x_0^+) &:= \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ bzw.} \\ f'(x_0^-) &:= \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

die rechts- bzw. linksseitige Ableitung in x_0

Bemerkung

$$f'(x_0) \text{ ex.} \Leftrightarrow f'(x_0^+) \text{ und } f(x_0^-) \text{ ex. und } f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$$

3.1.3 Ableitungsrechenregeln

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ differentierbar in $x_0 \in D$, dann gilt:

(a) $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

(b) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

(c) Falls $g(x_0) \neq 0$: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

3.1.4 Alternative Definition der Ableitung

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. Dann gilt: f differenzierbar in $x_0 \Leftrightarrow$

$\exists A \in \mathbb{R}$ und $r : D \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{x \to x_0} r(x) = 0$ so dass gilt: $f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + r(x) \cdot (x - x_0)$

3.1.5 Zusammenhang Differentierbarkeit — Stetigkeit

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ differentierbar in $x_0 \in D \Rightarrow f$ stetig in x_0

3.1.6 Differentiation von Potenzreihen

Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ eine Potenzreihe mit $R > 0$, dann ist f für x mit $|x - x_0| < R$ differentierbar, und es gilt:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (x - x_0)^{k-1}$$

Bemerkung

Der Konvergenzradius von $f'(x)$ ist ebenfalls R.

3.1.7 Ableitung der Umkehrfunktion

Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $f : I \to J$ sei differentiarbar und bijektiv, dann ist auch $f^{-1} : J \to I$ differentierbar und es gilt:

$(f^{-1})'(y_0) = \frac{d}{dx} f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \forall y_0 \in J$ für ein $y_0 = f(x_0)$ und $f'(y_0) \neq 0$

3.1.8 Ketternregel

Seien $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$ mit $A, B \subseteq \mathbb{R}$ differentierbar auf A bzw. B, dann ist auch $g \circ f$ auf A differentierbar und es gilt:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \ \forall x_0 \in A$$

3.2 Mittelwertsätze

3.2.1 Satz von Rolle

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differentierbar. Falls $f(a) = f(b)$ gilt, existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$

3.2.2 Definition lokaler Extrempunkt

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. Dann besitzt$f$ in x_0 ein lokales Maximum (bzw. Minimum):$\Leftrightarrow$

$$\exists \delta > 0 : f(x) \leq f(x_0) \text{ (bzw. } f(x) \geq f(x_0)) \; \forall x \in D \cap U_\delta(x_0)$$

3.2.3 Notwendige Bedingung für lokale Extrema

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differentierbar in $x_0 \in D$ und x_0 sei kein Randpunkt, dann gilt: Liegt bei x_0 ein lokales Maximum/Minimum $\Rightarrow f'(x_0) = 0$.

3.2.4 2. Mittelwertsatz

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differentierbar dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) \cdot (g(b) - g(a)) = g'(x_0) \cdot (f(b) - f(a))$$

Bzw. falls nicht durch Null geteilt wird:

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

3.2.5 1. Mittelwertsatz (Folgerung aus 2. Mittelwertsatz)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differentierbar

$$\Rightarrow \exists x_0 \in (a, b) \text{ mit } f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

3.2.6 L'Hospital

Seien $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}(a < b, b \in (\mathbb{R} \cup \infty))$ differentierbar auf (a, b) mit $g'(x) \neq 0 \; \forall x \in (a, b)$. Falls der Grenzwert $\alpha = \lim\limits_{n \to b^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ ex. und:

(a) $\lim\limits_{n \to b^-} f(x) = \lim\limits_{n \to b^-} g(x) = 0$ oder

(b) $\lim\limits_{x \to b^-} g(x) = \infty$

dann gilt:

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3.2.7 Satz von Taylor

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $n+1$ mal differentierbar auf (a, b) und $x_0 \in (a, b)$. Dann gilt für ein $\xi \in (x_0, x)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

Teil II

HM 2 — Zusammenfassung

Kapitel 4

Integration

4.1 Integration

4.1.1 Definition Zerlegung, Zwischenwerte

Eine Teilmenge T von $[a, b]$ mit $a, b \in T$ nennt man eine Unterteilung, Zerlegung oder Partitionierung von $[a, b]$ wenn gilt:

$$T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \text{ mit}$$
$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

Schreibweise für diese Menge T sei:

$$T : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

Ist T eine Zerlegung, dann heißt:

(a) Die Zahl $\mu(T) := \max\{\,|x_k - x_{k+1}|\,, k = 1, \ldots, n\}$ das Feinheitsmaß von T.

(b) Ein Vektor $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ heißt ein Zwischenwertvektor zu T, wenn gilt

$$x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k \text{ für } k = 1, \ldots, n$$

Dann heißt die Komponente ξ_k ein Zwischenwert von x_{k-1} und x_k.

4.1.2 Definition Riemannsumme

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $T : a = x_0 < \ldots < x_n = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ ein Zwischenwertevektor zu T, dann nennen wir die Summe

$$S(f; T, \xi) = S_f(T, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

die Riemansumme von f bezüglich T und ξ.

4.1.3 Definition Riemann-Integral

Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Riemann-Integrierbar unter $[a, b]$ wenn für jede Folge $(T_N)_{N=1}^{\infty}$ von Zerlegungen von $[a, b]$ mit $\mu(T_N) \to 0$ für $N \to \infty$ und jede Folge $(\xi_N)_{N=1}^{\infty}$ von Zwischenpunktvektoren der Grenzwert

$$\lim_{N\to\infty} S(f; T_N, \xi_N) \text{ existiert.}$$

Behauptung

Der Grenzwert ist im Fall der Existenz für jede Folge identisch.

Bemerkung

(a) Im Fall der Existenz bezeichnet man den Grenzwert durch:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} S(f; T_N, \xi_N)$$

(b) Zu $(T_N)_{N=1}^{\infty}$, also $T_1, T_2, T_3, \ldots$:

$$\begin{aligned}
T_1 :&\quad a = x_0^{(1)} < \ldots < x_n^{(1)} = b \\
T_2 :&\quad a = x_0^{(2)} < \ldots < x_n^{(2)} = b \\
T_3 :&\quad a = x_0^{(3)} < \ldots < x_n^{(3)} = b \\
\vdots& \\
T_l :&\quad a = x_0^{(l)} < \ldots < x_n^{(l)} = b
\end{aligned}$$

(c) Zu $(\xi_N)_{N=1}^{\infty}$, also $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= (\xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(1)}) \text{ mit } x_{k-1}^{(1)} \le \xi_k^{(2)} \le x_k^{(1)} \text{ mit } 1 \le k \le n_1 \\
\xi_2 &= (\xi_1^{(2)}, \ldots, \xi_n^{(2)}) \text{ mit } x_{k-1}^{(2)} \le \xi_k^{(2)} \le x_k^{(2)} \text{ mit } 1 \le k \le n_2 \\
\xi_3 &= (\xi_1^{(3)}, \ldots, \xi_n^{(3)}) \text{ mit } x_{k-1}^{(3)} \le \xi_k^{3} \le x_k^{(3)} \text{ mit } 1 \le k \le n_3 \\
&\vdots \\
\xi_l &= (\xi_1^{(l)}, \ldots, \xi_n^{(l)}) \text{ mit } x_{k-1}^{(l)} \le \xi_k^{l} \le x_k^{(l)} \text{ mit } 1 \le k \le n_l
\end{aligned}$$

(d) Sei f integrierbar und $(T_N)_{N=1}^{\infty}$ und $(\xi_N)_{N=1}^{\infty}$ sowie $(\tilde{T}_N)_{N=1}^{\infty}$ und $(\tilde{\xi}_N)_{N=1}^{\infty}$ entsprechende Folgen, d.h. $\mu(T_N) \to 0, \mu(\tilde{T}_N) \to 0$ für $N \to \infty$. Dann gilt gilt für $(\hat{T}_N)_{N=1}^{\infty}$ und $(\hat{\xi}_N)_{N=1}^{\infty}$ mit

$$\hat{T}_N := \begin{cases} T_N & \text{für } N \text{ gerade} \\ \tilde{T}_N & \text{für } N \text{ ungerade} \end{cases}$$

und

$$\hat{\xi}_N := \begin{cases} \xi_N & \text{für } N \text{ gerade} \\ \tilde{\xi}_N & \text{für } N \text{ ungerade} \end{cases}$$

dass

$$\lim_{N \to \infty} S(f; \hat{T}_N, \hat{S}_N)$$

existiert, da f integrierbar ist.

Dann stimmt der Grenzwert von $\lim_{N \to \infty} S(f; \tilde{T}_N, \tilde{S}_N)$ und $\lim_{N \to \infty} S(f; T_N, S_N)$ überein.

4.1.4 Menge der Riemann-Integrierbaren Funktionen

Mit $R[a, b]$ oder $R([a, b])$ bezeichnen wir die Menge von Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ die auf $[a, b]$ Riemann integrierbar sind.

4.1.5 Kriterien für Riemann-Integrierbarkeit

(a)

$$f \in R[a, b] \Rightarrow f \text{ ist auf } [a, b] \text{beschränkt}$$

(b) Ist $f, g \in R[a, b]$ und $c \in \mathbb{R}$ dann sind auch die Funktionen

$$\begin{matrix} f & + & g \\ f & - & g \\ c & \cdot & f \end{matrix}$$

Riemann integrierbar auf $[a, b]$.

(c) Ist $f, g \in R[a, b]$, dann ist auch

$$f \cdot g \in R[a, b]$$

(d) Ist $f, g \in R[a, b]$ und falls $\big|g(x)\big| > \delta > 0 \ \forall x \in [a, b]$ dann ist auch

$$\frac{f}{g} \in R[a, b]$$

(e) Für beliebiges $c \in [a, b]$ gilt:

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow f \in R[a, c] \wedge f \in R[c, b]$$

und weiter gilt:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

(f)

$$f \in R[a, b] \Rightarrow |f| \in R[a, bv]$$

und

$$\left| \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b \big|f(x)\big|\ \mathrm{d}x$$

4.1.6 Änderung von Funktionen

Wenn $f \in R[a, b]$ ist und durch endlich viele Änderungen daraus $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ konstruiert werden kann, d.h.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \notin \{x_1, \ldots, x_n\} \\ y_1 & \text{falls} x = x_1 \\ \vdots \end{cases}$$

dann gilt $g \in R[a, b]$ und

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x$$

4.1.7 Zusammenhang Stetigkeit und Integrierbarkeit

Es gilt:

$$f \in C[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$$

4.1.8 Stückweise Integration

Falls $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig ist, d.h. es existieren endlich viele Intervall-Stücke auf denen f stetig ist, dann ist $f \in R[a, b]$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} f(x) \, \mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} f(x) + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)$$

4.1.9 1. Mittelwertsatz der Integralrechnung

Seien $f, g \in R[a, b]$ und $g \geq 0$ auf $[a, b]$. Dann gibt es ein $\mu \in \mathbb{R}$ mit $\inf\limits_{[a,b]} f(x) \leq \mu \leq \sup\limits_{[a,b]} f(x)$ sodass gilt:

$$\int_a^b f(x)g(x) \, \mathrm{d}x = \mu \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x$$

Ist f stetig auf $[a, b]$, dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x) \, \mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x$$

Bemerkung

Für $g(x) = 1$ und f stetig lautet die Aussage also:

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = f(\xi) \cdot (b - a)$$

4.1.10 Existenz der Stammfunktion

Sei $f \in R[a,b]$, dann ist für jedes $c \in [a,b]$ durch:

$$F(x) := \int_c^x f(t)dt$$

eine stetige Funktion definiert. Und für jedes $x_0 \in (a,b)$ gilt:

$$f \text{ stetig in } x_0 \Rightarrow F \text{ ist differentierbar in } x_0 \wedge F'(x_0) = f(x_0)$$

4.1.11 Definition Stammfunktion

Gilt $F'(x) = f(x) \forall x \in [a,b]$ dann wird F als Stammfunktion von f bezeichnet.

4.1.12 Eindeutigkeit der Stammfunktion

Sind F und G Stammfunktionen von f, dann existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = G(x) + c \ \forall x \in [a,b]$$

4.1.13 Hauptsatz der Differential und Integralrechnung

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben dann gilt:

(a) Ist $f \in R[a,b]$ und F eine Stammfunktion, dann gilt:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) =: \big[F(x)\big]_a^b$$

(b) Ist $f \in C[a,b]$ dann existiert eine Stammfunktion und zwar

$$F(x) := \int_c^x f(t)dt$$

Bemerkung

Aus dem Hauptsatz folgen Integrationstechniken wie partielles Integrieren oder die Subsitutionsregel.

4.1.14 Zusammenhang Monotonie und Riemann-Integrierbarkeit

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ auf $[a,b]$ monoton, dann ist $f \in R[a,b]$.

4.1.15 Zweiter Mittelwertsatz der Integralrechnung

Ist f monoton auf $[a,b]$, g integrierbar auf $[a,b]$, dann exisitiert ein $\xi \in [a,b]$ mit:

$$\int_a^b f(x)g(x)\ \mathrm{d}x = f(a) \int_a^\xi g(x)\ \mathrm{d}x + \int_\xi^b g(x)\ \mathrm{d}x$$

4.1.16 Definition uneigentliches Integral

Eine Funktion $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ mit $a < b \leq \infty$ heißt über $[a,b)$ uneigentlich Riemann integrierbar, wenn gilt:

(a) $\forall c$ mit $a \leq c < b$ ist $f \in R[a,c]$

(b) Der Grenzwert

$$\alpha = \lim_{c \to \infty} \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x$$

existiert. In dem Fall schreiben wir

$$\alpha = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

und sagen das uneigentliche Integral

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

konvergiert gegen α oder hat den Wert α.

Andernfalls divergiert das uneigentliche Integral. Analog geht man für Funktionen

- $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ mit $-\infty \leq a < b$ und
- $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$

vor.

4.1.17 Cauchy-Kriterium

Sei $f \in R[a,b]\ \forall c \in (a,b), a < c \leq \infty$ Dann konv.

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

(a) Im Fall $b < \infty$ genau dann, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \left| \int_{T_1}^{T_2} f(x)\ \mathrm{d}x \right| < \varepsilon\ \forall\ T_1, T_2 \in [b-\delta, b)$$

(b) Im Fall $b = \infty$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K \geq a : \left| \int_{T_1}^{T_2} f(x)\ \mathrm{d}x \right| < \varepsilon\ \forall\ T_1, T_2 \geq K$$

4.1.18 Majorantenkriterium

Seien $f, g \in R[a,c] \forall c \in (a,b), a < b \leq \infty$ oder $f, g \in R[c,b] \forall c \in (a,b) - \infty \leq a < b$. Außerdem $\left|f(x)\right| \leq g(x)$. Und

$$\int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x$$

konvergiert, dann konvergiert auch

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$$

4.1.19 Absolute Konvergenz

Ist $f \in R[T_1, T_2]$ für $a < T_1 \leq T_2 < b \leq \infty$ so heißt

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$$

absolut konvergent, wenn

$$\int_a^b \left|f(x)\right| \, \mathrm{d}x$$

konvergent ist.

4.1.20 Minorantenkriterium

$$f(x) \geq g(x) \geq 0 \wedge \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x = \infty \Rightarrow \int_a^\infty f(x) \, \mathrm{d}x = \infty$$

4.1.21 Integralkriterium für Reihen

Sei $f : [a, \infty) \to [0, \infty)$ und $f \searrow (a \in \mathbb{Z})$. Dann gilt:

$$\sum_{n=m}^{\infty} f(n) < \infty \Leftrightarrow \int_a^\infty f(x) \, \mathrm{d}x < \infty$$

Kapitel 5

Gleichmäßige Konvergenz

5.1 Gleichmäßige Konvergenz

5.1.1 Definition Funktionenfolge und Funktionenreihe

Sei M eine Menge und $m \in \mathbb{Z}$. Ist jedem $n \in \{m, m+1, \ldots\}$ eine Funktion $f_n : M \to \mathbb{R}$ zugeordnet, so nennt man:

(a) Die Folge $(f_n)_{n=m}^{\infty}$ eine Funktionenfolge auf M

(b) Die Reihe $\sum_{n=m}^{\infty}$ eine Funktionenreihe auf M

konvergiert $(f_n)_{n \geq m}$ (bzw. $\sum_{n=m}^{\infty} f_n(x)$) für alle $x \in \tilde{M} \subseteq M$ so heißt die durch $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ (bzw. $f(x) = \sum_{n=m}^{\infty} f_n(x)$) definierte Funktion $f : \tilde{M} \to \mathbb{R}$ die Grenzfunktion von $(f_n)_{n=m}^{\infty}$ (bzw. $\sum_{n=m}^{\infty} f_n$).

5.1.2 Gleichmäßige Konvergenz

Sei M eine Menge und sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) Eine Funktionenfolge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ heißt auf M gleichmäßig konvergent gegen f wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_0(\varepsilon) : \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon \ \forall x \in M \text{ und } n \geq n_0(\varepsilon)$$

(b) Eine Funktionenfolge $\sum_{n=m}^{\infty} f_n$ konvergiert gleichmäßig auf M wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_0(\varepsilon) : \left| \sum_{k=m}^{n} f_k(x) - f(x) \right| < \varepsilon \ \forall x \in M \text{ und } n \geq n_0(\varepsilon)$$

Bemerkung

Offensichtlich gilt:

Gleichmäßig konvergent $\Rightarrow$ Punktweise Konvergent

5.1.3 Stetigkeit der Grenzfunktion

Sei $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ (bzw. $\sum_{n=1}^{\infty}$) gleichmäßig konvergent gegen f auf einem Intervall I und alle f_n stetig auf I. Dann ist auch die Grenzfunktion f stetig.

5.1.4 Integration der Grenzfunktion

Sei $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von integrierbaren Funktionen auf $[a, b]$

(a) Falls $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ gleichmäßig gegn f konvergiert, dann ist auch f auf $[a, b]$ integrierbar und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ \mathrm{d}x$$

(b) Analog für Funktionenreihen

5.1.5 Cauchy Kriterium für gleichmäßige Konvergenz

(a) Eine Funktionenfolge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert genau dann gleichmäßig auf einer Menge M ($\subseteq$ Definitionsbereich), wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) : \left| f_n(x) - f_m(x) \right| < \varepsilon \forall n \geq n(\varepsilon) \forall x \in M$$

(b) Analog für Funktionenreihen

5.1.6 Differentiation der Grenzfunktion

Sei $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine auf dem Intervall I differentierbare Folge von Funktionen.

(a) Konvergiert die Folge $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ gleichmäßig auf I und konvergiert für ein beliebiges, festes $x_0 \in I$ die reele Folge $(f_n(x_0))_{n=1}^{\infty}$ dann ist auch die Grenzfunktion f von $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ differentierbar und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

(b) Analog für Funktionenreihen

Bemerkung

Außerdem gilt dass $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ (bzw. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$) auf jedem beschränkten Teilintervall von I gleichmäßig konvergiert.

5.1.7 Majorantenkriterium auf Potenzreihen anwenden

Für eine reele Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ mit Konvergenzradius $R > 0$ gilt:

(a) f ist stetig auf $(x_0 - R, x_0 + R) =: I$

(b) f ist differentierbar auf I und

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (x - x_0)^{k-1}$$

(c) f ist integrierbar auf I und hat die Stammfunktion

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1}$$

Bemerkung

Wurde alles schon in HM1 gezeigt aber mühsam.

5.1.8 Majorantenkriterium für Funktionenreihen

Falls $\left|f_n(x)\right| \leq a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty}$ konvergiert $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ist gleichmäßig konvergent.

Kapitel 6

Differentialrechung mit mehreren Variablen

6.1 Der n-dimensionale Euklidische Raum

6.1.1 Definitionen

Sind $n, m \in \mathbb{N}$, so gelten folgende Bezeichnungen:

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^n &:= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ für } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n \right\} \\
\mathbb{R}^{m \times n} &:= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ für } a_{ij} \in \mathbb{R}, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n \right\} \\
< x, y > &:= x \cdot y := x^T y := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \text{ (Skalarprodukt)} \\
\|x\| &:= \|x\|_2 := |x| := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \text{ euklidische Norm des } \mathbb{R}^n \text{ /Betrag in } \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

6.1.2 Folgerungen

1. $$\|x\|_\infty = \max_{k=1 \dots n} |x_k| \le \|x\|_2 \le \sqrt{n} \max_{k=1 \dots n} |x_k| \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n$$

2. $$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

und
$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

3. $\|x\|_1, \|x\|_2, \|x\|_\infty$ sind drei mögliche Festlegungen für Vektornormen. Allgemein hat eine Norm $\|\cdot\|_2$ ($\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$) folgende Eigenschaften:
$$\begin{aligned} \|x\| &\geq 0 && \forall x \in \mathbb{R}^n \wedge \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \\ \|\alpha \cdot x\| &= |\alpha| \cdot \|x\| && \forall \alpha \in \mathbb{R} \wedge \forall x \in \mathbb{R}^n \\ \|x+y\| &\leq \|x\| + \|y\| && \forall x, y \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

4. Der Einheitskreis ist bezüglich verschiedener Normen nicht immer ein Kreis

5. p-Norm:
$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p}$$

6. $x \cdot y$ im $\mathbb{R}^2$ hat die anschauliche Bedeutung
$$< x, y >= x \cdot y = \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \cdot \cos(\alpha)$$
Daraus folgt die Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung (CSU)
$$< x, y > \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$$

6.1.3 Konventionen

(a) In $\mathbb{R}^n$ sei stets $A^c := \mathbb{R}^n\ A$ für eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$

(b) Mit $\|\cdot\|$ bezeichnen wir die euklidische Norm $\|\cdot\|_2$. Außer es wird explizit gesagt, dass $\|\cdot\|$ eine allgemeine Norm ist (z.B. „ Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$)

6.1.4 Definition Epsilon-Umgebung

Sei $a \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0$ dann heißt
$$\begin{aligned} U_\varepsilon(a) &:= \{x \in \mathbb{R}^n |\ \|x-a\| < \varepsilon\} \text{ die } \varepsilon\text{-Umgebung von } a \\ \dot{U}_\varepsilon(a) &:= U_\varepsilon(a) \backslash \{a\} (= \{x \in \mathbb{R}^n |\ 0 < \|x-a\| < \varepsilon\}) \text{ die punktierte } \varepsilon\text{-Umgebung von } a \end{aligned}$$

6.1.5 Definition Topologische Begriffe

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Ein Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ heißt:

(a) Innerer Punt von A, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $U_\varepsilon(a) \subseteq A$ Kurz:

$$a \text{ innerer Punkt von } A :\Leftrightarrow \exists\varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \subseteq A$$

Die Menge $\mathring{A}$ ist die Menge aller innerer Punkte von A

$$\mathring{A} := \{a \in \mathbb{R}^n | \exists\varepsilon > 0 \text{ mit } U_\varepsilon(a) \subseteq A\}$$

(b) Berührungspunkt von A, wenn jede ε-Umgebung von a mindestens einen Punkt aus A enthält. Kurz:

$$a \in \mathbb{R}^n \text{ ist Berührpunkt von } A :\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$$

Die Menge aller Berührpunkte von

$$\bar{A} := \{x \in \mathbb{R}^n | \forall\varepsilon > 0 \text{ ist } U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset\}$$

heißt der Abschluss oder abgeschlossene Hülle von A.

(c) Häufungspunkt von A, wenn jede punktierte ε-Umgebung von a ein Element von A enthält. Kurz:

$$a \in \mathbb{R}^n \text{ ist Häufungspunkt } :\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0 \dot{U}_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$$

(d) Randpunkt von A, wenn jede ε-Umgebung Elemente aus A und A^c enthält. Kurz:

$$a \in \mathbb{R}^n \text{ ist Randpunkt von } A :\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ (U_\varepsilon(a)\hat{A} \neq \emptyset) \wedge (U_\varepsilon(a)\hat{A}^c \neq \emptyset)$$

Die Menge

$$\partial A := \{a \in \mathbb{R}^n | a \text{ ist Randpunkt von } A\}$$

heißt der Rand von A.

Bemerkung

Man kann zeigen:

$$\bar{A} = A \cup \partial A = \mathring{A} \cup \partial A$$

6.1.6 Definition offene und abgeschlossene Menge

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt:

(a) offen, wenn $A = \mathring{A}$ gilt (also A besteht nur aus innerern Punkten)

(b) abgeschlossen, wenn $\partial A \subseteq A$ (Rand gehört zu A)

6.2 Folgen

6.2.1 Definition

Eine Folge

$$a_k = \begin{pmatrix} a_1^{(k)} \\ \vdots \\ a_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^n$ heißt:

(a) Konvegent gegen einen Grenzwert a, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) : \|a_k - a\| < \varepsilon \; \forall k \geq n(\varepsilon)$$

Schreibweise:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = a \text{ oder } a_k \to a \; (k \to \infty)$$

(b) Beschränkt, wenn gilt:

$$\exists c > 0 : \; \|a_k\| < c \; \forall k \in \mathbb{N}$$

Bemerkung

(a) Die Norm $\|\cdot\|$ sei hier die euklidische Norm $\|\cdot\|_2$. Wir werden aber sehen: Jede Norm auf $\mathbb{R}^n$ wäre ok.

(b)

$$a_k \to a \, (k \to \infty) \Rightarrow \text{ Jede Komponente von } a_k \text{ konvergiert gegen entsprechende Komponente von } a$$

(c) Cauchy-Kriterium:

$$(a_k)_{k=1}^{\infty} \text{ konv. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) : \|a_k - a_l\| < \varepsilon \forall k, l \geq n(\varepsilon)$$

6.2.2 Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge im $\mathbb{R}^n$ hat eine konvergente Teilfolge.

6.2.3 Grenzwertrechenregeln

Die Grenzwertrechenregeln übertragen sich auch auf Folgen im $\mathbb{R}^n$.

6.2.4 Weitere Bemerkungen

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}^n$, dann gilt:

(a)
$$a \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists (a_k)_{k=1}^{\infty} \text{ mit } a_k \in A \forall k \text{ mit } \lim_{k \to \infty} a_k = a$$

(b) a ist ein Häufungspunkt von A
$$\exists (a_k)_{k=1}^{\infty} \text{ mit } a_k \in A \backslash \{a\} \text{ mit } \lim_{k \to \infty} a_k = a$$

(c) A ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ für jede konvergente Folge $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ mit $a_k \in A \forall k$ gilt $\lim\limits_{k \to \infty} a_k \in A$.

(d) A ist kompakt $\Leftrightarrow$ Jede Folge in A besitzt einen Häufungspunt in A.

6.3 Funktionsgrenzwerte und Stetigkeit

6.3.1 Definition Funktion

Eine Funktione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nennt man eine Funktion in n Veränderlichen (oder Vektorfeld). Im Fall $m = 1$ nennt man f eine reele Funktion (oder Skalarfeld).

Schreibweise

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) := f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

6.3.2 Definition Funktionsgrenzwert

Sei $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $a \in \bar{A}$ dann heißt ein $b \in \mathbb{R}^m$ mit:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) : \left\| f(x) - b \right\| < \varepsilon \; \forall x \in U_{\delta(\varepsilon)}(a) \cap A$$

der Grenzwert von f für x gegen a. Kurz:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

6.3.3 Definitionen aus HM 1 im Mehrdimensionalen

Sei $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \bar{A}$ und $b \in \mathbb{R}^m$

(a) Folgende Aussagen sind äquivalent:

  (a) $f(x) \to b \; (x \to a)$

(b) $\|f(x) - b\| \to 0 \ (x \to a, x \in A)$

(c) Für jede Komponente

$$f_l(x) \text{ von } f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \text{ gilt } f_l(x) \to b_l \ (x \to a)$$

(d) Für eine Folge $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ in A mit $\lim\limits_{k\to\infty}$ und $x_k \neq a \ \forall k$ folgt:

$$f(x_k) \to b \ (k \to \infty)$$

(b) Falls $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existiert ist dieser Eindeutig.

(c) Cauchy-Kriterium:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) : \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon \ \forall x, y \in \circ U_{\delta\varepsilon}(a) \cap A$$

(d) Grenzwertrechenregeln gelten analog zu HM 1

(e) Sei $B \subseteq A$ mit $a \in \bar{B}$ dann gilt:

$$\lim_{x\to a \text{ mit } x\in B} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x\to a \text{ mit } x\in A} f(x) = b$$

6.3.4 Definition Stetigkeit

Sei $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $a \in A$, dann ist f in a stetig wenn gilt $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Das heißt:

$$\forall \varepsilon \ \exists \delta(\varepsilon) : \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon \ \forall x \in U_{\delta(\varepsilon)}(a) \cap A$$

6.3.5 Grenzwerte von verketteten Funktionen

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^m, a \in \bar{A}$ und $f : A \to B, g : B \to \mathbb{R}^l$. Existiert $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ so gilt $b \in \bar{B}$ und es gilt:

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{y\to b} g(y)$$

sofern der Grenzwert $\lim\limits_{y\to b} g(y)$ existiert.

6.3.6 Grenzwertrechenregeln

Für $f, g : A \to \mathbb{R}^n$ gilt: Falls $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \alpha$ und $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \beta$ existiert, dann gilt:

(a)

$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = \alpha + \beta$$

(b)

$$\lim_{x\to a} f(x)^T g(x) = \alpha^T \beta$$

6.3.7 Maximum und Minimum Kompakter Mengen

(a) Ist $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, so existiert $\max A$ und $\min A$.

(b) Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A kompakt und $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ stetig auf A, dann ist $f(A)$ kompakt.

6.3.8 Weierstraß

Falls $A \subseteq \mathbb{R}^m$ und $f : A \to \mathbb{R}$ stetig ist dann gilt:

$$A \text{ kompakt } \Rightarrow \min_{x \in A} f(x), \max_{x \in A} f(x) \text{ existiert}$$

6.4 Partielle Ableitungen und Richtungsableitungen

6.4.1 Definition partielle Ableitung

Eine Funktion $f : A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ heißt in einem Punkt $a \in \mathbb{R}^m$ partiell differentierbar nach seiner k-ten Variable $x_k (k \in \{1, \ldots, m\})$ wenn $f(a + h \cdot e_k)$ mit

$$e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \ (k\text{-te Komponente}) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

für ein festes $\delta > 0$ und alle h mit $|h| < \delta$ existiert:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(a) := f_{x_k}(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h \cdot e_k) - f(a)}{h}$$

Dieser Grenzwert heißt partielle Ableitung von f nach x_k bei a.

Exisitiert bei a die partiellen Ableitungen $f_{x_1}(a), \ldots, f_{x_m}(a)$ so heißt f (einmal) partiell differentierbar bei a und nennt man im Fall $n = 1$ den Spaltenvektor

$$\nabla f(a) := \operatorname{grad} f(a) := \begin{pmatrix} f_{x_1}(a) \\ \vdots \\ f_{x_m}(a) \end{pmatrix}$$

den Gradienten von f bei a.
Falls alle partiellen Ableitungen stetig sind nennt man f stetig partiell differentierbar.

Schreibweise

$C^k(G, \mathbb{R}^n) := \{f : G \to \mathbb{R}^n|$ alle k-ten partiellen Ableitungen existieren und sind stetig

6.4.2 Definition Umgebung eines Punktes

Eine Umgebung eines Punktes $a \in \mathbb{R}^n$ ist eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ für die ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $U_\varepsilon(a \subseteq U)$. Eine offene Umgebung U ist eine Umgebung, die zusätzlich eine offene Menge ist.

Bemerkung

Ist $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ partiell differentierbar und sind in einer Umgebung von $a \in G$ alle partiellen Ableitungen beschränkt, dann ist f stetig in a.

6.4.3 Definition Richtungsableitung

Seien $a, r \in \mathbb{R}^n$ und r eine Richtung, d.h. $\|r\| = 1$. Eine Funktion $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt bei a in Richtung r differentierbar, wenn der Grenzwert

$$\frac{\partial}{\partial r} f(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h \cdot r) - f(a)}{h}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt dann die Richtungsableitung von f bei a in Richtung r.

6.5 Die totale Ableitung

6.5.1 Definition totale Ableitung

Sei $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $a \in G \subseteq \mathbb{R}^n$

(a) Man nennt f total differentierbar bei a, wenn es eine Matrix $A \in R^{m \times n}$ gibt, dass bei einer Umgebung U von a gilt:

$$f(x) = f(a) + A(x - a) + r(x)$$

mit

$$\frac{r(x)}{\|x - a\|} \to \vec{0} \ (x \to a)$$

In dem Fall nennen wir A die (totale) Ableitung von f bei a und wir schreiben $f'(a) = A$

(b) Ist $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ partiell differentierbar bei a, so heißt

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(a) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1(a) \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_m(a) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_m(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(a)^T \\ \vdots \\ \nabla f_n(a)^T \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} f(a) = J_f(a)$$

die Jacobi-Matrix von f bei a.

Bemerkung

(a) Wir werden sehen, dass gilt:

$$f \text{ ist in } a \text{ total differentierbar} \Leftrightarrow f'(a) = J_f(a)$$

(b) Im Fall $m = 1$ gilt also:

$$J_f(a) = \nabla f(a)^T$$

und falls f total differentierbar ist gilt:

$$f'(a) = \nabla f(a)^T$$

(c) Bedeutung des Skalarprodukts $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$x \cdot y := x^T y := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \|x\|_2 \|y\|_2 \cos \alpha$$

(d) Definition des Matrix-Vektor-Produktes:

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$$

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

6.5.2 Zusammenhang Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Ist $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differentierbar in $a \in G \Leftrightarrow f$ stetig in a.

6.5.3 Zusammenhang partielle und totale Diffbarkeit

Sei $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $a \in G$

(a) Ist f total differentierbar bei a, so gilt:

(a) f ist bei a partiell differentierbar und

$$f'(a) = \frac{\partial}{\partial x} f(a)$$

(b) f ist bei a in jede Richtung r differentierbar und

$$\frac{\partial}{\partial r} f(a) = J_f(a) \cdot r$$

(b) Wenn f partiell differentierbar in a ist und alle partiellen Ableitungen in a stetig sind, so ist f in a differentierbar.

$$\frac{\partial}{\partial x_n} f(x_n) \text{ stetig in } a \Leftrightarrow f \text{ differenzierbar in } a$$

6.5.4 Kettenregel

Ist $f : A \subseteq \mathbb{R}^{\rightarrow} B \subseteq \mathbb{R}^m$ total differentierbar in $a \in A$ und $g : B \rightarrow R^l$ total differentierbar in a. Dann gilt $g \circ f$ ist in a differentierbar und

$$(g \circ f)' = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

6.5.5 Matrix-Produkt

Für $A \in \mathbb{R}^{m \times k}, B \in \mathbb{R}^{k \times n}$ und $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist das Matrix-Produkt $C = A \cdot B$ definiert durch:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} b_{lj}$$

6.6 Extremwerte, Mittelwertsatz

6.6.1 Definition lokales Extrema

(a) Eine Funktion $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt in $x_0 \in G$ ein lokales Minimum (bzw. Maximum), wenn in einer Umgebun von U von x_0 gilt:

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ (bzw. } f(x) \leq f(x_0)) \ \forall x \in U$$

unter einem lokalen Extrema versteht man ein lokales Minimum oder Maximum

(b) f besitzt in x_0 ein globales Minimum (bzw. Maximum), wenn

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ (bzw. } f(x) \leq f(x_0)) \ \forall x \in G$$

6.6.2 Notwendige Bedingung für lokale Extrema

Besitzt $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^1(G, \mathbb{R})$ in $x_0 \in \overset{\circ}{G}$ ein lokales Extrema, so gilt:

$$\nabla f(x_0) = 0$$

Bemerkung

Einen Punkt $x_0 \in G$ mit $\nabla f(x_0) = 0$ nennen wir kritischen Punkt oder stationären Punkt.

6.6.3 Mittelwertsatz

Sei $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit G offen differentierbar und G enthalte die Menge

$$L(a,b) := \overline{ab} := \{a + t \cdot (b-a) \; |t \in [0,1]\}$$

für $a, b \in G$. Dann exisitiert ein $\xi \in (0,1)$ mit

$$f(b) = f(a) + \nabla f(a + \xi(b-a))^T (b-a)$$

6.6.4 Gebiete bzw. kurvenweise zusammenhängende Gebiete

(a) Eine Menge

$$\overline{a_0, a_1, \ldots, a_n} := \bigcup_{k=0}^{n-1} \overline{a_k, a_{k+1}}$$

für $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^m$ heißt Polygonzug

(b) Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt kurvenweise zuammenhängend, wenn zu $a, b \in M$ stets eine stetige Funktion $\gamma : [0,1] \to M$ exisitiert mit $\gamma(0) = a$ und $\gamma(1) = b$ (dann ist γ) eine Kurve von a nach b.

(c) Eine Menge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Gebiet, wenn G offen und kurvenweise zusammenhängend ist (keine Inseln).

Bemerkung

Ist G ein Gebiet und $a, b \in G$ dann existiert stets ein Polynomzug, der a und b verbindet und durch G verläuft.

6.6.5 Partielle Ableitung r-ter Ordnung

Für $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definiert man (falls existent) für $x_0 \in G$ und $k_1, \ldots, k_r \in \{1, \ldots, n\}$ die partielle Ableitung r-ter Ordnung indirekt durch:

$$\frac{\partial^r}{\partial x_{k_1} \ldots \partial x_{k_r}} f(x_0) := f_{x_{k_1} \cdots x_{k_r}}(x_0) := \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_{k_1}} f(x_0) & \text{falls } r = 1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_{k_1}} \left(\dfrac{\partial^{r-1}}{\partial x_{k_2} \ldots \partial x_{k_r}} f(x_0) \right) & \text{sonst} \end{cases}$$

existieren alle partiellen Ableitungen der Ordnung r, dann ist f r-mal partiell differentierbar sind diese außerdem stetig, so ist f r-mal stetig partiell differentierbar.

Schreibweise

$C^r(G,\mathbb{R}^m) := \{f : G \to \mathbb{R}^m \mid f\ r\text{-mal stetig partiell differentierbar}\}$ und $C^r(G) := C^r(G,\mathbb{R}^1)$

6.6.6 Hessematrix

Ist $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 2-mal partiell differentierbar bei $a \in G$ so heißt

$$H_f(a) := \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(a) & \cdots & f_{x_1x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(a) & \cdots & f_{x_nx_n}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_{x_1}(a) & \cdots & \nabla f_{x_n}(a) \end{pmatrix}$$

die Hesse-Matrix von f bei a.

6.6.7 Definitheit

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

(a) Die durch $Q_A(x) := x^T \cdot A \cdot x$ definierte Funktion $Q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt die Quadratische Form von A.

(b) Die Matrix und die Quadratische Form heißen:

  (a) positiv definit
  $$:\Leftrightarrow Q_A(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$$

  (b) positiv semidefinit
  $$:\Leftrightarrow Q_A(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

  (c) negativ definit
  $$:\Leftrightarrow Q_A(x) < 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$$

  (d) negativ semidefinit
  $$:\Leftrightarrow Q_A(x) \leq 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

  (e) indefinit
  $$:\Leftrightarrow \exists x, y \in \mathbb{R}^n :\ Q_A(x) < 0, Q_A(y) > 0$$

6.6.8 Satz von Schwarz

Ist $G \neq \emptyset, f : G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 2-mal stetig partiell differentierbar, dann gilt:

$$H_f(x,y) = H_f(x,y)^T$$

6.6.9 Satz von Taylor

Seien $a, b \in G$ (G eine Gebiet mit $G \neq \emptyset$), $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differentierbar und $\overline{ab} \subseteq G$. Dann existiert eine $\xi \in (0,1)$ mit

$$f(b) = f(a) + \nabla f(a)^T (b-a) + \frac{1}{2}(b-a)^T H_f(a + \xi(b-a))(b-a)$$

6.6.10 Hinreichende Bedinung für lokale Extrema

Sei $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ mit U eine Umgebung von a und $\nabla f(a) = \vec{0}$ dann gilt:

(a) Ist $H_f(a)$ positiv definit, so ist bei a ein lokales Minimum

(b) Ist $H_f(a)$ negativ definit, so ist bei a ein lokales Maximum

Teil III

Beweisansätze

Kapitel 7

HM 1

7.0.1 Eindeutigkeit des Grenzwert einer Folge

Zeige, dass Grenzwert a = Grenzwert b, nahrhafte 0

7.0.2 Konvergente Folgen sind beschränkt

Nahrhafte 0, Dreiecks-ugl.

7.0.3 Grenzwertrechenregeln

Nahrhafte 0, Dreiecks-ugl. $a_n \leq \gamma \ \forall n \Rightarrow a \leq \gamma$ Ausgehend von a über nahrh. 0 zu Def Konvergenz $a_n \leq b_n \ \forall n \Rightarrow a \leq b$ Definiere Hilfsfolge, argumentiere nach s.o Sandwich-Theorem Zeige, dass $-\varepsilon < c_n < \varepsilon$ (Quasi Epsilon-Schlauch)

7.0.4 Monotoniekriterium

Da $|a_n| < c \ \forall n$, argumentiere über das Supremum der Menge, die aus a_n besteht

7.0.5 Grenzwert einer konv. Folge = Grenzwert jeder Teilfolge

Def. Konvergenz + Def Teilfolge

7.0.6 Charakterisierung $\overline{\lim}$ und $\underline{\lim}$

Argumentiere über Eigneschaften sup und inf

7.0.7 Folge konv. $\overline{\lim} = \underline{\lim}$

Hin: Eindeutigkeit des Grenzwert;Rück: Charakterisierung limSup und limInf

7.0.8 Bolzano-Weierstraß

Zunächst für reelle Folge (trivial), dann für komplex: Realteil ist klar, Imaginärteil: Teilfolge konstruieren

7.0.9 Cauchykriterium

Hin: nahrhafte 0; Rück: zeige Beschränktheit, dann folge daraus, dass ein Häufungswert existiert und benutze diesen als Grenzwert-Kandidat

7.0.10 Reihe konv. Folge ist Nullfolge

Cauchy für Reihen

7.0.11 GrenzwertRR für Reihen

GrenzwertRR für Folgen

7.0.12 Reihe konv g. 0

Restreihe als Differenz darstellen

7.0.13 Leibniz

Cauchy für Reihen

7.0.14 Absolut konv. $\Rightarrow$ konv.

Cauchy und Dreiecks-ugl.

7.0.15 Majorantenkriterium

Cauchy

7.0.16 Minorantenkriterium

Kontradiktion von Majorantenkriterium

7.0.17 Wurzelkriterium

Majorantenkrit: geom. Summe über $Q := q + \varepsilon < 1$, in q das Wurzelkriteriumeinsetzen, Charakterisierung $\overline{\lim}$

7.0.18 Quotientenkriterium

Majorantenkrit: setze in q das Quotientenkriteriumein und Argumentation über $\overline{\lim}$

7.0.19 Hadamard

Wurzelkriterium+ Fallunterscheidung für Sonderfälle

7.0.20 Differenzieren / Integrieren von Potenzreihen

Wurzelkriterium

7.0.21 Lemma zu sin, cos und exp

Cauchy-Produkt + Definitionen

7.0.22 $e^z \neq 0$ und $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$

Inverses Element der Multiplikation

7.0.23 Pythagoras

3. binomische Formel

7.0.24 $e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Betrachte $x \geq 0$, angeordneter Körper

7.0.25 $1 + x \leq e^x \ \forall x \in \mathbb{R}$

Bernoulli

7.0.26 $x < y \Rightarrow e^x < e^y$

nahrhafte 0

7.0.27 Folgenkriterium

Hin: Def. Folgenkonv. und dann Def Funktionsgrenzwert einsetzen; Rück: Wähle versch. δ und zeige Widerspruch

7.0.28 Cauchy für Funktionen

Hin: Def. FunktionsGrenzwert + nahrhafte 0; Rück: Cauchy für Folgen

7.0.29 Grenzwerte an Intervallgrenzen

Argumentiere über Supremum / Infimum

7.0.30 Verknüpfungen stetiger Funktionen stetig

Folgenkriterium

7.0.31 Potenzreihen sind innerhalb des Konvergenzradius stetig

Abschätzung: $\exists r > 0 : |x - x_0$ bzw. $x_1| \leq r$, dann einfach $\left|f(x) - f(x_1)\right|$ nach oben abschätzen

7.0.32 Umgebung pos. Funktionswerte

Wähle $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$, Def. Stetigkeit

7.0.33 Zwischenwertsatz

Definiere $x_0 := \sup\{x \in [a, b] : f(x) \leq y\}$ und zwei Hilfsfolgen, die gegen x_0 konvergieren

7.0.34 Existenz log

Zeigen exp ist bijektiv (Zwischenwertsatz)

7.0.35 Beschränktheit stetiger Funktionen

Annahme f nicht beschränkt Folgenkriterium

7.0.36 Weierstraß existenz min bzw. max

Zeigen das sup = max

Kapitel 8

HM 2

Teil IV

Appendix

Kapitel 9

Grenzwerte

9.1 Konvergenzkriterien

Zusammenfassung verschiedener Konvergenzkriterien nach Wikipedia (Seite: Konvergenzkriterium):

Kriterium	nur f. mon. F.	Konv.	Div.	abs. Konv.	Absch.	Fehlerabsch.
Nullfolgenkriterium			x			
Monotoniekriterium		x		x		
Leibniz-Kriterium	x	x			x	x
Cauchy-Kriterium		x	x			
Abel-Kriterium	x	x				
Dirichlet-Kriterium	x	x				
Majorantenkriterium		x		x		
Minorantenkriterium			x			
Wurzelkriterium		x	x	x		x
Integralkriterium	x	x	x	x	x	
Cauchy-Kriterium	x	x	x	x		
Grenzwertkriterium		x	x			
Quotientenkriterium		x	x	x		x
Gauß-Kriterium		x	x	x		
Raabe-Kriterium		x	x	x		
Kummer-Kriterium		x	x	x		
Bertrand-Kriterium		x	x	x		
Ermakoff-Kriterium	x	x	x	x		