

# Zusammenfassung Höhere Mathematik

Paul Nykiel

2. März 2018

Schlagzahl erhöhen.

# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>HM 1 — Zusammenfassung</b>	<b>16</b>
<b>1</b>	<b>Vorkurs</b>	<b>17</b>
1.1	Aussagenlogik . . . . .	17
1.1.1	Definition Aussage . . . . .	17
1.1.2	Verknüpfungen . . . . .	17
1.1.3	Mehr zu Implikationen . . . . .	18
1.1.4	Bezeichnung von Aussagen . . . . .	18
1.1.5	Satz der Identität . . . . .	18
1.2	Mengen . . . . .	19
1.2.1	Defintion: Mengen nach Cantor . . . . .	19
1.2.2	Begrifflichkeiten und Schreibweise . . . . .	19
1.2.3	Leere Menge, Teilmengen . . . . .	19
1.2.4	Transitivität u.a. . . . .	19
1.2.5	Verknüpfung von Mengen . . . . .	20
1.2.6	Potenzmenge . . . . .	20
1.2.7	Rechenregeln für Mengen . . . . .	20
1.2.8	Komplement . . . . .	21
1.2.9	Bemerkung . . . . .	21
1.2.10	Verknüpfungen über mehrere Elemente . . . . .	21
1.2.11	Wichtige Zusammenhänge . . . . .	21
1.3	Vollständige Induktion . . . . .	21
1.3.1	Summen und Produktzeichen . . . . .	21
1.3.2	Prinzip der Vollständigen Induktion . . . . .	22
1.3.3	Rechenregeln für Summen . . . . .	22
1.3.4	Doppelsummen . . . . .	23
1.3.5	Fakultät und Binomialkoeffizient . . . . .	23
1.3.6	Rechenregeln für den Binomialkoeffizienten . . . . .	23
1.3.7	Binomischer Lehrsatz . . . . .	23
1.3.8	Definition Betrag . . . . .	23
1.3.9	Dreiecksungleichung . . . . .	24
1.4	Funktion und Differentiation . . . . .	24
1.4.1	Injektivität, Surjektivität, Bijektivität . . . . .	24
1.4.2	Verknüpfung von Funktionen . . . . .	25
1.4.3	Verkettung von Funktionen . . . . .	25

1.4.4	Stetigkeit und Differenzierbarkeit . . . . .	25
1.4.5	Zusammenhang Differenzierbarkeit — Stetigkeit . . . . .	25
1.4.6	Verkettung differenzierbarer Funktionen . . . . .	26
1.4.7	Differentiation von Monomen . . . . .	26
1.4.8	Kettenregel . . . . .	26
1.4.9	Ableitung der Umkehrfunktion . . . . .	26
1.5	Elementare Funktionen . . . . .	26
1.6	Integralrechnung . . . . .	26
1.7	Komplexe Zahlen . . . . .	26
1.8	Elementare Differentialgleichungen . . . . .	26
1.8.1	Definition Rechteck . . . . .	26
1.8.2	Lineare DGL 1. Ordnung . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Grenzwerte</b>	<b>28</b>
2.1	Gruppen und Körper . . . . .	28
2.1.1	Gruppen . . . . .	28
2.1.2	Körper . . . . .	28
2.1.3	Angeordnete Körper . . . . .	29
2.1.4	Minimum und Maximum . . . . .	30
2.1.5	Obere und untere Schranke . . . . .	31
2.1.6	Supremum und Infimum . . . . .	31
2.2	Folgen . . . . .	31
2.2.1	Konvergenz . . . . .	31
2.2.2	Bestimmte Divergenz . . . . .	32
2.2.3	Beschränktheit . . . . .	32
2.2.4	Zusammenhang Konvergenz — Beschränktheit . . . . .	32
2.2.5	Grenzwertrechenregeln . . . . .	32
2.2.6	Sandwich Theorem u.a. . . . .	33
2.2.7	Monotonie . . . . .	33
2.2.8	Zusammenhang Monotonie und Beschränktheit . . . . .	33
2.3	Häufungswerte . . . . .	33
2.3.1	Teilfolgen . . . . .	33
2.3.2	Teilfolgen einer Konvergenten Folge . . . . .	33
2.3.3	Häufungswerte . . . . .	33
2.3.4	Limes superior/inferior . . . . .	34
2.3.5	Charakterisierung limsup/liminf . . . . .	34
2.3.6	Konvergenz und limsup/liminf . . . . .	34
2.3.7	Satz von Bolzano-Weierstraß . . . . .	34
2.3.8	Cauchy-Kriterium . . . . .	34
2.4	Unendliche Reihen . . . . .	35
2.4.1	Definition . . . . .	35
2.4.2	Cauchy-Kriterium für unendliche Reihen . . . . .	35
2.4.3	Grenzwertrechenregeln für unendliche Reihen . . . . .	35
2.4.4	Positive Folgen . . . . .	36
2.4.5	Leibniz-Kriterium . . . . .	36
2.4.6	Absolute Konvergenz . . . . .	36

2.4.7	Majorantenkriterium . . . . .	36
2.4.8	Minorantenkriterium . . . . .	37
2.4.9	Wurzel- und Quotientenkriterium . . . . .	37
2.4.10	Umordnung einer Reihe . . . . .	37
2.4.11	Cauchy-Produkt . . . . .	38
2.4.12	Cauchy-Verdichtungssatz . . . . .	38
2.5	Potenzreihen . . . . .	38
2.5.1	Definition . . . . .	38
2.5.2	Hadamard (Konvergenzradius mit Wurzelkriterium) . . .	38
2.5.3	Konvergenzradius mit Quotientenkriterium . . . . .	39
2.5.4	Hinweis . . . . .	39
2.5.5	Integration und Differentiation von Potenzreihen . . . .	39
2.5.6	Cauchy-Produkt für Potenzreihen . . . . .	39
2.5.7	Wichtige Potenzreihen . . . . .	39
2.5.8	Alternative Definition der Exponentialfunktion . . . . .	40
2.6	Funktionsgrenzwerte . . . . .	40
2.6.1	Bemerkung . . . . .	40
2.6.2	Epsilon-Umgebung . . . . .	40
2.6.3	Funktionsgrenzwerte (über Delta-Epsilon-Kriterium) . . .	40
2.6.4	Folgenkriterium . . . . .	41
2.6.5	Rechenregeln für Funktionsgrenzwerte . . . . .	41
2.6.6	Cauchy-Kriterium für Funktionsgrenzwerte . . . . .	42
2.6.7	Bestimmte Divergenz . . . . .	42
2.6.8	Monotone Funktionen . . . . .	42
2.6.9	Grenzwerte an Intervallgrenzen . . . . .	42
2.7	Stetigkeit . . . . .	43
2.7.1	Anschaulich . . . . .	43
2.7.2	Stetigkeit: Delta-Epsilon-Kriterium . . . . .	43
2.7.3	Bemerkungen . . . . .	43
2.7.4	Rechenregeln für Stetigkeit . . . . .	43
2.7.5	Stetigkeit von Potenzreihen . . . . .	43
2.7.6	Umgebung positiver Funktionswerte . . . . .	44
2.7.7	Zwischenwertsatz . . . . .	44
2.7.8	Existenz des Logarithmus . . . . .	44
2.7.9	Maximum/Minimum/Infimum/Supremum einer Funktion	44
2.7.10	Beschränktheit einer stetigen Funktion . . . . .	45
2.7.11	Weierstraß: Existenz von Min und Max . . . . .	45
2.7.12	Zusammenhang Injektivität — Stetigkeit . . . . .	45
2.7.13	Existenz und Monotonie der Umkehrfunktion . . . . .	45
2.7.14	Gleichmäßige Stetigkeit . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Differentialrechnung</b>	<b>46</b>
3.1	Ableitung . . . . .	46
3.1.1	Definition Differenzen-Quotient . . . . .	46
3.1.2	Rechtsseitige und linksseitige Ableitung . . . . .	46
3.1.3	Ableitungsrechenregeln . . . . .	46

3.1.4	Alternative Definition der Ableitung . . . . .	47
3.1.5	Zusammenhang Differentierbarkeit — Stetigkeit . . . . .	47
3.1.6	Differentiation von Potenzreihen . . . . .	47
3.1.7	Ableitung der Umkehrfunktion . . . . .	47
3.1.8	Kettenregel . . . . .	47
3.2	Mittelwertsätze . . . . .	47
3.2.1	Satz von Rolle . . . . .	47
3.2.2	Definition lokaler Extrempunkt . . . . .	48
3.2.3	Notwendige Bedingung für lokale Extrema . . . . .	48
3.2.4	2. Mittelwertsatz . . . . .	48
3.2.5	1. Mittelwertsatz (Folgerung aus 2. Mittelwertsatz) . . . . .	48
3.2.6	L'Hospital . . . . .	48
3.2.7	Satz von Taylor . . . . .	49

## II HM 2 — Zusammenfassung 50

4	Integration . . . . .	51
4.1	Integration . . . . .	51
4.1.1	Definition Zerlegung, Zwischenwerte . . . . .	51
4.1.2	Definition Riemannsumme . . . . .	51
4.1.3	Definition Riemann-Integral . . . . .	52
4.1.4	Menge der Riemann-Integrierbaren Funktionen . . . . .	53
4.1.5	Kriterien für Riemann-Integrierbarkeit . . . . .	53
4.1.6	Endliche Änderung von Funktionen . . . . .	54
4.1.7	Zusammenhang Stetigkeit und Integrierbarkeit . . . . .	54
4.1.8	Stückweise Integration . . . . .	54
4.1.9	1. Mittelwertsatz der Integralrechnung . . . . .	54
4.1.10	Existenz der Stammfunktion . . . . .	55
4.1.11	Definition Stammfunktion . . . . .	55
4.1.12	Eindeutigkeit der Stammfunktion . . . . .	55
4.1.13	Hauptsatz der Differential und Integralrechnung . . . . .	55
4.1.14	Zusammenhang Monotonie und Riemann-Integrierbarkeit . . . . .	55
4.1.15	Zweiter Mittelwertsatz der Integralrechnung . . . . .	55
4.2	Uneigentliche Integrale . . . . .	56
4.2.1	Definition uneigentliches Integral . . . . .	56
4.2.2	Cauchy-Kriterium . . . . .	56
4.2.3	Majorantenkriterium . . . . .	57
4.2.4	Absolute Konvergenz . . . . .	57
4.2.5	Minorantenkriterium . . . . .	57
4.2.6	Integralkriterium für Reihen . . . . .	57

<b>5</b>	<b>Gleichmäßige Konvergenz</b>	<b>58</b>
5.1	Gleichmäßige Konvergenz . . . . .	58
5.1.1	Definition Funktionenfolge und Funktionenreihe . . . . .	58
5.1.2	Gleichmäßige Konvergenz . . . . .	58
5.1.3	Stetigkeit der Grenzfunktion . . . . .	59
5.1.4	Integration der Grenzfunktion . . . . .	59
5.1.5	Cauchy Kriterium für gleichmäßige Konvergenz . . . . .	59
5.1.6	Differentiation der Grenzfunktion . . . . .	59
5.1.7	Majorantenkriterium auf Potenzreihen anwenden . . . . .	60
5.1.8	Majorantenkriterium für Funktionenreihen . . . . .	60
<b>6</b>	<b>Differentialrechnung mit mehreren Variablen</b>	<b>61</b>
6.1	Der n-dimensionale Euklidische Raum . . . . .	61
6.1.1	Definitionen . . . . .	61
6.1.2	Folgerungen . . . . .	61
6.1.3	Konventionen . . . . .	62
6.1.4	Definition Epsilon-Umgebung . . . . .	62
6.1.5	Definition Topologische Begriffe . . . . .	62
6.1.6	Definition offene und abgeschlossene Menge . . . . .	63
6.2	Folgen . . . . .	64
6.2.1	Definition . . . . .	64
6.2.2	Bolzano-Weierstraß . . . . .	64
6.2.3	Grenzwertrechenregeln . . . . .	64
6.2.4	Weitere Bemerkungen . . . . .	65
6.3	Funktionsgrenzwerte und Stetigkeit . . . . .	65
6.3.1	Definition Funktion . . . . .	65
6.3.2	Definition Funktionsgrenzwert . . . . .	65
6.3.3	Definitionen aus HM 1 im Mehrdimensionalen . . . . .	65
6.3.4	Definition Stetigkeit . . . . .	66
6.3.5	Grenzwerte von verketteten Funktionen . . . . .	66
6.3.6	Grenzwertrechenregeln . . . . .	66
6.3.7	Maximum und Minimum Kompakter Mengen . . . . .	67
6.3.8	Weierstraß . . . . .	67
6.4	Partielle Ableitungen und Richtungsableitungen . . . . .	67
6.4.1	Definition partielle Ableitung . . . . .	67
6.4.2	Definition Umgebung eines Punktes . . . . .	68
6.4.3	Definition Richtungsableitung . . . . .	68
6.5	Die totale Ableitung . . . . .	68
6.5.1	Definition totale Ableitung . . . . .	68
6.5.2	Zusammenhang Stetigkeit und Differenzierbarkeit . . . . .	69
6.5.3	Zusammenhang partielle und totale Diffbarkeit . . . . .	69
6.5.4	Kettenregel . . . . .	70
6.5.5	Matrix-Produkt . . . . .	70
6.6	Extremwerte, Mittelwertsatz . . . . .	70
6.6.1	Definition lokales Extrema . . . . .	70
6.6.2	Notwendige Bedingung für lokale Extrema . . . . .	70

6.6.3	Mittelwertsatz . . . . .	71
6.6.4	Gebiete bzw. kurvenweise zusammenhängende Gebiete . .	71
6.6.5	Partielle Ableitung r-ter Ordnung . . . . .	71
6.6.6	Hessematrix . . . . .	72
6.6.7	Definitheit . . . . .	72
6.6.8	Satz von Schwarz . . . . .	72
6.6.9	Satz von Taylor . . . . .	73
6.6.10	Hinreichende Bedingung für lokale Extrema . . . . .	73
6.7	Implizit definierte Funktionen . . . . .	73
6.7.1	Bemerkung . . . . .	73
6.7.2	Vorläufige Definition Rang einer Matrix . . . . .	73
6.7.3	Einheitsmatrix und Inverse einer Matrix . . . . .	73
6.7.4	Zusammenhang Bijektivität und reguläre Matrizen . . . .	74
6.7.5	Satz über die Umkehrfunktion . . . . .	74
6.7.6	Satz über die Gebietstreue . . . . .	74
6.7.7	Definition Auflösbarkeit . . . . .	74
6.7.8	Hauptsatz über implizite Funktionen . . . . .	75
6.7.9	Extrema unter Nebenbedingungen . . . . .	75
6.7.10	Definition lokale Minima/Maxima unter Nebenbedingungen	76
6.7.11	Definition Linear Unabhängig . . . . .	76
6.7.12	Satz von Lagrange . . . . .	77
6.7.13	Lagrange Funktion . . . . .	77
<b>7</b>	<b>Integration in mehreren Veränderlichen</b>	<b>78</b>
7.1	Parameterintegrale . . . . .	78
7.1.1	Eigentliche Parameterintegrale . . . . .	78
7.1.2	Leibniz Regel . . . . .	78
7.1.3	Uneigentliche Parameterintegrale . . . . .	79
7.1.4	Majorantenkriterium . . . . .	79
7.1.5	Fubini für uneigentliche Parameterintegrale . . . . .	79
7.1.6	Konvergenzkriterien . . . . .	79
7.2	Kurvenintegrale . . . . .	80
7.2.1	Äquivalenz für Kurven . . . . .	80
7.2.2	Kurven im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	80
7.2.3	Eigenschaften von Parameterdarstellungen . . . . .	81
7.2.4	Weitere Definitionen zu Kurven . . . . .	82
7.2.5	Kurvenintegrale 2. Art . . . . .	82
7.2.6	Substitutionsregel . . . . .	83
7.2.7	Definition Wegunabhängigkeit . . . . .	83
7.2.8	1. Hauptsatz für Kurvenintegral . . . . .	84
7.2.9	Äquivalente Aussagen zu Stammfunktionen . . . . .	84
7.2.10	Definition einfach zusammenhängende Gebiete . . . . .	84
7.2.11	Sternförmige Gebiete . . . . .	84
7.2.12	2. Hauptsatz für Kurvenintegrale . . . . .	85
7.2.13	Definition Rotation . . . . .	85
7.2.14	Zusammenhang Rotation und Integrabilitätsbedingung . .	85



7.2.15	Definition Linienintegral/Kurvenintegral 1. Art . . . . .	86
7.3	Bereichsintegrale . . . . .	87
7.3.1	Intervalle im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	87
7.3.2	Definition Zerlegung . . . . .	87
7.3.3	Definition Riemann-Summe . . . . .	88
7.3.4	Riemann integrierbare Bereichsintegrale . . . . .	88
7.3.5	Bereichsintegrale über beschränkte Mengen . . . . .	88
7.3.6	Cavalieri . . . . .	89
7.3.7	Fubini . . . . .	89
7.3.8	Definition Meßbare-Mengen . . . . .	89
7.3.9	Definition $2 \times 2$ Determinante . . . . .	89
7.3.10	Mehrdimensionale Substitutionsregel . . . . .	90
7.4	Integralsätze in der Ebene . . . . .	90
7.4.1	Positiv berandete Menge . . . . .	90
7.4.2	Satz von Green . . . . .	90
7.4.3	Definition Normalbereiche . . . . .	90
7.4.4	Gauß'sche Integralsätze in der Ebene . . . . .	90
7.5	Oberflächenintegrale und Integralsätze im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	91
7.5.1	Definition Reguläre Flächen . . . . .	91
7.5.2	Definition Oberflächenintegral . . . . .	91
7.5.3	Satz von Stokes . . . . .	92
7.5.4	Divergenzsatz von Gauß . . . . .	92
<b>8</b>	<b>Lineare Algebra</b>	<b>93</b>
8.1	Der Begriff Vektorraum . . . . .	93
8.1.1	Definition Vektorraum . . . . .	93
8.1.2	Rechenregeln . . . . .	93
8.2	Unterräume . . . . .	94
8.2.1	Definition Unterraum . . . . .	94
8.2.2	Unterraumkriterien . . . . .	94
8.2.3	Durchschnitt von Unterräumen . . . . .	94
8.2.4	Definition lineare Hülle . . . . .	94
8.2.5	Definition Linearkombination . . . . .	95
8.2.6	Zusammenhang lineare Hülle — Linearkombination . . . . .	95
8.3	Lineare Unabhängigkeit . . . . .	95
8.3.1	Definition Lineare Unabhängigkeit . . . . .	95
8.3.2	Rechenregeln für lineare Unabhängigkeit . . . . .	95
8.4	Basis und Dimension . . . . .	96
8.4.1	Definition Hamel-Basis . . . . .	96
8.4.2	Äquivalente Aussagen zu Basen . . . . .	97
8.4.3	Existenz einer Basis . . . . .	97
8.4.4	Eigenschaften der Basis . . . . .	97
8.4.5	Definition Dimension . . . . .	97
8.4.6	Beziehung von Dimensionen . . . . .	98
8.4.7	Lineare unabhängigkeit im $n$ -Dimensionalen . . . . .	98
8.5	Lineare Gleichungssysteme . . . . .	98

8.5.1	Definition lineares Gleichungssystem . . . . .	98
8.5.2	Zusammenhang Kern und Lösung eines LGS . . . . .	99
8.5.3	Definition Affiner Unterraum, lineare Mannigfaltigkeit . . . . .	99
8.5.4	Definition Zeilen-/Spaltenrang . . . . .	99
8.5.5	Elementare Zeilen-/Stufenoperationen . . . . .	99
8.5.6	Beziehung Spalten-/Zeilenrang . . . . .	101
8.5.7	Definition Rang einer Matrix . . . . .	101
8.5.8	Gauß-Algorithmus . . . . .	101
8.5.9	Lösbarkeit eines LGS . . . . .	101
8.5.10	Lösung eines LGS . . . . .	101

### III HM 3 — Zusammenfassung 102

#### 9 Exkurs Funktionanalysis 103

9.1	Normen und innere Produkte . . . . .	103
9.1.1	Definition Vektornorm . . . . .	103
9.1.2	Skalarprodukt / inneres Produkt . . . . .	104
9.1.3	Definition induzierte Norm . . . . .	104
9.1.4	Äquivalente Aussagen zu induzierten Normen . . . . .	105
9.1.5	Rechenregeln für Skalarprodukte . . . . .	105
9.1.6	Cauchy-Schwarz'sche-Ungleichung . . . . .	105
9.2	Orthogonalität . . . . .	105
9.2.1	Orthogonalität . . . . .	105
9.2.2	Orthogonalität und lineare Abhängigkeit . . . . .	106
9.2.3	Gram-Schmidt (Orthogonalisierung von Vektoren) . . . . .	106
9.2.4	Orthogonale Projektion . . . . .	106

#### 10 Gewöhnliche Differentialgleichungen 107

10.1	Einführung . . . . .	107
10.1.1	Explizite DGL 1. Ordnung . . . . .	107
10.1.2	Implizite DGL 1. Ordnung . . . . .	107
10.1.3	DGL-System 1. Ordnung . . . . .	108
10.1.4	Umschreiben von DGLen . . . . .	109
10.2	Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen . . . . .	109
10.2.1	Voltera'sche Integralgleichung . . . . .	109
10.2.2	Bemerkung: Newton-Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen . . . . .	110
10.2.3	Picard-Iterator . . . . .	110
10.2.4	Definition Lipschitz-Bedingung . . . . .	110
10.2.5	Partielle Ableitung und Lipschitz-Bedingung . . . . .	111
10.2.6	Picard-Lindelöf (Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung) . . . . .	111
10.2.7	Peano (Existenz einer Lösung) . . . . .	111
10.2.8	Gronwallsche Ungleichung . . . . .	111
10.2.9	Banach'scher Fixpunktsatz . . . . .	112
10.2.10	Norm Äquivalenz im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	112

10.2.11 Stabilität . . . . .	112
<b>11 DGL-Systeme und DGLen n-ter Ordnung</b>	<b>113</b>
11.1 Systeme von DGLen 1. Ordnung . . . . .	113
11.1.1 Definition DGL-System . . . . .	113
11.1.2 Schreibweise . . . . .	114
11.1.3 Voltera'sche Integralgleichung . . . . .	114
11.1.4 Definition Lipschitz-Bedingung . . . . .	115
11.1.5 Bemerkung . . . . .	115
11.1.6 Satz von Picard-Lindelöf . . . . .	115
11.1.7 Satz von Peano . . . . .	115
11.1.8 Stabilität . . . . .	115
11.2 Lineare DGL-Systeme 1. Ordnung . . . . .	115
11.2.1 Definition . . . . .	115
11.2.2 Definition Frobenius-Norm . . . . .	116
11.2.3 Matrixnorm und Vektornorm . . . . .	116
11.2.4 Grenznorm . . . . .	116
11.2.5 Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen . . . . .	117
11.2.6 Definition Fundamentalsystem . . . . .	117
11.2.7 Definition Determinante . . . . .	117
11.2.8 Entwicklungssatz von Laplace . . . . .	117
11.2.9 Leibniz-Formel für Determinanten . . . . .	118
11.2.10 Berechnung der Wronski-Determinante ohne bekanntes FS	118
11.2.11 Ableitung der Determinante . . . . .	119
11.2.12 Äquivalente Aussagen zu FSen und Wronski-Determinanten	119
11.2.13 Partikuläre Lösung aus Wronski-Determinante . . . . .	119
11.3 Lineare DGL-Systeme 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten .	119
11.3.1 Definition Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	120
11.3.2 Algebraische und Geometrische Vielfachheit . . . . .	120
11.3.3 Diagonalisierbarkeit . . . . .	120
11.3.4 Submultiplikativität von $\ \cdot\ _F$ . . . . .	121
11.3.5 Folgenkonvergenz für Matrizen . . . . .	121
11.3.6 Definition Matrix-Exponentialfunktion . . . . .	122
11.3.7 Rechenregeln Matrix-Exponentialfunktion . . . . .	122
11.3.8 Zusammenhang Matrix Exponentialfunktion und FS . . .	122
11.3.9 Cayley Hamilton . . . . .	122
11.3.10 Algorithmus von Putzer . . . . .	122
11.3.11 Jordan-Blöcke . . . . .	123
11.4 Differentialgleichungen höherer Ordnung . . . . .	123
11.4.1 Differentialgleichungen höhere Ordnung . . . . .	123
11.4.2 Picard-Lindelöf für DGLen höherer Ordnung . . . . .	123
11.4.3 Definition lineare DGL n-ter Ordnung . . . . .	124
11.4.4 DGL-System zu einer linearen DGL n-ter Ordnung . . . .	124
11.4.5 FS und Wronski-Determinante . . . . .	125
11.4.6 Definiton FS und Wronski-Determinante . . . . .	125
11.4.7 Lösungsraum linearer DGLen n-ter Ordnung . . . . .	125

11.4.8	Lösungen und Wronski-Determinanten . . . . .	126
11.5	Lineare DGLen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . .	126
11.5.1	Charakteristisches Polynom einer Frobenius Matrix . . .	126
11.5.2	Zusammenhang Nullstellen des char. Polynoms und Lösung der (hom.) DGL . . . . .	127
11.5.3	FS für lineare DGLen n-ter Ordnung mit konstanten Ko- effizienten . . . . .	127
<b>12</b>	<b>Ergänzung zur Analysis</b>	<b>128</b>
12.1	Äquivalenzrelation und Äquivalenzklassen . . . . .	128
12.1.1	Definition . . . . .	128
12.2	Distributionen . . . . .	128
12.2.1	Testfunktionen . . . . .	128
12.2.2	Distributionen . . . . .	129
12.2.3	Duale Paarung und Repräsentanten . . . . .	129
12.2.4	Ableitung einer Distribution . . . . .	129
12.3	Fouriertransformation . . . . .	129
12.3.1	Definition Fourier-Trafo . . . . .	129
12.3.2	Stetigkeit der Fourier-Transformierten . . . . .	130
12.3.3	Zeitliche Verschiebung und Skalierung der Fouriertrans- formierten . . . . .	130
12.3.4	Ableitung der Fouriertransformierten . . . . .	130
12.3.5	Fouriertransformation der Ableitung . . . . .	130
12.3.6	Definition inverse Fouriertransformation . . . . .	130
12.3.7	Plancherel . . . . .	131
12.3.8	Definition Faltung . . . . .	131
12.3.9	Fouriertransformation der Faltung . . . . .	131
12.3.10	Fouriertransformation im Distributionenellen Sinne . . . .	131
<b>13</b>	<b>Funktionentheorie</b>	<b>132</b>
13.1	Grundlagen . . . . .	132
13.1.1	Definition Stetigkeit . . . . .	132
13.1.2	Definition Argument . . . . .	132
13.1.3	Komplexe Wurzel . . . . .	133
13.1.4	Definition komplexer Logarithmus . . . . .	133
13.2	Komplexe Differenzierbarkeit . . . . .	133
13.2.1	Definition . . . . .	133
13.2.2	Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen . . . . .	133
13.2.3	Definition Holomorphe Funktionen . . . . .	134
13.2.4	Definition orientierter Winkel . . . . .	134
13.2.5	Definition Winkeltreue . . . . .	134
13.2.6	Biholomorphe Funktionen . . . . .	134
13.2.7	Ableitung der Umkehrfunktion . . . . .	134
13.3	Komplexe Kurvenintegrale . . . . .	135
13.3.1	Eigenschaften komplexer Kurvenintegrale . . . . .	135
13.3.2	Definition Kurveneigenschaften . . . . .	135

13.3.3	Komplexe Kurvenintegrale . . . . .	135
13.3.4	Konvention zu kreisförmigen Kurven . . . . .	136
13.4	Cauchy-Integralsatz . . . . .	136
13.4.1	Geschlossene Kurvenintegrale . . . . .	136
13.4.2	Definition Windungszahl . . . . .	136
13.4.3	Eigenschaften der Windungszahl . . . . .	136
13.4.4	Windungszahl über zusammenhängende Gebiete . . . . .	136
13.4.5	Cauchy-Integralformel für sternförmige Gebiete . . . . .	137
13.4.6	Mittelwerteigenschaften der Cauchy-Integralformel . . . . .	137
13.4.7	Definition n-te Ableitung . . . . .	137
13.4.8	Cauchy-Integralformel für n-te Ableitung . . . . .	137
13.5	Eigenschaften holomorpher Funktionen . . . . .	137
13.5.1	Holomorphe Funktionen und Potenzreihen . . . . .	137
13.5.2	Abschätzung der Ableitung . . . . .	138
13.5.3	Definition ganze Funktion . . . . .	138
13.5.4	Satz von Lionville . . . . .	138
13.5.5	Fundamentalsatz der Algebra . . . . .	138
13.5.6	Identitätssatz für holomorphe Funktionen . . . . .	138
13.5.7	Maximumsprinzip . . . . .	138
13.5.8	Abschätzung von Potenzreihen . . . . .	138
13.6	Isolierte Singularitäten . . . . .	139
13.6.1	Definition isolierte Singularitäten . . . . .	139
13.6.2	Charakterisierung von isolierten Singularitäten . . . . .	139
13.6.3	Riemannscher Hebbbarkeitssatz . . . . .	139
13.6.4	Zusammenhang ganzrationale Funktionen und Polstellen . . . . .	139
13.6.5	Eigenschaften wesentlicher Singularitäten . . . . .	139
13.6.6	Variation von Kurven . . . . .	139
13.6.7	Holomorphie der Stammfunktion . . . . .	140
13.6.8	Laurentzerlegung . . . . .	140
13.6.9	Definition Laurentreihe . . . . .	140
13.6.10	Berechnung der Laurent-Koeffizienten mit Cauchy und Taylor . . . . .	141
13.6.11	Zusammenhang Holomorphie und Laurentreihen . . . . .	141
13.7	Residuensatz . . . . .	141
13.7.1	Definition Residuum . . . . .	141
13.7.2	Bestimmung des Residuums . . . . .	141
13.7.3	L'Hospital für Residuen . . . . .	141
13.7.4	Residuensatz . . . . .	142
13.7.5	Anwendung des Residuensatz auf uneigentliche Integrale . . . . .	142
13.7.6	Anwendung des Residuensatz auf bestimmte uneigentliche Integrale . . . . .	142

## IV Beweisansätze

143

<b>14 HM 1</b>	<b>144</b>
14.1 Grenzwerte	144
14.1.1 Eindeutigkeit des Grenzwert einer Folge	144
14.1.2 Konvergente Folgen sind beschränkt	144
14.1.3 Grenzwertrechenregeln	144
14.1.4 Monotoniekriterium	144
14.1.5 Grenzwert einer konv. Folge = Grenzwert jeder Teilfolge	144
14.1.6 Charakterisierung $\overline{\lim}$ und $\underline{\lim}$	144
14.1.7 Folge konv. $\overline{\lim} = \underline{\lim}$	144
14.1.8 Bolzano-Weierstraß	145
14.1.9 Cauchy Kriterium	145
14.1.10 Reihe konv. Folge ist Nullfolge	145
14.1.11 Grenzwert RR für Reihen	145
14.1.12 Reihe konv g. 0	145
14.1.13 Leibniz	145
14.1.14 Absolut konv. $\Rightarrow$ konv.	145
14.1.15 Majorantenkriterium	145
14.1.16 Minorantenkriterium	145
14.1.17 Wurzelkriterium	145
14.1.18 Quotientenkriterium	145
14.1.19 Hadamard	146
14.1.20 Differenzieren / Integrieren von Potenzreihen	146
14.1.21 Lemma zu sin, cos und exp	146
14.1.22 $e^z \neq 0$ und $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$	146
14.1.23 Pythagoras	146
14.1.24 $e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$	146
14.1.25 $1 + x \leq e^x \forall x \in \mathbb{R}$	146
14.1.26 $x < y \Rightarrow e^x < e^y$	146
14.1.27 Folgenkriterium	146
14.1.28 Cauchy für Funktionen	146
14.1.29 Grenzwerte an Intervallgrenzen	146
14.1.30 Verknüpfungen stetiger Funktionen stetig	146
14.1.31 Potenzreihen sind innerhalb des Konvergenzradius stetig	147
14.1.32 Umgebung pos. Funktionswerte	147
14.1.33 Zwischenwertsatz	147
14.1.34 Existenz log	147
14.1.35 Beschränktheit stetiger Funktionen	147
14.1.36 Weierstraß existenz min bzw. max	147
<b>15 HM 2</b>	<b>148</b>
15.1 Integration	148
15.1.1 Riemann integrierbar impliziert Beschränktheit	148
15.1.2 Rechenregeln für Integrale (Verkettung usw.)	148
15.1.3 Transitivität	148

15.1.4	1. MWS der Integralrechnung . . . . .	148
15.1.5	Eine Stammfunktion einer Funktion ist stetig und differenzierbar . . . . .	148
15.1.6	Hauptsatz der DI . . . . .	149
15.1.7	Monotonie impliziert Riemann Integrierbarkeit . . . . .	149
15.1.8	2. MWS der Integralrechnung . . . . .	149
15.1.9	Integalkriterium . . . . .	149
15.2	Gleichmäßige Konvergenz . . . . .	149
15.2.1	Stetigkeit der Grenzfunktion . . . . .	149
15.3	Differentialrechnung mit mehreren Veränderlichen . . . . .	149
15.3.1	Grenzwertrechenregeln . . . . .	149
15.3.2	Max/Min kompakter Mengen . . . . .	149
15.3.3	Stetigkeit einer Funktion durch beschränkte partielle Ableitungen . . . . .	150
15.3.4	Differentierbarkeit impliziert Stetigkeit . . . . .	150
15.3.5	Zusammenhang totale und partielle Diff'barkeit . . . . .	150
15.3.6	Kettenregel . . . . .	150
15.3.7	Notwendige Bedingung für Extrema . . . . .	150
15.3.8	Mittelwertsatz . . . . .	150
15.3.9	Konstante Funktionen . . . . .	151
15.3.10	Taylor . . . . .	151
15.3.11	Hinreichende Bedingung für Extrema . . . . .	151
15.3.12	Beweisidee für den Hauptsatz über implizite Funktionen . . . . .	151
15.3.13	Herleitung für die Ableitung der Auflösung . . . . .	151
15.3.14	Satz von Lagrange . . . . .	151
15.4	Integration in mehreren Veränderlichen . . . . .	151
15.4.1	Ableitung in Integral ziehen . . . . .	151
15.4.2	Fubini . . . . .	152
15.4.3	Leibniz Regel . . . . .	152
15.4.4	Beweis-Idee Kurvenintegrale (Substitutionsregel) . . . . .	152
15.4.5	1. Hauptsatz für Kurvenintegrale . . . . .	152
15.4.6	Äquivalente Aussagen für Kurvenintegrale . . . . .	152
15.4.7	2. Hauptsatz für Kurvenintegrale . . . . .	152
15.4.8	Gauß'sche Integralsätze in der Ebene . . . . .	153

## V Klausurvorbereitung 154

### 16 HM1 156

### 17 HM2 157

17.1	Integration . . . . .	157
17.1.1	Wichtige Beweise . . . . .	157
17.1.2	Typische Aufgaben . . . . .	157
17.1.3	Trickreiche Aufgaben . . . . .	157
17.1.4	Weitere hilfreiche Dinge . . . . .	158

17.2	Gleichmäßige Konvergenz . . . . .	158
17.2.1	Wichtige Beweise . . . . .	158
17.2.2	Typische Aufgaben . . . . .	158
17.2.3	Trickreiche Aufgaben . . . . .	158
17.3	Differentialrechnung mit mehreren Veränderlichen . . . . .	158
17.3.1	Wichtige Beweise . . . . .	158
17.3.2	Typische Aufgaben . . . . .	159
17.4	Integration in mehreren Veränderlichen . . . . .	159
17.4.1	Wichtige Beweise . . . . .	159
17.4.2	Typische Aufgaben . . . . .	159
17.4.3	Trickreiche Aufgaben . . . . .	160
17.5	Lineare Algebra . . . . .	160
17.5.1	Typische Aufgaben . . . . .	160
<b>VI</b>	<b>Appendix</b>	<b>161</b>
<b>18</b>	<b>Grenzwerte</b>	<b>162</b>
18.1	Konvergenzkriterien . . . . .	162
<b>19</b>	<b>Integration</b>	<b>163</b>
19.1	Riemann-Integrierbarkeit . . . . .	163
<b>20</b>	<b>Integration in mehreren Veränderlichen</b>	<b>164</b>
20.1	Häufige Additionstheoreme . . . . .	164
20.2	Integral-Shortcuts . . . . .	165



**Teil I**

# **HM 1 — Zusammenfassung**

# Kapitel 1

## Vorkurs

### 1.1 Aussagenlogik

#### 1.1.1 Definition Aussage

Eine Aussage ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch ist.

#### Bemerkung

Wir beschäftigen uns mit der klassischen zweiwertigen Logik. Es gibt auch Logiken mit 3 bzw. 4 Werten.

#### 1.1.2 Verknüpfungen

Formal kann eine Oder-Verknüpfung mit dem  $\vee$ -Zeichen durch eine Wahrheitstabelle definiert werden:

$A$	$B$	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Analog kann eine Und-Verknüpfung mit dem  $\wedge$ -Zeichen durch eine Wahrheitstabelle definiert werden:

$A$	$B$	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Und eine Negation wird definiert durch:

$A$	$\neg A$
1	0
0	1

Eine sog. Implikation wird durch das  $\Rightarrow$ -Zeichen dargestellt und ist definiert durch:

$A$	$B$	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

### Bemerkung

Bei mehr als einer Verknüpfung muss klar sein welche Verknüpfung als erstes ausgewertet werden muss, hierfür werden Klammern verwendet.

### 1.1.3 Mehr zu Implikationen

Bei der Aussage  $A \Rightarrow B$  bezeichnet man  $A$  als hinreichende Bedingung und  $B$  als notwendige Bedingung.

Die Aussage  $A \Rightarrow B$  ist äquivalent zu  $\neg B \Rightarrow \neg A$ .

### 1.1.4 Bezeichnung von Aussagen

Eine Aussageform heißt:

- (a) Allgemeingültig (oder Tautologie), wenn sie als Wahrheitswert stets den Wert wahr annimmt.
- (b) Erfüllbar, wenn die Wahrheitstabelle mindestens einmal den Wert wahr enthält.
- (c) Unerfüllbar (oder Kontradiction), wenn die Wahrheitstabelle nur falsch-Einträge enthält.

### 1.1.5 Satz der Identität

Mit  $A \Leftrightarrow B$  kürzen wir die Aussage:

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

ab.

### Bemerkung

Für den allg. Fall sagt man zu  $A \Leftrightarrow B$ :  $A$  ist äquivalent zu  $B$ . Das heißt aber nicht, dass  $A = B$  ist.

## 1.2 Mengen

### 1.2.1 Definition: Mengen nach Cantor

Unter einer Menge versteht man eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterscheidbarer Objekte unsere Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

### 1.2.2 Begrifflichkeiten und Schreibweise

Objekte einer Menge bezeichnet man als Elemente einer Menge.

Schreibweise:

- (a)  $x \in M$  oder  $x \notin M$
- (b) Mengen können durch Aufzählen der Elemente beschrieben werden:  $M = \{a, b, c\}$
- (c) Mengen können durch Eigenschaften der Elemente beschrieben werden:  $M = \{x : x \text{ hat Eigenschaft} \dots\}$

### 1.2.3 Leere Menge, Teilmengen

- (a) Die Menge, die kein Element enthält, heißt leere Menge. Wir bezeichnen diese mit  $\emptyset$ .
- (b) Eine Menge  $M_1$  heißt Teilmenge einer Menge  $M_2$  (Schreibweise  $M_1 \subseteq M_2$ ) falls jedes Element von  $M_1$  auch Element von  $M_2$  ist. D.h. es gilt:

$$x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2$$

- (c) Zwei Mengen sind gleich wenn gilt:

$$M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_1$$

- (d)  $M_1$  heißt echte Teilmenge von  $M_2$  wenn gilt:

$$M_1 \subseteq M_2 \wedge M_1 \neq M_2$$

Schreibweise:  $M_1 \subset M_2$  oder  $M_1 \subsetneq M_2$ .

### 1.2.4 Transitivität u.a.

Für Mengen  $M, M_1, M_2, M_3$  gilt stets:

- (a) Aus  $M_1 \subseteq M_2$  und  $M_2 \subseteq M_3$  folgt stets:  $M_1 \subseteq M_3$
- (b)  $M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_1$
- (c)  $M \subseteq M$  und  $\emptyset \subseteq M$

### 1.2.5 Verknüpfung von Mengen

Für Mengen  $M_1$  und  $M_2$  definiert man:

- (a) Die Vereinigung von  $M_1$  und  $M_2$  durch:

$$M_1 \cup M_2 := \{x : x \in M_1 \vee x \in M_2\}$$

- (b) Den Schnitt von  $M_1$  und  $M_2$  durch:

$$M_1 \cap M_2 := \{x : x \in M_1 \wedge x \in M_2\}$$

- (c) Die Differenz von  $M_1$  und  $M_2$  durch:

$$M_1 \setminus M_2 := \{x : x \in M_1 \wedge x \notin M_2\}$$

- (d) Das Kartesische Produkt von  $M_1$  und  $M_2$  durch:

$$M_1 \times M_2 := \{(a, b) : a \in M_1 \wedge b \in M_2\}$$

- (e) Das Kartesische Produkt von  $M_1$  und  $M_1$  durch;

$$(M_1)^2 := M_1 \times M_1$$

### 1.2.6 Potenzmenge

Für eine Menge  $M$  ist durch

$$P(M) := \{A : A \subseteq M\}$$

die Potenzmenge definiert (Menge aller Teilmengen von  $M$ ).

#### Bemerkung

Hier gilt  $\emptyset \in P(M)$ .

### 1.2.7 Rechenregeln für Mengen

Für bel. Mengen  $M_1, M_2, M_3$  gilt:

- (a) Kommutativität:

$$M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1 \text{ und } M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$$

- (b) Assoziativität:

$$(M_1 \cup M_2) \cup M_3 = M_1 \cup (M_2 \cup M_3) \text{ und } (M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3)$$

- (c) Distributivgesetz:

$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3) \text{ und } M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$$

### 1.2.8 Komplement

Ist  $X$  eine feste Menge und  $M \subseteq X$  beliebig, so heißt

$$M^c := X \setminus M$$

das Komplement von  $M$  (bzgl.  $X$ ).

### 1.2.9 Bemerkung

Die Schreibweise erfordert das  $X$  aus dem Kontext bekannt sein muss.

### 1.2.10 Verknüpfungen über mehrere Elemente

Für Mengen  $M_1, M_2, \dots, M_n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir die Notation:

(a)

$$\bigcup_{k=1}^n M_k = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n$$

(b)

$$\bigcap_{k=1}^n M_k = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n$$

(c)

$$\prod_{k=1}^n M_k = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$$

### 1.2.11 Wichtige Zusammenhänge

(a)  $(M^c)^c = M$

(b)  $M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow M_2^c \subseteq M_1^c$

(c)  $(M_1 \cup M_2)^c = M_1^c \cap M_2^c$

## 1.3 Vollständige Induktion

### 1.3.1 Summen und Produktzeichen

Für  $m, n \in \mathbb{Z}, m \leq n$  und  $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  definieren wir:

$$\sum_{k=m}^n a_k := a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$$

und

$$\prod_{k=m}^n a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_n$$

Falls  $m > n$  ist definieren wir  $\sum_{k=m}^n a_k := 0$  und  $\prod_{k=m}^n a_k := 1$

### 1.3.2 Prinzip der Vollständigen Induktion

Gegen seien Aussagen  $A(n)$  für  $n \geq n_0$  mit  $n_0, n \in \mathbb{Z}$  ( $n_0$  beliebig aber fest).  
Und es gelte:

- (a)  $A(n_0)$  ist wahr
- (b) Für alle  $n \geq n_0$  gilt:  $A(n) \Rightarrow A(n+1)$

#### Bemerkung

- (a)  $n_0$  wird als Induktionsanfang,  $n$  als Induktionsschritt bezeichnet
- (b) Nachteil: wir wissen nicht wieso etwas gilt, nur dass es gilt

### 1.3.3 Rechenregeln für Summen

Für  $m, n \in \mathbb{Z}$  und  $a_k, b_k, c \in \mathbb{R}$  gilt:

- (a) Indexverschiebung:

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m+l}^{n+l} a_{k-l}$$

für beliebiges  $l \in \mathbb{Z}$

- (b) Trennen von Summen:

$$\sum_{k=m}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k$$

- (c) Konstante Faktoren können aus der Summe “gezogen” werden:

$$\sum_{k=m}^n c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=m}^n a_k$$

- (d) “Teleskopsummen”:

$$\sum_{k=m}^n (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}$$

- (e) Summe über Konstanten:

$$\sum_{k=m}^n c = c \cdot (n - m + 1)$$

### 1.3.4 Doppelsummen

Für  $n \in \mathbb{N}$  und  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq j \leq n$  gilt:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{ij}$$

### 1.3.5 Fakultät und Binomialkoeffizient

Für  $n \in \mathbb{N}_0$  und ein  $\alpha \in \mathbb{R}$  heißt

(a) die Fakultät von  $n$

$$n! := \begin{cases} n \cdot (n-1)! & ; n \neq 0 \\ 1 & ; n = 0 \end{cases}$$

(b) den Binomialkoeffizienten

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\prod_{k=1}^n (\alpha - k + 1)}{n!}$$

### 1.3.6 Rechenregeln für den Binomialkoeffizienten

Für  $n, m \in \mathbb{N}_0$  mit  $m \geq n$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt:

(a)

$$\binom{\alpha}{n} + \binom{\alpha}{n+1} = \binom{\alpha+1}{n+1}$$

(b)

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

### 1.3.7 Binomischer Lehrsatz

Für  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

### 1.3.8 Definition Betrag

Für  $x \in \mathbb{R}$  heißt

$$|x| := \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

der Betrag von  $x$



### Bemerkung

Es gilt:

- (a)  $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- (b)  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- (c)  $|x - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$
- (d)  $|x| = \max\{x, -x\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

### 1.3.9 Dreiecksungleichung

Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:

- (a)  $|x + y| \leq |x| + |y|$  (obere Dreiecksungleichung)
- (b)  $|x + y| \geq ||x| - |y||$  (untere Dreiecksungleichung)

### Bemerkung

Es gilt  $x \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

## 1.4 Funktion und Differentiation

Eine Funktion (bzw. Abbildung, Operator)  $f$  von  $X$  nach  $Y$  ist eine Vorschrift, die jedem  $x \in X$  ein eindeutig bestimmtes  $y \in Y$  zuordnet. Das  $x \in X$  zugeordnete Element aus  $Y$  wird mit  $f(x)$  bezeichnet.

### Schreibweise

$$f : X \rightarrow Y, \quad x \mapsto f(x)$$

### Bemerkung

$X$  heißt Definitionsbereich,  $Y := \{y \in Y : \exists x \in X \text{ mit } y = f(x)\}$  die Zielmenge.

### 1.4.1 Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

- (a) Eine Funktion heißt injektiv, falls gilt:

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) \text{ for all } x, y \in X$$

- (b) Eine Funktion heißt surjektiv, falls gilt:

$$\forall y \in Y \exists x \in X : y = f(x)$$

- (c) Eine Funktion heißt bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

### 1.4.2 Verknüpfung von Funktionen

Gegeben seien  $f, g : X \rightarrow Y$  und  $c \in \mathbb{R}$ . Dann definieren wir die Funktionen

$$\begin{aligned} c \cdot f : X &\rightarrow Y, & x &\mapsto (cf)(x) := c \cdot f(x) \\ f + g : X &\rightarrow Y, & x &\mapsto (f+g)(x) := f(x) + g(x) \\ f \cdot g : X &\rightarrow Y, & x &\mapsto (fg)(x) := f(x) \cdot g(x) \\ \frac{f}{g} : X &\rightarrow Y, & x &\mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \text{ für } x \text{ mit } g(x) \neq 0 \end{aligned}$$

### 1.4.3 Verkettung von Funktionen

Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  gegeben, dann heißt die Funktion

$$g \circ f : X \rightarrow Z, x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

die Verkettung von  $g$  mit  $f$  oder das Kompositum von  $g$  mit  $f$

### 1.4.4 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

- (a)  $f$  heißt stetig in  $x_0$ , wenn  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  gilt
- (b)  $f$  heißt stetig auf  $I$ , wenn  $f$  in jedem  $x_0 \in I$  stetig ist.
- (c)  $f$  heißt differenzierbar in  $x_0$ , wenn der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  existiert.

#### Bemerkung

Im Fall der Differenzierbarkeit bezeichnen wir den Grenzwert mit  $f'(x_0)$  (Newton Notation) oder  $\frac{d}{dx}f(x_0)$  (Leibniz Notation).

### 1.4.5 Zusammenhang Differenzierbarkeit — Stetigkeit

Eine differenzierbare Funktion ist stets stetig.

#### Bemerkung

Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion muss hingegen nicht stetig sein.

### 1.4.6 Verkettung differentierbarer Funktionen

Seien  $g, f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differentierbar, dann sind  $cf$ ,  $f + g$ ,  $f \cdot g$  und im Fall  $g(x) \neq 0 \forall x \in I$  auch  $\frac{f}{g}$  differentierbare Funktionen, und es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(c \cdot f)(x) &= (c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x) \\ \frac{d}{dx}(f + g)(x) &= (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) \\ \frac{d}{dx}(f \cdot g)(x) &= (f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}\end{aligned}$$

### 1.4.7 Differentiation von Monomen

Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto x^n = f(x)$  und  $n \in \mathbb{Z}$ . Dann ist  $f$  differentierbar mit  $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ .

### 1.4.8 Kettenregel

Gegeben seien Intervalle  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  und differentierbare Funktionen  $f : I \rightarrow J, g : J \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist auch  $g \circ f$  differentierbar und es gilt:

$$\frac{d}{dx}(g \circ f)(x) = \frac{d}{dx}g(f(x)) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

### 1.4.9 Ableitung der Umkehrfunktion

Sei  $f : I \rightarrow J$  bijektiv und differentierbar dann ist die Umkehrfunktion  $f^{-1} : J \rightarrow I$  ebenfalls differentierbar und es gilt:

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

## 1.5 Elementare Funktionen

## 1.6 Integralrechnung

## 1.7 Komplexe Zahlen

## 1.8 Elementare Differentialgleichungen

### 1.8.1 Definition Rechteck

- (a)  $I_1, I_2, \dots, I_n \subseteq \mathbb{R}^n$  seien nicht leeren Intervalle. Dann heißt die Menge  $M = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$  ein (n-Dimensionales) Rechteck.

- (b) Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Rechteck und  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann heißt eine Funktion  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  die Lösung der Differentialgleichung (1. Ordnung)

$$y' = \varphi(t; y)$$

wenn gilt:

- i  $y$  ist stetig differentierbar
  - ii  $(t, y(t)) \in M \forall t \in I$
  - iii  $y'(t) = \varphi(t, y(t)) \forall t \in I$
- (c) Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Rechteck,  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $(t_0, y_0) \in M$ . Dann heißt  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung des Anfangswertproblems (AWP)

$$y' = \varphi(t, y); y(t_0) = y_0$$

wenn  $y$  eine Lösung von  $y' = f(t, y)$  ist und  $y(t_0) = y_0$  gilt.

### Bemerkung

Eine DGL  $n$ -ter Ordnung mit  $n \geq 2$  ist nicht direkt durch die Definition beschrieben.

Wenn wir aber eine Funktion  $\vec{y} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definiert mit:

$$\begin{aligned} y(t) &= \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \\ y_1(t) &= x(t) \\ y_2(t) &= \dot{y}_1(t) - \dot{x}(t) \\ \dot{y}_2(t) &= \ddot{x}(t) = -\frac{a_1}{a_2}\dot{x}(t) - \frac{a_0}{a_2}x(t) = -\frac{a_1}{a_2}y_2(t) - \frac{a_0}{a_2}y_1(t) \end{aligned}$$

### 1.8.2 Lineare DGL 1. Ordnung

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $t_0$  ein Punkt in  $I$  mit  $t_0 - \delta; t_0 + \delta \subseteq I$  (d.h. nicht auf dem Rand von  $I$ ). Weiter seien  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

Definiere

$$\begin{aligned} y_0 &: I \rightarrow \mathbb{R} \\ y_0(t) &= \exp\left(\int_{t_0}^t f(u) du\right) \\ y &: I \rightarrow \mathbb{R} \\ y(t) &= \left(y_0 \cdot \int_{t_0}^t \frac{g(u)}{y_0(u)} du\right) \cdot y_0(t) \end{aligned}$$

Dann ist:

- (a)  $y_0$  eine Lösung von  $y' = f(t)y; y(t_0) = 1$
- (b)  $y$  eine Lösung von  $y' = f(t)y + g(t); y(t_0) = y_0$

# Kapitel 2

## Grenzwerte

### 2.1 Gruppen und Körper

#### 2.1.1 Gruppen

Eine Gruppe ist definiert als ein Tupple aus einer (nicht-leeren) Menge und einer Verknüpfung. Eine Gruppe erfüllt die folgenden Axiome (seien  $a, b, c \in \mathbb{G}$ ):

$$\begin{array}{ll} a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c & \text{(Assoziativität)} \\ a \circ \varepsilon = a & \text{(Rechtsneutrales Element)} \\ a \circ a' = \varepsilon & \text{(Rechtsinverses Element)} \end{array}$$

Eine abelsche Gruppe erfüllt des weiteren:

$$a \circ b = b \circ a \quad \text{(Kommutativität)}$$

#### 2.1.2 Körper

Ein Körper ist definiert als eine Menge mit mindestens zwei Elementen (0 und 1) und zwei Verknüpfungen.

$$\begin{array}{ll} + : \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \rightarrow \mathbb{K} \\ \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \rightarrow \mathbb{K} \end{array}$$

$\mathbb{K}$  ist bezüglich der Addition und der Multiplikation (genauer:  $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ ) ein abelscher Körper, das heißt es gilt (seien  $a, b, c \in \mathbb{K}$ ):

$$\begin{aligned}
 a + (b + c) &= (a + b) + c && \text{(Assoziativität bez. der Addition)} \\
 a + 0 &= a && \text{(Existenz einer 0)} \\
 a + (-a) &= 0 && \text{(Existenz eines Inversen bez. der Addition)} \\
 a + b &= b + a && \text{(Kommutativität bez. der Addition)} \\
 a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c && \text{(Assoziativität bez. der Multiplikation)} \\
 a \cdot 1 &= a && \text{(Existenz einer 1)} \\
 a \cdot a^{-1} &= 1 \quad \forall a \neq 0 && \text{(Existenz eines Inversen bez. der Multiplikation)} \\
 a \cdot b &= b \cdot a && \text{(Kommutativität bezüglich der Multiplikation)}
 \end{aligned}$$

außerdem gilt:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad \text{(Distributivgesetz)}$$

### Bemerkung

$\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  sind Körper.  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{N}$  nicht (kein additiv inverses bei  $\mathbb{N}$ , kein multiplikativ inverses bei beiden).

### 2.1.3 Angeordnete Körper

Ein Körper heißt angeordnet wenn folgende Axiome erfüllt sind (seien  $a, b, c \in \mathbb{K}$ ):

$$\begin{aligned}
 a < b \vee b < a \vee a = b \\
 a < b \wedge b < c &\Rightarrow a < c \\
 a < b &\Rightarrow a + c < b + c \\
 a < b \wedge c > 0 &\Rightarrow a * c < b * c
 \end{aligned}$$

### Bemerkung

$\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$  sind angeordnete Körper. Für  $\mathbb{C}$  kann keine Ordnungsrelation definiert werden so das alle Axiome erfüllt sind.

### Gebräuchliche Definition zu angeordneten Körpern

Es gilt  $0 < 1$ , sonst Widerspruch in (O3).

Die Ordnungsrelation wird dann definiert durch:

$$\begin{aligned}
 2 &:= 1 + 1 \\
 3 &:= 2 + 1 \\
 4 &:= 3 + 1 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Die Natürlichen Zahlen werden Induktiv definiert:

1.  $1 \in \mathbb{N}$
2.  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n + 1) \in \mathbb{N}$

### **Bemerkung**

Aus 2. lässt sich direkt ableiten das  $\mathbb{N}$  nach oben unbeschränkt ist (Archimedisches Prinzip).

### **Vollständig Angeordnete Körper**

Ein Körper heißt Vollständig, falls jede nach oben beschränkte, nicht-leere Teilmenge ein Supremum besitzt.

$\Rightarrow \mathbb{R}$  ist der einzige Vollständig angeordnete Körper.

### **Bemerkung**

$\mathbb{Q}$  ist nicht vollständig angeordnet, da  $A := \{x | x^2 \leq 2\} \subset \mathbb{Q}$  kein Supremum besitzt (Supremum ist  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ).

### **2.1.4 Minimum und Maximum**

Sei  $\mathbb{K}$  ein angeordneter Körper und  $A \subset \mathbb{K}$  dann heißt  $m$  Minimum falls gilt:

1.  $m \in \mathbb{K}$
2.  $a \geq m \quad \forall a \in A$

Analog ist das Maximum definiert: Sei  $\mathbb{K}$  ein angeordneter Körper und  $A \subset \mathbb{K}$  dann heißt  $m$  Maximum falls gilt:

1.  $m \in \mathbb{K}$
2.  $a \leq m \quad \forall a \in A$

**Schreibweisen:**  $m = \min(A)$  bzw.  $m = \max(A)$

### **Bemerkung**

Minimum und Maximum existieren nicht immer.

**Beispiel:**  $A := \{x | x > 0\} \subset \mathbb{R}$  hat nicht 0 als Minimum da  $0 \notin A$  und kein beliebiges  $m$  da  $\tilde{m} := \frac{m}{2} < m \quad \forall m \in A$

### 2.1.5 Obere und untere Schranke

Sei  $\mathbb{K}$  ein angeordneter Körper und  $A \subset \mathbb{K}$  dann ist  $s$  untere Schranke falls gilt:

- $s \leq a \quad \forall a \in A$

Analog ist die obere Schranke definiert: Sei  $\mathbb{K}$  ein angeordneter Körper und  $A \subset \mathbb{K}$  dann ist  $s$  obere Schranke falls gilt:

- $s \geq a \quad \forall a \in A$

#### Bemerkung

Hat eine Menge eine obere (bzw. untere) Schranke heißt er nach oben (bzw. unten) beschränkt. Ist eine Menge nach unten und oben beschränkt bezeichnet man sie als beschränkt.

### 2.1.6 Supremum und Infimum

$s$  heißt Infimum (größte untere Schranke) falls gilt:

- $s$  ist untere Schranke
- Falls  $\tilde{s}$  ebenfalls untere Schranke ist gilt  $s \geq \tilde{s}$

Analog ist das Supremum definiert:  $s$  heißt Supremum (kleinste obere Schranke) falls gilt:

- $s$  ist obere Schranke
- Falls  $\tilde{s}$  ebenfalls obere Schranke ist gilt  $s \leq \tilde{s}$

**Schreibweise:**  $s = \inf(A)$  bzw.  $s = \sup(A)$

#### Bemerkung

Wenn Minimum (bzw. Maximum) existieren sind diese gleich dem Infimum (bzw. Supremum).

## 2.2 Folgen

Eine Folge  $a_n$  ist definiert als eine Funktion:

$$a_n := \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{M} \subset \mathbb{R}$$

oder auch  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ .

### 2.2.1 Konvergenz

Eine Folge  $a_n$  heißt konvergent wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > n_0(\varepsilon)$$



### Bemerkung

Der Grenzwert ist eindeutig, d.h. es existiert nur ein Grenzwert.

### Schreibweise

Falls  $a_n$  gegen  $a$  konvergiert schreibt man:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

### 2.2.2 Bestimmte Divergenz

Eine Folge  $a_n$  heißt bestimmt Divergent wenn gilt

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n(x) : a_n > x \text{ bzw. } a_n < x$$

### Schreibweise:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ bzw. } -\infty$$

### 2.2.3 Beschränktheit

Eine Folge heißt beschränkt wenn gilt:

$$|a_n| < c \quad \forall n$$

### Beschränktheit nach oben/unten

Eine Folge heißt nach oben (bzw. unten) beschränkt wenn gilt:

$$a_n < c \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ bzw. } a_n > c \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

### 2.2.4 Zusammenhang Konvergenz — Beschränktheit

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

### 2.2.5 Grenzwertrechenregeln

Seien  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ,  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ ,  $(c_n)_{n=1}^{\infty}$  Folgen in  $\mathbb{C}$  mit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

Dann gilt:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- Falls  $b \neq 0$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

### 2.2.6 Sandwich Theorem u.a.

Seien  $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty, (c_n)_{n=1}^\infty$  Folgen in  $\mathbb{R}$  mit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \text{ und } \gamma \in \mathbb{R}$$

Dann gilt:

- $a_n \leq \gamma \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq \gamma$
- $a_n \geq \gamma \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \geq \gamma$
- $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq b$
- $a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \wedge a = b \Rightarrow c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a = b$

### 2.2.7 Monotonie

Eine Folge  $(a_n)_{n=1}^\infty$  in  $\mathbb{R}$  heißt:

- Monoton wachsend falls:  $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (Schreibweise:  $a_n \nearrow$ )
- Monoton fallend falls:  $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (Schreibweise:  $a_n \searrow$ )
- Streng monoton wachsend falls:  $a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (Schreibweise:  $a_n \uparrow$ )
- Streng monoton fallend falls:  $a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (Schreibweise:  $a_n \downarrow$ )

### 2.2.8 Zusammenhang Monotonie und Beschränktheit

Jede Monotone und beschränkte Folge konvergiert.

## 2.3 Häufungswerte

Häufungswerte sind Grenzwerte einer Teilfolge.

### 2.3.1 Teilfolgen

Eine Folge  $(b_n)_{n=1}^\infty$  heißt Teilfolge von  $(a_n)_{n=1}^\infty$ , wenn eine streng monotone Funktion  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  existiert mit  $b_n = a_{\varphi(n)}$ .

### 2.3.2 Teilfolgen einer Konvergenten Folge

Sei  $(a_n)_{n=1}^\infty$  eine konvergente Folge in  $\mathbb{C}$  mit:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $(b_n)_{n=1}^\infty$  sei eine Teilfolge. Dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ .

### 2.3.3 Häufungswerte

Sei  $(a_n)_{n=1}^\infty$  eine Folge in  $\mathbb{C}$ . Dann heißt  $a \in \mathbb{C}$  ein Häufungswert einer Folge, falls eine Teilfolge gegen  $a$  konvergiert.

### 2.3.4 Limes superior/inferior

Sei  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  eine reelle Folge, dann heißt:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \sup\{x \in \mathbb{R}, a_n > x \text{ } \infty\text{-oft}\}$$

der Limes superior von  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  und

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \inf\{x \in \mathbb{R}, a_n < x \text{ } \infty\text{-oft}\}$$

der Limes inferior von  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ .

### 2.3.5 Charakterisierung limsup/liminf

Sei  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  eine reelle Folge und  $s \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

(a)

$$s = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt:}$$

i  $a_n < s + \varepsilon$  für fast alle  $n$

ii  $a_n > s - \varepsilon$  für  $\infty$ -viele  $n$

(b)

$$s = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt:}$$

i  $a_n > s - \varepsilon$  für fast alle  $n$

ii  $a_n < s + \varepsilon$  für  $\infty$ -viele  $n$

### 2.3.6 Konvergenz und limsup/liminf

Eine beschränkte Folge  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  in  $\mathbb{R}$  konvergiert  $\Leftrightarrow$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$$

### 2.3.7 Satz von Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge in  $\mathbb{C}$  besitzt eine konvergente Teilfolge.

### 2.3.8 Cauchy-Kriterium

Sei  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  eine Folge in  $\mathbb{C}$ , dann gilt

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ konv. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : |a_n - a_m| < \varepsilon \forall n, m > n_0(\varepsilon)$$

#### Bemerkung

Im Gegensatz zur Definition der Folgenkonvergenz muss der Grenzwert nicht bekannt sein.

## 2.4 Unendliche Reihen

### 2.4.1 Definition

Sei  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  eine Folge in  $\mathbb{C}$ , dann heißt die durch

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

definiert Folge  $(s_n)_{n=1}^{\infty}$  eine Folge von Partialsummen der unendlichen Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Falls die Folge  $(s_n)_{n=1}^{\infty}$  konvergiert setzen wir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n =: \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

### 2.4.2 Cauchy-Kriterium für unendliche Reihen

Sei  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  eine  $\infty$ -Reihe, dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon \quad \forall n, m > n_0(\varepsilon)$$

und:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

### 2.4.3 Grenzwertrechenregeln für unendliche Reihen

Seien

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} b_k \text{ gegeben und } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

dann gilt:

(a)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} b_k \text{ konv.:} \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) \text{ konv.} \\ \text{und: } \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_k \end{aligned}$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}(a_k) \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im}(a_k) \text{ konv.}$$

(c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Leftrightarrow \text{die Restreihe } R_n := \sum_{k=n}^{\infty} a_k \text{ konv. gegen } 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$$

#### 2.4.4 Positive Folgen

Es sei  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  eine Folge mit  $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in [0, \infty)$  dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Leftrightarrow \text{Folge der Partialsummen } \sum_{k=1}^n a_k \text{ ist beschr.}$$

#### 2.4.5 Leibniz-Kriterium

Sei  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  eine monoton fallende, reelle Folge. Dann gilt falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  ist, konv. die sogenannte alternierende Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

#### 2.4.6 Absolute Konvergenz

Eine Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  heißt absolut konvergent, wenn

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert.

#### Bemerkung

Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent.

#### 2.4.7 Majorantenkriterium

Seien  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  mit  $b_k \geq 0$  gegeben.  
Wenn  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  konv. und ein  $c > 0$  ex. mit

$$|a_k| \leq c \cdot |b_k|$$

für fast alle  $k$ , dann konv.  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut.

### 2.4.8 Minorantenkriterium

Falls ein  $c > 0$  ex. mit  $a_k \geq c \cdot b_k > 0$  für fast alle  $k$ , dann:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ div.} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ div.}$$

### 2.4.9 Wurzel- und Quotientenkriterium

Sei  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  gegeben. Dann gilt:

(a) Wenn

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

gilt, dann konv.  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut.

Wenn

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

gilt, dann div.  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

(b) Wenn  $a_n \neq 0 \forall n$  und

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

gilt, dann konv.  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut.

Wenn  $a_n \neq 0 \forall n$  und

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$$

gilt, dann divergiert.  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

### Bemerkung

Wenn das Wurzelkriterium keine Aussage macht, kann das Quotientenkriterium trotzdem eine Aussage machen.

### 2.4.10 Umordnung einer Reihe

Eine Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  heißt Umordnung der Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , wenn eine bij. Abb  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ex. mit  $b_k = a_{\varphi(k)}$ .

### Bemerkung

Die Reihe konvergiert nur gegen den selben Wert, wenn  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut konvergent ist.

### 2.4.11 Cauchy-Produkt

Die Reihen  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  seien absolut konv.. Dann gilt:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k a_j \cdot b_{k-j}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

und  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  konv. ebenfalls absolut.

### 2.4.12 Cauchy-Verdichtungssatz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ konv.}$$

## 2.5 Potenzreihen

### 2.5.1 Definition

Sei  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  eine Folge in  $\mathbb{C}$  und  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k$$

eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt  $z_0$  und Koeffizienten  $a_n$ .

#### Bemerkung

Viele wichtige Funktionen können als Potenzreihen dargestellt werden.

### 2.5.2 Hadamard (Konvergenzradius mit Wurzelkriterium)

Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  eine PR. Definiere

$$R := \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Dabei sei  $R := \infty$ , falls  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$  und  $R = 0$  falls  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ .

Dann konv. die PR absolut, falls  $|z - z_0| < R$  und divergiert falls  $|z - z_0| > R$ .

#### Bemerkung I

Für  $|z - z_0| = R$  wird keine Aussage gemacht.

#### Bemerkung II

$R$  heißt der Konvergenzradius der Potenzreihe.

### 2.5.3 Konvergenzradius mit Quotientenkriterium

Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  eine PR. Der Potenzradius kann ebenfalls berechnet werden durch:

$$R = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

### 2.5.4 Hinweis

Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

### 2.5.5 Integration und Differentiation von Potenzreihen

Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  mit Konvergenzradius  $R$ . Dann besitzen auch die Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a_k(z - z_0)^{k-1} \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (z - z_0)^{k+1}$$

den Konvergenzradius  $R$ .

### 2.5.6 Cauchy-Produkt für Potenzreihen

Seien  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z - z_0)^k$  Potenzreihen, die den Konvergenzradius  $R_1$  bzw.  $R_2$  besitzen. Dann besitzt

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k \text{ mit } c_k = \sum_{l=0}^k a_l \cdot b_{k-l}$$

den Konvergenzradius  $R = \min\{R_1, R_2\}$ .

### 2.5.7 Wichtige Potenzreihen

(a) Die Exponentialfunktion ist definiert durch:

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

(b) Die Trigonometrischen Funktionen sind definiert durch:

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \sin(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \\ \cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \cos(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \end{aligned}$$



(c) Tangens und Cotangens sind dann definiert als:

$$\begin{aligned}\tan : \{z \in \mathbb{C} : \cos(z) \neq 0\} &\rightarrow \mathbb{C} & z \mapsto \tan(z) &:= \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \\ \cot : \{z \in \mathbb{C} : \sin(z) \neq 0\} &\rightarrow \mathbb{C} & z \mapsto \cot(z) &:= \frac{\cos(z)}{\sin(z)}\end{aligned}$$

### 2.5.8 Alternative Definition der Exponentialfunktion

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp(z)$$

## 2.6 Funktionsgrenzwerte

### 2.6.1 Bemerkung

In diesem Intervall bezeichnet  $I$  stets ein offenes Intervall und  $\bar{I}$  dessen sog. Abschluss z.B.:

- (a)  $I = (a, b)$  und  $\bar{I} = [a, b]$
- (b)  $I = (-\infty, b)$  und  $\bar{I} = (-\infty, b]$
- (c)  $I = (a, \infty)$  und  $\bar{I} = [a, \infty)$
- (d)  $I = (\infty, \infty)$  und  $\bar{I} = (\infty, \infty)$

### 2.6.2 Epsilon-Umgebung

Für  $x_0 \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$  heißt

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

die  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x_0$ . Und

$$\dot{U}_\varepsilon(x_0) := U_\varepsilon(x_0) \setminus \{0\} = (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$$

die punktierte  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x_0$ .

### 2.6.3 Funktionsgrenzwerte (über Delta-Epsilon-Kriterium)

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in I$

- (a)  $f$  konv. gegen ein  $a \in \mathbb{R}$  für  $x \rightarrow x_0$  (kurz:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ) wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : |f(x) - a| < \varepsilon \quad \forall x \text{ mit } |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \text{ und } x \neq x_0$$

Schreibweise:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \text{ oder } f(x) = a \text{ für } x \rightarrow x_0$$

(b) Sei  $x_0 \in I$ , dann konv.  $f$  einseitig von links gegen  $a \in \mathbb{R}$  wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : |f(x) - a| < \varepsilon \forall x \in (x_0 - \delta\varepsilon, x_0)$$

Schreibweise:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$$

(c) Sei  $x_0 \in I$ , dann konv.  $f$  einseitig von rechts gegen  $a \in \mathbb{R}$  wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : |f(x) - a| < \varepsilon \forall x \in (x_0, x_0 + \delta\varepsilon)$$

Schreibweise:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$$

(d) Sei  $I = (\alpha, \infty)$  (bzw.  $I = (-\infty, \beta)$ ) dann konv.  $f$  gegen  $a$  für  $x \rightarrow \infty$  (bzw.  $x \rightarrow -\infty$ ) wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_1(\varepsilon) : |f(x) - a| < \varepsilon \forall x \in I : x > x_1(\varepsilon) \text{ (bzw. } x < x_1(\varepsilon))$$

## 2.6.4 Folgenkriterium

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in \bar{I}, u \in \mathbb{R}$  dann gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \Leftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Für eine beliebige Folge } (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ mit} \\ \text{(i) } x_n \neq x_0 \forall n \\ \text{(ii) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \\ \text{gilt stets:} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a \end{array} \right.$$

## 2.6.5 Rechenregeln für Funktionsgrenzwerte

Seien  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in I$  und gelte

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$$

Dann gilt:

(a)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha \cdot f(x)) = \alpha \cdot a$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) + f(x)) = a + b$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) \cdot f(x)) = a \cdot b$$

(d)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{a}{b} \quad \text{falls } b \neq 0$$

### 2.6.6 Cauchy-Kriterium für Funktionsgrenzwerte

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in I$  dann ex.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : |f(x) - f(y)| < \varepsilon \forall x, y \in I \text{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \text{ und } 0 < |y - x_0| < \delta(\varepsilon)$$

### 2.6.7 Bestimmte Divergenz

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$  dann definieren wir die bestimmte Divergenz (uneigentliche Konvergenz) von  $(f \rightarrow \infty)$  durch

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall c > 0 \exists \delta(c) : f(x) > c \forall x \text{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta(c)$$

Analog definieren man links- und rechtsseitig Divergenz gegen  $\infty$  bzw.  $-\infty$ .

### 2.6.8 Monotone Funktionen

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dann heißt (auf  $I$ )

- (a) monoton wachsend ( $f \nearrow$ ), falls gilt

$$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

- (b) streng monoton wachsend ( $f \uparrow$ ), falls gilt

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

- (c) monoton fallend ( $f \searrow$ ), falls gilt

$$x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

- (d) streng monoton fallend ( $f \downarrow$ )

$$x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

- (e) monoton falls  $f$  monoton fallend oder monoton steigend ist

- (f) streng monoton falls  $f$  streng monoton fallend oder streng monoton steigend ist

- (g) Beschränkt falls gilt:

$$\exists c : |f(x)| < c \forall x \in I$$

### 2.6.9 Grenzwerte an Intervallgrenzen

Sei  $a \leq b$  und  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  monoton und beschränkt, dann ex.

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \text{ und } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

## 2.7 Stetigkeit

### 2.7.1 Anschaulich

Graph einer Funktion kann ohne Absetzen gezeichnet werden  $\Leftrightarrow$

Es gibt keine Sprünge  $\Leftrightarrow$

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$  an keiner Stelle  $x_0 \in I$  ist ein Sprung  $\Leftrightarrow$

$$\forall x_0 \in I : \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

### 2.7.2 Stetigkeit: Delta-Epsilon-Kriterium

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in I$ , dann ist  $f$  in  $x_0$  stetig falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in I \text{ mit } |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$$

Und  $f$  ist stetig (auf  $I$ ), wenn  $f$  in jedem  $x_0 \in I$  stetig ist.

### 2.7.3 Bemerkungen

(a)  $f$  ist stetig in  $x_0 \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

gilt.

(b)  $f$  ist stetig in  $x_0$  dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

### 2.7.4 Rechenregeln für Stetigkeit

Sind  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, dann sind auch die Funktionen

(a)  $c \cdot f$  (für  $c \in \mathbb{R}$ )

(b)  $f + g$

(c)  $f \cdot g$

(d) und falls  $g(x) \neq 0 \forall x \in I$   $\frac{f}{g}$

stetig.

Ist  $f : I \rightarrow J, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  und beide stetig dann ist auch  $g \circ f$  stetig.

### 2.7.5 Stetigkeit von Potenzreihen

Sei  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R > 0$ , dann gilt für  $x_1 \in U_R(x_0)$ , dass  $\lim_{x \rightarrow x_1} f(x) = f(x_1)$  (d.h. Potenzreihen sind innerhalb des Konvergenzradius stetig).

### 2.7.6 Umgebung positiver Funktionswerte

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0$ , dann gilt:

$$f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : f(x) > 0 \quad \forall x \in I \text{ mit } |x - x_0| < \delta$$

### 2.7.7 Zwischenwertsatz

Sei  $D = [a, b]$  (also abgeschlossen) und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig dann ex. zu jedem  $y$  zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  ein  $x \in [a, b]$  mit  $f(x) = y$ .

**Genauer:**

$$\forall y \in [m, M] \quad \exists x \in [a, b] \text{ mit } f(x) = y$$

Wobei  $m = \min\{f(a), f(b)\}$  und  $M = \max\{f(a), f(b)\}$ .

### Bemerkung

Bei einer Funktion ist das Bild eines Intervalls wieder ein Intervall. D.h.

$$f([a, b]) = [c, d]$$

### 2.7.8 Existenz des Logarithmus

Die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  ist bijektiv. Das heißt es existiert eine Umkehrfunktion, diese wird  $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  genannt.

### 2.7.9 Maximum/Minimum/Infimum/Supremum einer Funktion

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}$ , dann heißt im Fall der Existenz:

(a)

$$\max_{x \in D} f(x) := \max_D f(x) := \max\{f(x) \mid x \in D\}$$

das Maximum von  $f$  auf  $D$ .

(b)

$$\min_{x \in D} f(x) := \min_D f(x) := \min\{f(x) \mid x \in D\}$$

das Minimum von  $f$  auf  $D$ .

(c)

$$\sup_{x \in D} f(x) := \sup_D f(x) := \sup\{f(x) \mid x \in D\}$$

das Supremum von  $f$  auf  $D$ .

(d)

$$\inf_{x \in D} f(x) := \inf_D f(x) := \inf\{f(x) \mid x \in D\}$$

das Infimum von  $f$  auf  $D$ .

### 2.7.10 Beschränktheit einer stetigen Funktion

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und eine stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben, dann ist  $f$  beschränkt. (d.h.  $\sup_{[a,b]}(f) < \infty$  und  $\inf_{[a,b]}(f) > -\infty$ ).

### 2.7.11 Weierstraß: Existenz von Min und Max

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, dann ex.:

$$\min_{[a,b]} f \text{ und } \max_{[a,b]} f$$

### 2.7.12 Zusammenhang Injektivität — Stetigkeit

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf einem Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$f \text{ inj. auf } I \Leftrightarrow f \text{ ist streng monoton}$$

### 2.7.13 Existenz und Monotonie der Umkehrfunktion

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und streng monoton auf einem Intervall  $I$ . Dann ex. auf  $J := f(I)$  die Umkehrfunktion  $f^{-1} : J \rightarrow I$  und diese ist im gleichen Sinn wie  $f$  streng Monoton und stetig.

### 2.7.14 Gleichmäßige Stetigkeit

Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt gleichmäßig stetig auf  $I$ , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \forall x_1, x_2 \in I \text{ mit } |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$$

#### Bemerkung

Im Gegensatz zur normalen Stetigkeit wird bei der gleichmäßigen Stetigkeit eine Funktion  $\delta(\varepsilon)$  für die ganze Funktion bestimmt und nicht nur für jeden Punkt einzeln (also  $\delta(x_0, \varepsilon)$ ). Es wird also zwischen Stetigkeit in einem Punkt und Stetigkeit auf einem Intervall unterschieden.

## Kapitel 3

# Differentialrechnung

### 3.1 Ableitung

#### 3.1.1 Definition Differenzen-Quotient

Sei  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann heißt  $f$  in  $x_0 \in D$  differentierbar, falls

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

für alle  $x_0 \in D$  existiert.

#### 3.1.2 Rechtsseitige und linksseitige Ableitung

Im Fall der Existenz heißen

$$\begin{aligned} f'(x_0^+) &:= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ bzw.} \\ f'(x_0^-) &:= \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

die rechts- bzw. linksseitige Ableitung in  $x_0$

#### Bemerkung

$$f'(x_0) \text{ ex.} \Leftrightarrow f'(x_0^+) \text{ und } f'(x_0^-) \text{ ex. und } f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$$

#### 3.1.3 Ableitungsregeln

Seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  differentierbar in  $x_0 \in D$ , dann gilt:

- (a)  $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- (b)  $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

(c) Falls  $g(x_0) \neq 0$ :  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

### 3.1.4 Alternative Definition der Ableitung

Sei  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in D$ . Dann gilt:  $f$  differenzierbar in  $x_0 \Leftrightarrow$

$\exists A \in \mathbb{R}$  und  $r : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\lim_{x \rightarrow x_0} r(x) = 0$  so dass gilt:  $f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + r(x) \cdot (x - x_0)$

### 3.1.5 Zusammenhang Differentierbarkeit — Stetigkeit

Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0 \in D \Rightarrow f$  stetig in  $x_0$

### 3.1.6 Differentiation von Potenzreihen

Sei  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$  eine Potenzreihe mit  $R > 0$ , dann ist  $f$  für  $x$  mit  $|x - x_0| < R$  differenzierbar, und es gilt:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (x - x_0)^{k-1}$$

#### Bemerkung

Der Konvergenzradius von  $f'(x)$  ist ebenfalls  $R$ .

### 3.1.7 Ableitung der Umkehrfunktion

Seien  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  Intervalle und  $f : I \rightarrow J$  sei differenzierbar und bijektiv, dann ist auch  $f^{-1} : J \rightarrow I$  differenzierbar und es gilt:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{d}{dx} f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \forall y_0 \in J \text{ für ein } y_0 = f(x_0) \text{ und } f'(y_0) \neq 0$$

### 3.1.8 Kettenregel

Seien  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  differenzierbar auf  $A$  bzw.  $B$ , dann ist auch  $g \circ f$  auf  $A$  differenzierbar und es gilt:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \quad \forall x_0 \in A$$

## 3.2 Mittelwertsätze

### 3.2.1 Satz von Rolle

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar. Falls  $f(a) = f(b)$  gilt, existiert ein  $x_0 \in (a, b)$  mit  $f'(x_0) = 0$



### 3.2.2 Definition lokaler Extrempunkt

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in D$ . Dann besitzt  $f$  in  $x_0$  ein lokales Maximum (bzw. Minimum): $\Leftrightarrow$

$$\exists \delta > 0 : f(x) \leq f(x_0) \text{ (bzw. } f(x) \geq f(x_0)) \quad \forall x \in D \cap U_\delta(x_0)$$

### 3.2.3 Notwendige Bedingung für lokale Extrema

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0 \in D$  und  $x_0$  sei kein Randpunkt, dann gilt:  
Liegt bei  $x_0$  ein lokales Maximum/Minimum  $\Rightarrow f'(x_0) = 0$ .

### 3.2.4 2. Mittelwertsatz

Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar dann existiert ein  $x_0 \in (a, b)$  mit

$$f'(x_0) \cdot (g(b) - g(a)) = g'(x_0) \cdot (f(b) - f(a))$$

Bzw. falls nicht durch Null geteilt wird:

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

### 3.2.5 1. Mittelwertsatz (Folgerung aus 2. Mittelwertsatz)

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar

$$\Rightarrow \exists x_0 \in (a, b) \text{ mit } f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

### 3.2.6 L'Hospital

Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $a < b, b \in (\mathbb{R} \cup \infty)$ ) differenzierbar auf  $(a, b)$  mit  $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ . Falls der Grenzwert  $\alpha = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  ex. und:

(a)  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$  oder

(b)  $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = \infty$

dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

### 3.2.7 Satz von Taylor

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$   $n + 1$  mal differentierbar auf  $(a, b)$  und  $x_0 \in (a, b)$ . Dann gilt für ein  $\xi \in (x_0, x)$ :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

## Teil II

# HM 2 — Zusammenfassung

# Kapitel 4

## Integration

### 4.1 Integration

#### 4.1.1 Definition Zerlegung, Zwischenwerte

Eine Teilmenge  $T$  von  $[a, b]$  mit  $a, b \in T$  nennt man eine Unterteilung, Zerlegung oder Partitionierung von  $[a, b]$  wenn gilt:

$$T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \text{ mit} \\ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

Schreibweise für diese Menge  $T$  sei:

$$T : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

Ist  $T$  eine Zerlegung, dann heißt:

- (a) Die Zahl  $\mu(T) := \max\{|x_{k-1} - x_k|, k = 0, \dots, n\}$  das Feinheitsmaß von  $T$ .
- (b) Ein Vektor  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$  heißt ein Zwischenwertvektor zu  $T$ , wenn gilt

$$x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k \text{ für } k = 1, \dots, n$$

Dann heißt die Komponente  $\xi_k$  ein Zwischenwert von  $x_{k-1}$  und  $x_k$ .

#### 4.1.2 Definition Riemannsumme

Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion,  $T : a = x_0 < \dots < x_n = b$  eine Zerlegung von  $[a, b]$  und  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  ein Zwischenwertevektor zu  $T$ , dann nennen wir die Summe

$$S(f; T, \xi) = S_f(T, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

die Riemansumme von  $f$  bezüglich  $T$  und  $\xi$ .

### 4.1.3 Definition Riemann-Integral

Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Riemann-Integrierbar unter  $[a, b]$  wenn für jede Folge  $(T_N)_{N=1}^\infty$  von Zerlegungen von  $[a, b]$  mit  $\mu(T_N) \rightarrow 0$  für  $N \rightarrow \infty$  und jede Folge  $(\xi_N)_{N=1}^\infty$  von Zwischenpunktvektoren der Grenzwert

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S(f; T_N, \xi_N) \text{ existiert.}$$

#### Behauptung

Der Grenzwert ist im Fall der Existenz für jede Folge identisch.

#### Bemerkung

(a) Im Fall der Existenz bezeichnet man den Grenzwert durch:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{N \rightarrow \infty} S(f; T_N, \xi_N)$$

(b) Zu  $(T_N)_{N=1}^\infty$ , also  $T_1, T_2, T_3, \dots$ :

$$\begin{aligned} T_1 : & \quad a = x_0^{(1)} < \dots < x_n^{(1)} = b \\ T_2 : & \quad a = x_0^{(2)} < \dots < x_n^{(2)} = b \\ T_3 : & \quad a = x_0^{(3)} < \dots < x_n^{(3)} = b \\ & \quad \vdots \\ T_l : & \quad a = x_0^{(l)} < \dots < x_n^{(l)} = b \end{aligned}$$

(c) Zu  $(\xi_N)_{N=1}^\infty$ , also  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_n^{(1)}) \text{ mit } x_{k-1}^{(1)} \leq \xi_k^{(1)} \leq x_k^{(1)} \text{ mit } 1 \leq k \leq n_1 \\ \xi_2 &= (\xi_1^{(2)}, \dots, \xi_n^{(2)}) \text{ mit } x_{k-1}^{(2)} \leq \xi_k^{(2)} \leq x_k^{(2)} \text{ mit } 1 \leq k \leq n_2 \\ \xi_3 &= (\xi_1^{(3)}, \dots, \xi_n^{(3)}) \text{ mit } x_{k-1}^{(3)} \leq \xi_k^{(3)} \leq x_k^{(3)} \text{ mit } 1 \leq k \leq n_3 \\ & \quad \vdots \\ \xi_l &= (\xi_1^{(l)}, \dots, \xi_n^{(l)}) \text{ mit } x_{k-1}^{(l)} \leq \xi_k^{(l)} \leq x_k^{(l)} \text{ mit } 1 \leq k \leq n_l \end{aligned}$$

(d) Sei  $f$  integrierbar und  $(T_N)_{N=1}^\infty$  und  $(\xi_N)_{N=1}^\infty$  sowie  $(\tilde{T}_N)_{N=1}^\infty$  und  $(\tilde{\xi}_N)_{N=1}^\infty$  entsprechende Folgen, d.h.  $\mu(T_N) \rightarrow 0, \mu(\tilde{T}_N) \rightarrow 0$  für  $N \rightarrow \infty$ . Dann gilt für  $(\hat{T}_N)_{N=1}^\infty$  und  $(\hat{\xi}_N)_{N=1}^\infty$  mit

$$\hat{T}_N := \begin{cases} T_N & \text{für } N \text{ gerade} \\ \tilde{T}_N & \text{für } N \text{ ungerade} \end{cases}$$

und

$$\hat{\xi}_N := \begin{cases} \xi_N & \text{für } N \text{ gerade} \\ \tilde{\xi}_N & \text{für } N \text{ ungerade} \end{cases}$$

dass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S(f; \hat{T}_N, \hat{S}_N)$$

existiert, da  $f$  integrierbar ist.

Dann stimmt der Grenzwert von  $\lim_{N \rightarrow \infty} S(f; \tilde{T}_N, \tilde{S}_N)$  und  $\lim_{N \rightarrow \infty} S(f; T_N, S_N)$  überein.

#### 4.1.4 Menge der Riemann-Integrierbaren Funktionen

Mit  $R[a, b]$  oder  $R([a, b])$  bezeichnen wir die Menge von Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  die auf  $[a, b]$  Riemann integrierbar sind.

#### 4.1.5 Kriterien für Riemann-Integrierbarkeit

(a)

$$f \in R[a, b] \Rightarrow f \text{ ist auf } [a, b] \text{ beschränkt}$$

(b) Ist  $f, g \in R[a, b]$  und  $c \in \mathbb{R}$  dann sind auch die Funktionen

$$\begin{array}{rcl} f & + & g \\ f & - & g \\ c & \cdot & f \end{array}$$

Riemann integrierbar auf  $[a, b]$ .

(c) Ist  $f, g \in R[a, b]$ , dann ist auch

$$f \cdot g \in R[a, b]$$

(d) Ist  $f, g \in R[a, b]$  und falls  $|g(x)| > \delta > 0 \forall x \in [a, b]$  dann ist auch

$$\frac{f}{g} \in R[a, b]$$

(e) Für beliebiges  $c \in [a, b]$  gilt:

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow f \in R[a, c] \wedge f \in R[c, b]$$

und weiter gilt:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

(f)

$$f \in R[a, b] \Rightarrow |f| \in R[a, b]$$

und

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx$$

#### 4.1.6 Endliche Änderung von Funktionen

Wenn  $f \in R[a, b]$  ist und durch endlich viele Änderungen daraus  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  konstruiert werden kann, d.h.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \notin \{x_1, \dots, x_n\} \\ y_1 & \text{falls } x = x_1 \\ \vdots & \\ y_n & \text{falls } x = x_n \end{cases}$$

dann gilt  $g \in R[a, b]$  und

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b g(x) \, dx$$

#### 4.1.7 Zusammenhang Stetigkeit und Integrierbarkeit

Es gilt:

$$f \in C[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$$

#### 4.1.8 Stückweise Integration

Falls  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stückweise stetig ist, d.h. es existieren endlich viele Intervall-Stücke auf denen  $f$  stetig ist, dann ist  $f \in R[a, b]$  und es gilt:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) \, dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) \, dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) \, dx$$

#### 4.1.9 1. Mittelwertsatz der Integralrechnung

Seien  $f, g \in R[a, b]$  und  $g \geq 0$  auf  $[a, b]$ . Dann gibt es ein  $\mu \in \mathbb{R}$  mit  $\inf_{[a, b]} f(x) \leq \mu \leq \sup_{[a, b]} f(x)$  sodass gilt:

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = \mu \int_a^b g(x) \, dx$$

Ist  $f$  stetig auf  $[a, b]$ , dann existiert ein  $\xi \in [a, b]$  mit

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = f(\xi) \int_a^b g(x) \, dx$$

#### Bemerkung

Für  $g(x) = 1$  und  $f$  stetig lautet die Aussage also:

$$\int_a^b f(x) \, dx = f(\xi) \cdot (b - a)$$

#### 4.1.10 Existenz der Stammfunktion

Sei  $f \in R[a, b]$ , dann ist für jedes  $c \in [a, b]$  durch:

$$F(x) := \int_c^x f(t) dt$$

eine stetige Funktion definiert. Und für jedes  $x_0 \in (a, b)$  gilt:

$$f \text{ stetig in } x_0 \Rightarrow F \text{ ist differentierbar in } x_0 \wedge F'(x_0) = f(x_0)$$

#### 4.1.11 Definition Stammfunktion

Gilt  $F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b]$  dann wird  $F$  als Stammfunktion von  $f$  bezeichnet.

#### 4.1.12 Eindeutigkeit der Stammfunktion

Sind  $F$  und  $G$  Stammfunktionen von  $f$ , dann existiert ein  $c \in \mathbb{R}$  mit

$$F(x) = G(x) + c \forall x \in [a, b]$$

#### 4.1.13 Hauptsatz der Differential und Integralrechnung

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben dann gilt:

(a) Ist  $f \in R[a, b]$  und  $F$  eine Stammfunktion, dann gilt:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b$$

(b) Ist  $f \in C[a, b]$  dann existiert eine Stammfunktion und zwar

$$F(x) := \int_c^x f(t) dt$$

#### Bemerkung

Aus dem Hauptsatz folgen Integrationstechniken wie partielles Integrieren oder die Substitutionsregel.

#### 4.1.14 Zusammenhang Monotonie und Riemann-Integrierbarkeit

Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $[a, b]$  monoton, dann ist  $f \in R[a, b]$ .

#### 4.1.15 Zweiter Mittelwertsatz der Integralrechnung

Ist  $f$  monoton auf  $[a, b]$ ,  $g$  integrierbar auf  $[a, b]$ , dann existiert ein  $\xi \in [a, b]$  mit:

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx + f(b) \int_\xi^b g(x) dx$$



## 4.2 Uneigentliche Integrale

### 4.2.1 Definition uneigentliches Integral

Eine Funktion  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $a < b \leq \infty$  heißt über  $[a, b)$  uneigentlich Riemann integrierbar, wenn gilt:

(a)  $\forall c$  mit  $a \leq c < b$  ist  $f \in R[a, c]$

(b) Der Grenzwert

$$\alpha = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) \, dx$$

existiert. In dem Fall schreiben wir

$$\alpha = \int_a^b f(x) \, dx$$

und sagen das uneigentliche Integral

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

konvergiert gegen  $\alpha$  oder hat den Wert  $\alpha$ .

Andernfalls divergiert das uneigentliche Integral. Analog geht man für Funktionen

- $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $-\infty \leq a < b$  und
- $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $-\infty \leq a < b \leq \infty$

vor.

### 4.2.2 Cauchy-Kriterium

Sei  $f \in R[a, b]$   $\forall c \in (a, b)$ ,  $a < c \leq \infty$  Dann konv.

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

(a) Im Fall  $b < \infty$  genau dann, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \left| \int_{T_1}^{T_2} f(x) \, dx \right| < \varepsilon \quad \forall T_1, T_2 \in [b - \delta, b)$$

(b) Im Fall  $b = \infty$ , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \geq a : \left| \int_{T_1}^{T_2} f(x) \, dx \right| < \varepsilon \quad \forall T_1, T_2 \geq K$$

### 4.2.3 Majorantenkriterium

Seien  $f, g \in R[a, c]$   $\forall c \in (a, b)$ ,  $a < b \leq \infty$  oder  $f, g \in R[c, b] \forall c \in (a, b) - \infty \leq a < b$ . Außerdem  $|f(x)| \leq g(x)$ . Und

$$\int_a^b g(x) \, dx$$

konvergiert, dann konvergiert auch

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

### 4.2.4 Absolute Konvergenz

Ist  $f \in R[T_1, T_2]$  für  $a < T_1 \leq T_2 < b \leq \infty$  so heißt

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

absolut konvergent, wenn

$$\int_a^b |f(x)| \, dx$$

konvergent ist.

### 4.2.5 Minorantenkriterium

$$f(x) \geq g(x) \geq 0 \wedge \int_a^b g(x) \, dx = \infty \Rightarrow \int_a^b f(x) \, dx = \infty$$

### 4.2.6 Integralkriterium für Reihen

Sei  $f : [a, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  und  $f \searrow$  ( $a \in \mathbb{Z}$ ). Dann gilt:

$$\sum_{n=m}^{\infty} f(n) < \infty \Leftrightarrow \int_a^{\infty} f(x) \, dx < \infty$$

# Kapitel 5

## Gleichmäßige Konvergenz

### 5.1 Gleichmäßige Konvergenz

#### 5.1.1 Definition Funktionenfolge und Funktionenreihe

Sei  $M$  eine Menge und  $m \in \mathbb{Z}$ . Ist jedem  $n \in \{m, m+1, \dots\}$  eine Funktion  $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}$  zugeordnet, so nennt man:

- (a) Die Folge  $(f_n)_{n=m}^{\infty}$  eine Funktionenfolge auf  $M$
- (b) Die Reihe  $\sum_{n=m}^{\infty} f_n(x)$  eine Funktionenreihe auf  $M$

konvergiert  $(f_n)_{n \geq m}$  (bzw.  $\sum_{n=m}^{\infty} f_n(x)$ ) für alle  $x \in \tilde{M} \subseteq M$  so heißt die durch  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  (bzw.  $f(x) = \sum_{n=m}^{\infty} f_n(x)$ ) definierte Funktion  $f : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$  die Grenzfunktion von  $(f_n)_{n=m}^{\infty}$  (bzw.  $\sum_{n=m}^{\infty} f_n$ ).

#### 5.1.2 Gleichmäßige Konvergenz

Sei  $M$  eine Menge und sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

- (a) Eine Funktionenfolge  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$  heißt auf  $M$  gleichmäßig konvergent gegen  $f$  wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in M \text{ und } n \geq n_0(\varepsilon)$$

- (b) Eine Funktionenfolge  $\sum_{n=m}^{\infty} f_n$  konvergiert gleichmäßig auf  $M$  wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : \left| \sum_{k=m}^n f_k(x) - f(x) \right| < \varepsilon \quad \forall x \in M \text{ und } n \geq n_0(\varepsilon)$$

#### Bemerkung

Offensichtlich gilt:

$$\text{Gleichmäßig konvergent} \Rightarrow \text{Punktweise Konvergent}$$

### 5.1.3 Stetigkeit der Grenzfunktion

Sei  $(f_n)_{n=1}^\infty$  (bzw.  $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ ) gleichmäßig konvergent gegen  $f$  auf einem Intervall  $I$  und alle  $f_n$  stetig auf  $I$ . Dann ist auch die Grenzfunktion  $f$  stetig.

### 5.1.4 Integration der Grenzfunktion

Sei  $(f_n)_{n=1}^\infty$  eine Folge von integrierbaren Funktionen auf  $[a, b]$

- (a) Falls  $(f_n)_{n=1}^\infty$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert, dann ist auch  $f$  auf  $[a, b]$  integrierbar und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \, dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \, dx$$

- (b) Analog für Funktionenreihen

### 5.1.5 Cauchy Kriterium für gleichmäßige Konvergenz

- (a) Eine Funktionenfolge  $(f_n)_{n=1}^\infty$  konvergiert genau dann gleichmäßig auf einer Menge  $M$  ( $\subseteq$  Definitionsbereich), wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n(\varepsilon) : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \, \forall n \geq n(\varepsilon) \, \forall x \in M$$

- (b) Analog für Funktionenreihen

### 5.1.6 Differentiation der Grenzfunktion

Sei  $(f_n)_{n=1}^\infty$  eine auf dem Intervall  $I$  differentierbare Folge von Funktionen.

- (a) Konvergiert die Folge  $(f'_n)_{n=1}^\infty$  gleichmäßig auf  $I$  und konvergiert für ein beliebiges, festes  $x_0 \in I$  die reelle Folge  $(f_n(x_0))_{n=1}^\infty$  dann ist auch die Grenzfunktion  $f$  von  $(f_n)_{n=1}^\infty$  differentierbar und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x) = \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

- (b) Analog für Funktionenreihen

#### Bemerkung

Außerdem gilt dass  $(f_n)_{n=1}^\infty$  (bzw.  $\sum_{n=1}^\infty f_n$ ) auf jedem beschränkten Teilintervall von  $I$  gleichmäßig konvergiert.

### 5.1.7 Majorantenkriterium auf Potenzreihen anwenden

Für eine reelle Potenzreihe  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$  mit Konvergenzradius  $R > 0$  gilt:

(a)  $f$  ist stetig auf  $(x_0 - R, x_0 + R) =: I$

(b)  $f$  ist differentierbar auf  $I$  und

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (x - x_0)^{k-1}$$

(c)  $f$  ist integrierbar auf  $I$  und hat die Stammfunktion

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1}$$

#### Bemerkung

Wurde alles schon in HM1 gezeigt aber mühsam.

### 5.1.8 Majorantenkriterium für Funktionenreihen

Falls  $|f_n(x)| \leq a_n$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergiert  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  ist gleichmäßig konvergent.

## Kapitel 6

# Differentialrechnung mit mehreren Variablen

### 6.1 Der n-dimensionale Euklidische Raum

#### 6.1.1 Definitionen

Sind  $n, m \in \mathbb{N}$ , so gelten folgende Bezeichnungen:

$$\mathbb{R}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ für } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathbb{R}^{m \times n} := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ für } a_{ij} \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \right\}$$

$$\langle x, y \rangle := x \cdot y := x^T y := \sum_{k=1}^n x_k y_k \text{ (Skalarprodukt)}$$

$$\|x\| := \|x\|_2 := |x| := \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \text{ euklidische Norm des } \mathbb{R}^n / \text{Betrag in } \mathbb{R}^n$$

#### 6.1.2 Folgerungen

1.

$$\|x\|_\infty = \max_{k=1 \dots n} |x_k| \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \max_{k=1 \dots n} |x_k| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

2.

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$$

und

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

3.  $\|x\|_1, \|x\|_2, \|x\|_\infty$  sind drei mögliche Festlegungen für Vektornormen. Allgemein hat eine Norm  $\|\cdot\|$  ( $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ) folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \|x\| &\geq 0 & \forall x \in \mathbb{R}^n \wedge \|x\| = 0 &\Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \\ \|\alpha \cdot x\| &= |\alpha| \cdot \|x\| & \forall \alpha \in \mathbb{R} \wedge \forall x \in \mathbb{R}^n \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| & \forall x, y \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

4. Der Einheitskreis ist bezüglich verschiedener Normen nicht immer ein Kreis
5. p-Norm:

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n |x_k|^p}$$

6.  $x \cdot y$  im  $\mathbb{R}^2$  hat die anschauliche Bedeutung

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \cdot \cos(\alpha)$$

Daraus folgt die Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung (CSU)

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$$

### 6.1.3 Konventionen

- (a) In  $\mathbb{R}^n$  sei stets  $A^c := \mathbb{R}^n \setminus A$  für eine Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- (b) Mit  $\|\cdot\|$  bezeichnen wir die euklidische Norm  $\|\cdot\|_2$ . Außer es wird explizit gesagt, dass  $\|\cdot\|$  eine allgemeine Norm ist (z.B. „Sei  $\|\cdot\|$  eine Norm auf  $\mathbb{R}^n$ “)

### 6.1.4 Definition Epsilon-Umgebung

Sei  $a \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0$  dann heißt

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < \varepsilon\} \text{ die } \varepsilon\text{-Umgebung von } a$$

$$\dot{U}_\varepsilon(a) := U_\varepsilon(a) \setminus \{a\} \quad (= \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \|x - a\| < \varepsilon\}) \text{ die punktierte } \varepsilon\text{-Umgebung von } a$$

### 6.1.5 Definition Topologische Begriffe

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Ein Punkt  $a \in \mathbb{R}^n$  heißt:

- (a) Innerer Punkt von  $A$ , falls ein  $\varepsilon > 0$  existiert, sodass  $U_\varepsilon(a) \subseteq A$  Kurz:

$$a \text{ innerer Punkt von } A :\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \subseteq A$$

Die Menge  $\overset{\circ}{A}$  ist die Menge aller innerer Punkte von  $A$

$$\overset{\circ}{A} := \{a \in \mathbb{R}^n \mid \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } U_\varepsilon(a) \subseteq A\}$$

- (b) Berührungspunkt von  $A$ , wenn jede  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$  mindestens einen Punkt aus  $A$  enthält. Kurz:

$$a \in \mathbb{R}^n \text{ ist Berührungspunkt von } A :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$$

Die Menge aller Berührungspunkte von

$$\bar{A} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall \varepsilon > 0 \text{ ist } U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset\}$$

heißt der Abschluss oder abgeschlossene Hülle von  $A$ .

- (c) Häufungspunkt von  $A$ , wenn jede punktierte  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$  ein Element von  $A$  enthält. Kurz:

$$a \in \mathbb{R}^n \text{ ist Häufungspunkt} :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \dot{U}_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$$

- (d) Randpunkt von  $A$ , wenn jede  $\varepsilon$ -Umgebung Elemente aus  $A$  und  $A^c$  enthält. Kurz:

$$a \in \mathbb{R}^n \text{ ist Randpunkt von } A :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 (U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset) \wedge (U_\varepsilon(a) \cap A^c \neq \emptyset)$$

Die Menge

$$\partial A := \{a \in \mathbb{R}^n \mid a \text{ ist Randpunkt von } A\}$$

heißt der Rand von  $A$ .

### Bemerkung

Man kann zeigen:

$$\bar{A} = A \cup \partial A = \overset{\circ}{A} \cup \partial A$$

### 6.1.6 Definition offene und abgeschlossene Menge

Eine Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt:

- (a) offen, wenn  $A = \overset{\circ}{A}$  gilt (also  $A$  besteht nur aus inneren Punkten)
- (b) abgeschlossen, wenn  $\partial A \subseteq A$  (Rand gehört zu  $A$ )



## 6.2 Folgen

### 6.2.1 Definition

Eine Folge

$$a_k = \begin{pmatrix} a_1^{(k)} \\ \vdots \\ a_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

in  $\mathbb{R}^n$  heißt:

- (a) Konvergent gegen einen Grenzwert  $a$ , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) : \|a_k - a\| < \varepsilon \quad \forall k \geq n(\varepsilon)$$

Schreibweise:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a \text{ oder } a_k \rightarrow a \quad (k \rightarrow \infty)$$

- (b) Beschränkt, wenn gilt:

$$\exists c > 0 : \|a_k\| < c \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

### Bemerkung

- (a) Die Norm  $\|\cdot\|$  sei hier die euklidische Norm  $\|\cdot\|_2$ . Wir werden aber sehen:  
Jede Norm auf  $\mathbb{R}^n$  wäre ok.

- (b)

$$a_k \rightarrow a \quad (k \rightarrow \infty) \Rightarrow \text{Jede Komponente von } a_k \text{ konvergiert gegen entsprechende Komponente von } a$$

- (c) Cauchy-Kriterium:

$$(a_k)_{k=1}^{\infty} \text{ konv.} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) : \|a_k - a_l\| < \varepsilon \quad \forall k, l \geq n(\varepsilon)$$

### 6.2.2 Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge im  $\mathbb{R}^n$  hat eine konvergente Teilfolge.

### 6.2.3 Grenzwertrechenregeln

Die Grenzwertrechenregeln übertragen sich auch auf Folgen im  $\mathbb{R}^n$ .

### 6.2.4 Weitere Bemerkungen

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $a \in \mathbb{R}^n$ , dann gilt:

(a)

$$a \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists (a_k)_{k=1}^{\infty} \text{ mit } a_k \in A \forall k \text{ mit } \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a$$

(b)  $a$  ist ein Häufungspunkt von  $A$

$$\exists (a_k)_{k=1}^{\infty} \text{ mit } a_k \in A \setminus \{a\} \text{ mit } \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a$$

(c)  $A$  ist abgeschlossen  $\Leftrightarrow$  für jede konvergente Folge  $(a_k)_{k=1}^{\infty}$  mit  $a_k \in A \forall k$  gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \in A$ .

(d)  $A$  ist kompakt  $\Leftrightarrow$  Jede Folge in  $A$  besitzt einen Häufungspunkt in  $A$ .

## 6.3 Funktionsgrenzwerte und Stetigkeit

### 6.3.1 Definition Funktion

Eine Funktion  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  nennt man eine Funktion in  $n$  Veränderlichen (oder Vektorfeld). Im Fall  $m = 1$  nennt man  $f$  eine reelle Funktion (oder Skalarfeld).

Schreibweise

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) := f \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) := \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

### 6.3.2 Definition Funktionsgrenzwert

Sei  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $a \in \bar{A}$  dann heißt ein  $b \in \mathbb{R}^m$  mit:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : \|f(x) - b\| < \varepsilon \forall x \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(a) \cap A$$

der Grenzwert von  $f$  für  $x$  gegen  $a$ . Kurz:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

### 6.3.3 Definitionen aus HM 1 im Mehrdimensionalen

Sei  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $a \in \bar{A}$  und  $b \in \mathbb{R}^m$

(a) Folgende Aussagen sind äquivalent:

$$(a) f(x) \rightarrow b \ (x \rightarrow a)$$

(b)  $\|f(x) - b\| \rightarrow 0 \ (x \rightarrow a, x \in A)$

(c) Für jede Komponente

$$f_l(x) \text{ von } f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \text{ gilt } f_l(x) \rightarrow b_l \ (x \rightarrow a)$$

(d) Für eine Folge  $(x_k)_{k=1}^\infty$  in  $A$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k \neq a \ \forall k$  folgt:

$$f(x_k) \rightarrow b \ (k \rightarrow \infty)$$

(b) Falls  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existiert ist dieser Eindeutig.

(c) Cauchy-Kriterium:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) : \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon \ \forall x, y \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(a) \cap A$$

(d) Grenzwertrechenregeln gelten analog zu HM 1

(e) Sei  $B \subseteq A$  mit  $a \in \bar{B}$  dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow a \text{ mit } x \in B} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a \text{ mit } x \in A} f(x) = b$$

### 6.3.4 Definition Stetigkeit

Sei  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $a \in A$ , dann ist  $f$  in  $a$  stetig wenn gilt  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Das heißt:

$$\forall \varepsilon \ \exists \delta(\varepsilon) : \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon \ \forall x \in U_{\delta(\varepsilon)}(a) \cap A$$

### 6.3.5 Grenzwerte von verketteten Funktionen

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^m, a \in \bar{A}$  und  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow \mathbb{R}^l$ . Existiert  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  so gilt  $b \in \bar{B}$  und es gilt:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow b} g(y)$$

sofern der Grenzwert  $\lim_{y \rightarrow b} g(y)$  existiert.

### 6.3.6 Grenzwertrechenregeln

Für  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  gilt: Falls  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$  und  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$  existiert, dann gilt:

(a)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = \alpha + \beta$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^T g(x) = \alpha^T \beta$$

### 6.3.7 Maximum und Minimum Kompakter Mengen

- (a) Ist  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$  kompakt, so existiert  $\max A$  und  $\min A$ .
- (b) Ist  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $A$  kompakt und  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf  $A$ , dann ist  $f(A)$  kompakt.

### 6.3.8 Weierstraß

Falls  $A \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist dann gilt:

$$A \text{ kompakt} \Rightarrow \min_{x \in A} f(x), \max_{x \in A} f(x) \text{ existiert}$$

## 6.4 Partielle Ableitungen und Richtungsableitungen

### 6.4.1 Definition partielle Ableitung

Eine Funktion  $f : A \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  heißt in einem Punkt  $a \in \mathbb{R}^m$  partiell differenzierbar nach seiner  $k$ -ten Variable  $x_k$  ( $k \in \{1, \dots, m\}$ ) wenn  $f(a + h \cdot e_k)$  mit

$$e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \text{ (} k\text{-te Komponente)} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

für ein festes  $\delta > 0$  und alle  $h$  mit  $|h| < \delta$  existiert:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(a) := f_{x_k}(a) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h \cdot e_k) - f(a)}{h}$$

Dieser Grenzwert heißt partielle Ableitung von  $f$  nach  $x_k$  bei  $a$ .

Existiert bei  $a$  die partiellen Ableitungen  $f_{x_1}(a), \dots, f_{x_m}(a)$  so heißt  $f$  (einmal) partiell differenzierbar bei  $a$  und nennt man im Fall  $n = 1$  den Spaltenvektor

$$\nabla f(a) := \text{grad } f(a) := \begin{pmatrix} f_{x_1}(a) \\ \vdots \\ f_{x_m}(a) \end{pmatrix}$$

den Gradienten von  $f$  bei  $a$ .

Falls alle partiellen Ableitungen stetig sind nennt man  $f$  stetig partiell differenzierbar.

### Schreibweise

$C^k(G, \mathbb{R}^n) := \{f : G \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \text{alle } k\text{-ten partiellen Ableitungen existieren und sind stetig}\}$

### 6.4.2 Definition Umgebung eines Punktes

Eine Umgebung eines Punktes  $a \in \mathbb{R}^n$  ist eine Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  für die ein  $\varepsilon > 0$  existiert, so dass  $U_\varepsilon(a) \subseteq U$ . Eine offene Umgebung  $U$  ist eine Umgebung, die zusätzlich eine offene Menge ist.

### Bemerkung

Ist  $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  partiell differentierbar und sind in einer Umgebung von  $a \in G$  alle partiellen Ableitungen beschränkt, dann ist  $f$  stetig in  $a$ .

### 6.4.3 Definition Richtungsableitung

Seien  $a, r \in \mathbb{R}^n$  und  $r$  eine Richtung, d.h.  $\|r\| = 1$ . Eine Funktion  $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt bei  $a$  in Richtung  $r$  differentierbar, wenn der Grenzwert

$$\frac{\partial}{\partial r} f(a) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h \cdot r) - f(a)}{h}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt dann die Richtungsableitung von  $f$  bei  $a$  in Richtung  $r$ .

## 6.5 Die totale Ableitung

### 6.5.1 Definition totale Ableitung

Sei  $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $a \in G \subseteq \mathbb{R}^n$

- (a) Man nennt  $f$  total differentierbar bei  $a$ , wenn es eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  gibt, dass bei einer Umgebung  $U$  von  $a$  gilt:

$$f(x) = f(a) + A(x - a) + r(x)$$

mit

$$\frac{r(x)}{\|x - a\|} \rightarrow \vec{0} \quad (x \rightarrow a)$$

In dem Fall nennen wir  $A$  die (totale) Ableitung von  $f$  bei  $a$  und wir schreiben  $f'(a) = A$

(b) Ist  $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$  partiell differenzierbar bei  $a$ , so heißt

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(a) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_m(a) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_m(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(a)^T \\ \vdots \\ \nabla f_n(a)^T \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} f(a) = J_f(a)$$

die Jacobi-Matrix von  $f$  bei  $a$ .

### Bemerkung

(a) Wir werden sehen, dass gilt:

$$f \text{ ist in } a \text{ total differenzierbar} \Leftrightarrow f'(a) = J_f(a)$$

(b) Im Fall  $m = 1$  gilt also:

$$J_f(a) = \nabla f(a)^T$$

und falls  $f$  total differenzierbar ist gilt:

$$f'(a) = \nabla f(a)^T$$

(c) Bedeutung des Skalarprodukts  $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$x \cdot y := x^T y := \sum_{k=1}^n x_k y_k = \|x\|_2 \|y\|_2 \cos \alpha$$

(d) Definition des Matrix-Vektor-Produktes:

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$$

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

### 6.5.2 Zusammenhang Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Ist  $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenzierbar in  $a \in G \Rightarrow f$  stetig in  $a$ .

### 6.5.3 Zusammenhang partielle und totale Diffbarkeit

Sei  $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $a \in G$

(a) Ist  $f$  total differenzierbar bei  $a$ , so gilt:

(a)  $f$  ist bei  $a$  partiell differenzierbar und

$$f'(a) = \frac{\partial}{\partial x} f(a)$$

(b)  $f$  ist bei  $a$  in jede Richtung  $r$  differenzierbar und

$$\frac{\partial}{\partial r} f(a) = J_f(a) \cdot r$$

(b) Wenn  $f$  partiell differenzierbar in  $a$  ist und alle partiellen Ableitungen in  $a$  stetig sind, so ist  $f$  in  $a$  differenzierbar.

$$\frac{\partial}{\partial x_n} f(x_n) \text{ stetig in } a \Leftrightarrow f \text{ differenzierbar in } a$$

#### 6.5.4 Kettenregel

Ist  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}^m$  total differenzierbar in  $a \in A$  und  $g : B \rightarrow \mathbb{R}^l$  total differenzierbar in  $a$ . Dann gilt  $g \circ f$  ist in  $a$  differenzierbar und

$$(g \circ f)' = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

#### 6.5.5 Matrix-Produkt

Für  $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$  und  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ist das Matrix-Produkt  $C = A \cdot B$  definiert durch:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^k a_{il} b_{lj}$$

### 6.6 Extremwerte, Mittelwertsatz

#### 6.6.1 Definition lokales Extrema

(a) Eine Funktion  $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt in  $x_0 \in G$  ein lokales Minimum (bzw. Maximum), wenn in einer Umgebung von  $U$  von  $x_0$  gilt:

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ (bzw. } f(x) \leq f(x_0)) \forall x \in U$$

unter einem lokalen Extrema versteht man ein lokales Minimum oder Maximum

(b)  $f$  besitzt in  $x_0$  ein globales Minimum (bzw. Maximum), wenn

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ (bzw. } f(x) \leq f(x_0)) \forall x \in G$$

#### 6.6.2 Notwendige Bedingung für lokale Extrema

Besitzt  $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^1(G, \mathbb{R})$  in  $x_0 \in \overset{\circ}{G}$  ein lokales Extrema, so gilt:

$$\nabla f(x_0) = 0$$

### Bemerkung

Einen Punkt  $x_0 \in G$  mit  $\nabla f(x_0) = 0$  nennen wir kritischen Punkt oder stationären Punkt.

### 6.6.3 Mittelwertsatz

Sei  $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $G$  offen differentierbar und  $G$  enthalte die Menge

$$L(a, b) := \overline{ab} := \{a + t \cdot (b - a) \mid t \in [0, 1]\}$$

für  $a, b \in G$ . Dann existiert ein  $\xi \in (0, 1)$  mit

$$f(b) = f(a) + \nabla f(a + \xi(b - a))^T (b - a)$$

### 6.6.4 Gebiete bzw. kurvenweise zusammenhängende Gebiete

(a) Eine Menge

$$\overline{a_0, a_1, \dots, a_n} := \bigcup_{k=0}^{n-1} \overline{a_k, a_{k+1}}$$

für  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$  heißt Polygonzug

(b) Eine Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt kurvenweise zusammenhängend, wenn zu  $a, b \in M$  stets eine stetige Funktion  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  existiert mit  $\gamma(0) = a$  und  $\gamma(1) = b$  (dann ist  $\gamma$ ) eine Kurve von  $a$  nach  $b$ .

(c) Eine Menge  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt Gebiet, wenn  $G$  offen und kurvenweise zusammenhängend ist (keine Inseln).

### Bemerkung

Ist  $G$  ein Gebiet und  $a, b \in G$  dann existiert stets ein Polynomzug, der  $a$  und  $b$  verbindet und durch  $G$  verläuft.

### 6.6.5 Partielle Ableitung $r$ -ter Ordnung

Für  $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definiert man (falls existent) für  $x_0 \in G$  und  $k_1, \dots, k_r \in \{1, \dots, n\}$  die partielle Ableitung  $r$ -ter Ordnung indirekt durch:

$$\frac{\partial^r}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_r}} f(x_0) := f_{x_{k_1} \dots x_{k_r}}(x_0) := \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_{k_1}} f(x_0) & \text{falls } r = 1 \\ \frac{\partial}{\partial x_{k_1}} \left( \frac{\partial^{r-1}}{\partial x_{k_2} \dots \partial x_{k_r}} f(x_0) \right) & \text{sonst} \end{cases}$$

existieren alle partiellen Ableitungen der Ordnung  $r$ , dann ist  $f$   $r$ -mal partiell differentierbar sind diese außerdem stetig, so ist  $f$   $r$ -mal stetig partiell differentierbar.



### Schreibweise

$C^r(G, \mathbb{R}^m) := \{f : G \rightarrow \mathbb{R}^m \mid f \text{ } r\text{-mal stetig partiell differentierbar}\}$  und  $C^r(G) := C^r(G, \mathbb{R}^1)$

### 6.6.6 Hessematrix

Ist  $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  2-mal partiell differentierbar bei  $a \in G$  so heißt

$$H_f(a) := \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(a) & \cdots & f_{x_1 x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1}(a) & \cdots & f_{x_n x_n}(a) \end{pmatrix} = (\nabla f_{x_1}(a) \quad \cdots \quad \nabla f_{x_n}(a))$$

die Hesse-Matrix von  $f$  bei  $a$ .

### 6.6.7 Definitheit

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

(a) Die durch  $Q_A(x) := x^T \cdot A \cdot x$  definierte Funktion  $Q_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt die Quadratische Form von  $A$ .

(b) Die Matrix und die Quadratische Form heißen:

(a) positiv definit

$$:\Leftrightarrow Q_A(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

(b) positiv semidefinit

$$:\Leftrightarrow Q_A(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(c) negativ definit

$$:\Leftrightarrow Q_A(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

(d) negativ semidefinit

$$:\Leftrightarrow Q_A(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(e) indefinit

$$:\Leftrightarrow \exists x, y \in \mathbb{R}^n : Q_A(x) < 0, Q_A(y) > 0$$

### 6.6.8 Satz von Schwarz

Ist  $G \neq \emptyset, f : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  2-mal stetig partiell differentierbar, dann gilt:

$$H_f(x, y) = H_f(y, x)^T$$

### 6.6.9 Satz von Taylor

Seien  $a, b \in G$  ( $G$  eine Gebiet mit  $G \neq \emptyset$ ),  $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar und  $\overline{ab} \subseteq G$ . Dann existiert eine  $\xi \in (0, 1)$  mit

$$f(b) = f(a) + \nabla f(a)^T(b-a) + \frac{1}{2}(b-a)^T H_f(a + \xi(b-a))(b-a)$$

### 6.6.10 Hinreichende Bedingung für lokale Extrema

Sei  $f \in C^2(U, \mathbb{R})$  mit  $U$  eine Umgebung von  $a$  und  $\nabla f(a) = \vec{0}$  dann gilt:

- (a) Ist  $H_f(a)$  positiv definit, so ist bei  $a$  ein lokales Minimum
- (b) Ist  $H_f(a)$  negativ definit, so ist bei  $a$  ein lokales Maximum

## 6.7 Implizit definierte Funktionen

### 6.7.1 Bemerkung

Wir betrachten zunächst lineare Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  dann lässt sich  $f(x)$  darstellen als:

$$f(x) = Ax + b$$

mit  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$

### 6.7.2 Vorläufige Definition Rang einer Matrix

Wir definieren für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  den Rang vorläufig als die Anzahl der Stufen nachdem mit dem Gauss-Algorithmus die Matrix in Zeilen-Stufenform überführt wurde.

#### Bemerkung

Allgemein werden wir sehen, dass  $Ax = b$  lösbar ist  $\Leftrightarrow$  Rang von  $A$  gleich Rang von  $(A|b)$  gilt. Eindeutig lösbar ist das LGS wenn in der Zeilen-Stufen Form in jeder Zeile eine Stufe anfängt und  $A$  quadratisch ist.

### 6.7.3 Einheitsmatrix und Inverse einer Matrix

Ist  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} I \text{ (Einheitsmatrix)}$$

dann nennt man  $B$  die zu  $A$  inverse Matrix und schreibt  $A^{-1} := B$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ \Leftrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot x &= A^{-1} \cdot b \\ \Leftrightarrow I \cdot x &= A^{-1} \cdot b \\ \Leftrightarrow x &= A^{-1} \cdot b \end{aligned}$$

Falls zu einer Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  die Inverse  $A^{-1}$  existiert nennt man  $A$  regulär.

### Bemerkung

Die Menge  $G := \{A \in \mathbb{R}^n : A \text{ ist regulär}\}$  ist bezüglich der Matrixmultiplikation eine nicht abelsche Gruppe mit  $I$  als neutrales Element und  $A^{-1}$  als das zu  $A$  (links-) inverse Element.

### 6.7.4 Zusammenhang Bijektivität und reguläre Matrizen

Für  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $f(x) = A \cdot x + b$  gilt:

$$f \text{ ist bijektiv} \Leftrightarrow A \text{ ist regulär}$$

### 6.7.5 Satz über die Umkehrfunktion

Sei  $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$  für ein Gebiet  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $x_0 \in G$ . Weiter gelte, dass  $f'(x_0)$  regulär ist. Dann gibt es eine offene Umgebung  $U$  von  $x_0$  ( $U \subseteq G$ ), dass gilt:

- (a)  $f(U)$  ist offen und  $f'(x)$  ist regulär
- (b)  $f : U \rightarrow V$  ist bijektiv und  $f^{-1} : V \rightarrow U$  ist aus  $C^1(V, U)$
- (c)

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = (f'(f^{-1}(y)))^{-1} \quad \forall y \in V$$

### 6.7.6 Satz über die Gebietstreue

Ist  $G$  eine offene Menge in  $\mathbb{R}^n$  und  $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$  mit  $f'(x)$  ist regulär auf  $G$ , so ist auch  $f(G)$  ein Gebiet.

### 6.7.7 Definition Auflösbarkeit

Sei  $g : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $n, m \in \mathbb{N}$ ) und  $b \in \mathbb{R}^m$ . Man nennt die Gleichung

$$g(x, y) = b \text{ mit } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } y \in \mathbb{R}^m$$

- (a) Auf  $G \in \mathbb{R}^n$  (global) nach  $y$  auflösbar, wenn es eine Funktion  $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  gibt mit  $g(x, f(x)) = b \quad \forall x \in G$

- (b) Bei  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  lokal nach  $y$  auflösbar, wenn  $g(x, y) = b$  in einer Umgebung von  $x_0$  nach  $y$  (global) auflösbar ist.

D.h mit  $y_0 := f(x_0)$  existiert die Auflösung  $y = f(x)$  mit  $g(x, f(x)) = b$  und  $y_0 = f(x_0)$  in einer Umgebung von  $x_0$ .

### Bemerkung

Allgemein soll auch für nichtlineare Funktionen einfach geprüft werden können ob eine lokale Auflösung nach  $x$  oder  $y$  existiert.

Wir werden sehen es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x} g|_{x=x_0} \text{ regulär} \Leftrightarrow \text{Es existiert eine lokale Auflösung nach } x \quad (6.1)$$

(Analog für Auflösungen nach  $y$ ).

### 6.7.8 Hauptsatz über implizite Funktionen

Sei  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  und  $y_0, b \in \mathbb{R}^m$ . Für eine offene Umgebung  $G$  von  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ . Sei  $g \in C^1(G, \mathbb{R}^m)$  (d.h  $g : G \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m$  und stetig differentierbar) ist  $g(x_0, y_0) = b$  und  $\frac{\partial}{\partial y} g(x_0, y_0)$  regulär, so gibt es eine Umgebung  $U$  von  $x_0$  und  $V$  von  $y_0$ , so dass:

- (a)

$$\frac{\partial}{\partial y} g(x, y) \text{ ist regulär } \forall x \in U \text{ und } \forall y \in V$$

- (b) Die Gleichung  $g(x, y) = b$  besitzt eine eindeutige Auflösung  $f : U \rightarrow V$  mit  $y_0 = f(x_0)$  und es gilt:

$$f'(x) = \left( \frac{\partial}{\partial y} g(x, f(x)) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial x} g(x, f(x)) \forall x \in U$$

(die Auflösung ist also differentierbar)

- (c) Ist  $g \in C^r(g, \mathbb{R}^m)$  dann ist  $f \in C^r(U, \mathbb{R}^m)$

### 6.7.9 Extrema unter Nebenbedingungen

$$\begin{cases} x + y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \text{max oder min}$$

**Idee** Nebenbedingung nach  $y$  auflösen und in Zielfunktion einsetzen

$$1. \ y = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

$$\Rightarrow f(x, y) = f(x, \pm \sqrt{1 - x^2}) = \tilde{f}(x) \quad (6.2)$$

- 2.

$$\tilde{f}(x) \stackrel{!}{=} \tilde{f}^{(k)}(x) \stackrel{!}{=} \dots, \tilde{f}^{(2l)}(x) \stackrel{!}{=} 0 \quad k = 1, \dots, 2 \cdot l - 1$$

**Beobachtung** Bei den gesuchten Extrema berühren sich die Höhenlinien von  $f$  und  $g$

$$\stackrel{\text{Formaler}}{\Rightarrow} \exists \lambda \in \mathbb{R} : \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

Aber die Bedingung ist nicht hinreichend, sondern nur notwendig.  
Trotzdem: Die notwendige Bedingung liefert (hoffentlich) eine Endliche Anzahl Kandidaten, diese können einzeln überprüft werden.

### 6.7.10 Definition lokale Minima/Maxima unter Nebenbedingungen

Seien  $f, g_1, \dots, g_m : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $G$  offen gegeben sowie  $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ . Dann nennt man ein  $x_0 \in G$  ein lokales Minimum (bzw. Maximum) von  $f$  unter der Nebenbedingung  $g_1(x) = b_1 \dots g_m(x) = b_m$  wenn es eine offene Umgebung  $U \subseteq G$  von  $x_0$  gibt mit  $f(x) \geq f(x_0) \forall x \in U$  und  $g_k(x) = b_k$  für  $k = 1 \dots m$  (bzw.  $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in U$ ).

### 6.7.11 Definition Linear Unabhängig

Seien  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$  mit  $m \in \mathbb{N}$ . Dann heißen diese Vektoren linear unabhängig, wenn das lineare Gleichungssystem

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m = \vec{0}$$

nur die Lösung  $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$  besitzt.

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ansonsten sind die Vektoren linear abhängig.

### Bemerkung

Sind  $a_1, \dots, a_k$  nicht linear abhängig:

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{Def.}}{\Rightarrow} \exists k \in \{1, \dots, m\} \text{ und Lösung } \alpha_1, \dots, \alpha_m \text{ mit} \\ &\quad \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k + \dots + \alpha_m a_m = 0 \quad \alpha_k \neq 0 \\ &\Rightarrow a_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k} a_1 \dots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} a_{k-1} - \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} a_{k+1} \dots \end{aligned}$$

d.h.  $a_k$  lässt sich aus durch  $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_m$  bestimmen.

### 6.7.12 Satz von Lagrange

Seien  $f, g_1, \dots, g_m \in C^1(U)$  für eine offene Umgebung  $U$  von  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  (wie oben  $f, g_1, \dots, g_m : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ) und seien  $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ . Ist  $x_0$  ein lokales Extrema unter der Nebenbedingung  $g_k(x) = b_k, k = 1, \dots, m$  und die Vektoren  $\nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_m(x_0)$  linear unabhängig.

$$\begin{aligned} \exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad & \nabla f(x_0) + \lambda_1 \nabla g_1(x_0) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(x_0) = \vec{0} \\ \Leftrightarrow & f'(x_0)^T + J_g(x_0)^T \cdot \lambda = \vec{0} \\ \Leftrightarrow & f'(x_0) = -\lambda^T J_g(x_0) \end{aligned}$$

Zudem muss  $x_0$  die Nebenbedingung erfüllen.

### 6.7.13 Lagrange Funktion

$$\begin{aligned} L(x, \lambda) &= L(x_1, \dots, x_m, \lambda_1, \dots, \lambda_m) := f(x) + \lambda^T (g(x) - b) \\ \Leftrightarrow L'(x, \lambda) &= \left( f'(x) + \lambda^T g'(x), g(x) - b \right) \stackrel{!}{=} \vec{0} \end{aligned}$$

## Kapitel 7

# Integration in mehreren Veränderlichen

### 7.1 Parameterintegrale

#### 7.1.1 Eigentliche Parameterintegrale

Sei  $f(x, t)$  reel und stetig in  $[\alpha, \beta] \times [a, b]$  (also  $x \in [\alpha, \beta], t \in [a, b]$ ). Dann gilt für

$$F(x) := \int_a^b f(x, t) \, dt$$

- (a)  $F$  ist stetig auf  $[\alpha, \beta]$
- (b) Ist  $f_x$  stetig in  $[\alpha, \beta] \times [a, b]$ , so ist  $F \in C^1([\alpha, \beta])$  und  $F'(x) = \int_a^b f_x(x, t) \, dt$
- (c) Satz von Fubini:

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(x) \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(x, t) \, dt \, dx = \int_a^b \int_{\alpha}^{\beta} f(x, t) \, dx \, dt$$

#### 7.1.2 Leibniz Regel

Seien  $f(x, t), f_x(x, t)$  stetig in  $[\alpha, \beta] \times [a, b]$  und  $u, v \in C^1([a, b])$ . Dann ist

$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, t) \, dt \in C^1([a, b])$$

und

$$F'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f_x(x, t) \, dt + f(x, v(x))v'(x) - f(x, u(x))u'(x)$$

### 7.1.3 Uneigentliche Parameterintegrale

Ist für jedes  $x \in M \subseteq \mathbb{R}$  ein uneigentliches Integral

$$\int_a^b f(x, t) \, dt$$

mit kritischem Punkt  $a$  oder  $b$  gegeben, so heißt dieses gleichmäßig konvergent in  $M$ , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists L \in (a, b) : \left| \int_{T_1}^{T_2} f(x, t) \, dt \right| < \varepsilon \quad \forall x \in M \quad \forall T_1, T_2 \in (a, L) \text{ (bzw. } \forall T_1, T_2 \in (L, b))$$

### 7.1.4 Majorantenkriterium

Ein uneigentliches Integral  $\int_a^b f(x, t) \, dt$  konvergiert gleichmäßig in  $M$  wenn ein konvergentes Integral

$$\int_a^b g(t) \, dt \text{ ex. mit } |f(x, t)| \leq g(t)$$

### 7.1.5 Fubini für uneigentliche Parameterintegrale

Ist  $f(x, t)$  stetig in  $[\alpha, \beta] \times [a, b]$  und konvergiert

$$F(x) = \int_a^b f(x, t) \, dt$$

gleichmäßig auf  $[\alpha, \beta]$  dann ist  $F$  stetig und

$$\int_\alpha^\beta \int_a^b f(x, t) \, dt \, dx = \int_a^b \int_\alpha^\beta f(x, t) \, dx \, dt$$

### 7.1.6 Konvergenzkriterien

Sind  $f(x, t), f_x(x, t)$  stetig auf  $[\alpha, \beta] \times [a, b]$  und ist

$$\int_a^b f(x, t) \, dt$$

für ein  $x_0 \in [\alpha, \beta]$  konvergent und ist

$$\int_a^b f_x(x, t) \, dt$$

gleichmäßig konvergent. Dann gilt:

$$F(x) = \int_a^b f(x, t) \, dt \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$$



und

$$F'(x) = \int_a^b f_x(x, t) \, dt \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

existiert und ist stetig.

## 7.2 Kurvenintegrale

### 7.2.1 Äquivalenz für Kurven

Zwei stetige Funktionen  $x : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, y : [\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißen Äquivalent (schreibweise  $x \sim y$ ), wenn eine streng monoton wachsende Funktion

$$\phi : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$$

gibt mit

$$x(t) = y(\phi(t)) \quad \forall t \in [a, b]$$

#### Bemerkung

Es gilt:

- (a)  $x \sim x$  (Reflexivität)
- (b)  $x \sim y \Rightarrow y \sim x$  (Symmetrie)
- (c)  $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$  (Transitivität)

### 7.2.2 Kurven im $\mathbb{R}^n$

Ist  $x : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig, so nennt man die Menge

$$\mathbb{K} := \{y : [\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ mit } x \sim y\}$$

die Kurve  $\mathbb{K}$  mit Parameterdarstellung  $x$  und den Punkt  $x(a)$  Anfangspunkt und  $x(b)$  Endpunkt.

#### Schreibweise

$$\mathbb{K} : x(t), a \leq t \leq b$$

Die Menge

$$T(\mathbb{K}) := \{x(t) : t \in [a, b]\} = x([a, b])$$

nennt man den Träger der Kurve  $\mathbb{K}$ .

### Bemerkung

Verschieden Kurven können also den gleichen Träger haben.

Man nennt  $K$ :

- (a) Geschlossen, wenn  $x(a) = x(b)$
- (b) Einfach oder Jordankurve, wenn  $x(t) \neq x(s) \forall t, s : a \leq t < s < b$

### 7.2.3 Eigenschaften von Parameterdarstellungen

- (a) Eine Parameterdarstellung  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  einer Kurve heißt stückweise stetig differentierbar, wenn eine Zerlegung

$$T : a = t_0 < \dots < t_k = b \quad (7.1)$$

existiert und  $x$  auf  $(t_l, t_{l+1})$   $l \in \{0, \dots, k-1\}$  differentierbar ist.

- (b) Besitzt eine Kurve  $\mathbb{K}$  eine (stückweise) stetig differentierbare Parameterdarstellung  $x(t), t \in [a, b]$  mit  $\dot{x}(t) \neq \vec{0}$  für  $t \in [a, b]$  so heißt  $\mathbb{K}$  stückweise glatt oder stückweise regulär.
- (c) Ist eine Parameterdarstellung  $x$  von  $\mathbb{K}$  differentierbar und glatt, so heißt

$$T(t) := \frac{\dot{x}(t)}{\|\dot{x}(t)\|}$$

der Tangential (einheits) vektor von  $x$  und  $\mathbb{K}$

- (d) Ist auch  $T$  differentierbar und glatt (also  $\dot{T}(t) \neq \vec{0}$ ) so heißt

$$N(t) := \frac{\dot{T}(t)}{\|\dot{T}(t)\|}$$

der (Haupt-) Normalen (einheits) vektor von  $\mathbb{K}$  und  $x$  bei  $t$

- (e) Und falls  $n = 3$

$$B(t) = T(t) \times N(t)$$

der Binormalen (einheits) vektor von  $\mathbb{K}$  und  $x$  bei  $t$  (Man nennt dann  $T(t), N(t), B(t)$  ein begleitendes Dreibein von  $\mathbb{K}$ )

- (f) Existiert  $T(t)$ , so nennt man die Gerade

$$\{x(t) + \lambda \dot{x}(t) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

die Tangente von  $\mathbb{K}$  bei  $t$

- (g) Existiert auch  $N(t)$  so nennt man die Ebene

$$\{x(t) + \lambda \dot{x}(t) + \mu \ddot{x}(t) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

die Schmiegeebene von  $\mathbb{K}$  bei  $t$ .

### Bemerkung

Sei  $x(t) = y(\phi(t))$  mit  $a \leq t \leq b$  zwei Parameterdarstellungen von  $x$ . Dann gilt:

$$T(t) = \frac{\dot{x}(t)}{\|\dot{x}(t)\|} = \frac{\dot{y}(\phi(t)) \cdot \dot{\phi}(t)}{\|\dot{y}(\phi(t)) \cdot \dot{\phi}(t)\|} = \frac{\dot{y}(\phi(t))}{\|\dot{y}(\phi(t))\|}$$

Das heißt die Berechnung von  $T$  ist unabhängig von der konkreten Parameterdarstellung

Existiert  $N(t)$  dann gilt:

$$N(t) \perp T(t)$$

Existiert auch  $B(t)$  (im  $\mathbb{R}^3$ ), dann gilt:  $N(t), T(t), B(t)$  sind paarweise Orthogonal.

### 7.2.4 Weitere Definitionen zu Kurven

(a) Ist  $\mathbb{K} : x(t), a \leq t \leq b$  eine Kurve, so heißt:

$$-\mathbb{K} : y(t), a \leq t \leq b \text{ mit } y(t) = x(a + b - t)$$

die zu  $\mathbb{K}$  entgegengesetzte Kurve

(b) Sind  $\mathbb{K} : x(t), a \leq t \leq b$  und  $\mathbb{L} : y(t), \alpha \leq t \leq \beta$  zwei Kurven und gilt  $x(b) = y(\alpha)$  dann ist

$$\mathbb{K} + \mathbb{L} : z(t), a \leq t \leq (\beta - \alpha) + b$$

und

$$z(t) = \begin{cases} x(t) & , a \leq t \leq b \\ y(t - b + \alpha) & , b \leq t \leq (\beta - \alpha) + b \end{cases}$$

die aus  $\mathbb{K}$  und  $\mathbb{L}$  zusammengesetzte Kurve.

### 7.2.5 Kurventintegrale 2. Art

Sei  $\mathbb{K}$  eine Kurve im  $\mathbb{R}^n$  und

$$f : T(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

(a) Sei  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Parameterdarstellung von  $\mathbb{K}$

(i) Für eine Zerlegung  $T : a = t_0 < \dots < t_n = b$ , Zwischenpunkte  $Z : (\xi_1, \dots, \xi_n)$  mit  $t_{k-1} \leq \xi_k \leq t_k$  heißt

$$S(f, x, T, Z) := \sum_{k=1}^n f(x(\xi_k)) \cdot (x(t_k) - x(t_{k-1}))$$

die Riemann-Summe von  $f, T, Z$  bezüglich  $x$ .

- (ii) Existiert eine Zahl  $I \in \mathbb{R}$  derart, dass für jede Folge von Zerlegungen  $T_n$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T_n) = 0$$

stets

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, x, T_n, Z_n) = I$$

folgt, so heißt  $I$  das Kurvenintegral (2. Art) von  $f$  längs  $\mathbb{K}$  bzgl.  $x$ .

- (b) Gibt es stets ein  $I$  wie in (a) so heißt  $f$  längs  $\mathbb{K}$  (Riemann-) integrierbar und man nennt  $I$  das (unbestimmte) Kurvenintegral von  $f$  längs  $\mathbb{K}$  und schreibt:

$$I = \int_{\mathbb{K}} f = \int_{\mathbb{K}} f(x) \cdot dx = \int_{\mathbb{K}} f_1(x) dx_1 + \cdots + f_n(x) dx_n$$

### 7.2.6 Substitutionsregel

Ist  $\mathbb{K} : x(t), a \leq t \leq b$  eine Kurve im  $\mathbb{R}^n$  und  $x(t)$  stückweise differentierbar, sowie  $f : T(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig, so ist  $f$  längs  $\mathbb{K}$  integrierbar und es gilt:

$$\int_{\mathbb{K}} f(x) dx = \int_a^b f(x(t)) dx(t) = \int_a^b f(x(t)) \cdot \dot{x}(t) dt$$

### 7.2.7 Definition Wegunabhängigkeit

Sei  $f \in C(G, \mathbb{R}^n)$  mit  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet:

- (a) Gilt für zwei Wege  $\mathbb{K}$  und  $\mathbb{L}$  mit gleichem Anfangs- und Endpunkt stets

$$\int_{\mathbb{K}} f = \int_{\mathbb{L}} f$$

dann heißen die Kurvenintegrale Wegunabhängig in  $G$ .

- (b) Eine Funktion  $F \in C^1(G, \mathbb{R})$  heißt Stammfunktion von  $f$  in  $G$ , wenn

$$\nabla F(x) = f(x) \quad \forall x \in G$$

gilt.

- (c) Man nennt

$$P := -F$$

das Potential von  $f$ .

- (d) Man nennt  $f$  konservativ in  $G$  oder ein Potentialfeld oder Gradientenfeld in  $G$ , wenn  $f$  eine Stammfunktion hat.

### 7.2.8 1. Hauptsatz für Kurvenintegral

Sei  $f$  konservativ in  $G$  mit Stammfunktion  $F$  und Potential  $P$  dann gilt für jeden Weg  $\mathbb{K}$  in  $G$  mit Anfangspunkt  $A \in G$  und Endpunkt  $B \in G$ :

$$\int_{\mathbb{K}} f = F(B) - F(A) = P(A) - P(B)$$

insbesondere ist also das Integral wegunabhängig.

### 7.2.9 Äquivalente Aussagen zu Stammfunktionen

(a)

$$\int_{\mathbb{K}} f \text{ ist wegunabhängig in } G$$

(b)  $f$  besitzt eine Stammfunktion

(c)

$$\int_{\mathbb{K}} f = 0 \text{ für jede geschlossene Kurve } \mathbb{K}$$

#### Bemerkung

Rechenregeln für zwei Kurven  $\mathbb{K}$  und  $\mathbb{L}$ :

(a)

$$\int_{\mathbb{K}+\mathbb{L}} f = \int_{\mathbb{K}} f + \int_{\mathbb{L}} f$$

(b)

$$\int_{-\mathbb{K}} f = - \int_{\mathbb{K}} f$$

### 7.2.10 Definition einfach zusammenhängende Gebiete

Ein Gebiet  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt einfach zusammenhängend, wenn sich jede geschlossene Kurve in  $G$  innerhalb von  $G$  „auf einen beliebigen Punkt zusammenziehen lässt“.

### 7.2.11 Sternförmige Gebiete

Eine Menge  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt Sternförmig bezüglich  $x_0 \in G$ , wenn für alle  $x \in G$  gilt, dass  $\overline{x_0 x} \subseteq G$  (d.h. jedes  $x$  ist von  $x_0$  durch einen Streckenzug erreichbar).  $G$  ist ein sternförmiges Gebiet, wenn  $G$  offen und sternförmig ist.

#### Bemerkung

$G$  sternförmig  $\Rightarrow G$  einfach zusammenhängend

### 7.2.12 2. Hauptsatz für Kurvenintegrale

Sei  $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ ,  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet, dann gilt:

- (a) Besitzt  $f$  eine Stammfunktion in  $G$ , so erfüllt  $f$  in  $G$  die Integrabilitätsbedingung:

$$\frac{\partial f_l}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_l} \quad k, l \in \{1, \dots, n\}$$

D.h. die Jacobi-Matrix von  $f$  ist symmetrisch.

Kurz:

$$f \text{ hat Stammfunktion} \Rightarrow f' = (f')^T$$

- (b) Ist  $G$  einfach zusammenhängend und erfüllt  $f$  die Integrabilitätsbedingung dann besitzt  $f$  eine Stammfunktion.

Kurz:

$$G \text{ einfach zusammenhängend} \wedge f' = (f')^T \Rightarrow \exists F : \nabla F = f$$

### 7.2.13 Definition Rotation

Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^3$  offen und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^3$  partiell differentierbar, dann heißt die Funktion  $\text{rot } f : G \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$\text{rot } f(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

die Rotation von  $f$  in  $G$ .

#### Bemerkung

Im Fall  $f : G \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definiert man

$$\text{rot } f(x_1, x_2) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$$

Formal betrachtet man die Hilfsfunktion

$$\tilde{f}(x, y, z) := \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

### 7.2.14 Zusammenhang Rotation und Integrabilitätsbedingung

Ist  $f \in C^1(G, \mathbb{R}^3)$ ,  $G$  ein Gebiet, dann gilt

- (a)  $f$  besitzt eine Stammfunktion  $\Rightarrow \text{rot } f = \vec{0}$   
 (b)  $G$  einfach zusammenhängend und  $\text{rot } f = \vec{0} \Rightarrow f$  hat Stammfunktion.

### 7.2.15 Definition Linienintegral/Kurvenintegral 1. Art

Sei  $\mathbb{K} : x(t), a \leq t \leq b$  ein Weg, und  $x$  stückweise differentierbar. Für ein  $\phi \in C(T(\mathbb{R}), \mathbb{R})$  heißt

$$\int_{\mathbb{K}} \phi \, ds := \int_a^b \phi(x(t)) \|\dot{x}(t)\| \, dt$$

ein Linienintegral oder Kurvenintegral 1. Art von  $\phi$  längs  $\mathbb{K}$ .

#### Bemerkung

(a) Mit  $\phi \equiv 1$ :

$$\int_{\mathbb{K}} 1 \, ds = \int_a^b \phi(x(t)) \|\dot{x}(t)\| \, dt = \int_a^b \|\dot{x}(t)\| \, dt = l(\mathbb{K})$$

d.h. mit Linienintegralen können auch Weglängen berechnet werden, bzw. Weglängen berechnet man mit  $\phi = 1$ .

(b)  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  wähle  $\mathbb{K} : x(t) = a + t \cdot (b - a) \, t \in [0, 1]$ :

$$\int_{\mathbb{K}} \phi \, ds = \int_0^1 \phi(a + t \cdot (b - a)) \|b - a\| \, dt = \int_a^b \phi(t) \, dt$$

(c) Linienintegrale hängen nicht von der Parameterdarstellung ab.

(d) Man schreibt (falls Parameter-Darstellung bekannt ist) oft

$$ds = \|\dot{x}(t)\| \, dt$$

und nennt  $ds$  Bogensegment oder Liniensegment.

(e) Ist  $f \in C(T(\mathbb{K}), \mathbb{R}^n)$  und  $\dot{x}(t) \neq \vec{0} \, \forall t \in [a, b]$ , dann ist:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{K}} f &= \int_{\mathbb{K}} f(x) \, dx = \int_a^b f(x(t)) \dot{x}(t) \, dt \\ &= \int_a^b \frac{f(x(t)) \dot{x}(t)}{\|\dot{x}(t)\|} \|\dot{x}(t)\| \, dt \\ &= \int_a^b f(x(t)) \cdot T(t) \|\dot{x}(t)\| \, dt \\ &= \int_{\mathbb{K}} \phi \, ds \text{ mit } \phi(t) = f(x(t)) \cdot T(t) \end{aligned}$$

## 7.3 Bereichsintegrale

Hier:  $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und

$$\int_G f = \int_G f(x_1, \dots, x_n) \, d(x_1, \dots, x_n)$$

sollen anschaulich bedeuten:

Welches Volumen schließt der Graph von  $f$  mit der Grundfläche  $G$  ein.

### 7.3.1 Intervalle im $\mathbb{R}^n$

Für  $a, b \in \mathbb{R}^n$  bezeichnet die Menge

$$[a, b] := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

einen (kompakten) Quader oder (kompaktes) Intervall im  $\mathbb{R}^n$ . Die Zahl

$$V([a, b]) = \begin{cases} \prod_{k=1}^n (b_k - a_k) & , \text{ falls } b_k > a_k \text{ für } k = 1, \dots \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

bezeichnet das Volumen, und die Zahlen  $b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n$  als Kantenlängen.

### 7.3.2 Definition Zerlegung

Ist  $[a, b] = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  und ist für jedes  $k \in \{1, \dots, n\}$  mit

$$T^{(k)} : a_k = x_0 < \dots < x_{l_k} = b_k$$

eine Zerlegung von  $[a_k, b_k]$  dann heißt die Menge

$$I_{l_1, \dots, l_n} = [x_{l_1-1}^{(1)} - x_{l_1}^{(1)}] \times \dots \times [x_{l_1-1}^{(n)} - x_{l_1}^{(n)}]$$

mit  $l_k \in \{1, \dots, l_k\}$  für  $k \in \{1, \dots, n\}$  eine Zerlegung  $T$  von  $[a, b]$ .  
Das Feinheitsmaß von  $T$  ist

$$\mu(T) = \max_{l_1, \dots, l_n} V(I_{l_1, \dots, l_n})$$

Allgemein ist ein Intervall von der Form

$$[x_i^{(1)}, x_{i+1}^{(1)}] \times [x_j^{(2)}, x_{j+1}^{(2)}]$$

mit  $i \in \{0, \dots, l_1 - 1\}$  und  $j \in \{0, \dots, l_2 - 1\}$ .



### 7.3.3 Definition Riemann-Summe

Sei  $T$  eine Zerlegung eines kompakten Quaders  $I \subseteq \mathbb{R}^n$  mit Teilquadrern  $I_1, \dots, I_l$  mit  $l = l_1 \cdot \dots \cdot l_n$  (entstehen indem man die Zerlegungsintervalle fortlaufend durchnummeriert) und Zwischenpunkte  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_l)$  mit  $\xi_i \in I_i (i \in \{1, \dots, l\})$  und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  (d.h. Skalarwertige Funktion). Dann heißt

$$S(f, T, \xi) = \sum_{i=1}^l f(\xi_i) \mu(I_i)$$

die Riemann-Summe von  $f$  bezüglich  $T$  und  $\xi$ .

### 7.3.4 Riemann integrierbare Bereichsintegrale

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion,  $I \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Quader. Gibt es eine Zahl  $\alpha \in \mathbb{R}$ , so dass für jede Folge von Zerlegungen  $(T_k)_{k=1}^\infty$  mit Zwischenpunkten  $(\xi_k)_{k=1}^\infty$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(T_k) = 0$  die Riemann-Summe  $S(f, T_k, \xi_k)$  gegen  $\alpha$  konvergiert für  $k \rightarrow \infty$  dann heißt  $f$  Riemann integrierbar über  $I$  und  $\alpha$  nennen wir das Bereichsintegral von  $f$  über  $I$ .

#### Schreibweise

$$\alpha = \int_I f(x) \, dx$$

Zur Schreibweise: z.B.  $n = 2$  auch:

$$\alpha = \iint_I f(x, y) \, d(x, y) := \int_I f(x, y) \, d(x, y)$$

oder Angabe von  $I$  an dem Integral:

$$\alpha = \int_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]} f(x, y) \, d(x, y)$$

### 7.3.5 Bereichsintegrale über beschränkte Mengen

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  beschränkt und  $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  ein Quader mit  $M \subseteq I$ . Dann heißt  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  über  $M$  integrierbar wenn die Funktion

$$\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in M \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

über  $I$  Bereichs-Riemann integrierbar ist. Wir definieren:

$$\int_M f(x) \, dx = \int_I \tilde{f}(x) \, dx$$

### 7.3.6 Cavalieri

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n (n > 1)$  und bezeichne

$$M' = \{x \in \mathbb{R} : (x, y)^T \in M \text{ für ein } y \in \mathbb{R}^{n-1}\}$$

und für  $x \in M'$

$$M(x) = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : (x, y) \in M\}$$

dann gilt für  $f \in C(\bar{M})$  (falls  $M, M', M(x)$  sogenannte messbare Mengen sind, d.h.  $\mu(M), \mu M', \mu M(x)$  sind definiert)

$$\int_M f(x, y) \, d(x, y) = \int_{M'} \left[ \int_{M(x)} f(x, y) \, dy \right] dx$$

mit  $x \in \mathbb{R}$  und  $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ .

### 7.3.7 Fubini

Im Fall  $n = 2$  steht nach Cavalieri ein Parameterintegral und mit Fubini gilt:

$$\int_{M'} \int_{M(x)} f(x, y) \, dy \, dx = \int_{\tilde{M}'} \int \tilde{M}(y) f(x, y) \, dx \, dy$$

wobei  $\tilde{M}', \tilde{M}(y)$  analog zu  $M', M(x)$  bezüglich  $y$  definiert sind.

### 7.3.8 Definition Meßbare-Mengen

Eine beschränkte Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt (Jordan-) meßbar, wenn

$$\int_M 1 \, dx$$

existiert, in diesem Fall nennt man

$$\mu(M) := \int_M 1 \, dx$$

das Volumen von  $M$ . Ist  $\mu M = 0$ , so nennt man  $M$  eine Nullmenge.

### 7.3.9 Definition $2 \times 2$ Determinante

Für

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

definieren wir die Funktion

$$\det : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$$

durch  $A \mapsto \det(A) = a \cdot d - c \cdot b$  und nennen die Funktionsauswertung die Determinante von  $A$ .

### 7.3.10 Mehrdimensionale Substitutionsregel

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  meßbar und  $G \supseteq M$  ein Gebiet. Ist  $T \in C^1(G, \mathbb{R}^m)$  und gilt  $\det(T'(x)) \neq 0 \forall x \in M \setminus N$  für eine Nullmenge  $N$ , dann gilt:

$$\int_{T(M)} f(x_1, \dots, x_n) \, d(x_1, \dots, x_n) = \int_M f(T(u_1, \dots, u_n)) |\det(T'(u_1, \dots, u_n))| \, d(u_1, \dots, u_n)$$

## 7.4 Integralsätze in der Ebene

### 7.4.1 Positiv berandete Menge

Eine beschränkte Menge  $B \subseteq \mathbb{R}^2$  heißt positiv berandet durch einen Weg, (Randkurve)  $\mathbb{K}$ , wenn  $T(\mathbb{K}) = \partial B$  ist und wenn  $\mathbb{K}$  eine stückweise stetig differenzierbare Parameterdarstellung  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  hat mit:

- (i)  $\dot{x}(t) \neq 0$  für fast alle  $t \in [a, b]$
- (ii) der Normalenvektor von  $x(t)$  zeigt nach außen

### 7.4.2 Satz von Green

Ist  $B \subseteq \mathbb{R}^2$  positiv berandet, dann gilt für alle  $f \in C^1(B, \mathbb{R}^2)$

$$\iint_B \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \, d(x, y) = \int_{\partial B} f(x, y) \, d(x, y)$$

### 7.4.3 Definition Normalbereiche

Eine Menge  $B \subseteq \mathbb{R}^2$  heißt Normalbereich bezüglich der  $x$ -Achse (bzw.  $y$ -Achse), wenn es ein Intervall  $[a, b]$  gibt und die Funktion  $\varphi, \psi$  mit

$$B = \{(x, y)^T : a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

### 7.4.4 Gauß'sche Integralsätze in der Ebene

Sei  $B \subseteq \mathbb{R}^2$  ein positiv berandeter Bereich und  $f \in C^1(B, \mathbb{R}^2)$  bzw.  $f \in C^2(B, \mathbb{R}^2)$  und bezeichne  $\nu$  die nach außen gerichtete Normale auf  $\partial B$ . Dann gelten die Integralsätze:

(i)

$$\iint_B (\operatorname{div} f)(x, y) \, d(x, y) = \int_{\partial B} f \cdot \nu \, ds$$

(ii)

$$\iint_B f_1(x, y) \Delta f_2(x, y) - f_2(x, y) \Delta f_1(x, y) \, d(x, y) = \int_{\partial B} f_1 \frac{\partial f_2}{\partial \nu} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial \nu}$$

## 7.5 Oberflächenintegrale und Integralsätze im $\mathbb{R}^3$

### 7.5.1 Definition Reguläre Flächen

Sei  $B \subseteq \mathbb{R}^2$  und  $x : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$x(u, v) = \begin{pmatrix} x_1(u, v) \\ x_2(u, v) \\ x_3(u, v) \end{pmatrix}$$

eine stetig diffbare Funktion, für die  $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}$  und  $x_v = \frac{\partial x}{\partial v}$  linear unabhängig sind (d.h. die Vektoren  $x_u$  und  $x_v$  zeigen nicht in die gleiche oder entgegengesetzte Richtung) (für fast alle  $(u, v)^T \in B$ ) die Menge der Ausnahmen muss  $\tilde{B} \subseteq B$  muss  $\mu \tilde{B} = 0$  erfüllen.

Das Bild einer solchen Funktion, d.h. die Menge

$$A = x(B) := \{x(u, v) | (u, v)^T \in B\}$$

heißt dann eine reguläre Fläche im  $\mathbb{R}^3$  und die Funktion  $x$  heißt die Parametrisierung von  $A$ .

Man nennt

- (i)  $x_u(u, v), x_v(u, v)$  die Tangentialvektoren in  $(u, v)^T$
- (ii)  $n(u, v) := \frac{(x_u \times x_v)(u, v)}{\|(x_u \times x_v)(u, v)\|}$ 
  - Vektor mit Länge 1 der Senkrecht auf den Tangentialvektoren steht
  - Rechnerisch zu erhalten durch das Kreuzprodukt der Tangentialvektoren

der (Flächen-) Normalenvektor in  $(u, v)^T$  falls  $x_u(u, v)$  und  $x_v(u, v)$  linear unabhängig sind.

Ist  $B$  positiv berandet durch  $\mathbb{K} : y(t), a \leq t \leq b$  so nennt man  $A$  positiv berandet durch Kurve mit Parameterdarstellung  $x(y(t)), a \leq t \leq b$ .

### 7.5.2 Definition Oberflächenintegral

Sei  $A$  eine reguläre Fläche im  $\mathbb{R}^3$  mit Parameterdarstellung  $x : B \rightarrow \mathbb{R}^3, B \subseteq \mathbb{R}^2$  meßbar und  $x$  injektiv auf  $B \setminus N$  für eine Nullmenge  $N$ .

- (a) Für jedes  $f \in C(A, \mathbb{R})$  heißt

$$\iint_A f \cdot d\sigma = \iint_B f(x(u, v)) \cdot \|(x_u \times x_v)(u, v)\| \, d(u, v)$$

das Oberflächenintegral von  $f$  über  $A$  und man nennt

$$d\sigma = \|(x_u \times x_v)(u, v)\| \, d(u, v)$$

das Oberflächenelement.

- (b)  $O(A) := \iint_A 1$  heißt Oberflächeninhalt von  $A$ .

### Bemerkung

1. Das Oberflächenintegral hängt nicht von der Parameterdarstellung ab.
2. Ein Summand des Oberflächenintegrals sieht so aus:

$$f(x(u, v)) \cdot \|(x_u \times x_v)(u, v)\| \cdot \Delta u \Delta v$$

### 7.5.3 Satz von Stokes

Sei  $A$  eine reguläre Fläche im  $\mathbb{R}^3$  und  $\partial A$  positiv berandet. Dann gilt für  $f \in C^1(A, \mathbb{R}^3)$

$$\iint_A \operatorname{rot} f \cdot n \, do = \int_{\partial A} f$$

Mit  $n$ :

- (i) Normalenvektor
- (ii) Länge 1
- (iii) Senkrecht auf Fläche
- (iv) Immer auf der gleichen Seite von  $A$

also

$$\iint_B \operatorname{rot}(f(x(u, v))) \cdot n(x(u, v)) \cdot \|(x_u \times x_v)(u, v)\| \, d(u, v) = \int_{\partial A} f$$

mit

$$n(x(u, v)) = \pm \frac{(x_u \times x_v)(u, v)}{\|(x_u \times x_v)(u, v)\|}$$

### 7.5.4 Divergenzsatz von Gauß

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  kompakt und  $\partial M$  ergebe sich als endliche Vereinigung von regulären Flächen, deren Normale  $n$  (normiert) nach Außen zeigt. Dann gilt für jedes  $f \in C^1(M, \mathbb{R}^3)$

$$\iiint_M \operatorname{div} f = \iint_{\partial M} f \cdot n \, do$$

# Kapitel 8

## Lineare Algebra

### 8.1 Der Begriff Vektorraum

#### 8.1.1 Definition Vektorraum

Gegeben sei eine abelsche Gruppe  $V$  und ein Körper  $\mathbb{K}$  (bei uns wird  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  gelten) und eine Abbildung:

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V, (\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x =: \alpha x \text{ (Skalierung)}$$

Dann nennt man  $V$  einen Vektorraum über  $\mathbb{K}$ , wenn die folgenden Vektorraumaxiome erfüllt sind:

- (V1)  $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha \cdot \beta) \cdot v$  (Assoziativgesetz)
- (V2)  $\alpha \cdot (x + y) = (\alpha \cdot x) + (\alpha \cdot y) = \alpha x + \alpha y$   
 $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha x + \beta x$  (Distributivgesetzte)
- (V3)  $1 \cdot x = x$  für die  $1 \in \mathbb{K}$  (Gesetz der Eins)

In einem Vektorraum  $V$  über  $\mathbb{K}$  nennt man Elemente aus  $V$  Vektoren, die Elemente aus  $\mathbb{K}$  Skalare,  $\mathbb{K}$  den Skalarkörper und „ $\cdot$ “ die Multiplikation mit Skalaren. Die „ $+$ “ Verknüpfung in  $V$  die  $V$  die Vektoraddition und das neutrale Element  $\vec{0} \in V$  den Nullvektor.

#### 8.1.2 Rechenregeln

Ist  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$ , so gilt für  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  und  $x, y \in V$ :

1. (a)  $0 \cdot x = \vec{0} = \alpha \vec{0}$   
(b)  $\alpha \cdot x = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0 \vee x = \vec{0}$

2.

$$\alpha(-x) = (-\alpha)x = -(\alpha x)$$

## 8.2 Unterräume

### 8.2.1 Definition Unterraum

Eine Teilmenge  $U$  eines Vektorraums  $V$  über  $\mathbb{K}$  heißt Unterraum von  $V$ , wenn  $U$  bezüglich der in  $V$  definierten Vektoraddition und Skalierung ein Vektorraum ist.

### 8.2.2 Unterraumkriterien

Für  $U \subseteq V$  und  $U \neq \emptyset$  sind folgende Aussagen äquivalent

(a)  $U$  ist ein Unterraum von  $V$

(b)

$$x, y \in U, \alpha, \beta \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha x + \beta y \in U$$

(c)

$$(x, y \in U \Rightarrow x + y \in U) \wedge (\alpha \in K, x \in U \Rightarrow \alpha x \in U)$$

### 8.2.3 Durchschnitt von Unterräumen

Der Durchschnitt von Unterräumen ist wieder ein Unterraum, d.h.:

$$U_i \text{ } i \in J \text{ (} J \text{ eine Indexmenge) sind Unterräume} \Rightarrow \bigcap_{i \in J} U_i \text{ ist Unterraum}$$

### 8.2.4 Definition lineare Hülle

- Ist  $M$  eine beliebige Teilmenge eines Vektorraums. Dann heißt

$$\text{span}(M) := \bigcap_{U \in S} U \text{ mit } S := \{U \subseteq V : U \text{ ist Unterraum, } U \supseteq M\}$$

der von  $M$  aufgespannte Unterraum oder die lineare Hülle von  $M$ .

- Ist  $U$  ein Unterraum und  $M \subseteq V$  mit  $\text{span}(M) = U$ , dann heißt  $M$  ein erzeugendes System von  $U$ .

#### Bemerkung

1.  $\text{span}(M)$  ist der kleinste Unterraum, der  $M$  enthält
2.  $\text{span}(\emptyset) = \vec{0}$
3.  $M \subseteq N \Rightarrow \text{span}(M) \subseteq \text{span}(N)$
4. Ist  $U$  ein Unterraum, dann gilt  $U = \text{span}(U) = \text{span}(U \setminus \{\vec{0}\})$

### 8.2.5 Definition Linearkombination

Ist  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$  und  $x_1, \dots, x_n \in V, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$  dann heißt

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \in V$$

eine Linearkombination von  $x_1, \dots, x_n$  (mit Koeffizienten  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ).

### 8.2.6 Zusammenhang lineare Hülle — Linearkombination

Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$  und  $M \subseteq V$ , dann gilt  $\text{span } M$  ist die Menge aller Linearkombinationen, d.h.

$$\text{span}(M) = \{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \mid x_1, \dots, x_n \in M, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}\}$$

im Fall  $M = \{x_1, \dots, x_n\}$  gilt:

$$\text{span}(M) = \{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}\}$$

## 8.3 Lineare Unabhängigkeit

### 8.3.1 Definition Lineare Unabhängigkeit

Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$

- (a) Eine endliche Liste  $a_1, \dots, a_n \in V$  heißt linear unabhängig (l.u.), wenn gilt

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

Andernfalls heißen  $a_1, \dots, a_n$  linear abhängig (l.a.).

- (b) Eine beliebige Teilmenge  $M \subseteq V$  heißt linear unabhängig, wenn für eine beliebige endliche Liste  $a_1, \dots, a_n \in M$  gilt, dass diese linear unabhängig sind. Andernfalls ist  $M$  linear abhängig.

### 8.3.2 Rechenregeln für lineare Unabhängigkeit

Für Vektoren  $a, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  eines Vektorraumes  $V$  gilt:

- (a)

$$a \text{ l.u.} \Leftrightarrow \{a\} \text{ l.u.} \Leftrightarrow a \neq \vec{0}$$

Bemerkung:

$a_1, a_2$  mit  $a_1 = a_2$  ist linear unabhängig, aber  $M = \{a, a\} = \{a\}$  ist nur dann linear abhängig wenn  $a = \vec{0}$ .

- (b)  $a_1, \dots, a_n$  linear abhängig  $\Rightarrow a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k$  sind linear abhängig für  $k \geq 0$ .



- (c)  $a_1, \dots, a_n$  linear unabhängig  $\Rightarrow a_1, \dots, a_k$  linear unabhängig für  $k \leq n$
- (d)  $a_1, \dots, a_n$  linear unabhängig  $\Rightarrow a_1, \dots, a_n$  sind paarweise verschieden
- (e) Für  $n \geq 2$  sind  $a_1, \dots, a_n$  genau dann linear abhängig, wenn ein Vektor als Linearkombination darstellbar ist. D.h.:

$$\exists i \in \{1, \dots, n\} : a_i = \sum_{k=1, k \neq i}^n \alpha_k a_k \text{ für } \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$$

- (f) Sind  $a_1, \dots, a_n$  linear unabhängig und  $a_1, \dots, a_n, a$  linear abhängig, so ist  $a$  die linear Kombination von  $a_1, \dots, a_n$  und die Koeffizienten sind eindeutig.
- (g) Ist  $a$  eine Linearkombination von  $a_1, \dots, a_n$  und jeder Vektor  $a_k$  eine Linearkombination von  $b_1, \dots, b_m$  so ist  $a$  eine Linearkombination von  $b_1, \dots, b_m$

### Bemerkung

Für Teilmengen  $M, N$  eines Vektorraums  $V$  gilt:

- (a)  $M$  l.a.  $M \subseteq N \Rightarrow N$  l.a.
- (b)  $M = \emptyset \Rightarrow M$  l.u.
- (c)  $\vec{0} \in M \Rightarrow M$  l.a.

Für  $V = \mathbb{R}^3$

- (a)  $a_1, a_2, a_3$  seien linear abhängig und  $a_1, a_2$  linear unabhängig  
 $\Leftrightarrow$  also  $a_3$  ist in der von  $a_1$  und  $a_2$  aufgespannten Ebene  
 $\Rightarrow$  Spat mit Kanten  $a_1, a_2, a_3$  hat Volumen 0  
 $\Leftrightarrow \det(a_1, a_2, a_3) = 0$
- (b)  $a_1, a_2$  linear abhängig  $\Rightarrow a_2$  ist auf der von  $a_1$  aufgespannten Gerade  
 $\Rightarrow \det(a_1, a_2) = 0$

## 8.4 Basis und Dimension

### 8.4.1 Definition Hamel-Basis

- (a) Eine Teilmenge  $B$  eines Vektorraums  $V$  heißt (Hamel-) Basis von  $V$ , wenn gilt
  - (i)  $B$  ist linear unabhängig
  - (ii)  $V = \text{span}(B)$

Kurz:

$B$  ist ein linear unabhängiges Erzeuger-System von  $V$

- (b) Man sagt Vektoren  $b_1, \dots, b_n$  bilden eine Basis von  $V$ , wenn gilt  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  ist eine Basis von  $V$ .

### 8.4.2 Äquivalente Aussagen zu Basen

Sei  $B \subseteq V$ ,  $V$  ein Vektorraum, dann sind folgende Aussagen äquivalent

1.  $B$  ist eine Basis
2.  $B$  ist ein minimales Erzeugersystem
  - (a)  $V = \text{span}(B)$
  - (b)  $V \neq \text{span}(\tilde{B})$  mit  $\tilde{B} \subsetneq B$
3.  $B$  ist eine maximale, linear Unabhängige Teilmenge von  $V$ , d.h.
  - (a)  $B$  ist linear unabhängig
  - (b)  $B \cup \{x\}$  ist linear abhängig für  $x \in V \setminus B$  beliebig. D.h.  $x \in \text{span}(B)$
4. Falls  $B \neq \emptyset$  ist dies auch äquivalent zu:  
Jedes  $x \in V$  ist eine Linearkombination von endlich vielen Vektoren aus  $B$  und die Koeffizienten sind eindeutig bestimmt.

### 8.4.3 Existenz einer Basis

Jeder Vektorraum  $V$  besitzt eine Basis. Genauer gilt: ist  $M$  ein Erzeugendensystem von  $V$ , so gibt es eine Basis  $B$  von  $V$  mit  $B \subseteq M$ .

### 8.4.4 Eigenschaften der Basis

Sei  $V$  ein Vektorraum, dann gilt

1. Ist  $M \subseteq V$  endlich und linear unabhängig so existiert eine Basis  $B$  von  $V$  mit  $M \subseteq B$ . D.h.  $M$  kann zu einer Basis von  $V$  erweitert werden.
2. Ist  $B$  und  $\tilde{B}$  jeweils eine Basis von  $V$  dann haben beide gleich viele Elemente. Also  $|B| = |\tilde{B}|$  (also auch im Fall  $\infty = \infty$ ).

### 8.4.5 Definition Dimension

Ist  $V$  ein Vektorraum und  $B$  eine Basis, dann ist

$$\dim V := |B|$$

die Dimension von  $V$ . Im Fall  $|B| < \infty$  also  $\dim V \in \mathbb{N}_0$  heißt  $V$  endlich dimensional.

### 8.4.6 Beziehung von Dimensionen

Ist  $U$  ein Unterraum von  $V$ , so gilt

- (a)  $\dim U \leq \dim V$
- (b)  $\dim U = \dim V \Leftrightarrow U = V$  für  $\dim V < \infty$

### 8.4.7 Lineare unabhängigkeit im $n$ -Dimensionalen

Ist  $V$  ein  $n$ -Dimensionaler Vektorraum, so gilt:

- (a)  $n$  linear unabhängige Vektoren bilden eine Basis
- (b)  $n + 1$  Vektoren  $V$  sind linear abhängig.

## 8.5 Lineare Gleichungssysteme

### 8.5.1 Definition lineares Gleichungssystem

Sei  $m, n \in \mathbb{K}, \mathbb{K}$  ein Körper.  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}, b \in \mathbb{K}^m$  dann nennt man die Gleichung

$$A \cdot x = b \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

ein Lineares Gleichungssystem mit Koeffizienten  $A$ , rechter Seite  $b$  und Unbekannten  $x$ .

Etwas allgemeiner mit  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}, B \in \mathbb{K}^{m \times r}, X \in \mathbb{K}^{n \times r}$ .

Dann ist

$$A \cdot X = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \cdot x_1 & = b_1 \\ \vdots & \vdots \\ A \cdot x_r & = b_r \end{cases}$$

ein System von Lineargleichungen mit Koeffizienten  $X$ , rechten Seiten  $B$  und Unbekannten  $X$ .

Im Fall  $b = \vec{0}$  (bzw.  $B = \vec{0}$ ) heißt das LGS homogen.

#### Bemerkung

Im Fall  $Ax = b$  nennt man

- (a)  $\mathbb{L}(A, b) := \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = b\}$  die Lösungsmenge des LGS
- (b)  $\text{Kern}(A) := \{x \in \mathbb{K}^n : A \cdot x = \vec{0}\}$  den Kern von  $A$ . Es gilt  $\text{Kern}(A) = \mathbb{L}(A, \vec{0})$ .
- (c)  $\text{Im}(A) := \{y \in \mathbb{K}^m : \exists x \in \mathbb{K}^n \text{ mit } Ax = y\}$  das Bild von  $A$ .

### 8.5.2 Zusammenhang Kern und Lösung eines LGS

Sei  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ , dann gilt

- (a)  $\text{Kern}(A)$  ist Unterraum von  $\mathbb{K}^n$
- (b) Ist  $b \in \mathbb{K}^m$  und  $x_0 \in \mathbb{K}^n$  eine Lösung von  $Ax = b$ , dann ist die Lösungsgesamtheit

$$x_0 + \text{Kern}(A) := \{x_0 + y : y \in \text{Kern}(A)\}$$

#### Bemerkung

Außerdem ist  $\mathbb{L}(A, b)$  und  $\text{Kern}(A) = \mathbb{L}(A, \vec{0})$  ein Unterraum von  $\mathbb{K}^n$ .

### 8.5.3 Definition Affiner Unterraum, lineare Mannigfaltigkeit

Ist  $x_0$  ein Vektor und  $U$  ein Unterraum, dann ist

$$x_0 + U := \{x_0 + u : u \in U\}$$

ein affiner Unterraum und  $\dim(x_0 + U) := \dim(U)$  die Dimension von  $x_0 + U$ .

### 8.5.4 Definition Zeilen-/Spaltenrang

Sei

$$A = (a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{a}_m^T \end{pmatrix}$$

. Dann heißt

- (a)  $\dim(\text{span}(a_1, \dots, a_n))$  der Spaltenrang
- (b)  $\dim(\text{span}(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m))$  der Zeilenrang

#### Bemerkung

Also Spaltenrang  $\hat{=}$  Anzahl der linear unabhängigen Spalten.

Und Zeilenrang  $\hat{=}$  Anzahl der linear unabhängigen Zeilen.

### 8.5.5 Elementare Zeilen-/Stufenoperationen

Mittels elementarer Zeilen- bzw. Stufenoperationen kann man eine Matrix auf Zeilenstufenform bringen.

1. Vertauschen von Zeilen bzw. Spalten

Spalten-Operation:

$$A \cdot E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Zeilen-Operationen

$$E \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Das  $\alpha$ -fache der zweiten Zeile/Spalte zur ersten Zeile/Spalte addieren

Spalten-Operation:

$$A \cdot E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2\alpha & 2 & 3 \\ 4+5\alpha & 5 & 6 \\ 7+8\alpha & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Zeilen-Operationen

$$E \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4\alpha & 2+5\alpha & 3+6\alpha \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

3. Zeile/Spalte 2 mit  $\alpha$  multiplizieren

Spalten-Operation:

$$A \cdot E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & 3 \\ 4 & 5\alpha & 6 \\ 7 & 8\alpha & 9 \end{pmatrix}$$

Zeilen-Operationen:

$$E \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4\alpha & 5\alpha & 6\alpha \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Formal bedeutet die Überführung von  $A$  in Zeilenstufenform  $\tilde{A}$  also:

- (a) mit elementaren Zeilenoperationen (Gauß) überführt ist  $\tilde{A} = E_r \cdots E_1 \cdot A$  mit Elementarmatrizen  $E_1, \dots, E_r$ .
- (b) Mit elementaren Spaltenoperationen ist  $\tilde{A} = A_1 \cdot E_1 \cdots E_s$  mit Elementarmatrizen  $E_1, \dots, E_s$ .

### Bemerkung

Statt in Zeilenstufenform kann man  $A$  auch in die Form der Pseudo-Einheitsmatrix

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & \vec{0} & \\ & \vec{0} & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \text{diag}(1, 1, \dots, 0, 0)$$

Man kann zeigen:

1. Wird eine Zeilenoperation durchgeführt ändert sich nicht der Zeilenrang
2. Wird eine Spaltenoperation durchgeführt ändert sich nicht der Spaltenrang

### 8.5.6 Beziehung Spalten-/Zeilenrang

Zeilen- und Spaltenrang sind gleich.

### 8.5.7 Definition Rang einer Matrix

Sei  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ , dann ist der Rang von  $A$  definiert als der Zeilenrang von  $A$  und wir schreiben dafür:

$$\text{rg}(A) := \text{Zeilenrang}$$

### 8.5.8 Gauß-Algorithmus

Sei für  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}, b \in \mathbb{K}^m, x \in \mathbb{K}^n$   $Ax = b$  ein LGS mit gewissen elementaren Zeilenoperationen wird  $A$  in eine Zeilenstufenform  $\tilde{A}$  überführt ( $\tilde{A} = E_r \cdots \cdots E_1 \cdot A$ ). Gleichzeitig werden diese auf  $b$  angewendet, wobei man ein  $\tilde{b}$  erhält ( $\tilde{b} = E_r \cdots \cdots E_1 \cdot b$ ).

Dann gilt für  $x$ :

$$Ax = b \Leftrightarrow \tilde{A}x = \tilde{b}$$

### 8.5.9 Lösbarkeit eines LGS

Ein LGS  $AX = b$  ist lösbar, genau dann wenn

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$$

gilt.

### 8.5.10 Lösung eines LGS

Falls ein LGS  $Ax = b$  lösbar ist, dann ist  $\mathbb{L}(A|b)$  ein affiner Unterraum und es gilt:

$$\dim(\mathbb{L}(A|b)) = n - \text{rg}(A)$$

## **Teil III**

# **HM 3 — Zusammenfassung**

## Kapitel 9

# Exkurs Funktionalanalyse

### 9.1 Normen und innere Produkte

#### 9.1.1 Definition Vektornorm

Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$  eine Abbildung

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$$

nennt man eine Norm, wenn für  $\lambda \in \mathbb{K}, x, y \in V$  stets gilt:

(a)

$$\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in V \quad \wedge \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$$

(b)

$$\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

(c)

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

In dem Fall heißt  $V$  normierter Vektorraum. Einen Vektor  $a \in V$  nennen wir normiert, wenn  $\|a\| = 1$  ist.

#### Bemerkung

1. In einem normierten Vektorraum, kann man jedes  $a \in V \setminus \{\vec{0}\}$  durch

$$\tilde{a} = \frac{1}{\|a\|} \cdot a$$

normieren, dann

$$\|\tilde{a}\| = \left\| \frac{1}{\|a\|} \cdot a \right\| = \left| \frac{1}{\|a\|} \right| \|a\| = \frac{1}{\|a\|} \|a\| = 1$$



2. Es gilt in einem normierten Vektorraum auch, dass

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in V$$

Bew.: folgt aus (N3) (vgl. HM1)

### 9.1.2 Skalarprodukt / inneres Produkt

Sei  $V$  ein Vektorraum über  $K = \mathbb{C}$  oder  $K = \mathbb{R}$ . Eine Abbildung:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{K}, (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

heißt inneres Produkt oder Skalarprodukt in  $V$ , wenn für  $\lambda \in \mathbb{K}, x, y \in V$  stets gilt:

1.

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \wedge \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$$

2. Homogenität:

$$\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

3. Additivität:

$$\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$

4.

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

Ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein inneres Produkt von  $V$ , dann heißt  $V$  innerer Produktraum und genauer:

(a) euklidischer Raum für  $V = \mathbb{R}^n$

(b) unitärer Raum für  $V = \mathbb{C}^n$

#### Bemerkung

In (S1) wird implizit verlangt, dass  $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$  gilt.

### 9.1.3 Definition induzierte Norm

Ist  $V$  ein innerer Produktraum bezüglich  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  so heißt die durch  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$  definierte Abbildung

$$\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$$

die induzierte Norm.

#### Bemerkung

Dass die induzierte Norm eine Norm ist, ist noch zu zeigen.

### 9.1.4 Äquivalente Aussagen zu induzierten Normen

Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$  und  $\|\cdot\|$  eine Norm, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Die Norm wird durch ein Skalarprodukt induziert
2. Es gilt die sogenannte Parallelogramm Identität:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

### 9.1.5 Rechenregeln für Skalarprodukte

Seien  $x, y \in V, \lambda \in \mathbb{K}$ :

- 1.

$$\langle \lambda x, y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$$

- 2.

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

- 3.

$$\langle \vec{0}, y \rangle = \langle x, \vec{0} \rangle = 0$$

### 9.1.6 Cauchy-Schwarz'sche-Ungleichung

Sei  $V$  ein Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und induzierter Norm  $\|\cdot\|$  dann gilt  $\langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|$

## 9.2 Orthogonalität

### 9.2.1 Orthogonalität

Sei  $V$  ein innerer Produktraum, dann nennt man

- (a) Zwei Vektoren  $x, y \in V$  orthogonal (schreibweise  $x \perp y$ )

$$:\Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$$

- (b)  $M \subseteq V$  ein Orthogonalsystem (OGS) in  $V$ , wenn gilt:

$$x, y \in M \wedge x \neq y \Rightarrow x \perp y$$

- (c)  $M \subseteq V$  ein Orthonormalsystem (ONS) in  $V$ , wenn  $M$  ein OGS ist und gilt

$$x \in M \Rightarrow \|x\| = 1$$

- (d)  $B \subseteq V$  eine Orthogonalbasis von  $V$  wenn  $B$  eine Basis von  $V$  ist und  $B$  ein OGS ist.

- (e)  $B \subseteq V$  eine Orthonormalbasis von  $V$  wenn  $B$  eine Basis von  $V$  ist und  $B$  ein ONS ist.

### 9.2.2 Orthogonalität und lineare Abhängigkeit

Sei  $V$  ein innerer Produktraum. Dann gilt:

- (a) Seien  $b_1, \dots, b_n \in V$  orthogonal und alle  $\neq \vec{0} \Rightarrow b_1, \dots, b_n$  sind linear unabhängig.
- (b) Ist  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  ein OGS und  $x \in \text{span } B$ , dann gilt

$$x = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$$

mit

$$\alpha_k = \frac{\langle b_k, x \rangle}{\langle b_k, b_k \rangle}$$

### 9.2.3 Gram-Schmidt (Orthogonalisierung von Vektoren)

Seien  $x_1, \dots, x_n$  linear unabhängige Vektoren eines inneren Produktraums. Definiert man:

$$\begin{aligned} y_1 &:= x_1 \\ y_k &:= x_k - \sum_{l=1}^{k-1} \frac{\langle y_l, x_k \rangle}{\langle y_l, y_l \rangle} y_l \text{ für } k \in \{2, \dots, n\} \end{aligned}$$

dann gilt:  $\text{span}(x_1, \dots, x_n) = \text{span}(y_1, \dots, y_n)$  und  $y_l \perp y_k$  für  $l \neq k$ .

### 9.2.4 Orthogonale Projektion

Sei  $V$  ein innerer Produktraum und  $x_1, \dots, x_n$  linear unabhängig. Dann gilt für  $x \in V$

- (a)  $\exists! \hat{x} \in V : \|x - \hat{x}\| = \min\{\|x - u\| : u \in \text{span}(x_1, \dots, x_n)\}$
- (b) Für  $\hat{x}$  aus (a) gilt  $x - \hat{x} \perp U$  d.h.

$$x - \hat{x} \perp u \quad \forall u \in U$$

Sind  $y_1, \dots, y_n$  ein OGS mit  $U = \text{span}(y_1, \dots, y_n)$  dann gilt:

$$\hat{x} = \sum_{k=1}^n \frac{\langle y_k, x \rangle}{\langle y_k, y_k \rangle} y_k$$

## Kapitel 10

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

### 10.1 Einführung

#### 10.1.1 Explizite DGL 1. Ordnung

Gegeben sei ein Gebiet  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  und eine stetige Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ , dann heißt eine Funktion  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  (mit  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall) eine Lösung der (expliziten) Differentialgleichung (DGL)

$$y' = f(x, y)$$

wenn gilt:

(a)

$$\begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix} \in G \quad \forall x \in I$$

(b)

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \forall x \in I$$

Ferner heißt  $y$  eine Lösung des Anfangswertproblems

$$(\text{AWP}) = \begin{cases} y' & = f(x, y) \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases}$$

wenn  $y$  eine Lösung von  $y' = f(x, y)$  ist und  $y(x_0) = y_0$  gilt.

#### 10.1.2 Implizite DGL 1. Ordnung

(a) Eine DGL der Form

$$g(x, y, y') = 0$$

mit  $g : M \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  heißt eine implizite DGL 1. Ordnung und

$$(\text{AWP}) = \begin{cases} g(x, y, y') & = 0 \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases}$$

ist das dazugehörige AWP.

(b) Das lässt sich (manchmal) auf eine explizite DGL zurückführen:

$$g(x, y, z) = 0$$

hat bei  $(x_0, y_0)$  eine Auflösung nach  $z = f(x, y)$  falls die Determinante der Jakobi-Matrix  $J = \frac{\partial}{\partial z} g(x, y, z)$  nicht null ist.

### 10.1.3 DGL-System 1. Ordnung

Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  und für  $k \in \{1, \dots, n\}$  sei  $f_k : G \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))^T$  heißt Lösung des Systems

$$\begin{cases} y'_1 & = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots & \\ y'_n & = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

kurz:

$$y' = f(x, y)$$

von Differentialgleichungen 1. Ordnung, wenn gilt:

1.

$$\begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \in G \quad \forall x \in I$$

2.  $y_k$  ist stetig differenzierbar auf  $I$

3.  $y'_k(x) = f_k(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) = f_k(x, y(x))$

Außerdem heißt  $y$  eine Lösung des zugehörigen AWP

$$(\text{AWP}) = \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ \vdots \\ y_n(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \vdots \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix} = \tilde{y} = y_0 \end{cases}$$

wenn gilt:  $y$  ist eine Lösung von  $y' = f(x, y)$  und  $y(x_0) = y_0$ .

### 10.1.4 Umschreiben von DGLen

Eine sogenannte DGL  $n$ -ter Ordnung

$$y^{(n+1)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n+1)})$$

kann man stets in ein System 1. Ordnung umschreiben.

1.  $y_1, \dots, y_n$  definieren als:

$$\begin{aligned} y_1 &:= y \\ y_2 &:= y'_1 \\ y_n &:= y'_{n-1} \end{aligned}$$

2. Das ursprüngliche Problem einsetzen:

$$y'_n = y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = f(x, y_1, \dots, y_n)$$

3. Als System formulieren:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ f(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

4. Die Anfangsbedingung formulieren:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= \tilde{y}_1 \\ y'(x_0) &= \tilde{y}_2 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= \tilde{y}_n \end{aligned}$$

ergibt den Vektor

$$\tilde{y} := \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \vdots \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix}$$

## 10.2 Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen

### 10.2.1 Volterra'sche Integralgleichung

Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Gebiet und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $x_0 \in I$ . Dann gilt:

1.  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  löst das AWP.

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

genau dann, wenn die Integralgleichung

- 2.

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) \, dt \quad \forall x \in I$$

für alle  $y$  erfüllt ist.

Von der Form  $y = \Phi(y)$  mit

$$\Phi(y) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) \, dt$$

genauer:  $\Phi : C^1(I) \rightarrow C^1(I)$  also  $y$  muss Fixpunkt von  $\Phi$  sein.

### 10.2.2 Bemerkung: Newton-Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Tangente bestimmen:

$$\begin{aligned} T(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0 \\ \Rightarrow x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \Phi(x_0) \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \Phi(x_n) \end{aligned}$$

Hoffnung die so erzeugte Folge  $(x_n)_{n=1}^\infty$  konvergiert gegen ein  $\bar{x}$ , das heißt es gilt (falls  $\Phi$  stetig):

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x_n) = \Phi(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \Phi(\bar{x})$$

Das heißt, falls alles gut geht ist  $\bar{x}$  der Fixpunkt von  $\Phi$  (muss aber nicht immer so sein, z.B.  $f(x) = \sin(x)$ ).

### 10.2.3 Picard-Iterator

Der sogenannte Picard-Iterator bildet Funktionen auf Funktionen ab und ist definiert durch:

$$\Phi : y \rightarrow y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) \, dt$$

### 10.2.4 Definition Lipschitz-Bedingung

Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Gebiet. Eine Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllt eine Lipschitz-Bedingung (L-Bedingung) bezüglich der zweiten Komponente wenn gilt:

$$\exists L > 0 : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| < L \cdot |y_1 - y_2|$$

### Bemerkung

Für  $x$  fest, ist die L-Bedingung äquivalent zur Lipschitz-Stetigkeit.

### 10.2.5 Partielle Ableitung und Lipschitz-Bedingung

Ist bei  $f$  die partielle Ableitung nach der zweiten Komponente beschränkt, dann ist die L-Bedingung erfüllt:

$$|f_y(x, y)| < L \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in G \Rightarrow |f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |f_y(x, \xi)(y_1 - y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

### 10.2.6 Picard-Lindelöf (Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung)

Seien  $r, s > 0, x_0, y_0 \in \mathbb{R}; M := [x_0, x_0 + r] \times [y_0 - s, y_0 + s]$  sei  $G$  ein Gebiet mit  $M \subseteq G \subseteq \mathbb{R}^2$ . Außerdem erfülle  $f$  auf  $G$  eine L-Bedingung bezüglich der zweiten Komponente mit  $L > 0$ . Außerdem gelte  $|f(x, y)| \leq c \quad \forall (x, y)^T \in M$ . Dann besitzt das AWP

$$(\text{AWP}) = \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

auf dem Intervall  $I := [x_0, x_0 + \alpha]$  mit  $\alpha = \min\{r, \frac{s}{c}\}$  genau eine Lösung.

### 10.2.7 Peano (Existenz einer Lösung)

Gelten alle Voraussetzungen von Picard-Lindelöf bis auf die L-Bedingung, dann besitzt

$$(\text{AWP}) = \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

mindestens eine Lösung  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $I = [x_0, x_0 + \alpha]$  und  $\alpha = \min\{r, \frac{s}{c}\}$ .

### 10.2.8 Gronwallsche Ungleichung

Sei  $c > 0; f, g : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$  stetig gilt:

$$f(x) \leq c + \int_a^x f(t)g(t) \, dt \quad \forall x \in [a, b]$$

dann ist

$$f(x) \leq c \cdot \exp\left(\int_a^x g(t) \, dt\right) \quad \forall x \in [a, b]$$



### 10.2.9 Banach'scher Fixpunktsatz

Sei  $V = \mathbb{R}^n$  und  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  abgeschlossen (bezüglich  $\|\cdot\|_\infty$ ) weiter sei:  $\Phi : M \rightarrow M$  eine Kontraktion, das heißt  $\Phi$  ist L-stetig mit  $L < 1$ .

Dann besitzt  $\Phi$  genau einen Fixpunkt  $\bar{x} \in M$  (das heißt  $\Phi(\bar{x}) = \bar{x}$ ) und  $\bar{x}$  ist der Grenzwert der Folge  $(x_n)_{n=1}^\infty$  mit:

$$x_k = \begin{cases} \text{beliebig} & k = 0 \\ \Phi(x_{k-1}) & \text{sonst} \end{cases}$$

### 10.2.10 Norm Äquivalenz im $\mathbb{R}^n$

Sei  $\|\cdot\|$  eine beliebige Norm im  $\mathbb{R}^n$ , dann existieren  $c_1, c_2 > 0$  mit

$$c_1 \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq c_2 \|x\|_\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

### 10.2.11 Stabilität

Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Gebiet,  $f_1, f_2 : G \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen die auf  $G$  eine L-Bedingung erfüllen mit  $L > 0$ . Zusätzlich gelte  $|f_1(x, y) - f_2(x, y)| < c \quad \forall (x, y)^T \in G$  (Modellierungsfehler).

Dann gilt ist  $y_1$  eine Lösung des AWP  $y' = f_1(x, y), y(x_0) = y_0$  und  $y_2$  eine Lösung des AWP  $y' = f_2(x, y), y(x_0) = \tilde{y}_0$  so folgt:

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq |y_0 - \tilde{y}_0| + c \cdot (x - x_0) \exp(L(x - x_0))$$

## Kapitel 11

# DGL-Systeme und DGLen n-ter Ordnung

### 11.1 Systeme von DGLen 1. Ordnung

#### 11.1.1 Definition DGL-System

Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  und für  $k \in \{1, \dots, n\}$  sei  $f_k : G \rightarrow \mathbb{R}$  stetig:

(a)  $y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))^T$  heißt Lösung des Systems:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

von DGLen  $n$ -ter Ordnung, wenn gilt:

(a)

$$\begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix} \in G \quad \forall x \in I$$

(b)  $y$  ist differentierbar auf  $I$  (Komponentenweise, d.h.  $y_k$  ist diff'bar  $\forall k$ )

(c)  $y_k'(x) = f_k(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \quad \forall x \in I$  und bel.  $k \in \{1, \dots, n\}$

(b) Ist  $(x, y)^T = (x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})^T \in G$  dann löst  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  das AWP.

$$(AWP) = \begin{cases} y_1'(x) &= f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \\ &\vdots \\ y_n'(x) &= f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \\ y_k(x_0) &= y_k^{(0)} \quad k \in \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

wenn  $y$  die DGL löst und  $y(x_0) = (y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})^T$  gilt.

### 11.1.2 Schreibweise

(a) DGL:

(a)

$$y : I \rightarrow \mathbb{R}^n, y(x) := \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \text{ oder } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

(b)

$$f_k(x, y) = f_k(x, y_1, \dots, y_n) \text{ bzw. } f_k(x, y(x)) = f_k(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \quad \forall x \in I$$

(c)  $f : G \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$f(x, y) = f(x, y_1, \dots, y_n) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

(b) AWP:

$$(\text{AWP}) = \begin{cases} y' & = f(x, y) \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases} \text{ mit } y_0 = \begin{pmatrix} y_1^{(0)} \\ \vdots \\ y_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

(c) Integration von Vektoren: Für  $g : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))^T$  definieren wir (falls  $g_1, \dots, g_n$  int'bar sind):

$$\int_a^b g(x) \, dx = \begin{pmatrix} \int_a^b g_1(x) \, dx \\ \vdots \\ \int_a^b g_n(x) \, dx \end{pmatrix}$$

### 11.1.3 Volterra'sche Integralgleichung

Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  ein Gebiet,  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_1^{(0)} \\ \vdots \\ y_n^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in G$$

dann ist  $y : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  genau dann eine Lösung des AWP  $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ , wenn gilt

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) \, dt$$

### 11.1.4 Definition Lipschitz-Bedingung

Sei  $f : M \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Dann erfüllt  $f$  eine L-Bed. Mit  $L > 0$ , wenn gilt:

$$\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| < L \cdot \|y_1 - y_2\| \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in M$$

### 11.1.5 Bemerkung

Welche Norm hier verwendet wird ist egal, denn es existiert ein  $c_1, c_2$  mit

$$c_1 \|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\| \leq c_2 \|\cdot\|$$

### 11.1.6 Satz von Picard-Lindelöf

Seien  $r, s > 0; x_0 \in \mathbb{R}, y_0 = (y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})^T \in \mathbb{R}^n$  und  $M = \{(x, y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n : x \in [x_0, x_0 + r], y_k \in [y_k^{(0)} - s, y_k^{(0)} + s]\}$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig.

Falls  $f$  auf  $M$  eine L-Bed. erfüllt so existiert auf  $I = [x_0, x_0 + \alpha]$  mit  $\alpha = \min\{r, \frac{s}{c}\}$  für

$$c := \max_{(x,y)^T \in M} \|f(x, y)\|_\infty$$

### 11.1.7 Satz von Peano

Falls die L-Bed. im Satz von Picard-Lindelöf nicht erfüllt ist, alle anderen Voraussetzungen aber gelten kann man auf  $I = [x_0, x_0 + \alpha]$  (mit  $\alpha$  wie oben) trotzdem die Existenz einer Lösung zeigen, nicht aber deren Eindeutigkeit.

### 11.1.8 Stabilität

Analog gilt, falls  $f$  eine L-Bed. erfüllt und eine Lösung existiert:

$$\|y_1(x) - y_2(x)\|_\infty \leq (\|y_0 - \tilde{y}_0\|_\infty c(x - x_0)) \exp(L(x - x_0))$$

dabei ist  $y_1$  Lösung von  $y' = f_1(x, y), y(x_0) = y_0$  und  $y' = f_2(x, y), y(x_0) = \tilde{y}_0$

## 11.2 Lineare DGL-Systeme 1. Ordnung

### 11.2.1 Definition

Ein DGL System der Form

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}$$

oder in kurz:

$$y'(x) = A(x)y(x) + b(x)$$

mit stetigen Funktionen  $a_{ij} : I \rightarrow \mathbb{R}, b_i : I \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall heißt ein lineares DGL-System 1. Ordnung.

### 11.2.2 Definition Frobenius-Norm

Für  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ist durch

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

die sogenannte Frobenius-Norm  $\|\cdot\|_F : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert.

### 11.2.3 Matrixnorm und Vektornorm

- (a)  $\|\cdot\|_F$  ist eine Vektornorm auf dem Vektorraum  $\mathbb{R}^{m \times n}$  (oder  $\mathbb{C}^{m \times n}$ )
- (b) Die Matrix-Norm  $\|\cdot\|_F$  ist bezüglich der Vektornorm  $\|\cdot\|_2$  submultiplikativ, d.h. es gilt

$$\|A \cdot x\|_2 \leq \|A\|_F \cdot \|x\|_2$$

- (c) Bezüglich einer beliebigen Vektornorm auf  $\mathbb{R}^n$  gilt:

$$\|Ax\| \leq c_1 \|Ax\|_2 \leq \|A\|_F \|x\|_2 \leq c_2 \|A\|_F \|x\|$$

### 11.2.4 Grenznorm

Die sogenannte Grenznorm für eine Matrix-Norm wird bezüglich einer Vektornorm  $\|\cdot\|$  so definiert:

$$\|A\| := \sup_{x \in \mathbb{R}^n \wedge x \neq \vec{0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Daraus folgt:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

und für mindestens ein  $x$  gilt = (d.h. die Abschätzung ist scharf).

Die Bezeichnung der Grenznorm wird von der Vektornorm übernommen. Es gilt also:

$$\|A\|_p = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \wedge x \neq \vec{0}} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

die Grenznorm bezüglich  $\|\cdot\|_p$ .

#### Bemerkung

Es gilt:

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F$$

### 11.2.5 Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen

- (a) Die Lösungsmenge von  $y' = A(x)y$  ist ein Unterraum des Vektorraums der stetigen Funktionen
- (b) Die Lösungsmenge von  $y' = A(x)y + b(x)$  ist ein affiner Unterraum des Vektorraums der stetigen Funktionen

### 11.2.6 Definition Fundamentalsystem

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein nicht entartetes Intervall und  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  stetig

- (a) Eine Basis des Lösungsraums von  $y' = A(x)y$  heißt Fundamentalsystem (FS). Ist  $y_1, \dots, y_n$  so ein FS, dann heißt die Matrix

$$Y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$$

die Fundamentalmatrix

- (b) Für  $y_1, \dots, y_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt  $W : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $W(x) = \det(Y(x))$  die Wronski-Determinante des Fundamentalsystems.

### 11.2.7 Definition Determinante

Eine Funktion  $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Determinante, wenn gilt

- (a) Mit  $I$  der Einheitsmatrix:

$$\det(I) = 1$$

- (b)  $\det$  ist linear in jeder Spalte, d.h. für  $1 \leq l \leq n$  gilt:

$$\det(a_1, \dots, a_{l-1}, \alpha x + \beta y, a_{l+1}, \dots, a_n) = \alpha \det(a_1, \dots, a_{l-1}, x, a_{l+1}, \dots, a_n) + \beta \det(a_1, \dots, a_{l-1}, y, a_{l+1}, \dots, a_n)$$

- (c) Spalten tauschen ändert Vorzeichen:

$$\det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) = -\det(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

### 11.2.8 Entwicklungssatz von Laplace

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und bezeichne  $A_{ij}$  die  $(n-1) \times (n-1)$  Matrix, die aus  $A$  durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte entsteht. Die Einträge von  $A$  bezeichnen wir mit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ . Dann gilt:

- (a) Für  $j \in \{1, \dots, n\}$  beliebig aber fest ist

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \det A_{ij} (-1)^{i+j}$$

- (b) Für  $i \in \{1, \dots, n\}$  beliebig aber fest ist

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \det A_{ij} (-1)^{i+j}$$

### 11.2.9 Leibniz-Formel für Determinanten

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und bezeichne  $S_n$  die Gruppe der Permutationen von  $\{1, \dots, n\}$  und sei  $\text{sgn}(\sigma)$  definiert durch  $\text{sgn} : S_n \rightarrow \{-1, 1\}$ :

$$\text{sgn } \sigma = \begin{cases} 1 & \text{falls } \sigma \text{ durch eine gerade Anzahl Permutationen entsteht} \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei eine Transposition einer paarweisen Vertauschung entspricht. Dann gilt:

$$\det(A) = \det((a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^n a_{k\sigma(k)}$$

### 11.2.10 Berechnung der Wronski-Determinante ohne bekanntes FS

Für die Wronski-Determinante gilt (d.h. FS existiert, sonst ist Wronski-Determinante nicht definiert):

- (a)  $W(x)$  kann durch eine lineare DGL 1. Ordnung bestimmt werden:

$$W'(x) = \text{spur}(A(x)) \cdot W(x)$$

mit

$$\text{spur}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

- (b) Durch Lösen der DGL folgt:

$$W(x) = W(x_0) \cdot \exp \left( \int_{x_0}^x \text{spur}(A(t)) \, dt \right)$$

#### Bemerkung

Falls  $y' = A(x)y$  eine Anfangsbedingung hat ist  $W(x_0)$  durch die Anfangsbedingung bekannt, dadurch ist  $W(x)$  bekannt.

### 11.2.11 Ableitung der Determinante

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein nicht-entartetes Intervall und  $A(x)$  (komponentenweise) differenzierbar auf  $I$ , dann ist  $\det(A(x))$  differenzierbar und es gilt:

$$\frac{d}{dx} \det(A(x)) = \sum_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1}(x) & \cdots & a_{i-1,n}(x) \\ a'_{i1}(x) & \cdots & a'_{in}(x) \\ a_{i+1,1}(x) & \cdots & a_{i+1,n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

### 11.2.12 Äquivalente Aussagen zu FSen und Wronski-Determinanten

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein nicht entartetes Intervall,  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  stetig. Sind  $y_1, \dots, y_n$  Lösungen von  $y' = A(x)y$  und bezeichne  $W(x) = \det(y_1(x), \dots, y_n(x))$  dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a)  $y_1, \dots, y_n$  bilden ein FS
- (b)  $W(x) \neq 0 \ \forall x \in I$
- (c)  $\exists x_0 \in I : W(x_0) \neq 0$

### 11.2.13 Partikuläre Lösung aus Wronski-Determinante

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein nicht entartetes Intervall,  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  stetig und  $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig, weiter sei  $y_1, \dots, y_n$  ein FS des homogenen Systems  $y' = A(x)y$ . Dann ist:

$$y_p : I \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ mit } y_p(x) = \sum_{k=1}^n y_k(x) \int_{x_0}^x \frac{W_k(t)}{W(t)} dt$$

mit  $x_0 \in I$  beliebig und

$$W_k(x) = \det(y_1(x), \dots, y_{k-1}(x), b(x), y_{k+1}(x), \dots, y_n(x))$$

eine Lösung des inhomogenen Systems

$$y'(x) = A(x)y(x) + b(x)$$

## 11.3 Lineare DGL-Systeme 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Für  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  betrachtet man  $y' = Ay + b(x)$  bzw.  $y' = Ay$ . Ein FS von  $y' = Ay$  liefert eine partikuläre Lösung von  $y' = Ay + b(x)$ .



### 11.3.1 Definition Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  (mit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ), dann heißt ein  $\lambda \in \mathbb{K}$  Eigenwert von  $A$ , wenn ein  $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{\vec{0}\}$  existiert mit

$$Av = \lambda v$$

#### Bemerkung

- (a) Ein Eigenvektor  $v$  zum Eigenwert  $\lambda$  existiert genau dann, wenn

$$p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I) = 0$$

ist.

- (b) Offensichtlich gilt: Ist  $v$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$  so ist auch  $\alpha v$  ein Eigenvektor zu  $\lambda$ .
- (c) Offensichtlich ist  $y = v \cdot \exp \lambda x$  eine Lösung der homogenen DGL  $y' = Ay$  wenn  $v$  ein Eigenvektor von  $A$  und  $\lambda$  ein zugehöriger Eigenwert ist.

### 11.3.2 Algebraische und Geometrische Vielfachheit

Ist  $\lambda$  ein Eigenwert von  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ , dann ist

- (a) Die Algebraische Vielfachheit von  $\lambda$  die Ordnung der Nullstelle von  $p_A(\lambda)$
- (b) Die Geometrische Vielfachheit von  $\lambda$  die Dimension von  $\text{Kern}(A - \lambda I)$ , also die Anzahl der linear Unabhängigen Lösungen von  $A - \lambda I = \vec{0}$ .

### 11.3.3 Diagonalisierbarkeit

Falls zu einer Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  eine reguläre Matrix  $V \in \mathbb{K}^{n \times n}$  existiert mit

$$V^{-1}AV = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

so heißt  $A$  diagonalisierbar.

#### Bemerkung

- (a) Es gilt:

$$\begin{aligned} V^{-1}AV &= \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \\ \Leftrightarrow AV &= \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)V \\ \Leftrightarrow (A \cdot v_1, \dots, A \cdot v_n) &= (\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n) \Leftrightarrow Av_k = \lambda_k v_k \quad \forall k \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

d.h.  $V$  besteht aus den Eigenvektoren von  $A$  und die Diagonalmatrix aus den zugehörigen Eigenwerten.

- (b) Ist  $A$  diagonalisierbar, dann gilt:

$$A^l = (VDV^{-1})(VDV^{-1}) \cdots (VDV^{-1}) = VD^lV^{-1} = V \operatorname{diag}(\lambda_1^l, \dots, \lambda_n^l)V^{-1}$$

- (c) So ein  $V$  existiert nur wenn  $n$ -linear unabhängige Eigenvektoren existieren, da die Matrix  $V$  sonst nicht invertierbar ist.
- (d) Selbst wenn  $A$  eine reelle Matrix ist sind die Eigenwerte und -vektoren im Allgemeinen komplex
- (e) Bei einer Matrix mit reellen Koeffizienten gilt stets  $\lambda$  ist Eigenwert  $\Rightarrow \bar{\lambda}$  ist ebenfalls Eigenwert.
- (f) Das heißt aus dem FS einer Reellen Matrix lässt sich stets ein reelles Fundamentalsystem konstruieren.

### 11.3.4 Submultiplikativität von $\|\cdot\|_F$

Für  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  gilt

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$$

mit  $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$

#### Bemerkung

Es gilt also auch, dass

$$\|A^k\|_F \leq \|A\|_F^k$$

### 11.3.5 Folgenkonvergenz für Matrizen

Sei  $(A_k)_{k=1}^\infty$  eine Folge in  $\mathbb{C}^{n \times n}$ , dann konvergiert die Folge gegen  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists k(\varepsilon) : \|A_k - A\|_F < \varepsilon \quad \forall k \geq k(\varepsilon)$$

#### Bemerkung

- (a) Da  $\mathbb{C}^{n \times n}$  ein endlicher Vektorraum ist könnte man eine beliebige Matrix-Norm wählen
- (b) In  $\mathbb{C}^{n \times n}$  konvergiert jede Cauchy-Folge
- (c) Für eine Reihe  $\sum_{k=0}^\infty A_k$  definiert man die Konvergenz über die Konvergenz der Partialsummen  $B_l := \sum_{k=0}^l A_k$

### 11.3.6 Definition Matrix-Exponentialfunktion

Für  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  definieren wir die Matrix Exponentialfunktion durch:

$$\exp : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}, A \mapsto \exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

#### Bemerkung

$e^A = \exp(A)$  lässt sich leicht ausrechnen, wenn  $A$  diagonalisierbar ist.

### 11.3.7 Rechenregeln Matrix-Exponentialfunktion

Es gilt:

- (a)  $e^{A+B} = e^A + e^B$  für alle  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$
- (b)  $(e^A)^{-1} = e^{-A}$  für alle  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  d.h.  $e^A$  ist stets invertierbar.

### 11.3.8 Zusammenhang Matrix Exponentialfunktion und FS

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  dann ist  $Y(x) = \exp(xA)$  ein FS von  $y' = Ay$

### 11.3.9 Cayley Hamilton

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ , dann gilt für die zugeordnete Matrix-Funktion  $p_A(A) = \vec{0}$ .

### 11.3.10 Algorithmus von Putzer

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ .

Definiere

$$B_j := \prod_{k=1}^{j-1} (A - \lambda_k I) \quad j \in \{1, \dots, n+1\}$$

und Funktionen  $v_1, \dots, v_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$v_k(x) = \begin{cases} e^{\lambda_1 x} & \text{für } k = 1 \\ v'_k = \lambda_k v_k + v_{k-1} \wedge v_k(0) = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

dann ist

$$e^{xA} = \sum_{j=1}^n v_j(x) B_j$$

#### Bemerkung

So kann also  $e^{xA}$  berechnet werden, wenn  $A$  nicht diagonalisierbar ist.

### 11.3.11 Jordan-Blöcke

Eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nennt man Jordan-Block. Solche Matrizen sind nicht diagonalisierbar, d.h. es muss Putzer verwendet werden.

## 11.4 Differentialgleichungen höherer Ordnung

### 11.4.1 Differentialgleichungen höhere Ordnung

Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Eine Funktion  $y : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Lösung von

$$y^{(n)} = f(x, y', \dots, y^{(n-1)})$$

wenn  $y$  auf dem Intervall  $I$   $n$ -mal differentierbar ist und

1.

$$\begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \in G \quad \forall x \in I$$

und es gilt

$$\begin{aligned} y'(x) &= y_1'(x) \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x) &= y_{n-1}'(x) \\ y_n'(x) &= y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) = f(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \end{aligned}$$

### 11.4.2 Picard-Lindelöf für DGLen höherer Ordnung

Eine DGL  $n$ -ter Ordnung  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  mit Anfangsbedingung  $y(x_0) = b_1, y'(x_0) = b_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = b_n$  ist eindeutig lösbar, wenn  $f$  die

L-Bed.:

$$\exists L > 0 : |f(x, y_1, \dots, y_n) - f(x, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)| < L \left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \vdots \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix} \right\|$$

erfüllt.

### 11.4.3 Definition lineare DGL n-ter Ordnung

Seien  $a_k : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen für  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ , dann heißt eine DGL der Form

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) y^{(k)} = h(x)$$

eine lineare DGL n-ter Ordnung. Falls  $h(x) \equiv 0$  gilt nennt man dies eine homogene DGL, sonst eine inhomogene DGL. Das zugehörige AWP hat Anfangsbedingungen  $y(x_0) = \eta_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = \eta_n$ .

### 11.4.4 DGL-System zu einer linearen DGL n-ter Ordnung

Bei einer linearen DGL n-ter Ordnung lautet das zugehörige System der homogenen DGL n-ter Ordnung

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = F(x, \vec{y}) = A(x) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

mit

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & -a_2(x) & \cdots & -a_{n-3}(x) & -a_{n-2}(x) & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

die Art der Matrix von  $A(x)$  heißt Frobenius-Matrix.

Bei einer inhomogenen linearen DGL n-ter Ordnung lautet das System:

$$\vec{y}' = A(x)\vec{y} + b(x)$$

mit  $A(x)$  wie oben und

$$b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h(x) \end{pmatrix}$$

### 11.4.5 FS und Wronski-Determinante

Schreibt man eine linear DGL  $n$ -ter Ordnung in ein System 1. Ordnung um, so können Begriffe wie Wronski-Determinante und FS entsprechend übertragen werden.

### 11.4.6 Definiton FS und Wronski-Determinante

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall mit  $|I| > 0$  und  $a_0, \dots, a_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Sind  $y_1, \dots, y_n$  (homogene) Lösungen von

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)y^{(k)} = 0$$

- (a) Die Lösungen  $y_1, \dots, y_n$  heißen Fundamentalsystem wenn  $y_1, \dots, y_n$  linear unabhängig sind.
- (b) Wir definieren  $W : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

und nennen diese Funktion die Wronski-Determinante (von  $y_1, \dots, y_n$ ).

### 11.4.7 Lösungsraum linearer DGLen $n$ -ter Ordnung

Sei  $y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)y^{(k)} = h(x)$  eine lineare DGL  $n$ -ter Ordnung mit  $a_0, \dots, a_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf  $I \subseteq \mathbb{R}$  ( $I$  ein Intervall mit  $|I| > 0$ ).

- (a) Die Lösungsmenge von homogenen Problemen  $y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)y^{(k)} = 0$  ist ein Unterraum von  $C^n(I)$
- (b) Ist  $y_p$  eine partikuläre Lösung d.h. Lösung von  $y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)y^{(k)} = h(x)$  und  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine weitere partikuläre Lösung, dann ist  $y - y_p$  eine homogene Lösung.

#### Bemerkung

Diese Aussagen kann man nutzen um ein AWP zu lösen:

1.  $y_p$  und FS  $y_1, \dots, y_n$  (also Basis des homogenen Lösungsraums bestimmen).
2. Mit  $y = y_p + \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n$  hat man die allgemeine Lösung die mit  $y(x_0) = \eta_1, y'(x_0) = \eta_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = \eta_n$  die  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  als Lösung eines LGS bestimmt werden können.

### 11.4.8 Lösungen und Wronski-Determinanten

Sind  $y_1, \dots, y_n$  (homogene) Lösungen von  $y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)y^{(k)} = 0$  mit Wronski-Det  $W : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto W(x)$ , dann gilt

- (a)  $W'(x) = -a_{n-1}(x)W(x)$  und deshalb  $W(x) = W(x_0) \exp\left(\int_{x_0}^x -a_{n-1}(t) dt\right)$
- (b) Folgende Aussagen sind äquivalent
  - (a)  $y_1, \dots, y_n$  bilden ein FS
  - (b)  $W(x) \neq 0 \forall x \in I$
  - (c)  $\exists x \in I : W(x) \neq 0$
- (c) Eine Lösung von  $y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)y^{(k)} = h(x)$  ist bestimmt durch  $y_p = \sum_{k=1}^n c_k(x)y_k(x)$  mit
  - (a)  $y_1, \dots, y_n$  einem Fundamentalsystems der homogenen DGL
  - (b)

$$c_k(x) = \int^x \frac{W_k(t)}{W(t)} dt$$

- (c) Dabei ist  $W_k : I \rightarrow \mathbb{R}$  definiert als

$$W_k(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_{k-1}(x) & 0 & y_{k+1}(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_{k-1}'(x) & 0 & y_{k+1}'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \cdots & y_{k-1}^{(n-2)}(x) & 0 & y_{k+1}^{(n-2)}(x) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_{k-1}^{(n-1)}(x) & h(x) & y_{k+1}^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

## 11.5 Lineare DGLen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

### 11.5.1 Charakteristisches Polynom einer Frobenius Matrix

Seien  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$  und  $A$  eine Frobenius Matrix mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-3} & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

dann ist  $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k$ .

### 11.5.2 Zusammenhang Nullstellen des char. Polynoms und Lösung der (hom.) DGL

Seien  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$  und  $L(y) := y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)}$  mit  $L : C^{(n)}(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$  dann gilt:

(a)  $L(e^{\lambda x}) = p_A(\lambda) \cdot e^{\lambda x}$

(b) Wenn  $p_A(\lambda) = 0$  ist, dann ist  $y(x) = e^{\lambda x}$  eine Lösung von  $L(y) = 0$

### 11.5.3 FS für lineare DGLen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Seien  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ ,  $L(y) = y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)}$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sind Nullstellen von  $p_A(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k$  mit Vielfachheiten  $r_1, \dots, r_p$  also  $p_A(\lambda) = (\lambda - \tilde{\lambda}_1)^{r_1} \cdot (\lambda - \tilde{\lambda}_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \tilde{\lambda}_p)^{r_p}$ . Dann erhält man ein FS von  $L(y)$  mit den durch

$$\begin{aligned} & e^{\lambda_1 x}, x \cdot e^{\lambda_1 x}, x^2 \cdot e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{r_1} e^{\lambda_1 x} \\ & e^{\lambda_2 x}, x \cdot e^{\lambda_2 x}, x^2 \cdot e^{\lambda_2 x}, \dots, x^{r_2} e^{\lambda_2 x} \\ & \vdots \\ & e^{\lambda_p x}, x \cdot e^{\lambda_p x}, x^2 \cdot e^{\lambda_p x}, \dots, x^{r_p} e^{\lambda_p x} \end{aligned}$$

dargestellten (eventuell komplexen) Funktionen in  $x$ .

Diese Funktionen bezeichnen wir mit  $y_{i,l}$  mit

$$y_{i,l}(x) = x^{l-1} e^{\lambda_i x} \quad \text{mit } 1 \leq i \leq p \wedge 1 \leq l \leq r_i$$

#### Bemerkung

1. Das heißt die allgemeine homogene Lösung von  $L(y) = 0$  ist gegeben durch:

$$y_h(x) = \sum_{i=1}^p \sum_{l=1}^{r_i} \alpha_{i,l} y_{i,l}(x)$$

2. Aus der komplexen homogenen Lösung lassen sich wieder reelle homogene Lösungen durch Linearkombinationen bestimmen.



# Kapitel 12

## Ergänzung zur Analysis

### 12.1 Äquivalenzrelation und Äquivalenzklassen

#### 12.1.1 Definition

Sei  $X$  eine beliebige Menge, mit  $\sim$  wird eine Eigenschaft zwischen zwei Elementen definiert (Formal:  $\sim : X \times X \rightarrow \{\text{Wahr, Falsch}\}$ ). Diese Relation heißt Äquivalenzrelation wenn gilt:

1.  $a \sim a \quad \forall a \in X$
2.  $a \sim b \Rightarrow b \sim a \quad \forall a, b \in X$
3.  $a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c \quad \forall a, b, c \in X$

Mit so einer Relation kann man  $X$  in Äquivalenzklassen  $\hat{x}$  zerlegen:

$$\hat{x} := \{A \subseteq X : \text{Für } a, b \in X \text{ gilt } a \sim b \wedge \text{für kein } y \in A^C \text{ gilt } y \sim a \text{ für } a \in A\}$$

$A$  ist die größte Teilmenge von  $X$  in der alle Elemente in Relation stehen.

### 12.2 Distributionen

#### 12.2.1 Testfunktionen

1. Eine Funktion  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Testfunktion, wenn  $\Phi \in C_0^\infty$  gilt, d.h.  $\Phi \in C^\infty$  und

$$\exists c > 0 : \Phi(x) = 0 \quad \forall x \notin [-c, c]$$

die Menge aller Testfunktionen bezeichnen wir mit  $D$  d.h.  $D = C_0^\infty$ .

2. Eine Folge  $(\Phi_n)_{n=1}^\infty \subseteq D$  heißt konvergent, wenn ein  $\Phi \in D$  existiert mit  $\Phi_n$  konvergiert gleichmäßig gegen

$$\Phi \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 : |\Phi(x) - \Phi_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}, n \geq n_0$$

### 12.2.2 Distributionen

Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Distribution, wenn

1.  $f$  ein lineares Funktional ist, das heißt es gilt:
  - (a) Der Wertebereich von  $f$  ist  $\mathbb{R}$  (oder  $\mathbb{C}$ )
  - (b)  $\forall \Phi, \Psi \in D, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gilt

$$f(\alpha\Phi + \beta\Psi) = \alpha f(\Phi) + \beta f(\Psi)$$

2.  $f$  ist stetig, d.h.

$$\Phi_n \rightarrow \Phi (n \rightarrow \infty) \Rightarrow f(\Phi_n) \rightarrow f(\Phi) (n \rightarrow \infty) \quad (12.1)$$

**Bemerkung:**

Die Menge aller Distribution nennen wir  $D'$

### 12.2.3 Duale Paarung und Repräsentanten

1. Ist  $f \in D'$  und  $\Phi \in D$  dann schreibt man

$$\langle f, \Phi \rangle = f(\Phi)$$

2. Eine Funktion  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Repräsentant von  $f \in D'$ , wenn gilt

$$\langle f, \Phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x) \Phi(x) \, dx = \langle \tilde{f}, \Phi \rangle$$

das heißt  $f$  kann man sich vorstellen.

**Bemerkung:**

Wenn eine Distribution einen Repräsentanten besitzt ist dieser nicht eindeutig.

### 12.2.4 Ableitung einer Distribution

Sei  $f \in D'$ , dann heißt  $f'$  die schwache Ableitung von  $f$  wenn gilt:

$$\langle f', \Phi \rangle = - \langle f, \Phi' \rangle \quad \forall \Phi \in D$$

## 12.3 Fouriertransformation

### 12.3.1 Definition Fourier-Trafo

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stückweise stetig und gelte

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt < \infty$$

dann heißt

$$\hat{f}(x) = F_f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-itx) \, dt$$

die Fourier-Transformierte von  $f$ .

### 12.3.2 Stetigkeit der Fourier-Transformierten

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stückweise stetig und  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt < \infty$  dann ist  $F_f(x)$  beschränkt und stetig.

### 12.3.3 Zeitliche Verschiebung und Skalierung der Fourier-transformierten

Seien  $f_1, f_2, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stückweise stetig und  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt < \infty$  sowie  $\int_{-\infty}^{\infty} |f_k(t)| \, dt < \infty$  für  $k \in \{1, 2\}$ .

Definiere  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$g(t) = f(a \cdot t + b)$$

dann gilt

1.

$$F_g(x) = \frac{1}{|a|} \exp(ix \frac{b}{a}) \cdot F_f(\frac{x}{a}) \text{ für } a \neq 0$$

2.

$$F_{\alpha f_1 + \beta f_2}(x) = \alpha F_{f_1}(x) + \beta F_{f_2}(x)$$

### 12.3.4 Ableitung der Fouriertransformierten

Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stückweise stetig,  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt < \infty$  sowie  $\int_{-\infty}^{\infty} |tf(t)| \, dt < \infty$ . Definiere  $g(t) = tf(t)$ . Ist  $f$  differenzierbar, dann ist  $F_f$  ebenfalls differenzierbar und es gilt:

$$F'_f(x) = \frac{d}{dx} F_f(x) = -i F_g(x)$$

### 12.3.5 Fouriertransformation der Ableitung

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig differenzierbar und  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt < \infty$  und  $\int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)| \, dt < \infty$  sowie  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0$ , dann folgt

$$F_{f'}(x) = ix F_f(x)$$

### 12.3.6 Definition inverse Fouriertransformation

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz-Stetig und stückweise stetig differenzierbar mit  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx < \infty$  dann gilt:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) F_f(x) \, dx$$

### 12.3.7 Plancherel

Ist  $f$  Lipschitz stetig auf  $\mathbb{R}$  und stückweise stetig differenzierbar mit  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt < \infty$ , dann konvergiert  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt < \infty$  und es gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F_f(x)|^2 \, dx$$

### 12.3.8 Definition Faltung

Seien  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben und das Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t) \, dt$  existiert für alle  $x \in \mathbb{R}$ , dann heißt die Funktion  $f * g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t) \, dt$$

die Faltung von  $f$  und  $g$ .

### 12.3.9 Fouriertransformation der Faltung

Sei  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt < \infty$  und  $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| \, dt < \infty$ . Ferner sei  $g$  beschränkt, dann konvergiert  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t) \, dt \, \forall x \in \mathbb{R}$  und es gilt:

$$F_{f*g}(x) = F_f(x) \cdot F_g(x)$$

### 12.3.10 Fouriertransformation im Distributionenellen Sinne

Für eine Distribution  $f \in D'$  definieren wir die Fouriertransformation  $F_f$  durch:

$$\langle F_f, \Phi \rangle = \langle f, F_{\Phi} \rangle \, \forall \Phi \in D$$

# Kapitel 13

## Funktionentheorie

### 13.1 Grundlagen

#### 13.1.1 Definition Stetigkeit

Sei  $M \subseteq \mathbb{C}$  und  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$

1.  $f$  heißt stetig in  $z_0 \in M$ , wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \quad \forall z \in M \wedge |z - z_0| < \delta$$

2.  $f$  heißt stetig auf  $M$ , wenn  $f$  in jedem  $z_0 \in M$  stetig ist
3. Eine stetige Funktion  $\delta[a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt Kurve in  $\mathbb{C}$

#### 13.1.2 Definition Argument

Sei  $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$ . Jede Zahl  $\phi \in \mathbb{R}$  mit

$$\frac{z}{|z|} = \exp(i\phi)$$

heißt ein Argument von  $z$  und wird mit  $\arg(z)$  bezeichnet. Das eindeutig bestimmte Argument aus dem Intervall  $[0, 2\pi)$  heißt Hauptargument von  $z$  und wird mit  $\text{Arg}(z)$  bezeichnet.

#### Bemerkung:

Das Intervall des Hauptarguments könnte man auch als  $[-\pi, \pi)$  oder  $(-\pi, \pi]$  wählen.

### 13.1.3 Komplexe Wurzel

1. Es existieren genau zwei stetige Funktionen  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $g(z) = z^2$ .  
Diese sind:

$$\begin{aligned}g_1(z) &= \sqrt{|x|} \exp(i \frac{\text{Arg}(z)}{2}) \\g_2(z) &= -\sqrt{|x|} \exp(i \frac{\text{Arg}(z)}{2})\end{aligned}$$

2. Es existiert keine stetige Funktion  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $g(z^2) = z$

### 13.1.4 Definition komplexer Logarithmus

Zu jedem  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  existiert ein eindeutig bestimmtes  $w \in \mathbb{C}$

1.  $\Im(w) \in (-\pi, \pi]$
2.  $\exp(w) = z$

dieses  $w$  nennen wir den Hauptwert des Logarithmus von  $z$  und bezeichnen diesen mit  $w = \text{Log}(z)$ .

#### Bemerkung:

Durch die Funktion

$$\text{Log} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \in (-\pi, \pi]\}$$

mit  $\text{Log}(z) := \log(|z|) + i \text{Arg}(z)$  bezeichnen wir den Hauptwert des komplexen Logarithmus.

## 13.2 Komplexe Differenzierbarkeit

### 13.2.1 Definition

Sei  $M \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ :  $f$  heißt differenzierbar in  $z_0 \in M$ , wenn der Grenzwert

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt dann Ableitung von  $f$  bei  $z_0$ .

### 13.2.2 Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen

Sei  $M \subseteq \mathbb{C}$  und  $M \neq \emptyset$ ,  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  weiter sei  $z_0 = x_0 + iy_0 \in M$  und  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ .  
Definiere:

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \Re(f(x + iy)) \\v(x, y) &= \Im(f(x + iy))\end{aligned}$$

sowie  $F : \tilde{M} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))^T$  dann gilt:

$f$  ist differentierbar in  $z_0 \Leftrightarrow$  In  $z_0$  gelten die CR-DGLen

Die CR-DGLen lauten:

$$\begin{aligned} u_x(x_0, y_0) &= v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) &= -v_x(x_0, y_0) \end{aligned}$$

**Bemerkung:**

Wenn die CR-DGLen erfüllt sind ist die Jacobi-Matrix  $f'(x_0)$  eine Dreh-Matrix.

### 13.2.3 Definition Holomorphe Funktionen

Sei  $M \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $M \neq \emptyset$ ,  $z \in M$ ,  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ :

1.  $f$  heißt in  $z_0$  holomorph, wenn ein  $\varepsilon > 0$  existiert, so dass  $f$  auf  $U_\varepsilon(z_0)$  komplex differentierbar ist
2.  $f$  heißt auf  $M$  holomorph, wenn  $f$  in jedem  $z_0 \in M$  holomorph ist

**Bemerkung:**

Statt Holomorph sagt man auch analytisch.

### 13.2.4 Definition orientierter Winkel

Für  $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  heißt  $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) := \arg(z_2) - \arg(z_1)$  der orientierte Winkel von  $z_1$  nach  $z_2$ .

### 13.2.5 Definition Winkeltreue

Seien  $\gamma_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{C}, \gamma_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{C}$  mit reelem Intervallen  $I_1, I_2$  zwei stetig differentierbare Kurven. Gelte etwa  $c = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$  für  $t_1 \in I_1, t_2 \in I_2$  und weiter sei  $M$  eine offene Menge mit  $c \in M$  und  $f \in H(M)$  mit  $f'(c) \neq 0$ . Dann schneiden sich die Kurven  $\gamma_1, \gamma_2$  im gleichen Winkel wie die abgebildeten Kurven  $f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2$ .

### 13.2.6 Biholomorphe Funktionen

Seien  $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{C}, M_1, M_2 \neq \emptyset$ . Eine bijektive Funktion  $f : M_1 \rightarrow M_2$  heißt biholomorph, wenn  $f \in H(M_1)$  und  $f^{-1} \in H(M_2)$ .

### 13.2.7 Ableitung der Umkehrfunktion

Seien  $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{C}$  und nicht leer  $f : M_1 \rightarrow M_2$  biholomorph und  $f'(z) \neq 0 \forall z \in M_1$  dann gilt:

$$\frac{d}{dz} f^{-1}(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))}$$

## 13.3 Komplexe Kurvenintegrale

### 13.3.1 Eigenschaften komplexer Kurvenintegrale

Für  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  gilt

1.

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t) \, dt = \alpha \int_a^b f(t) \, dt + \beta \int_a^b g(t) \, dt$$

2.

$$\int_a^c f(t) \, dt + \int_c^b f(t) \, dt = \int_a^b f(t) \, dt$$

3. Gilt  $F'(t) = f(t) \, \forall t$  dann folgt

$$\int_a^b f(t) \, dt = F(b) - F(a)$$

4.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( \int_a^b f(t) \, dt \right) &= \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) \, dt \\ \operatorname{Im} \left( \int_a^b f(t) \, dt \right) &= \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) \, dt \end{aligned}$$

5.

$$\left| \int_a^b f(t) \, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| \, dt$$

### 13.3.2 Definition Kurveneigenschaften

Sei  $\gamma : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Kurve (d.h. stetige Funktion) dann definiert man

1.  $\gamma$  ist glatt, wenn  $\gamma$  stetig differenzierbar ist
2.  $\gamma$  ist stückweise glatt, wenn  $\gamma$  stückweise stetig differenzierbar ist
3. Ist  $\gamma$  stückweise glatt, dann nennt man

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt$$

die Länge von  $\gamma$ .

### 13.3.3 Komplexe Kurvenintegrale

Sei  $M \subseteq \mathbb{C}$ ,  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stückweise glatt, dann definieren wir:

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt$$



### 13.3.4 Konvention zu kreisförmigen Kurven

Für Kurvenintegrale bei denen  $\gamma$  einen positiv durchlaufenen Kreis darstellt schreiben wir

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z) \, dz = \int_{\gamma} f(z) \, dz$$

es gilt also:

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \quad \gamma(t) \mapsto z_0 + re^{it}$$

## 13.4 Cauchy-Integralsatz

### 13.4.1 Geschlossene Kurvenintegrale

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $p \in G$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  stetig, sowie  $f : G \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann gilt für jedes Dreieck  $\Delta \subseteq G$  (dessen Rand mit  $\partial\Delta$  bezeichnet wird):

$$\int_{\partial\Delta} f = \int_{\partial\Delta} f(z) \, dz = 0$$

### 13.4.2 Definition Windungszahl

Sei  $\gamma$  eine geschlossene, stückweise glatte Kurve und  $z_0$  ein Punkt der nicht auf  $\gamma$  liegt, dann heißt

$$N_{\gamma}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} \, dz$$

die Windungszahl von  $\gamma$  um  $z_0$ .

**Bemerkung:**

Es gilt  $N_{\gamma}(z_0) \in \mathbb{Z}$ .

### 13.4.3 Eigenschaften der Windungszahl

Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig, stückweise glatt und geschlossen,  $G$  ein Gebiet mit  $G \subseteq \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$  (das heißt ohne den Träger von  $\gamma$ ), dann gilt:

1.  $N_{\gamma}(z)$  ist konstant auf  $G$
2. Im Fall  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > |\gamma(t)| \, \forall t \in [a, b]\}$  gilt  $N_{\gamma}(z) = 0$

### 13.4.4 Windungszahl über zusammenhängende Gebiete

Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stückweise glatt und geschlossen,  $G$  ein Gebiet mit  $G \subseteq \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ . Dann gilt:

1.  $N_\gamma(z)$  ist stückweise konstant, das heißt existiert für zwei Punkte  $z_1, z_2$  eine Kurve  $\Psi \in G$ , die  $z_1, z_2$  verbindet, dann ist

$$N_\gamma(z_1) = N_\gamma(z_2)$$

2. Für ein  $z \in G$  mit  $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| > |\gamma(t)| \ \forall t \in [a, b]\}$  gilt  $N_\gamma(z) = 0$ .

### 13.4.5 Cauchy-Integralformel für sternförmige Gebiete

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  bezüglich einem  $c \in G$  sternförmig,  $\gamma$  eine stückweise glatte, geschlossene Kurve,  $f \in H(G)$  dann gilt für alle  $z_0$ , die nicht auf  $\gamma$  liegen mit  $\gamma, z_0 \in G$ :

$$N_\gamma(z_0)f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

### 13.4.6 Mittelwerteigenschaften der Cauchy-Integralformel

Für jede Funktion  $f \in H(U_R(z_0))$  und  $r \in (0, R)$  gilt:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

### 13.4.7 Definition n-te Ableitung

Sei  $M \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ . Wir setzen  $f^{(0)} = f(z) \ \forall z \in M$  ist  $f^{(n)}$  in einer Umgebung von  $z_0 \in M$  holomorph, definieren wir  $f^{(n+1)}(z) = \frac{d}{dz} f^{(n)}(z)$  für  $z$  in dieser Umgebung.

### 13.4.8 Cauchy-Integralformel für n-te Ableitung

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f \in H(G)$ , dann gilt

1.  $f^{(n)}(z)$  existiert für alle  $z \in G$  und für alle  $n \in \mathbb{N}_0$
2. Für alle  $z \in G$  und  $R > 0$  mit  $\overline{U_R(z_0)} \subseteq G$  gilt

$$f^{(n)}(z_1) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-z_0|<R} \frac{f(z)}{(z - z_1)^{n+1}} dz$$

für  $z_1 \in U_R(z_0)$ .

## 13.5 Eigenschaften holomorpher Funktionen

### 13.5.1 Holomorphe Funktionen und Potenzreihen

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet,  $z_0 \in G, R > 0$  mit  $U_R(z_0) \subseteq G$ . Weiter sei  $f \in H(G)$ , dann gilt:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \ \forall z \in U_R(z_0)$$

### 13.5.2 Abschätzung der Ableitung

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  und  $f \in H(G)$ , dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  und alle  $z_0 \in G$  und  $r > 0$  mit  $\overline{U_R(z_0)} \subseteq G$ :

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|z-z_0|=r} f(z)$$

### 13.5.3 Definition ganze Funktion

Eine Funktion  $f \in H(\mathbb{C})$  heißt ganze Funktion.

### 13.5.4 Satz von Lionville

Jede ganze, beschränkte Funktion ist konstant.

### 13.5.5 Fundamentalsatz der Algebra

Ist  $p$  ein Polynom vom Grad  $n$  mit  $n \geq 1$ , dann besitzt  $p$  eine Nullstelle (in  $\mathbb{C}$ ).

### 13.5.6 Identitätssatz für holomorphe Funktionen

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  und  $f \in H(G)$  dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $f \equiv 0$  auf  $G$
2. Die Menge der Nullstellen von  $f$ , d.h.  $\{z \in \mathbb{C} : f(z) = 0\}$  hat einen Häufungspunkt  $z_0 \in G$
- 3.

$$\exists z_0 : f^{(k)}(z_0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

### 13.5.7 Maximumsprinzip

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f \in H(G)$ , dann gilt:

1. Besitzt  $|f|$  ein lokales Maximum, dann ist  $|f|$  konstant.
2. Ist  $G$  beschränkt und  $f$  stetig auf  $\overline{G}$ , so nimmt  $|f|$  sein Maximum auf dem Rand an.

### 13.5.8 Abschätzung von Potenzreihen

Sei  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R > 0$ , dann gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 R^{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(z_0 + Re^{it}) \right|^2 dt \leq \max_{|z-z_0|=R} |f(z)|^2$$

## 13.6 Isolierte Singularitäten

### 13.6.1 Definition isolierte Singularitäten

Sei  $M \in \mathbb{C}$  und  $f \in H(M)$ , dann heißt ein isolierter Punkt von  $M^C$  eine isolierte Singularität von  $f$ .

### 13.6.2 Charakterisierung von isolierten Singularitäten

Eine isolierte Singularität  $z_0$  von  $f$  heißt:

1. hebbbar, falls  $f$  in einer punktierten  $\varepsilon$ -Umgebung von  $z_0$  beschränkt ist
2. Polstelle (oder Pol)  $n$ -ter Ordnung, wenn ein  $n \in \mathbb{N}$  existiert, so dass die durch  $(z - z_0)f(z)$  definierte Funktion in  $z_0$  eine hebbare Singularität besitzt.
3. wesentliche Singularität, wenn  $z_0$  weder eine hebbare Singularität oder Polstelle ist

### 13.6.3 Riemannscher Hebbbarkeitssatz

Sei  $G \in \mathbb{C}$  ein Gebiet,  $f \in H(G)$  und  $z_0$  eine hebbare Singularität von  $f$ , dann gilt:

$$z_0 \text{ hebbbar} \Leftrightarrow \exists g \in H(U_\varepsilon(z_0)) : \varepsilon > 0 \wedge g(z) = f(z) \quad \forall z \in \dot{U}_\varepsilon(z_0)$$

### 13.6.4 Zusammenhang ganzrationale Funktionen und Polstellen

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet,  $f \in H(G)$ ,  $z_0$  eine isolierte Singularität von  $f$ , dann gilt:

$$z_0 \text{ ist Pol mit Ordnung } m \Leftrightarrow \exists g \in H(U_\varepsilon(z_0)) : \varepsilon > 0 \wedge g(z_0) \neq 0 \wedge f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$$

### 13.6.5 Eigenschaften wesentlicher Singularitäten

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet,  $f \in H(G)$ ,  $z_0$  eine isolierte Singularität, dann gilt:

$z_0$  ist eine wesentliche Singularität  $\Leftrightarrow f$  kommt auf jder punktierten  $\varepsilon$ -Umgebung von  $z_0$  jedem Wert von

### 13.6.6 Variation von Kurven

Sei  $R = \{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z| \leq r_2\}$  mit  $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$  ein Ringgebiet und  $f \in H(R)$ . Dann gilt:

$$\int_{|z|=d_1} f(z) \, dz = \int_{|z|=d_2} f(z) \, dz$$

für  $d_1, d_2$  mit  $r_1 < d_1, d_2 < r_2$ .

### 13.6.7 Holomorphie der Stammfunktion

Sei  $r > 0$  und  $h : \{w \in \mathbb{C} : |w| = r\} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig, dann ist die Funktion  $F : U_r(0) \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$F(z) = \int_{|w|=r} \frac{h(w)}{z-w} dw$$

holomorph.

### 13.6.8 Laurentzerlegung

Sei  $G = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$  mit  $0 \leq r < R \leq \infty$  und  $f \in H(G)$ . Dann existiert

1.  $g \in H(U_R(0))$
2.  $h \in H(U_{\frac{1}{r}}(0))$

und es gilt

$$f(z) = g(z) + h(1/z)$$

Setzt man zusätzlich die Bedingung  $h(0) = 0$  voraus, dann ist die Zerlegung eindeutig.

### 13.6.9 Definition Laurentreihe

Eine unendliche Reihe der Form

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

heißt formale Laurent-Reihe. Dabei heißt

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k$$

der Hauptteil der Laurentreihe und

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

der Nebenteil der Laurentreihe. Die Laurentreihe ist konvergent wenn der Hauptteil und der Nebenteil (einzeln) konvergieren. In dem Fall ist:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \sum_0^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k$$

#### Bemerkung:

Das Konvergenzgebiet einer Laurentreihe ist ein Ringgebiet.

### 13.6.10 Berechnung der Laurent-Koeffizienten mit Cauchy und Taylor

Sei  $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  für  $z$  mit  $r < |z - z_0| < R$  dann gilt:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=d} \frac{f(w)}{w - z_0^{k+1}} dw$$

### 13.6.11 Zusammenhang Holomorphie und Laurentreihen

Ist  $f$  holomorph auf einem Ringgebiet  $G = \{z : r < |z - z_0| < R\}$  dann ist  $f$  als Laurentreihe auf  $G$  darstellbar und die Koeffizienten sind eindeutig festgelegt.

## 13.7 Residuensatz

### 13.7.1 Definition Residuum

Sei  $f \in H(\dot{U}_R(z_0))$ ,  $R > 0$  mit zugehöriger Laurentreihe  $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  dann heißt  $a_{-1}$  das Residuum von  $f$  bei  $z_0$  und wird mit

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1}$$

**Bemerkung:**

1. Es gilt:

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f(w) dw$$

mit  $0 < r < R$

2. Falls  $f$  bei  $z_0$  holomorph ist oder eine hebbare Singularität hat ist

$$\text{Res}(f, z_0) = 0$$

### 13.7.2 Bestimmung des Residuums

Sei  $f \in H(\dot{U}_R(z_0))$ ,  $R > 0$ ,  $z_0$  ein Pol  $m$ -ter Ordnung, dann gilt:

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{m-1} \left( \frac{d}{dz} \right)^{m-1} (z - z_0)^n f(z) \Big|_{z=z_0}$$

### 13.7.3 L'Hospital für Residuen

Seien  $f, g \in H(U_R(z_0))$  mit  $f(z_0) \neq 0, g(z_0) = 0, g'(z_0) \neq 0$  dann besitzt  $\frac{f}{g}$  bei  $z_0$  einen Pol 1-ter Ordnung und

$$\text{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$$

### 13.7.4 Residuensatz

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Elementargebiet und  $z_1, \dots, z_n \in G$  verschiedene Punkte. Weiter sei  $f \in H(G \setminus \{z_1, \dots, z_n\})$  und  $\gamma$  eine geschlossene, stückweise glatte Kurve in  $G \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ . Dann gilt:

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m N_{\gamma}(z_k) \operatorname{Res}(f, z_k)$$

### 13.7.5 Anwendung des Residuensatz auf uneigentliche Integrale

Seien  $z_1, \dots, z_m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) verschieden Punkte der oberen (bzw. unteren) Halbebene und  $G$  die obere (bzw. untere) Halbebene von  $\mathbb{C}$ , dann gilt:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} z f(z) = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}(f, z_k) \left( \text{bzw. } -2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}(f, z_k) \right)$$

### 13.7.6 Anwendung des Residuensatz auf bestimmte uneigentliche Integrale

Für Polynome  $p, q$  gilt (in der oberen Halbebene):

1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}\left(\frac{p}{q}, z_k\right)$$

falls  $\operatorname{Grad} p \geq \operatorname{Grad} q + 2$

2.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} e^{iwx} \, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}\left(\frac{p}{q} e^{iwx}, z_k\right)$$

falls  $\operatorname{Grad} p \geq \operatorname{Grad} q + 1$

# Teil IV

## Beweisansätze



# Kapitel 14

## HM 1

### 14.1 Grenzwerte

#### 14.1.1 Eindeutigkeit des Grenzwert einer Folge

Zeige, dass Grenzwert  $a$  = Grenzwert  $b$ , nahrhafte 0

#### 14.1.2 Konvergente Folgen sind beschränkt

Nahrhafte 0, Dreiecks-ugl.

#### 14.1.3 Grenzwertrechenregeln

Nahrhafte 0, Dreiecks-ugl.  $a_n \leq \gamma \forall n \Rightarrow a \leq \gamma$  Ausgehend von  $a$  über nahrh. 0 zu Def Konvergenz  $a_n \leq b_n \forall n \Rightarrow a \leq b$  Definiere Hilfsfolge, argumentiere nach s.o Sandwich-Theorem Zeige, dass  $-\varepsilon < c_n < \varepsilon$  (Quasi Epsilon-Schlauch)

#### 14.1.4 Monotoniekriterium

Da  $|a_n| < c \forall n$ , argumentiere über das Supremum der Menge, die aus  $a_n$  besteht

#### 14.1.5 Grenzwert einer konv. Folge = Grenzwert jeder Teilfolge

Def. Konvergenz + Def Teilfolge

#### 14.1.6 Charakterisierung $\overline{\lim}$ und $\underline{\lim}$

Argumentiere über Eigenschaften  $\sup$  und  $\inf$

#### 14.1.7 Folge konv. $\overline{\lim} = \underline{\lim}$

Hin: Eindeutigkeit des Grenzwert; Rück: Charakterisierung  $\limsup$  und  $\liminf$

### 14.1.8 Bolzano-Weierstraß

Zunächst für reelle Folge (trivial), dann für komplex: Realteil ist klar, Imaginärteil: Teilfolge konstruieren

### 14.1.9 Cauchy Kriterium

Hin: nahrhafte 0; Rück: zeige Beschränktheit, dann folge daraus, dass ein Häufungswert existiert und benutze diesen als Grenzwert-Kandidat

### 14.1.10 Reihe konv. Folge ist Nullfolge

Cauchy für Reihen

### 14.1.11 GrenzwertRR für Reihen

GrenzwertRR für Folgen

### 14.1.12 Reihe konv g. 0

Restreihe als Differenz darstellen

### 14.1.13 Leibniz

Cauchy für Reihen

### 14.1.14 Absolut konv. $\Rightarrow$ konv.

Cauchy und Dreiecks-ugl.

### 14.1.15 Majorantenkriterium

Cauchy

### 14.1.16 Minorantenkriterium

Kontradiktion von Majorantenkriterium

### 14.1.17 Wurzelkriterium

Majorantenkrit: geom. Summe über  $Q := q + \varepsilon < 1$ , in  $q$  das Wurzelkriterium einsetzen, Charakterisierung  $\overline{\lim}$

### 14.1.18 Quotientenkriterium

Majorantenkrit: setze in  $q$  das Quotientenkriterium ein und Argumentation über  $\lim$

### 14.1.19 Hadamard

Wurzelkriterium+ Fallunterscheidung für Sonderfälle

### 14.1.20 Differenzieren / Integrieren von Potenzreihen

Wurzelkriterium

### 14.1.21 Lemma zu sin, cos und exp

Cauchy-Produkt + Definitionen

### 14.1.22 $e^z \neq 0$ und $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$

Inverses Element der Multiplikation

### 14.1.23 Pythagoras

3. binomische Formel

### 14.1.24 $e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Betrachte  $x \geq 0$ , angeordneter Körper

### 14.1.25 $1 + x \leq e^x \ \forall x \in \mathbb{R}$

Bernoulli

### 14.1.26 $x < y \Rightarrow e^x < e^y$

nahrhafte 0

### 14.1.27 Folgenkriterium

Hin: Def. Folgenkonv. und dann Def Funktionsgrenzwert einsetzen; Rück: Wähle versch.  $\delta$  und zeige Widerspruch

### 14.1.28 Cauchy für Funktionen

Hin: Def. FunktionsGrenzwert + nahrhafte 0; Rück: Cauchy für Folgen

### 14.1.29 Grenzwerte an Intervallgrenzen

Argumentiere über Supremum / Infimum

### 14.1.30 Verknüpfungen stetiger Funktionen stetig

Folgenkriterium

### 14.1.31 Potenzreihen sind innerhalb des Konvergenzradius stetig

Abschätzung:  $\exists r > 0 : |x - x_0| \text{ bzw. } |x_1| \leq r$ , dann einfach  $|f(x) - f(x_1)|$  nach oben abschätzen

### 14.1.32 Umgebung pos. Funktionswerte

Wähle  $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ , Def. Stetigkeit

### 14.1.33 Zwischenwertsatz

Definiere  $x_0 := \sup\{x \in [a, b] : f(x) \leq y\}$  und zwei Hilfsfolgen, die gegen  $x_0$  konvergieren

### 14.1.34 Existenz log

Zeigen  $\exp$  ist bijektiv (Zwischenwertsatz)

### 14.1.35 Beschränktheit stetiger Funktionen

Annahme  $f$  nicht beschränkt Folgenkriterium

### 14.1.36 Weierstraß existenz min bzw. max

Zeigen das  $\sup = \max$

# Kapitel 15

## HM 2

### 15.1 Integration

#### 15.1.1 Riemann integrierbar impliziert Beschränktheit

Betrachte Riemannsumme

#### 15.1.2 Rechenregeln für Integrale (Verkettung usw.)

Betrachte Riemannsumme

#### 15.1.3 Transitivität

Betrachte Riemannsumme

#### 15.1.4 1. MWS der Integralrechnung

Benutze die Transitivität des Integrals und folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} m \cdot g(x) &\leq f(x)g(x) \leq M \cdot g(x) \\ \text{mit} \\ m &:= \inf_{[a,b]}(f) \\ M &:= \sup_{[a,b]}(f) \end{aligned}$$

#### 15.1.5 Eine Stammfunktion einer Funktion ist stetig und differentierbar

Stetigkeit mit  $\delta - \varepsilon$ -Kriterium nachrechnen und dabei die Beschränktheit von  $f$  ausnutzen

Differentierbarkeit mit Differenzenquotient prüfen ( $f$  muss stetig in  $x_0$  sein)

### 15.1.6 Hauptsatz der DI

Schreibe  $F(b) - F(a)$  als Teleskopsumme und nutze den 1. MWS aus HM1  
Zweiter Teil folgt aus 15.1.5

### 15.1.7 Monotonie impliziert Riemann Integrierbarkeit

Betrachte Riemannsumme und nutze SWT (mithilfe der Randpunkte, die  $\xi$  einschließen)

### 15.1.8 2. MWS der Integralrechnung

Nur für den vereinfachten Fall ( $f \in C^1[a, b], g \in C[a, b]$ ):

Definiere passende Stammfunktion für  $g$ . Löse das Integral  $\int_a^b f(x)g(x)dx$  über partielle Integration. Weiterhin wird 15.1.4 benötigt.

### 15.1.9 Integralkriterium

Nutze folgende Abschätzung:

$$f(n) = \int_n^{n+1} f(t) dt \geq \int_n^{n+1} f(n) dt \geq \int_n^{n+1} f(n+1) dt = f(n+1)$$

und dann das Majorantenkriterium.

## 15.2 Gleichmäßige Konvergenz

### 15.2.1 Stetigkeit der Grenzfunktion

Zeige Stetigkeit mithilfe  $\delta - \varepsilon$ -Kriterium durch einfügen von nahrhaften Nullen.  
Und dann Dreiecksungleichungen.

## 15.3 Differentialrechnung mit mehreren Veränderlichen

### 15.3.1 Grenzwertrechenregeln

Verwende GWRR aus HM1, indem du die einzelnen Vektorkomponenten betrachtest.

### 15.3.2 Max/Min kompakter Mengen

- (a) Konstruiere eine Folge aus der Menge  $A$ , die gegen das Supremum von  $A$  konvergiert und zeige damit, dass das Supremum in  $A$  enthalten ist.

- (b) Ansatz: Zeige, dass eine konvergente Folge  $(y_n)_{n=1}^\infty$  aus dem Bild  $B$  von  $f$   $B := f(A)$  beschränkt ist und gegen einen Wert in  $B$  konvergiert. Dazu nutzt du eine Folge  $(x_n)_{n=1}^\infty \in A$  mit  $f(x_n) = y_n$ . Nutze nun die Stetigkeit von  $f$ .

### 15.3.3 Stetigkeit einer Funktion durch beschränkte partielle Ableitungen

Für  $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist zu zeigen:  $\left| \frac{\partial f}{\partial x_k} \right| \leq c_k \in \mathbb{R} \ \forall k \Rightarrow f \in C(G, \mathbb{R})$

Ansatz: Definition der Stetigkeit mit nahrhaften Nullen (verändere immer nur ein Argument aus  $f$ , sodass du den eindimensionalen Mittelwertsatz aus HM1 anwenden kannst).

### 15.3.4 Differentierbarkeit impliziert Stetigkeit

Betrachte  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  und setze die Definition für totale Differentierbarkeit ein.

### 15.3.5 Zusammenhang totale und partielle Diff'barkeit

Ist  $f$  total differentierbar und es ist zu zeigen:  $\frac{\partial f(x)}{\partial r} = f'(x) \cdot r$  mit  $r$  eine Richtung.

Ansatz: Richtungsableitung mit Definition ausrechnen und dann die Definition der totalen Differentierbarkeit einsetzen. Betrachte also:

$$\left\| \frac{f(x + h \cdot r) - f(x)}{h} - J_f(x) \cdot r \right\|$$

Weiterhin ist zu zeigen, dass wenn alle partiellen Ableitungen von  $f$  stetig sind,  $f$  differentierbar ist. Dies haben wir nur für Skalarfelder gezeigt.

Ansatz: Schreibe  $f(x) = f(a) + (f(x) - f(a))$  und gehe dann vor wie in 15.3.3.

### 15.3.6 Kettenregel

Setze in  $g \circ f = g(f(x))$  die Definition der totalen Differentierbarkeit ein.

### 15.3.7 Notwendige Bedingung für Extrema

Definiere eine Hilfsfunktion  $g(t) := f(x_0 + t(x - x_0))$  und argumentiere dann für lokale Extrema wie in HM1.

### 15.3.8 Mittelwertsatz

Hilfsfunktion  $g(t) := f(a + t(b - a))$ . Verwende den eindimensionale MWS.

### 15.3.9 Konstante Funktionen

Zeige:  $f(x) \equiv \text{const} \Leftrightarrow \nabla f(x) = \vec{0} \ \forall x \in G$

Ansatz für Rückrichtung: Nutze die Punkte eines Polygonzuges vom Punkt  $a$  nach Punkt  $x$  und den MWS.

### 15.3.10 Taylor

Nutze die Hilfsfunktion  $g(t) := f(a + t(b - a))$  und Taylor aus HM1.

### 15.3.11 Hinreichende Bedingung für Extrema

Nutze den Satz von Taylor.

### 15.3.12 Beweisidee für den Hauptsatz über implizite Funktionen

Laut Voraussetzung ist  $g(x, y) \in C^1(G, \mathbb{R})$ . Deswegen kann man  $g$  als näherungsweise linear annehmen (lokal betrachtet). Mit dieser Näherung lässt sich  $g$  einfach nach z.B.  $y$  auflösen.

### 15.3.13 Herleitung für die Ableitung der Auflösung

Hier für den Fall  $g : G \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Nutze folgenden Ansatz:

$$\frac{d}{dx} g(x, f(x)) \stackrel{!}{=} 0$$

Diese Gleichung lässt sich einfach nach  $f'(x)$  auflösen.

### 15.3.14 Satz von Lagrange

Nur für den vereinfachten Fall  $f, g : G \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Da in unserem Fall  $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$ , existiert eine Auflösung  $a$  nach  $x$  oder  $y$ . Damit kannst du dir eine Hilfsfunktion  $h(x) := f(x, a(x))$  definieren und diese auf Extremstellen untersuchen (wie in HM1).

## 15.4 Integration in mehreren Veränderlichen

### 15.4.1 Ableitung in Integral ziehen

Betrachte

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

sowie

$$F'(x) = \int_a^b f_x(x, t) \, dt$$



$F'(x)$  einsetzen, Integral in Grenzwert einsetzen, MWS, zeigen das Differenz im Grenzwert 0.

### 15.4.2 Fubini

Hilfsfunktion:

$$g(u) = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(x, t) \, dt \, dx - \int_a^b \int_{\alpha}^{\beta} f(x, t) \, dx \, dt$$

zeigen dass  $g'(u) \equiv 0$  und  $g(x) = g(a) = 0$ .

### 15.4.3 Leibniz Regel

Hilfsfunktion:

$$G(x, a, b) = \int_a^b f(x, t) \, dt$$

$\nabla G$  berechnen, innere Ableitung.

### 15.4.4 Beweis-Idee Kurvenintegrale (Substitutionsregel)

Riemann Summe, Mittelwertsatz, Abschätzung für verschiedene  $\xi$ , da  $f$  stetig.

### 15.4.5 1. Hauptsatz für Kurvenintegrale

Kurvenintegral mit Parametrisierung, integrant als Ableitung darstellen.

### 15.4.6 Äquivalente Aussagen für Kurvenintegrale

Kurven kombinieren/aufteilen um aus mehreren Kurven eine geschlossene bzw. aus einer geschlossenen Kurven mehrer mit gleichem Anfangs-/Endpunkt zu erzeugen.

### 15.4.7 2. Hauptsatz für Kurvenintegrale

1.  $f$  stetig,  $F \in C^2$ , Satz von Schwarz

2. Nur für Sternförmiges Gebiet.

$F$  als Integral von  $x_0$  (Mittelpunkt von Sternförmigem Gebiet) zu  $x$  darstellen und Weg Parametrisieren.

Ableitung von  $F$  nach  $x_k$  berechnen, Skalarprodukt als Summe schreiben, Produktregel, Integrabilitätsbedingung anwenden, als Ableitung nach  $t$  darstellen.

### 15.4.8 Gauß'sche Integralsätze in der Ebene

1. Hilfsfunktion:

$$h(x, y) = \begin{pmatrix} -f_2(x, y) \\ f_1(x, y) \end{pmatrix}$$

zeigen dass  $\iint \operatorname{div} h = - \iint \operatorname{rot} f$ , Stokes anwenden,  $f$  durch  $h$  darstellen, Normalenvektor normieren, Linienintegral.

2. Hilfsfunktion:

$$h(x, y) = f_1(x, y) \nabla f_2(x, y) - f_2(x, y) \nabla f_1(x, y)$$

$\operatorname{div} h$  und  $h\nu$  ausrechnen und Gleichheit über ersten Teil von Gauß.

**Teil V**

**Klausurvorbereitung**

Hier findest du eine kurze Übersicht über alle Themen, die du für die jeweilige Klausur beherrschen solltest: Wichtige Definitionen und Beweise, die man gut in der Klausur abfragen kann, besonders trickreiche Aufgaben, die mehrmals in der Vorlesung oder in der Übung besprochen wurden und generelle Kompetenzen, die höchstwahrscheinlich von dir verlangt werden.

## Kapitel 16

### HM1

# Kapitel 17

## HM2

### 17.1 Integration

#### 17.1.1 Wichtige Beweise

- 1. und 2. Mittelwertsatz der Integralrechnung
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

#### 17.1.2 Typische Aufgaben

Berechne den GW von z.B. folgender Reihe (hast du also das Prinzip der Riemann-Summen verstanden?)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \sin \frac{k\pi}{n}$$

Untersuche Reihen auf Konvergenz (wende das Integralkriterium an)

$$\sum_{n=-m}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \quad (m \in \mathbb{N})$$

Oder diese hier (Tipp: Eulersche Gammafunktion)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3 e^{-n^2}$$

Untersuche uneigentliche Integrale auf Konvergenz

#### 17.1.3 Trickreiche Aufgaben

Schwierige uneigentliche Integrale. Konvergiert beispielsweise dieses Integral?  
(Ja, tut es)

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$$

### 17.1.4 Weitere hilfreiche Dinge

Schau dir uneigentliche Integrale an, die man gut als Majorante oder Minorante verwenden kann, z.B.:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$$

## 17.2 Gleichmäßige Konvergenz

### 17.2.1 Wichtige Beweise

- Stetigkeit der Grenzfunktion
- Satz von Dini (ziemlich tricky, aber die Idee sollte man im Kopf haben)

### 17.2.2 Typische Aufgaben

Untersuche Reihen auf gleichmäßige Konvergenz, z.B.:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(1-x)^k, \quad \forall x \in [0, 1] \quad \text{bzw.} \quad \forall x \in [a, 1] \quad \text{mit} \quad 0 < a \leq 1$$

### 17.2.3 Trickreiche Aufgaben

Auf welchem Intervall konvergiert die Riemannsche Zeta-Funktion gleichmäßig?

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

## 17.3 Differentialrechnung mit mehreren Veränderlichen

### 17.3.1 Wichtige Beweise

- Beweise über z.B. die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen
- Mehrdimensionaler Mittelwertsatz
- Notwendige Bedingung für Extrema
- Satz über konstante Funktionen
- Satz von Taylor
- Hinreichende Bedingung für Extrema
- Herleitung für die Ableitung der Auflösung (kann sehr hilfreich sein, wenn man die Formel vergessen hat)

### 17.3.2 Typische Aufgaben

Kannst du:

- dir Mengen vorstellen und zeichnen?
- Funktionsgrenzwerte berechnen?
- Funktionen auf Stetigkeit prüfen?
- partielle Ableitungen und Richtungsableitungen berechnen?
- Funktionen auf totale Diff'barkeit prüfen?
- Extremwerte von Funktionen finden und klassifizieren?
- mit Matrizen rechnen und Inverse bestimmen?
- prüfen, ob eine Funktion umkehrbar ist und die Umkehrung bestimmen?
- die Ableitung einer unbekannten Umkehrfunktion bestimmen?
- prüfen, ob eine Funktion nach einer / mehreren Variablen auflösbar ist und die Auflösung bestimmen?
- die Ableitung einer unbekannten Auflösung berechnen?
- Extrema unter Nebenbedingung bestimmen?

## 17.4 Integration in mehreren Veränderlichen

### 17.4.1 Wichtige Beweise

- Fubini
- Ableitung eines Parameterintegrals
- Leibniz-Formel herleiten können
- 1. Hauptsatz für Kurvenintegrale

### 17.4.2 Typische Aufgaben

Kannst du:

- die Länge von Kurven bestimmen?
- Funktionen auf Wegunabhängigkeit prüfen?
- Potentiale und Stammfunktionen berechnen?
- Flächen und Volumina berechnen mit:



- Fubini und Cavalieri?
- der Substitutionsregel?
- Integralsätze:
  - verifizieren?
  - geschickt anwenden?

### 17.4.3 Trickreiche Aufgaben

Schau dir schwierige uneigentliche Integrale an, wie z.B.:

$$\int_0^1 \frac{t^b - t^a}{\log t} dt$$

oder

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

## 17.5 Lineare Algebra

### 17.5.1 Typische Aufgaben

Kannst du:

- prüfen, ob eine Menge ein Vektorraum ist?
- prüfen, ob eine Menge ein Unterraum ist?
- lineare Unabhängigkeit nachprüfen?
- die Basis eines VR bestimmen?
- die Dimension eines VR bestimmen?
- LGS lösen?

# Teil VI

## Appendix

# Kapitel 18

## Grenzwerte

### 18.1 Konvergenzkriterien

Zusammenfassung verschiedener Konvergenzkriterien nach Wikipedia (Seite: Konvergenzkriterium):

Kriterium	nur f. mon. F.	Konv.	Div.	abs. Konv.	Absch.	Fehlerabsch.
Nullfolgenkriterium			X			
Monotoniekriterium		X		X		
Leibniz-Kriterium	X	X			X	X
Cauchy-Kriterium		X	X			
Abel-Kriterium	X	X				
Dirichlet-Kriterium	X	X				
Majorantenkriterium		X		X		
Minorantenkriterium			X			
Wurzelkriterium		X	X	X		X
Integralkriterium	X	X	X	X	X	
Cauchy-Kriterium	X	X	X	X		
Grenzwertkriterium		X	X			
Quotientenkriterium		X	X	X		X
Gauß-Kriterium		X	X	X		
Raabe-Kriterium		X	X	X		
Kummer-Kriterium		X	X	X		
Bertrand-Kriterium		X	X	X		
Ermakoff-Kriterium	X	X	X	X		

# Kapitel 19

## Integration

### 19.1 Riemann-Integrierbarkeit

Kriterium	Integrierbar	Nicht Integrierbar
Funktion nicht beschränkt		X
Verknüpfung Riemann-Integrierbarer Funktionen	X	
Stetige Funktion	X	
Endliche vielen Änderungen zu Riemann-Int.barer Funktion	X	
Monotone Funktion	X	

## Kapitel 20

# Integration in mehreren Veränderlichen

### 20.1 Häufige Additionstheoreme

$$\begin{aligned}\sin^2(t) &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2t)) \\ \cos^2(t) &= \frac{1}{2}(1 + \cos(2t)) \\ \sin(t) \cos(t) &= \frac{1}{2} \sin(2t)\end{aligned}$$

## 20.2 Integral-Shortcuts

$$\begin{aligned}
 \int_a^b \sin(t) \, dt &= \int_a^b \cos(t) \, dt = 0 \quad \text{Für eine volle Periode } [a, b] \subset \mathbb{R} \\
 \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin(t) \, dt &= \pm 2 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\
 \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \cos(t) \, dt &= 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\
 \int_{l\pi}^{(l+1)\pi} \cos(t) \, dt &= \pm 2 \quad \forall l \in \{x : x = k + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}\} \\
 \int_{l\pi}^{(l+1)\pi} \sin(t) \, dt &= 0 \quad \forall l \in \{x : x = k + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}\} \\
 \int_a^b \sin(t) \cos(t) \, dt &= 0 \quad \forall [a, b] \subseteq \mathbb{R} \text{ mit } a - b = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
 \int_a^b \sin^2(t) \, dt &= \frac{a-b}{2} \quad \forall [a, b] \subseteq \mathbb{R} \text{ mit } a - b = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
 \int_a^b \cos^2(t) \, dt &= \frac{a-b}{2} \quad \forall [a, b] \subseteq \mathbb{R} \text{ mit } a - b = k\pi, k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$