

# Zusammenfassung Höhere Mathematik

Paul Nykiel

14. Februar 2017

# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>4</b>
<b>1</b>	<b>Vorkurs</b>	<b>5</b>
1.1	Aussagenlogik . . . . .	5
1.1.1	Definition Aussage . . . . .	5
1.1.2	Verknüpfungen . . . . .	5
1.1.3	Mehr zu Implikationen . . . . .	6
1.1.4	Bezeichnung von Aussagen . . . . .	6
1.1.5	Satz der Identität . . . . .	6
1.2	Mengen . . . . .	7
1.2.1	Defintion: Mengen nach Cantor . . . . .	7
1.2.2	Begrifflichkeiten und Schreibweise . . . . .	7
1.2.3	Leere Menge, Teilmengen . . . . .	7
1.2.4	Transitivität u.a. . . . .	7
1.2.5	Verknüpfung von Mengen . . . . .	8
1.2.6	Potenzmenge . . . . .	8
1.2.7	Rechenregeln für Mengen . . . . .	8
1.2.8	Komplement . . . . .	9
1.2.9	Bemerkung . . . . .	9
1.2.10	Verknüpfungen über mehrere Elemente . . . . .	9
1.2.11	Wichtige Zusammenhänge . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Grenzwerte</b>	<b>10</b>
2.1	Gruppen und Körper . . . . .	10
2.1.1	Gruppen . . . . .	10
2.1.2	Körper . . . . .	10
2.1.3	Angeordnete Körper . . . . .	11
2.1.4	Minimum und Maximum . . . . .	12
2.1.5	Obere und untere Schranke . . . . .	13
2.1.6	Supremum und Infimum . . . . .	13
2.2	Folgen . . . . .	13
2.2.1	Konvergenz . . . . .	13
2.2.2	Bestimmte Divergenz . . . . .	14
2.2.3	Beschränktheit . . . . .	14
2.2.4	Zusammenhang Konvergenz — Beschränktheit . . . . .	14

2.2.5	Grenzwertrechenregeln . . . . .	14
2.2.6	Sandwich Theorem u.a. . . . .	15
2.2.7	Monotonie . . . . .	15
2.2.8	Zusammenhang Monotonie und Beschränktheit . . . . .	15
2.3	Häufungswerte . . . . .	15
2.3.1	Teilfolgen . . . . .	15
2.3.2	Teilfolgen einer Konvergenten Folge . . . . .	15
2.3.3	Häufungswerte . . . . .	15
2.3.4	Limes superior/inferior . . . . .	16
2.3.5	Charakterisierung limsup/liminf . . . . .	16
2.3.6	Konvergenz und limsup/liminf . . . . .	16
2.3.7	Satz von Bolzano-Weierstraß . . . . .	16
2.3.8	Cauchy-Kriterium . . . . .	16
2.4	Unendliche Reihen . . . . .	17
2.4.1	Definition . . . . .	17
2.4.2	Cauchy-Kriterium für unendliche Reihen . . . . .	17
2.4.3	Grenzwertrechenregeln für unendliche Reihen . . . . .	17
2.4.4	Positive Folgen . . . . .	18
2.4.5	Leibniz-Kriterium . . . . .	18
2.4.6	Absolute Konvergenz . . . . .	18
2.4.7	Majorantenkriterium . . . . .	18
2.4.8	Minorantenkriterium . . . . .	19
2.4.9	Wurzel- und Quotientenkriterium . . . . .	19
2.4.10	Umordnung einer Reihe . . . . .	19
2.4.11	Cauchy-Produkt . . . . .	20
2.4.12	Cauchy-Verdichtungssatz . . . . .	20
2.5	Potenzreihen . . . . .	20
2.5.1	Definition . . . . .	20
2.5.2	Hadamard (Konvergenzradius mit Wurzelkriterium) . . . . .	20
2.5.3	Konvergenzradius mit Quotientenkriterium . . . . .	21
2.5.4	Hinweis . . . . .	21
2.5.5	Integration und Differentiation von Potenzreihen . . . . .	21
2.5.6	Cauchy-Produkt für Potenzreihen . . . . .	21
2.5.7	Wichtige Potenzreihen . . . . .	21
2.5.8	Alternative Definition der Exponentialfunktion . . . . .	22
2.6	Funktionsgrenzwerte . . . . .	22
2.6.1	Bemerkung . . . . .	22
2.6.2	Epsilon-Umgebung . . . . .	22
2.6.3	Funktionsgrenzwerte (über Delta-Epsilon-Kriterium) . . . . .	22
2.6.4	Folgenkriterium . . . . .	23
2.6.5	Rechenregeln für Funktionsgrenzwerte . . . . .	23
2.6.6	Cauchy-Kriterium für Funktionsgrenzwerte . . . . .	24
2.6.7	Bestimmte Divergenz . . . . .	24
2.6.8	Monotone Funktionen . . . . .	24
2.6.9	Grenzwerte an Intervallgrenzen . . . . .	24
2.7	Stetigkeit . . . . .	25

2.7.1	Anschaulich . . . . .	25
2.7.2	Stetigkeit: Delta-Epsilon-Kriterium . . . . .	25
2.7.3	Bemerkungen . . . . .	25
2.7.4	Rechenregeln für Stetigkeit . . . . .	25
2.7.5	Stetigkeit von Potenzreihen . . . . .	25
2.7.6	Umgebung positiver Funktionswerte . . . . .	26
2.7.7	Zwischenwertsatz . . . . .	26
2.7.8	Existenz des Logarithmus . . . . .	26
2.7.9	Maximum/Minimum/Infimum/Supremum einer Funktion . . . . .	26
2.7.10	Beschränktheit einer stetigen Funktion . . . . .	27
2.7.11	Weierstraß: Existenz von Min und Max . . . . .	27
2.7.12	Zusammenhang Injektivität — Stetigkeit . . . . .	27
2.7.13	Existenz und Monotonie der Umkehrfunktion . . . . .	27
2.7.14	Gleichmäßige Stetigkeit . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Differentialrechnung</b>	<b>28</b>
3.1	Ableitung . . . . .	28
3.1.1	Definition Differenzen-Quotient . . . . .	28
3.1.2	Rechtsseitige und linksseitige Ableitung . . . . .	28
3.1.3	Ableitungsrechenregeln . . . . .	28
3.1.4	Alternative Definition der Ableitung . . . . .	29
3.1.5	Zusammenhang Differenzierbarkeit — Stetigkeit . . . . .	29
3.1.6	Differentiation von Potenzreihen . . . . .	29
3.1.7	Ableitung der Umkehrfunktion . . . . .	29
3.1.8	Kettenregel . . . . .	29
3.2	Mittelwertsätze . . . . .	29
3.2.1	Satz von Rolle . . . . .	29
3.2.2	Definition lokaler Extrempunkt . . . . .	30
3.2.3	Notwendige Bedingung für lokale Extrema . . . . .	30
<b>II</b>	<b>Appendix/Beweisansätze</b>	<b>31</b>
<b>4</b>	<b>Grenzwerte</b>	<b>32</b>
4.1	Konvergenzkriterien . . . . .	32
4.2	Beweis-Ansätze . . . . .	33

## Teil I

# Zusammenfassung

# Kapitel 1

## Vorkurs

### 1.1 Aussagenlogik

#### 1.1.1 Definition Aussage

Eine Aussage ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch ist.

#### Bemerkung

Wir beschäftigen uns mit der klassischen zweiwertigen Logik. Es gibt auch Logiken mit 3 bzw. 4 Werten.

#### 1.1.2 Verknüpfungen

Formal kann eine Oder-Verknüpfung mit dem  $\vee$ -Zeichen durch eine Wahrheitstabelle definiert werden:

$A$	$B$	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Analog kann eine Und-Verknüpfung mit dem  $\wedge$ -Zeichen durch eine Wahrheitstabelle definiert werden:

$A$	$B$	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Und eine Negation wird definiert durch:

$A$	$\neg A$
1	0
0	1

Eine sog. Implikation wird durch das  $\Rightarrow$ -Zeichen dargestellt und ist definiert durch:

$A$	$B$	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

### Bemerkung

Bei mehr als einer Verknüpfung muss klar sein welche Verknüpfung als erstes ausgewertet werden muss, hierfür werden Klammern verwendet.

### 1.1.3 Mehr zu Implikationen

Bei der Aussage  $A \Rightarrow B$  bezeichnet man  $A$  als hinreichende Bedingung und  $B$  als notwendige Bedingung.

Die Aussage  $A \Rightarrow B$  ist äquivalent zu  $\neg B \Rightarrow \neg A$ .

### 1.1.4 Bezeichnung von Aussagen

Eine Aussageform heißt:

- (a) Allgemeingültig (oder Tautologie), wenn sie als Wahrheitswert stets den Wert wahr annimmt.
- (b) Erfüllbar, wenn die Wahrheitstabelle mindestens einmal den Wert wahr enthält.
- (c) Unerfüllbar (oder Kontradiction), wenn die Wahrheitstabelle nur falsch-Einträge enthält.

### 1.1.5 Satz der Identität

Mit  $A \Leftrightarrow B$  kürzen wir die Aussage:

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

ab.

### Bemerkung

Für den allg. Fall sagt man zu  $A \Leftrightarrow B$ :  $A$  ist äquivalent zu  $B$ . Das heißt aber nicht, dass  $A = B$  ist.

## 1.2 Mengen

### 1.2.1 Defintion: Mengen nach Cantor

Unter einer Menge versteht man eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterscheidbarer Objekte unsere Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

### 1.2.2 Begrifflichkeiten und Schreibweise

Objekte einer Menge bezeichnet man als Elemente einer Menge.

Schreibweise:

- (a)  $x \in M$  oder  $x \notin M$
- (b) Mengen können durch Aufzählen der Elemente beschrieben werden:  $M = \{a, b, c\}$
- (c) Mengen können durch Eigenschaften der Elemente beschrieben werden:  $M = \{x : x \text{ hat Eigenschaft} \dots\}$

### 1.2.3 Leere Menge, Teilmengen

- (a) Die Menge, die kein Element enthält, heißt leere Menge. Wir bezeichnen diese mit  $\emptyset$ .
- (b) Eine Menge  $M_1$  heißt Teilmenge einer Menge  $M_2$  (Schreibweise  $M_1 \subseteq M_2$ ) falls jedes Element von  $M_1$  auch Element von  $M_2$  ist. D.h. es gilt:

$$x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2$$

- (c) Zwei Mengen sind gleich wenn gilt:

$$M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_1$$

- (d)  $M_1$  heißt echte Teilmenge von  $M_2$  wenn gilt:

$$M_1 \subseteq M_2 \wedge M_1 \neq M_2$$

Schreibweise:  $M_1 \subset M_2$  oder  $M_1 \subsetneq M_2$ .

### 1.2.4 Transitivität u.a.

Für Mengen  $M, M_1, M_2, M_3$  gilt stets:

- (a) Aus  $M_1 \subseteq M_2$  und  $M_2 \subseteq M_3$  folgt stets:  $M_1 \subseteq M_3$
- (b)  $M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_1$
- (c)  $M \subseteq M$  und  $\emptyset \subseteq M$



### 1.2.5 Verknüpfung von Mengen

Für Mengen  $M_1$  und  $M_2$  definiert man:

- (a) Die Vereinigung von  $M_1$  und  $M_2$  durch:

$$M_1 \cup M_2 := \{x : x \in M_1 \vee x \in M_2\}$$

- (b) Den Schnitt von  $M_1$  und  $M_2$  durch:

$$M_1 \cap M_2 := \{x : x \in M_1 \wedge x \in M_2\}$$

- (c) Die Differenz von  $M_1$  und  $M_2$  durch:

$$M_1 \setminus M_2 := \{x : x \in M_1 \wedge x \notin M_2\}$$

- (d) Das Kartesische Produkt von  $M_1$  und  $M_2$  durch:

$$M_1 \times M_2 := \{(a, b) : a \in M_1 \wedge b \in M_2\}$$

- (e) Das Kartesische Produkt von  $M_1$  und  $M_1$  durch;

$$(M_1)^2 := M_1 \times M_1$$

### 1.2.6 Potenzmenge

Für eine Menge  $M$  ist durch

$$P(M) := \{A : A \subseteq M\}$$

die Potenzmenge definiert (Menge aller Teilmengen von  $M$ ).

#### Bemerkung

Hier gilt  $\emptyset \in P(M)$ .

### 1.2.7 Rechenregeln für Mengen

Für bel. Mengen  $M_1, M_2, M_3$  gilt:

- (a)

$$M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1 \text{ und } M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1 \text{ (Kommutativität)}$$

- (b)

$$(M_1 \cup M_2) \cup M_3 = M_1 \cup (M_2 \cup M_3) \text{ und } (M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3) \text{ (Assoziativität)}$$

- (c)

$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3) \text{ und } M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3) \text{ (Distributivgesetz)}$$

### 1.2.8 Komplement

Ist  $X$  eine feste Menge und  $M \subseteq X$  beliebig, so heißt

$$M^c := X \setminus M$$

das Komplement von  $M$  (bzgl.  $X$ ).

### 1.2.9 Bemerkung

Die Schreibweise erfordert dass  $X$  aus dem Kontext bekannt sein muss.

### 1.2.10 Verknüpfungen über mehrere Elemente

Für Mengen  $M_1, M_2, \dots, M_n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir die Notation:

(a)

$$\bigcup_{k=1}^n M_k = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n$$

(b)

$$\bigcap_{k=1}^n M_k = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n$$

(c)

$$\bigtimes_{k=1}^n M_k = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$$

### 1.2.11 Wichtige Zusammenhänge

(a)  $(M^c)^c = M$

(b)  $M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow M_2^c \subseteq M_1^c$

(c)  $(M_1 \cup M_2)^c = M_1^c \cap M_2^c$

# Kapitel 2

## Grenzwerte

### 2.1 Gruppen und Körper

#### 2.1.1 Gruppen

Eine Gruppe ist definiert als ein Tupple aus einer (nicht-leeren) Menge und einer Verknüpfung. Eine Gruppe erfüllt die folgenden Axiome (seien  $a, b, c \in \mathbb{G}$ ):

$$\begin{array}{ll} a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c & \text{(Assoziativität)} \\ a \circ \varepsilon = a & \text{(Rechtsneutrales Element)} \\ a \circ a' = \varepsilon & \text{(Rechtsinverses Element)} \end{array}$$

Eine abelsche Gruppe erfüllt des weiteren:

$$a \circ b = b \circ a \quad \text{(Kommutativität)}$$

#### 2.1.2 Körper

Ein Körper ist definiert als eine Menge mit mindestens zwei Elementen (0 und 1) und zwei Verknüpfungen.

$$\begin{array}{ll} + : \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \rightarrow \mathbb{K} \\ \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \rightarrow \mathbb{K} \end{array}$$

$\mathbb{K}$  ist bezüglich der Addition und der Multiplikation (genauer:  $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ ) ein abelscher Körper, das heißt es gilt (seien  $a, b, c \in \mathbb{K}$ ):

$$\begin{array}{ll}
 a + (b + c) = (a + b) + c & \text{(Assoziativität bez. der Addition)} \\
 a + 0 = a & \text{(Existenz einer 0)} \\
 a + (-a) = 0 & \text{(Existenz eines Inversen bez. der Addition)} \\
 a + b = b + a & \text{(Kommutativität bez. der Addition)} \\
 a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c & \text{(Assoziativität bez. der Multiplikation)} \\
 a \cdot 1 = a & \text{(Existenz einer 1)} \\
 a \cdot a^{-1} = 1 \quad \forall a \neq 0 & \text{(Existenz eines Inversen bez. der Multiplikation)} \\
 a \cdot b = b \cdot a & \text{(Kommutativität bezüglich der Multiplikation)}
 \end{array}$$

außerdem gilt:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad \text{(Distributivgesetz)}$$

### Bemerkung

$\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  sind Körper.  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{N}$  nicht (kein additiv inverses bei  $\mathbb{N}$ , kein multiplikativ inverses bei beiden).

### 2.1.3 Angeordnete Körper

Ein Körper heißt angeordnet wenn folgende Axiome erfüllt sind (seien  $a, b, c \in \mathbb{K}$ ):

$$\begin{array}{lll}
 a < b \vee b < a & \vee & a = b \\
 a < b \wedge b < c & \Rightarrow & a < c \\
 a < b & \Rightarrow & a + c < b + c \\
 a < b \wedge c > 0 & \Rightarrow & a * c < b * c
 \end{array}$$

### Bemerkung

$\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$  sind angeordnete Körper. Für  $\mathbb{C}$  kann keine Ordnungsrelation definiert werden so das alle Axiome erfüllt sind.

### Gebräuchliche Definition zu angeordneten Körpern

Für gewöhnlich gilt  $0 < 1$ .

Die Ordnungsrelation wird dann definiert durch:

$$\begin{array}{ll}
 2 & := 1 + 1 \\
 3 & := 2 + 1 \\
 4 & := 3 + 1 \\
 & \vdots
 \end{array}$$

Die Natürlichen Zahlen werden Induktiv definiert:

1.  $1 \in \mathbb{N}$
2.  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n + 1) \in \mathbb{N}$

### **Bemerkung**

Aus 2. lässt sich direkt ableiten das  $\mathbb{N}$  nach oben unbeschränkt ist (Archimedisches Prinzip).

### **Vollständig Angeordnete Körper**

Ein Körper heißt Vollständig, falls jede nach oben beschränkte, nicht-leere Teilmenge ein Supremum besitzt.

$\Rightarrow \mathbb{R}$  ist der einzige Vollständig angeordnete Körper.

### **Bemerkung**

$\mathbb{Q}$  ist nicht vollständig angeordnet, da  $A := \{x | x^2 \leq 2\} \subset \mathbb{Q}$  kein obere Schranke besitzt (obere Schranke ist  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ).

### **2.1.4 Minimum und Maximum**

Sei  $\mathbb{K}$  ein angeordneter Körper und  $A \subset \mathbb{K}$  dann heißt  $m$  Minimum falls gilt:

1.  $m \in \mathbb{K}$
2.  $a \geq m \forall a \in A$

Analog ist das Maximum definiert: Sei  $\mathbb{K}$  ein angeordneter Körper und  $A \subset \mathbb{K}$  dann heißt  $m$  Maximum falls gilt:

1.  $m \in \mathbb{K}$
2.  $a \leq m \forall a \in A$

**Schreibweisen:**  $m = \min(A)$  bzw.  $m = \max(A)$

### **Bemerkung**

Minimum und Maximum existieren nicht immer.

**Beispiel:**  $A := \{x | x > 0\} \subset \mathbb{R}$  hat nicht 0 als Minimum da  $0 \notin A$  und kein beliebiges  $m$  da  $\tilde{m} := \frac{m}{2} < m \forall m \in A$

### 2.1.5 Obere und untere Schranke

Sei  $\mathbb{K}$  ein angeordneter Körper und  $A \subset \mathbb{K}$  dann ist  $s$  untere Schranke falls gilt:

- $s \leq a \quad \forall a \in A$

Analog ist die obere Schranke definiert: Sei  $\mathbb{K}$  ein angeordneter Körper und  $A \subset \mathbb{K}$  dann ist  $s$  obere Schranke falls gilt:

- $s \geq a \quad \forall a \in A$

#### Bemerkung

Hat eine Menge eine obere (bzw. untere) Schranke heißt er nach oben (bzw. unten) beschränkt. Ist eine Menge nach unten und oben beschränkt bezeichnet man sie als beschränkt.

### 2.1.6 Supremum und Infimum

$s$  heißt Infimum (größte untere Schranke) falls gilt:

- $s$  ist untere Schranke
- Falls  $\tilde{s}$  ebenfalls untere Schranke ist gilt  $s \geq \tilde{s}$

Analog ist das Supremum definiert:  $s$  heißt Supremum (kleinste obere Schranke) falls gilt:

- $s$  ist obere Schranke
- Falls  $\tilde{s}$  ebenfalls obere Schranke ist gilt  $s \leq \tilde{s}$

#### Bemerkung

Wenn Minimum (bzw. Maximum) existieren sind diese gleich dem Infimum (bzw. Supremum).

**Schreibweise:**  $s = \inf(A)$  bzw.  $s = \sup(A)$

## 2.2 Folgen

Eine Folge  $a_n$  ist definiert als eine Funktion:

$$a_n := \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{M} \subset \mathbb{R}$$

oder auch  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ .

### 2.2.1 Konvergenz

Eine Folge  $a_n$  heißt konvergent wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > n_0(\varepsilon)$$

### Bemerkung

Der Grenzwert ist eindeutig, d.h. es existiert nur ein Grenzwert.

### Schreibweise

Falls  $a_n$  gegen  $a$  konvergiert schreibt man:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

### 2.2.2 Bestimmte Divergenz

Eine Folge  $a_n$  heißt bestimmt Divergent wenn gilt

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n(x) : a_n > x \text{ bzw. } a_n < x$$

### Schreibweise:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ bzw. } -\infty$$

### 2.2.3 Beschränktheit

Eine Folge heißt beschränkt wenn gilt:

$$|a_n| < c \quad \forall n$$

### Beschränktheit nach oben/unten

Eine Folge heißt nach oben (bzw. unten) beschränkt wenn gilt:

$$a_n < c \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ bzw. } a_n > c \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

### 2.2.4 Zusammenhang Konvergenz — Beschränktheit

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

### 2.2.5 Grenzwertrechenregeln

Seien  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ,  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ ,  $(c_n)_{n=1}^{\infty}$  Folgen in  $\mathbb{C}$  mit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

Dann gilt:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- Falls  $b \neq 0$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

### 2.2.6 Sandwich Theorem u.a.

Seien  $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty, (c_n)_{n=1}^\infty$  Folgen in  $\mathbb{R}$  mit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \text{ und } \gamma \in \mathbb{R}$$

Dann gilt:

- $a_n \leq \gamma \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq \gamma$
- $a_n \geq \gamma \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \geq \gamma$
- $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq b$
- $a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \wedge a = b \Rightarrow c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a = b$

### 2.2.7 Monotonie

Eine Folge  $(a_n)_{n=1}^\infty$  in  $\mathbb{R}$  heißt:

- Monoton wachsend falls:  $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (Schreibweise:  $a_n \nearrow$ )
- Monoton fallend falls:  $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (Schreibweise:  $a_n \searrow$ )
- Streng monoton wachsend falls:  $a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (Schreibweise:  $a_n \uparrow$ )
- Streng monoton fallend falls:  $a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (Schreibweise:  $a_n \downarrow$ )

### 2.2.8 Zusammenhang Monotonie und Beschränktheit

Jede Monotone und beschränkte Folge konvergiert.

## 2.3 Häufungswerte

Häufungswerte sind Grenzwerte einer Teilfolge.

### 2.3.1 Teilfolgen

Eine Folge  $(b_n)_{n=1}^\infty$  heißt Teilfolge von  $(a_n)_{n=1}^\infty$ , wenn eine streng monotone Funktion  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  existiert mit  $b_n = a_{\varphi(n)}$ .

### 2.3.2 Teilfolgen einer Konvergenten Folge

Sei  $(a_n)_{n=1}^\infty$  eine konvergente Folge in  $\mathbb{C}$  mit:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $(b_n)_{n=1}^\infty$  sei eine Teilfolge. Dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ .

### 2.3.3 Häufungswerte

Sei  $(a_n)_{n=1}^\infty$  eine Folge in  $\mathbb{C}$ . Dann heißt  $a \in \mathbb{C}$  ein Häufungswert einer Folge, falls eine Teilfolge gegen  $a$  konvergiert.



### 2.3.4 Limes superior/inferior

Sei  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  eine reelle Folge, dann heißt:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \sup\{x \in \mathbb{R}, a_n > x \text{ } \infty\text{-oft}\}$$

der Limes superior von  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  und

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \inf\{x \in \mathbb{R}, a_n < x \text{ } \infty\text{-oft}\}$$

der Limes inferior von  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ .

### 2.3.5 Charakterisierung limsup/liminf

Sei  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  eine reelle Folge und  $s \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

(a)

$$s = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt:}$$

i  $a_n < s + \varepsilon$  für fast alle  $n$

ii  $a_n > s - \varepsilon$  für  $\infty$ -viele  $n$

(b)

$$s = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt:}$$

i  $a_n > s - \varepsilon$  für fast alle  $n$

ii  $a_n < s + \varepsilon$  für  $\infty$ -viele  $n$

### 2.3.6 Konvergenz und limsup/liminf

Eine beschränkte Folge  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  in  $\mathbb{R}$  konvergiert  $\Leftrightarrow$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$$

### 2.3.7 Satz von Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge in  $\mathbb{C}$  besitzt eine konvergente Teilfolge.

### 2.3.8 Cauchy-Kriterium

Sei  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  eine Folge in  $\mathbb{C}$ , dann gilt

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ konv. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : |a_n - a_m| < \varepsilon \forall n, m > n_0(\varepsilon)$$

#### Bemerkung

Im Gegensatz zur Definition der Folgenkonvergenz muss der Grenzwert nicht bekannt sein.

## 2.4 Unendliche Reihen

### 2.4.1 Definition

Sei  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  eine Folge in  $\mathbb{C}$ , dann heißt die durch

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

definiert Folge  $(s_n)_{n=1}^{\infty}$  eine Folge von Partialsummen der unendlichen Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Falls die Folge  $(s_n)_{n=1}^{\infty}$  konvergiert setzen wir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n =: \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

### 2.4.2 Cauchy-Kriterium für unendliche Reihen

Sei  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  eine  $\infty$ -Reihe, dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon \quad \forall n, m > n_0(\varepsilon)$$

und:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

### 2.4.3 Grenzwertrechenregeln für unendliche Reihen

Seien

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} b_k \text{ gegeben und } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

dann gilt:

(a)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} b_k \text{ konv.:} \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) \text{ konv.} \\ \text{und: } \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_k \end{aligned}$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}(a_k) \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im}(a_k) \text{ konv.}$$

(c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Leftrightarrow \text{die Restreihe } R_n := \sum_{k=n}^{\infty} a_k \text{ konv. gegen } 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$$

#### 2.4.4 Positive Folgen

Es sei  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  eine Folge mit  $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in [0, \infty)$  dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Leftrightarrow \text{Folge der Partialsummen } \sum_{k=1}^n a_k \text{ ist beschr.}$$

#### 2.4.5 Leibniz-Kriterium

Sei  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  eine monoton fallende, stetige Folge. Dann gilt falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  ist, konv. die sogenannte alternierende Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

#### 2.4.6 Absolute Konvergenz

Eine Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  heißt absolut konvergent, wenn

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert.

#### Bemerkung

Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent.

#### 2.4.7 Majorantenkriterium

Seien  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  mit  $b_k \geq 0$  gegeben.  
Wenn  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  konv. und ein  $c > 0$  ex. mit

$$|a_k| \leq c \cdot |b_k|$$

für fast alle  $k$ , dann konv.  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut.

### 2.4.8 Minorantenkriterium

Falls ein  $c > 0$  ex. mit  $a_k \geq c \cdot b_k > 0$  für fast alle  $k$ , dann:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ div.} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ div.}$$

### 2.4.9 Wurzel- und Quotientenkriterium

Sei  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  gegeben. Dann gilt:

(a) Wenn

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

gilt, dann konv.  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut.

Wenn

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

gilt, dann div.  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

(b) Wenn  $a_n \neq 0 \forall n$  und

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

gilt, dann konv.  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut.

Wenn  $a_n \neq 0 \forall n$  und

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$$

gilt, dann divergiert.  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

### Bemerkung

Wenn das Wurzelkriterium keine Aussage macht, kann das Quotientenkriterium trotzdem eine Aussage machen.

### 2.4.10 Umordnung einer Reihe

Eine Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  heißt Umordnung der Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , wenn eine bij. Abb  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ex. mit  $b_k = a_{\varphi(k)}$ .

### Bemerkung

Die Reihe konvergiert nur gegen den selben Wert, wenn  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut konvergent ist.

### 2.4.11 Cauchy-Produkt

Die Reihen  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  seien absolut konv.. Dann gilt:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k a_j \cdot b_{k-j}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

und  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  konv. ebenfalls absolut.

### 2.4.12 Cauchy-Verdichtungssatz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ konv.}$$

## 2.5 Potenzreihen

### 2.5.1 Definition

Sei  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  eine Folge in  $\mathbb{C}$  und  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k$$

eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt  $z_0$  und Koeffizienten  $a_n$ .

#### Bemerkung

Viele wichtige Funktionen können als Potenzreihen dargestellt werden.

### 2.5.2 Hadamard (Konvergenzradius mit Wurzelkriterium)

Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  eine PR. Definiere

$$R := \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Dabei sei  $R := \infty$ , falls  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$  und  $R = 0$  falls  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ .

Dann konv. die PR absolut, falls  $|z - z_0| < R$  und divergiert falls  $|z - z_0| > R$ .

#### Bemerkung I

Für  $|z - z_0| = R$  wird keine Aussage gemacht.

#### Bemerkung II

$R$  heißt der Konvergenzradius der Potenzreihe.

### 2.5.3 Konvergenzradius mit Quotientenkriterium

Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  eine PR. Der Potenzradius kann ebenfalls berechnet werden durch:

$$R = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

### 2.5.4 Hinweis

Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

### 2.5.5 Integration und Differentiation von Potenzreihen

Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  mit Konvergenzradius  $R$ . Dann besitzen auch die Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a_k(z - z_0)^{k-1} \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (z - z_0)^{k+1}$$

den Konvergenzradius  $R$ .

### 2.5.6 Cauchy-Produkt für Potenzreihen

Seien  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z - z_0)^k$  Potenzreihen, die den Konvergenzradius  $R_1$  bzw.  $R_2$  besitzen. Dann besitzt

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k \text{ mit } c_k = \sum_{l=0}^k a_l \cdot b_{k-l}$$

den Konvergenzradius  $R = \min\{R_1, R_2\}$ .

### 2.5.7 Wichtige Potenzreihen

(a) Die Exponentialfunktion ist definiert durch:

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

(b) Die Trigonometrischen Funktionen sind definiert durch:

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \sin(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \\ \cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \cos(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \end{aligned}$$

(c) Tangens und Cotangens sind dann definiert als:

$$\begin{aligned}\tan : \{z \in \mathbb{C} : \cos(z) \neq 0\} &\rightarrow \mathbb{C} & z \mapsto \tan(z) &:= \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \\ \cot : \{z \in \mathbb{C} : \sin(z) \neq 0\} &\rightarrow \mathbb{C} & z \mapsto \cot(z) &:= \frac{\cos(z)}{\sin(z)}\end{aligned}$$

### 2.5.8 Alternative Definition der Exponentialfunktion

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp(z)$$

## 2.6 Funktionsgrenzwerte

### 2.6.1 Bemerkung

In diesem Intervall bezeichnet  $I$  stets ein offenes Intervall und  $\bar{I}$  dessen sog. Abschluss z.B.:

- (a)  $I = (a, b)$  und  $\bar{I} = [a, b]$
- (b)  $I = (-\infty, b)$  und  $\bar{I} = (-\infty, b]$
- (c)  $I = (a, \infty)$  und  $\bar{I} = [a, \infty)$
- (d)  $I = (\infty, \infty)$  und  $\bar{I} = (\infty, \infty)$

### 2.6.2 Epsilon-Umgebung

Für  $x_0 \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$  heißt

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

die  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x_0$ . Und

$$\dot{U}_\varepsilon(x_0) := U_\varepsilon(x_0) \setminus \{0\} = (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$$

die punktierte  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x_0$ .

### 2.6.3 Funktionsgrenzwerte (über Delta-Epsilon-Kriterium)

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in I$

- (a)  $f$  konv. gegen ein  $a \in \mathbb{R}$  für  $x \rightarrow x_0$  (kurz:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ) wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : |f(x) - a| < \varepsilon \quad \forall x \text{ mit } |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \text{ und } x \neq x_0$$

Schreibweise:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \text{ oder } f(x) = a \text{ für } x \rightarrow x_0$$

(b) Sei  $x_0 \in I$ , dann konv.  $f$  einseitig von links gegen  $a \in \mathbb{R}$  wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : |f(x) - a| < \varepsilon \quad \forall x \in (x_0 - \delta\varepsilon, x_0)$$

Schreibweise:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$$

(c) Sei  $x_0 \in I$ , dann konv.  $f$  einseitig von rechts gegen  $a \in \mathbb{R}$  wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : |f(x) - a| < \varepsilon \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta\varepsilon)$$

Schreibweise:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$$

(d) Sei  $I = (\alpha, \infty)$  (bzw.  $I = (-\infty, \beta)$ ) dann konv.  $f$  gegen  $a$  für  $x \rightarrow \infty$  (bzw.  $x \rightarrow -\infty$ ) wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_1(\varepsilon) : |f(x) - a| < \varepsilon \quad \forall x \in I : x > x_1(\varepsilon) \text{ (bzw. } x < x_1(\varepsilon))$$

## 2.6.4 Folgenkriterium

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in \bar{I}, u \in \mathbb{R}$  dann gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \Leftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Für eine beliebige Folge } (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ mit} \\ \text{(i) } x_n \neq x_0 \forall n \\ \text{(ii) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \\ \text{gilt stets:} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a \end{array} \right.$$

## 2.6.5 Rechenregeln für Funktionsgrenzwerte

Seien  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in I$  und gelte

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$$

Dann gilt:

(a)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha \cdot f(x)) = \alpha \cdot a$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) + f(x)) = a + b$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) \cdot f(x)) = a \cdot b$$

(d)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{a}{b} \quad \text{falls } b \neq 0$$



### 2.6.6 Cauchy-Kriterium für Funktionsgrenzwerte

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in I$  dann ex.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : |f(x) - f(y)| < \varepsilon \forall x, y \in I \text{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \text{ und } 0 < |y - x_0| < \delta(\varepsilon)$$

### 2.6.7 Bestimmte Divergenz

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$  dann definieren wir die bestimmte Divergenz (uneigentliche Konvergenz) von  $(f \rightarrow \infty)$  durch

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall c > 0 \exists \delta(c) : f(x) > c \forall x \text{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta(c)$$

Analog definieren man links- und rechtsseitig Divergenz gegen  $\infty$  bzw.  $-\infty$ .

### 2.6.8 Monotone Funktionen

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dann heißt (auf  $I$ )

- (a) monoton wachsend ( $f \nearrow$ ), falls gilt

$$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

- (b) streng monoton wachsend ( $f \uparrow$ ), falls gilt

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

- (c) monoton fallend ( $f \searrow$ ), falls gilt

$$x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

- (d) streng monoton fallend ( $f \downarrow$ )

$$x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

- (e) monoton fallend falls  $f$  monoton fallend oder monoton steigend ist

- (f) streng monoton falls  $f$  streng monoton fallend oder streng monoton steigend ist

- (g) Beschränkt falls gilt:

$$\exists c : |f(x)| < c \forall x \in I$$

### 2.6.9 Grenzwerte an Intervallgrenzen

Sei  $a \leq b$  und  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  monoton und beschränkt, dann ex.

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \text{ und } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

## 2.7 Stetigkeit

### 2.7.1 Anschaulich

Graph einer Funktion kann ohne Absetzen gezeichnet werden  $\Leftrightarrow$

Es gibt keine Sprünge  $\Leftrightarrow$

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$  an keiner Stelle  $x_0 \in I$  ist ein Sprung  $\Leftrightarrow$

$$\forall x_0 \in I : \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

### 2.7.2 Stetigkeit: Delta-Epsilon-Kriterium

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in I$ , dann ist  $f$  in  $x_0$  stetig falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in I \text{ mit } |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$$

Und  $f$  ist stetig (auf  $I$ ), wenn  $f$  in jedem  $x_0 \in I$  stetig ist.

### 2.7.3 Bemerkungen

(a)  $f$  ist stetig in  $x_0 \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

gilt.

(b)  $f$  ist stetig in  $x_0$  dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

### 2.7.4 Rechenregeln für Stetigkeit

Sind  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, dann sind auch die Funktionen

(a)  $c \cdot f$  (für  $c \in \mathbb{R}$ )

(b)  $f + g$

(c)  $f \cdot g$

(d) und falls  $g(x) \neq 0 \forall x \in I$   $\frac{f}{g}$

stetig.

Ist  $f : I \rightarrow J, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  und beide stetig dann ist auch  $g \circ f$  stetig.

### 2.7.5 Stetigkeit von Potenzreihen

Sei  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R > 0$ , dann gilt für  $x_1 \in U_R(x_0)$ , dass  $\lim_{x \rightarrow x_1} f(x) = f(x_1)$  (d.h. Potenzreihen sind innerhalb des Konvergenzradius stetig).

### 2.7.6 Umgebung positiver Funktionswerte

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0$ , dann gilt:

$$f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : f(x) > 0 \quad \forall x \in I \text{ mit } |x - x_0| < \delta$$

### 2.7.7 Zwischenwertsatz

Sei  $D = [a, b]$  (also abgeschlossen) und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig dann ex. zu jedem  $y$  zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  ein  $x \in [a, b]$  mit  $f(x) = y$ .

**Genauer:**

$$\forall y \in [m, M] \quad \exists x \in [a, b] \text{ mit } f(x) = y$$

Wobei  $m = \min\{f(a), f(b)\}$  und  $M = \max\{f(a), f(b)\}$ .

### Bemerkung

Bei einer Funktion ist das Bild eines Intervalls wieder ein Intervall. D.h.

$$f([a, b]) = [c, d]$$

### 2.7.8 Existenz des Logarithmus

Die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  ist bijektiv. Das heißt es existiert eine Umkehrfunktion, diese wird  $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  genannt.

### 2.7.9 Maximum/Minimum/Infimum/Supremum einer Funktion

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}$ , dann heißt im Fall der Existenz:

(a)

$$\max_{x \in D} f(x) := \max_D f(x) := \max\{f(x) \mid x \in D\}$$

das Maximum von  $f$  auf  $D$ .

(b)

$$\min_{x \in D} f(x) := \min_D f(x) := \min\{f(x) \mid x \in D\}$$

das Minimum von  $f$  auf  $D$ .

(c)

$$\sup_{x \in D} f(x) := \sup_D f(x) := \sup\{f(x) \mid x \in D\}$$

das Supremum von  $f$  auf  $D$ .

(d)

$$\inf_{x \in D} f(x) := \inf_D f(x) := \inf\{f(x) \mid x \in D\}$$

das Infimum von  $f$  auf  $D$ .

### 2.7.10 Beschränktheit einer stetigen Funktion

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und eine stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben, dann ist  $f$  beschränkt. (d.h.  $\sup_{[a,b]} f < \infty$  und  $\inf_{[a,b]} f > -\infty$ ).

### 2.7.11 Weierstraß: Existenz von Min und Max

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, dann ex.:

$$\min_{[a,b]} f \text{ und } \max_{[a,b]} f$$

### 2.7.12 Zusammenhang Injektivität — Stetigkeit

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf einem Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$f \text{ inj. auf } I \Leftrightarrow f \text{ ist streng monoton}$$

### 2.7.13 Existenz und Monotonie der Umkehrfunktion

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und streng monoton auf einem Intervall  $I$ . Dann ex. auf  $J := f(I)$  die Umkehrfunktion  $f^{-1} : J \rightarrow I$  und diese ist im gleichen Sinn wie  $f$  streng Monoton und stetig.

### 2.7.14 Gleichmäßige Stetigkeit

Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt gleichmäßig stetig auf  $I$ , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \forall x_1, x_2 \in I \text{ mit } |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$$

#### Bemerkung

Im Gegensatz zur normalen Stetigkeit wird bei der gleichmäßigen Stetigkeit eine Funktion  $\delta(\varepsilon)$  für die ganze Funktion bestimmt und nicht nur für jeden Punkt einzeln (also  $\delta(x_0, \varepsilon)$ ). Es wird also zwischen Stetigkeit in einem Punkt und Stetigkeit auf einem Intervall unterschieden.

## Kapitel 3

# Differentialrechnung

### 3.1 Ableitung

#### 3.1.1 Definition Differenzen-Quotient

Sei  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann heißt  $f$  in  $x_0 \in D$  differentierbar, falls

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

für alle  $x_0 \in D$  existiert.

#### 3.1.2 Rechtsseitige und linksseitige Ableitung

Im Fall der Existenz heißen

$$\begin{aligned} f'(x_0^+) &:= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ bzw.} \\ f'(x_0^-) &:= \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

die rechts- bzw. linksseitige Ableitung in  $x_0$

#### Bemerkung

$$f'(x_0) \text{ ex.} \Leftrightarrow f'(x_0^+) \text{ und } f'(x_0^-) \text{ ex. und } f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$$

#### 3.1.3 Ableitungsregeln

Seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  differentierbar in  $x_0 \in D$ , dann gilt:

- (a)  $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- (b)  $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

(c) Falls  $g(x_0) \neq 0$ :  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

### 3.1.4 Alternative Definition der Ableitung

Sei  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in D$ . Dann gilt:  $f$  differenzierbar in  $x_0 \Leftrightarrow$

$$\exists A \in \mathbb{R} \text{ und } r : D \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \lim_{x \rightarrow x_0} r(x) = 0 \text{ so dass gilt: } f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + r(x) \cdot (x - x_0)$$

### 3.1.5 Zusammenhang Differenzierbarkeit — Stetigkeit

Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0 \in D \Rightarrow f$  stetig in  $x_0$

### 3.1.6 Differentiation von Potenzreihen

Sei  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$  eine Potenzreihe mit  $R > 0$ , dann ist  $f$  für  $x$  mit  $|x - x_0| < R$  differenzierbar, und es gilt:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (x - x_0)^{k-1}$$

#### Bemerkung

Der Konvergenzradius von  $f'(x)$  ebenfalls  $R$  ist.

### 3.1.7 Ableitung der Umkehrfunktion

Seien  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  Intervalle und  $f : I \rightarrow J$  sei differenzierbar und bijektiv, dann ist auch  $f^{-1} : J \rightarrow I$  differenzierbar und es gilt:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{d}{dx} f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \forall y_0 \in J \text{ für ein } y_0 = f(x_0) \text{ und } f'(y_0) \neq 0$$

### 3.1.8 Kettenregel

Seien  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  differenzierbar auf  $A$  bzw.  $B$ , dann ist auch  $g \circ f$  auf  $A$  differenzierbar und es gilt:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \quad \forall x_0 \in A$$

## 3.2 Mittelwertsätze

### 3.2.1 Satz von Rolle

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar. Falls  $f(a) = f(b)$  gilt, existiert ein  $x_0 \in (a, b)$  mit  $f'(x_0) = 0$

### 3.2.2 Definition lokaler Extrempunkt

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in D$ . Dann besitzt  $f$  in  $x_0$  ein lokales Maximum (bzw. Minimum): $\Leftrightarrow$

$$\exists \delta > 0 : f(x) \leq f(x_0) \text{ (bzw. } f(x) \geq f(x_0)) \quad \forall x \in D \cap U_\delta(x_0)$$

### 3.2.3 Notwendige Bedingung für lokale Extrema

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  differentierbar in  $x_0 \in D$  und  $x_0$  sei kein Randpunkt, dann gilt:  
Liegt bei  $x_0$  ein lokales Maximum/Minimum  $\Rightarrow f'(x_0) = 0$ .

## Teil II

# Appendix/Beweisansätze



# Kapitel 4

## Grenzwerte

### 4.1 Konvergenzkriterien

Zusammenfassung verschiedener Konvergenzkriterien nach Wikipedia (Seite: Konvergenzkriterium):

Kriterium	nur f. mon. F.	Konv.	Div.	abs. Konv.	Absch.	Fehlerabsch.
Nullfolgenkriterium			x			
Monotoniekriterium		x		x		
Leibniz-Kriterium	x	x			x	x
Cauchy-Kriterium		x	x			
Abel-Kriterium	x	x				
Dirichlet-Kriterium	x	x				
Majorantenkriterium		x		x		
Minorantenkriterium			x			
Wurzelkriterium		x	x	x		x
Integralkriterium	x	x	x	x	x	
Cauchy-Kriterium	x	x	x	x		
Grenzwertkriterium		x	x			
Quotientenkriterium		x	x	x		x
Gauß-Kriterium		x	x	x		
Raabe-Kriterium		x	x	x		
Kummer-Kriterium		x	x	x		
Bertrand-Kriterium		x	x	x		
Ermakoff-Kriterium	x	x	x	x		

## 4.2 Beweis-Ansätze

Lemma / Satz	Beweisansatz
Eindeutigkeit des GW einer Folge	Zeige, dass $\text{GW } a = \text{GW } b$ , nahrhafte 0
Konvergente Folgen sind beschränkt	Nahrhafte 0, Dreiecks-ugl.
Grenzwertrechenregeln	Nahrhafte 0, Dreiecks-ugl.
$a_n \leq \gamma \ \forall n \Rightarrow a \leq \gamma$	Ausgehend von a über nahrh. 0 zu Def Konvergenz
$a_n \leq b_n \ \forall n \Rightarrow a \leq b$	Definiere Hilfsfolge, argumentiere nach s.o
Sandwich-Theorem	Zeige, dass $-\varepsilon < c_n < \varepsilon$ (Quasi Epsilon-Schlauch)
Monotoniekriterium	Da $ a_n  < c \ \forall n$ , argumentiere über das Supremum der Menge, die aus $a_n$ besteht
GW einer konv. Folge = GW jeder Teilfolge	Def. Konvergenz + Def Teilfolge
Charakterisierung $\limsup$ und $\liminf$	Argumentiere über Eigenschaften $\sup$ und $\inf$
Folge konv. $\overline{\lim} = \underline{\lim}$	Hin: Eindeutigkeit des GW; Rück: Charakterisierung $\limsup$ und $\liminf$
Bolzano-Weierstraß	Zunächst für reelle Folge (trivial), dann für komplex: Realteil ist klar, Imaginärteil: Teilfolge konstruieren
Cauchy Kriterium	Hin: nahrhafte 0; Rück: zeige Beschränktheit, dann folge daraus, dass ein HW ex und benutze diesen als GW-Kandidat
Reihe konv. Folge ist Nullfolge	Cauchy für Reihen
GWRR für Reihen	GWRR für Folgen
Reihe konv g. 0	Restreihe als Differenz darstellen
Leibniz	Cauchy für Reihen
Absolut konv. $\Rightarrow$ konv.	Cauchy und Dreiecks-ugl.
Majorantenkrit.	Cauchy
Minorantenkrit.	Kontradiktion von Majorantenkrit.
Wurzelkriterium	Majorantenkrit: geom. Summe über $Q := q + \varepsilon < 1$ , in $q$ das Wurzelkrit einsetzen, Char. $\limsup$
Quotientenkrit.	Majorantenkrit: setze in $q$ das Quotientenkrit ein u. arg. über $\limsup$
Hadamard	Wurzelkrit + Fallunterscheidung für Sonderfälle
Differenzieren / Integrieren von PR	Wurzelkriterium
Lemma zu $\sin$ , $\cos$ und $\exp$	Cauchy-Produkt + Definitionen

$e^z \neq 0$ und $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$	Inverses Element der Multiplikation
Pythagoras	3. binomische Formel
$e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$	Betrachte $x \geq 0$ , angeordneter Körper
$1 + x \leq e^x \ \forall x \in \mathbb{R}$	Bernoulli
$x < y \Rightarrow e^x < e^y$	nährhafte 0
Folgenkriterium	Hin: Def. Folgenkonv. und dann Def FunktionsGW einsetzen; Rück: Wähle versch. $\delta$ und zeige Widerspruch
Cauchy für Funktionen	Hin: Def. FunktionsGW + nährhafte 0; Rück: Cauchy für Folgen
Grenzwerte an Intervallgrenzen	Argumentiere über Supremum / Infimum
Verknüpfungen stetiger Fnkt. stetig	Folgenkriterium
Potenzreihen sind innerhalb des KR stetig	Abschätzung: $\exists r > 0 :  x - x_0 \text{ bzw. } x_1  \leq r$ , dann einfach $ f(x) - f(x_1) $ nach oben abschätzen
Umgebung pos. Funktionswerte	Wähle $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ , Def. Stetigkeit
Zwischenwertsatz	Definiere $x_0 := \sup\{x \in [a, b] : f(x) \leq y\}$ und zwei Hilfsfolgen, die gegen $x_0$ konvergieren
Existenz log	Zeigen exp ist bijektiv (Zwischenwertsatz)
Beschr. stet. Fkt.	Annahme $f$ nicht beschr. Folgenkriterium
Weierstraß ex. min bzw. max	Zeigen das sup = max

---