

Zusammenfassung Höhere Mathematik

Paul Nykiel

10. Mai 2017

This Page exists solely for printing purposes — Schlagzahl erhöhen.

Inhaltsverzeichnis

I	HM 1 — Zusammenfassung	7
1	Vorkurs	8
1.1	Aussagenlogik	8
1.1.1	Definition Aussage	8
1.1.2	Verknüpfungen	8
1.1.3	Mehr zu Implikationen	9
1.1.4	Bezeichnung von Aussagen	9
1.1.5	Satz der Identität	9
1.2	Mengen	10
1.2.1	Defintion: Mengen nach Cantor	10
1.2.2	Begrifflichkeiten und Schreibweise	10
1.2.3	Leere Menge, Teilmengen	10
1.2.4	Transitivität u.a.	10
1.2.5	Verknüpfung von Mengen	11
1.2.6	Potenzmenge	11
1.2.7	Rechenregeln für Mengen	11
1.2.8	Komplement	12
1.2.9	Bemerkung	12
1.2.10	Verknüpfungen über mehrere Elemente	12
1.2.11	Wichtige Zusammenhänge	12
1.3	Vollständige Induktion	12
1.3.1	Summen und Produktzeichen	12
1.3.2	Prinzip der Vollständigen Induktion	13
1.3.3	Rechenregeln für Summen	13
1.3.4	Doppelsummen	14
1.3.5	Fakultät und Binomialkoeffizient	14
1.3.6	Rechenregeln für den Binomialkoeffizienten	14
1.3.7	Binomischer Lehrsatz	14
1.3.8	Definition Betrag	14
1.3.9	Dreiecksungleichung	15
1.4	Funktion und Differentiation	15
1.4.1	Injektivität, Surjektivität, Bijektivität	15
1.4.2	Verknüpfung von Funktionen	16
1.4.3	Verkettung von Funktionen	16

1.4.4	Stetigkeit und Differenzierbarkeit	16
1.4.5	Zusammenhang Differenzierbarkeit — Stetigkeit	16
1.4.6	Verkettung differenzierbarer Funktionen	17
1.4.7	Differentiation von Monomen	17
1.4.8	Kettenregel	17
1.4.9	Ableitung der Umkehrfunktion	17
1.5	Elementare Funktionen	17
1.6	Integralrechnung	17
1.7	Komplexe Zahlen	17
1.8	Elementare Differentialgleichungen	17
1.8.1	Definition Rechteck	17
1.8.2	Lineare DGL 1. Ordnung	18
2	Grenzwerte	19
2.1	Gruppen und Körper	19
2.1.1	Gruppen	19
2.1.2	Körper	19
2.1.3	Angeordnete Körper	20
2.1.4	Minimum und Maximum	21
2.1.5	Obere und untere Schranke	22
2.1.6	Supremum und Infimum	22
2.2	Folgen	22
2.2.1	Konvergenz	22
2.2.2	Bestimmte Divergenz	23
2.2.3	Beschränktheit	23
2.2.4	Zusammenhang Konvergenz — Beschränktheit	23
2.2.5	Grenzwertrechenregeln	23
2.2.6	Sandwich Theorem u.a.	24
2.2.7	Monotonie	24
2.2.8	Zusammenhang Monotonie und Beschränktheit	24
2.3	Häufungswerte	24
2.3.1	Teilfolgen	24
2.3.2	Teilfolgen einer Konvergenten Folge	24
2.3.3	Häufungswerte	24
2.3.4	Limes superior/inferior	25
2.3.5	Charakterisierung limsup/liminf	25
2.3.6	Konvergenz und limsup/liminf	25
2.3.7	Satz von Bolzano-Weierstraß	25
2.3.8	Cauchy-Kriterium	25
2.4	Unendliche Reihen	26
2.4.1	Definition	26
2.4.2	Cauchy-Kriterium für unendliche Reihen	26
2.4.3	Grenzwertrechenregeln für unendliche Reihen	26
2.4.4	Positive Folgen	27
2.4.5	Leibniz-Kriterium	27
2.4.6	Absolute Konvergenz	27

2.4.7	Majorantenkriterium	27
2.4.8	Minorantenkriterium	28
2.4.9	Wurzel- und Quotientenkriterium	28
2.4.10	Umordnung einer Reihe	28
2.4.11	Cauchy-Produkt	29
2.4.12	Cauchy-Verdichtungssatz	29
2.5	Potenzreihen	29
2.5.1	Definition	29
2.5.2	Hadamard (Konvergenzradius mit Wurzelkriterium) . . .	29
2.5.3	Konvergenzradius mit Quotientenkriterium	30
2.5.4	Hinweis	30
2.5.5	Integration und Differentiation von Potenzreihen	30
2.5.6	Cauchy-Produkt für Potenzreihen	30
2.5.7	Wichtige Potenzreihen	30
2.5.8	Alternative Definition der Exponentialfunktion	31
2.6	Funktionsgrenzwerte	31
2.6.1	Bemerkung	31
2.6.2	Epsilon-Umgebung	31
2.6.3	Funktionsgrenzwerte (über Delta-Epsilon-Kriterium) . . .	31
2.6.4	Folgenkriterium	32
2.6.5	Rechenregeln für Funktionsgrenzwerte	32
2.6.6	Cauchy-Kriterium für Funktionsgrenzwerte	33
2.6.7	Bestimmte Divergenz	33
2.6.8	Monotone Funktionen	33
2.6.9	Grenzwerte an Intervallgrenzen	33
2.7	Stetigkeit	34
2.7.1	Anschaulich	34
2.7.2	Stetigkeit: Delta-Epsilon-Kriterium	34
2.7.3	Bemerkungen	34
2.7.4	Rechenregeln für Stetigkeit	34
2.7.5	Stetigkeit von Potenzreihen	34
2.7.6	Umgebung positiver Funktionswerte	35
2.7.7	Zwischenwertsatz	35
2.7.8	Existenz des Logarithmus	35
2.7.9	Maximum/Minimum/Infimum/Supremum einer Funktion	35
2.7.10	Beschränktheit einer stetigen Funktion	36
2.7.11	Weierstraß: Existenz von Min und Max	36
2.7.12	Zusammenhang Injektivität — Stetigkeit	36
2.7.13	Existenz und Monotonie der Umkehrfunktion	36
2.7.14	Gleichmäßige Stetigkeit	36
3	Differentialrechnung	37
3.1	Ableitung	37
3.1.1	Definition Differenzen-Quotient	37
3.1.2	Rechtsseitige und linksseitige Ableitung	37
3.1.3	Ableitungsrechenregeln	37

3.1.4	Alternative Definition der Ableitung	38
3.1.5	Zusammenhang Differentierbarkeit — Stetigkeit	38
3.1.6	Differentiation von Potenzreihen	38
3.1.7	Ableitung der Umkehrfunktion	38
3.1.8	Kettenregel	38
3.2	Mittelwertsätze	38
3.2.1	Satz von Rolle	38
3.2.2	Definition lokaler Extrempunkt	39
3.2.3	Notwendige Bedingung für lokale Extrema	39
3.2.4	2. Mittelwertsatz	39
3.2.5	1. Mittelwertsatz (Folgerung aus 2. Mittelwertsatz)	39
3.2.6	L'Hospital	39
3.2.7	Satz von Taylor	40
II	HM 2 — Zusammenfassung	41
4	Integration	42
4.1	Integration	42
4.1.1	Definition Zerlegung, Zwischenwerte	42
4.1.2	Definition Riemannsumme	42
4.1.3	Definition Riemann-Integral	43
4.1.4	Menge der Riemann-Integrierbaren Funktionen	44
4.1.5	Kriterien für Riemann-Integrierbarkeit	44
4.1.6	Änderung von Funktionen	45
4.1.7	Zusammenhang Stetigkeit und Integrierbarkeit	45
4.1.8	Stückweise Integration	45
4.1.9	1. Mittelwertsatz der Integralrechnung	45
4.1.10	Existenz der Stammfunktion	46
4.1.11	Definition Stammfunktion	46
4.1.12	Eindeutigkeit der Stammfunktion	46
4.1.13	Hauptsatz der Differential und Integralrechnung	46
4.1.14	Zusammenhang Monotonie und Riemann-Integrierbarkeit	46
4.1.15	Zweiter Mittelwertsatz der Integralrechnung	46
5	Uneigentliche Integrale	47
5.1	Definition uneigentliches Integral	47
5.1.1	Cauchy-Kriterium	48
III	Beweisansätze	49
5.2	HM 1	50
5.2.1	Eindeutigkeit des Grenzwert einer Folge	50
5.2.2	Konvergente Folgen sind beschränkt	50
5.2.3	Grenzwertrechenregeln	50
5.2.4	Monotoniekriterium	50

5.2.5	Grenzwert einer konv. Folge = Grenzwert jeder Teilfolge	50
5.2.6	Charakterisierung $\overline{\lim}$ und $\underline{\lim}$	50
5.2.7	Folge konv. $\overline{\lim} = \underline{\lim}$	50
5.2.8	Bolzano-Weierstraß	50
5.2.9	Cauchy Kriterium	50
5.2.10	Reihe konv. Folge ist Nullfolge	50
5.2.11	Grenzwert RR für Reihen	51
5.2.12	Reihe konv g. 0	51
5.2.13	Leibniz	51
5.2.14	Absolut konv. \Rightarrow konv.	51
5.2.15	Majorantenkriterium	51
5.2.16	Minorantenkriterium	51
5.2.17	Wurzelkriterium	51
5.2.18	Quotientenkriterium	51
5.2.19	Hadamard	51
5.2.20	Differenzieren / Integrieren von Potenzreihen	51
5.2.21	Lemma zu \sin , \cos und \exp	51
5.2.22	$e^z \neq 0$ und $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$	52
5.2.23	Pythagoras	52
5.2.24	$e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$	52
5.2.25	$1 + x \leq e^x \forall x \in \mathbb{R}$	52
5.2.26	$x < y \Rightarrow e^x < e^y$	52
5.2.27	Folgenkriterium	52
5.2.28	Cauchy für Funktionen	52
5.2.29	Grenzwerte an Intervallgrenzen	52
5.2.30	Verknüpfungen stetiger Funktionen stetig	52
5.2.31	Potenzreihen sind innerhalb des Konvergenzradius stetig	52
5.2.32	Umgebung pos. Funktionswerte	52
5.2.33	Zwischenwertsatz	53
5.2.34	Existenz \log	53
5.2.35	Beschränktheit stetiger Funktionen	53
5.2.36	Weierstraß existenz min bzw. max	53
5.3	HM 2	53

IV Appendix 54

6 Grenzwerte 55

6.1	Konvergenzkriterien	55
-----	---------------------	----

Teil I

HM 1 — Zusammenfassung

Kapitel 1

Vorkurs

1.1 Aussagenlogik

1.1.1 Definition Aussage

Eine Aussage ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch ist.

Bemerkung

Wir beschäftigen uns mit der klassischen zweiwertigen Logik. Es gibt auch Logiken mit 3 bzw. 4 Werten.

1.1.2 Verknüpfungen

Formal kann eine Oder-Verknüpfung mit dem \vee -Zeichen durch eine Wahrheitstabelle definiert werden:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Analog kann eine Und-Verknüpfung mit dem \wedge -Zeichen durch eine Wahrheitstabelle definiert werden:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Und eine Negation wird definiert durch:

A	$\neg A$
1	0
0	1

Eine sog. Implikation wird durch das \Rightarrow -Zeichen dargestellt und ist definiert durch:

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Bemerkung

Bei mehr als einer Verknüpfung muss klar sein welche Verknüpfung als erstes ausgewertet werden muss, hierfür werden Klammern verwendet.

1.1.3 Mehr zu Implikationen

Bei der Aussage $A \Rightarrow B$ bezeichnet man A als hinreichende Bedingung und B als notwendige Bedingung.

Die Aussage $A \Rightarrow B$ ist äquivalent zu $\neg B \Rightarrow \neg A$.

1.1.4 Bezeichnung von Aussagen

Eine Aussageform heißt:

- (a) Allgemeingültig (oder Tautologie), wenn sie als Wahrheitswert stets den Wert wahr annimmt.
- (b) Erfüllbar, wenn die Wahrheitstabelle mindestens einmal den Wert wahr enthält.
- (c) Unerfüllbar (oder Kontradiction), wenn die Wahrheitstabelle nur falsch-Einträge enthält.

1.1.5 Satz der Identität

Mit $A \Leftrightarrow B$ kürzen wir die Aussage:

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

ab.

Bemerkung

Für den allg. Fall sagt man zu $A \Leftrightarrow B$: A ist äquivalent zu B . Das heißt aber nicht, dass $A = B$ ist.

1.2 Mengen

1.2.1 Definition: Mengen nach Cantor

Unter einer Menge versteht man eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterscheidbarer Objekte unsere Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

1.2.2 Begrifflichkeiten und Schreibweise

Objekte einer Menge bezeichnet man als Elemente einer Menge.

Schreibweise:

- (a) $x \in M$ oder $x \notin M$
- (b) Mengen können durch Aufzählen der Elemente beschrieben werden: $M = \{a, b, c\}$
- (c) Mengen können durch Eigenschaften der Elemente beschrieben werden: $M = \{x : x \text{ hat Eigenschaft} \dots\}$

1.2.3 Leere Menge, Teilmengen

- (a) Die Menge, die kein Element enthält, heißt leere Menge. Wir bezeichnen diese mit \emptyset .
- (b) Eine Menge M_1 heißt Teilmenge einer Menge M_2 (Schreibweise $M_1 \subseteq M_2$) falls jedes Element von M_1 auch Element von M_2 ist. D.h. es gilt:

$$x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2$$

- (c) Zwei Mengen sind gleich wenn gilt:

$$M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_1$$

- (d) M_1 heißt echte Teilmenge von M_2 wenn gilt:

$$M_1 \subseteq M_2 \wedge M_1 \neq M_2$$

Schreibweise: $M_1 \subset M_2$ oder $M_1 \subsetneq M_2$.

1.2.4 Transitivität u.a.

Für Mengen M, M_1, M_2, M_3 gilt stets:

- (a) Aus $M_1 \subseteq M_2$ und $M_2 \subseteq M_3$ folgt stets: $M_1 \subseteq M_3$
- (b) $M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_1$
- (c) $M \subseteq M$ und $\emptyset \subseteq M$

1.2.5 Verknüpfung von Mengen

Für Mengen M_1 und M_2 definiert man:

- (a) Die Vereinigung von M_1 und M_2 durch:

$$M_1 \cup M_2 := \{x : x \in M_1 \vee x \in M_2\}$$

- (b) Den Schnitt von M_1 und M_2 durch:

$$M_1 \cap M_2 := \{x : x \in M_1 \wedge x \in M_2\}$$

- (c) Die Differenz von M_1 und M_2 durch:

$$M_1 \setminus M_2 := \{x : x \in M_1 \wedge x \notin M_2\}$$

- (d) Das Kartesische Produkt von M_1 und M_2 durch:

$$M_1 \times M_2 := \{(a, b) : a \in M_1 \wedge b \in M_2\}$$

- (e) Das Kartesische Produkt von M_1 und M_1 durch;

$$(M_1)^2 := M_1 \times M_1$$

1.2.6 Potenzmenge

Für eine Menge M ist durch

$$P(M) := \{A : A \subseteq M\}$$

die Potenzmenge definiert (Menge aller Teilmengen von M).

Bemerkung

Hier gilt $\emptyset \in P(M)$.

1.2.7 Rechenregeln für Mengen

Für bel. Mengen M_1, M_2, M_3 gilt:

- (a) Kommutativität:

$$M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1 \text{ und } M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$$

- (b) Assoziativität:

$$(M_1 \cup M_2) \cup M_3 = M_1 \cup (M_2 \cup M_3) \text{ und } (M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3)$$

- (c) Distributivgesetz:

$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3) \text{ und } M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$$

1.2.8 Komplement

Ist X eine feste Menge und $M \subseteq X$ beliebig, so heißt

$$M^c := X \setminus M$$

das Komplement von M (bzgl. X).

1.2.9 Bemerkung

Die Schreibweise erfordert das X aus dem Kontext bekannt sein muss.

1.2.10 Verknüpfungen über mehrere Elemente

Für Mengen M_1, M_2, \dots, M_n mit $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Notation:

(a)

$$\bigcup_{k=1}^n M_k = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n$$

(b)

$$\bigcap_{k=1}^n M_k = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n$$

(c)

$$\prod_{k=1}^n M_k = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$$

1.2.11 Wichtige Zusammenhänge

(a) $(M^c)^c = M$

(b) $M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow M_2^c \subseteq M_1^c$

(c) $(M_1 \cup M_2)^c = M_1^c \cap M_2^c$

1.3 Vollständige Induktion

1.3.1 Summen und Produktzeichen

Für $m, n \in \mathbb{Z}, m \leq n$ und $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ definieren wir:

$$\sum_{k=m}^n a_k := a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$$

und

$$\prod_{k=m}^n a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_n$$

Falls $m > n$ ist definieren wir $\sum_{k=m}^n a_k := 0$ und $\prod_{k=m}^n a_k := 1$

1.3.2 Prinzip der Vollständigen Induktion

Gegen seien Aussagen $A(n)$ für $n \geq n_0$ mit $n_0, n \in \mathbb{Z}$ (n_0 beliebig aber fest).
Und es gelte:

- (a) $A(n_0)$ ist wahr
- (b) Für alle $n \geq n_0$ gilt: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$

Bemerkung

- (a) n_0 wird als Induktionsanfang, n als Induktionsschritt bezeichnet
- (b) Nachteil: wir wissen nicht wieso etwas gilt, nur dass es gilt

1.3.3 Rechenregeln für Summen

Für $m, n \in \mathbb{Z}$ und $a_k, b_k, c \in \mathbb{R}$ gilt:

- (a) Indexverschiebung:

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m+l}^{n+l} a_{k-l}$$

für beliebiges $l \in \mathbb{Z}$

- (b) Trennen von Summen:

$$\sum_{k=m}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k$$

- (c) Konstante Faktoren können aus der Summe “gezogen” werden:

$$\sum_{k=m}^n c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=m}^n a_k$$

- (d) “Teleskopsummen”:

$$\sum_{k=m}^n (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}$$

- (e) Summe über Konstanten:

$$\sum_{k=m}^n c = c \cdot (n - m + 1)$$

1.3.4 Doppelsummen

Für $n \in \mathbb{N}$ und $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq j \leq n$ gilt:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{ij}$$

1.3.5 Fakultät und Binomialkoeffizient

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt

(a) die Fakultät von n

$$n! := \begin{cases} n \cdot (n-1)! & ; n \neq 0 \\ 1 & ; n = 0 \end{cases}$$

(b) den Binomialkoeffizienten

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\prod_{k=1}^n (\alpha - k + 1)}{n!}$$

1.3.6 Rechenregeln für den Binomialkoeffizienten

Für $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $m \geq n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

(a)

$$\binom{\alpha}{n} + \binom{\alpha}{n+1} = \binom{\alpha+1}{n+1}$$

(b)

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

1.3.7 Binomischer Lehrsatz

Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

1.3.8 Definition Betrag

Für $x \in \mathbb{R}$ heißt

$$|x| := \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

der Betrag von x

Bemerkung

Es gilt:

- (a) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- (b) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- (c) $|x - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$
- (d) $|x| = \max\{x, -x\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

1.3.9 Dreiecksungleichung

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

- (a) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (obere Dreiecksungleichung)
- (b) $|x + y| \geq ||x| - |y||$ (untere Dreiecksungleichung)

Bemerkung

Es gilt $x \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

1.4 Funktion und Differentiation

Eine Funktion (bzw. Abbildung, Operator) f von X nach Y ist eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ ein eindeutig bestimmtes $y \in Y$ zuordnet. Das $x \in X$ zugeordnete Element aus Y wird mit $f(x)$ bezeichnet.

Schreibweise

$$f : X \rightarrow Y, \quad x \mapsto f(x)$$

Bemerkung

X heißt Definitionsbereich, $Y := \{y \in Y : \exists x \in X \text{ mit } y = f(x)\}$ die Zielmenge.

1.4.1 Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

- (a) Eine Funktion heißt injektiv, falls gilt:

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) \text{ for all } x, y \in X$$

- (b) Eine Funktion heißt surjektiv, falls gilt:

$$\forall y \in Y \exists x \in X : y = f(x)$$

- (c) Eine Funktion heißt bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

1.4.2 Verknüpfung von Funktionen

Gegeben seien $f, g : X \rightarrow Y$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann definieren wir die Funktionen

$$\begin{aligned} c \cdot f : X &\rightarrow Y, & x &\mapsto (cf)(x) := c \cdot f(x) \\ f + g : X &\rightarrow Y, & x &\mapsto (f+g)(x) := f(x) + g(x) \\ f \cdot g : X &\rightarrow Y, & x &\mapsto (fg)(x) := f(x) \cdot g(x) \\ \frac{f}{g} : X &\rightarrow Y, & x &\mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \text{ für } x \text{ mit } g(x) \neq 0 \end{aligned}$$

1.4.3 Verkettung von Funktionen

Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ gegeben, dann heißt die Funktion

$$g \circ f : X \rightarrow Z, x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

die Verkettung von g mit f oder das Kompositum von g mit f

1.4.4 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

- (a) f heißt stetig in x_0 , wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt
- (b) f heißt stetig auf I , wenn f in jedem $x_0 \in I$ stetig ist.
- (c) f heißt differenzierbar in x_0 , wenn der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert.

Bemerkung

Im Fall der Differenzierbarkeit bezeichnen wir den Grenzwert mit $f'(x_0)$ (Newton Notation) oder $\frac{d}{dx}f(x_0)$ (Leibniz Notation).

1.4.5 Zusammenhang Differenzierbarkeit — Stetigkeit

Eine differenzierbare Funktion ist stets stetig.

Bemerkung

Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion muss hingegen nicht stetig sein.

1.4.6 Verkettung differentierbarer Funktionen

Seien $g, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differentierbar, dann sind cf , $f + g$, $f \cdot g$ und im Fall $g(x) \neq 0 \forall x \in I$ auch $\frac{f}{g}$ differentierbare Funktionen, und es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(c \cdot f)(x) &= (c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x) \\ \frac{d}{dx}(f + g)(x) &= (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) \\ \frac{d}{dx}(f \cdot g)(x) &= (f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}\end{aligned}$$

1.4.7 Differentiation von Monomen

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^n = f(x)$ und $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist f differentierbar mit $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

1.4.8 Kettenregel

Gegeben seien Intervalle $I, J \subseteq \mathbb{R}$ und differentierbare Funktionen $f : I \rightarrow J, g : J \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist auch $g \circ f$ differentierbar und es gilt:

$$\frac{d}{dx}(g \circ f)(x) = \frac{d}{dx}g(f(x)) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

1.4.9 Ableitung der Umkehrfunktion

Sei $f : I \rightarrow J$ bijektiv und differentierbar dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \rightarrow I$ ebenfalls differentierbar und es gilt:

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

1.5 Elementare Funktionen

1.6 Integralrechnung

1.7 Komplexe Zahlen

1.8 Elementare Differentialgleichungen

1.8.1 Definition Rechteck

- (a) $I_1, I_2, \dots, I_n \subseteq \mathbb{R}^n$ seien nicht leeren Intervalle. Dann heißt die Menge $M = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ ein (n-Dimensionales) Rechteck.

- (b) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Rechteck und $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt eine Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ die Lösung der Differentialgleichung (1. Ordnung)

$$y' = \varphi(t; y)$$

wenn gilt:

- i y ist stetig differentierbar
 - ii $(t, y(t)) \in M \forall t \in I$
 - iii $y'(t) = \varphi(t, y(t)) \forall t \in I$
- (c) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Rechteck, $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $(t_0, y_0) \in M$. Dann heißt $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems (AWP)

$$y' = \varphi(t, y); y(t_0) = y_0$$

wenn y eine Lösung von $y' = f(t, y)$ ist und $y(t_0) = y_0$ gilt.

Bemerkung

Eine DGL n -ter Ordnung mit $n \geq 2$ ist nicht direkt durch die Definition beschrieben.

Wenn wir aber eine Funktion $\vec{y} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert mit:

$$\begin{aligned} y(t) &= \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \\ y_1(t) &= x(t) \\ y_2(t) &= \dot{y}_1(t) - \dot{x}(t) \\ \dot{y}_2(t) &= \ddot{x}(t) = -\frac{a_1}{a_2}\dot{x}(t) - \frac{a_0}{a_2}x(t) = -\frac{a_1}{a_2}y_2(t) - \frac{a_0}{a_2}y_1(t) \end{aligned}$$

1.8.2 Lineare DGL 1. Ordnung

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und t_0 ein Punkt in I mit $t_0 - \delta; t_0 + \delta \subseteq I$ (d.h. nicht auf dem Rand von I). Weiter seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Definiere

$$\begin{aligned} y_0 &: I \rightarrow \mathbb{R} \\ y_0(t) &= \exp\left(\int_{t_0}^t f(u) du\right) \\ y &: I \rightarrow \mathbb{R} \\ y(t) &= \left(y_0 \cdot \int_{t_0}^t \frac{g(u)}{y_0(u)} du\right) \cdot y_0(t) \end{aligned}$$

Dann ist:

- (a) y_0 eine Lösung von $y' = f(t)y; y(t_0) = 1$
- (b) y eine Lösung von $y' = f(t)y + g(t); y(t_0) = y_0$

Kapitel 2

Grenzwerte

2.1 Gruppen und Körper

2.1.1 Gruppen

Eine Gruppe ist definiert als ein Tuppel aus einer (nicht-leeren) Menge und einer Verknüpfung. Eine Gruppe erfüllt die folgenden Axiome (seien $a, b, c \in \mathbb{G}$):

$$\begin{array}{ll} a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c & \text{(Assoziativität)} \\ a \circ \varepsilon = a & \text{(Rechtsneutrales Element)} \\ a \circ a' = \varepsilon & \text{(Rechtsinverses Element)} \end{array}$$

Eine abelsche Gruppe erfüllt des weiteren:

$$a \circ b = b \circ a \quad \text{(Kommutativität)}$$

2.1.2 Körper

Ein Körper ist definiert als eine Menge mit mindestens zwei Elementen (0 und 1) und zwei Verknüpfungen.

$$\begin{array}{ll} + : \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \rightarrow \mathbb{K} \\ \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \rightarrow \mathbb{K} \end{array}$$

\mathbb{K} ist bezüglich der Addition und der Multiplikation (genauer: $\mathbb{K} \setminus \{0\}$) ein abelscher Körper, das heißt es gilt (seien $a, b, c \in \mathbb{K}$):

$$\begin{aligned}
 a + (b + c) &= (a + b) + c && \text{(Assoziativität bez. der Addition)} \\
 a + 0 &= a && \text{(Existenz einer 0)} \\
 a + (-a) &= 0 && \text{(Existenz eines Inversen bez. der Addition)} \\
 a + b &= b + a && \text{(Kommutativität bez. der Addition)} \\
 a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c && \text{(Assoziativität bez. der Multiplikation)} \\
 a \cdot 1 &= a && \text{(Existenz einer 1)} \\
 a \cdot a^{-1} &= 1 \quad \forall a \neq 0 && \text{(Existenz eines Inversen bez. der Multiplikation)} \\
 a \cdot b &= b \cdot a && \text{(Kommutativität bezüglich der Multiplikation)}
 \end{aligned}$$

außerdem gilt:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad \text{(Distributivgesetz)}$$

Bemerkung

\mathbb{Q} , \mathbb{R} und \mathbb{C} sind Körper. \mathbb{Z} und \mathbb{N} nicht (kein additiv inverses bei \mathbb{N} , kein multiplikativ inverses bei beiden).

2.1.3 Angeordnete Körper

Ein Körper heißt angeordnet wenn folgende Axiome erfüllt sind (seien $a, b, c \in \mathbb{K}$):

$$\begin{aligned}
 a < b \vee b < a \vee a &= b \\
 a < b \wedge b < c &\Rightarrow a < c \\
 a < b &\Rightarrow a + c < b + c \\
 a < b \wedge c > 0 &\Rightarrow a * c < b * c
 \end{aligned}$$

Bemerkung

\mathbb{Q} und \mathbb{R} sind angeordnete Körper. Für \mathbb{C} kann keine Ordnungsrelation definiert werden so das alle Axiome erfüllt sind.

Gebräuchliche Definition zu angeordneten Körpern

Es gilt $0 < 1$, sonst Widerspruch in (O3).

Die Ordnungsrelation wird dann definiert durch:

$$\begin{aligned}
 2 &:= 1 + 1 \\
 3 &:= 2 + 1 \\
 4 &:= 3 + 1 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Die Natürlichen Zahlen werden Induktiv definiert:

1. $1 \in \mathbb{N}$
2. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n + 1) \in \mathbb{N}$

Bemerkung

Aus 2. lässt sich direkt ableiten das \mathbb{N} nach oben unbeschränkt ist (Archimedisches Prinzip).

Vollständig Angeordnete Körper

Ein Körper heißt Vollständig, falls jede nach oben beschränkte, nicht-leere Teilmenge ein Supremum besitzt.

$\Rightarrow \mathbb{R}$ ist der einzige Vollständig angeordnete Körper.

Bemerkung

\mathbb{Q} ist nicht vollständig angeordnet, da $A := \{x | x^2 \leq 2\} \subset \mathbb{Q}$ kein Supremum besitzt (Supremum ist $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

2.1.4 Minimum und Maximum

Sei \mathbb{K} ein angeordneter Körper und $A \subset \mathbb{K}$ dann heißt m Minimum falls gilt:

1. $m \in \mathbb{K}$
2. $a \geq m \quad \forall a \in A$

Analog ist das Maximum definiert: Sei \mathbb{K} ein angeordneter Körper und $A \subset \mathbb{K}$ dann heißt m Maximum falls gilt:

1. $m \in \mathbb{K}$
2. $a \leq m \quad \forall a \in A$

Schreibweisen: $m = \min(A)$ bzw. $m = \max(A)$

Bemerkung

Minimum und Maximum existieren nicht immer.

Beispiel: $A := \{x | x > 0\} \subset \mathbb{R}$ hat nicht 0 als Minimum da $0 \notin A$ und kein beliebiges m da $\tilde{m} := \frac{m}{2} < m \quad \forall m \in A$

2.1.5 Obere und untere Schranke

Sei \mathbb{K} ein angeordneter Körper und $A \subset \mathbb{K}$ dann ist s untere Schranke falls gilt:

- $s \leq a \quad \forall a \in A$

Analog ist die obere Schranke definiert: Sei \mathbb{K} ein angeordneter Körper und $A \subset \mathbb{K}$ dann ist s obere Schranke falls gilt:

- $s \geq a \quad \forall a \in A$

Bemerkung

Hat eine Menge eine obere (bzw. untere) Schranke heißt er nach oben (bzw. unten) beschränkt. Ist eine Menge nach unten und oben beschränkt bezeichnet man sie als beschränkt.

2.1.6 Supremum und Infimum

s heißt Infimum (größte untere Schranke) falls gilt:

- s ist untere Schranke
- Falls \tilde{s} ebenfalls untere Schranke ist gilt $s \geq \tilde{s}$

Analog ist das Supremum definiert: s heißt Supremum (kleinste obere Schranke) falls gilt:

- s ist obere Schranke
- Falls \tilde{s} ebenfalls obere Schranke ist gilt $s \leq \tilde{s}$

Schreibweise: $s = \inf(A)$ bzw. $s = \sup(A)$

Bemerkung

Wenn Minimum (bzw. Maximum) existieren sind diese gleich dem Infimum (bzw. Supremum).

2.2 Folgen

Eine Folge a_n ist definiert als eine Funktion:

$$a_n := \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{M} \subset \mathbb{R}$$

oder auch $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

2.2.1 Konvergenz

Eine Folge a_n heißt konvergent wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > n_0(\varepsilon)$$

Bemerkung

Der Grenzwert ist eindeutig, d.h. es existiert nur ein Grenzwert.

Schreibweise

Falls a_n gegen a konvergiert schreibt man:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

2.2.2 Bestimmte Divergenz

Eine Folge a_n heißt bestimmt Divergent wenn gilt

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n(x) : a_n > x \text{ bzw. } a_n < x$$

Schreibweise:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ bzw. } -\infty$$

2.2.3 Beschränktheit

Eine Folge heißt beschränkt wenn gilt:

$$|a_n| < c \quad \forall n$$

Beschränktheit nach oben/unten

Eine Folge heißt nach oben (bzw. unten) beschränkt wenn gilt:

$$a_n < c \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ bzw. } a_n > c \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2.2.4 Zusammenhang Konvergenz — Beschränktheit

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

2.2.5 Grenzwertrechenregeln

Seien $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ Folgen in \mathbb{C} mit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

Dann gilt:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- Falls $b \neq 0$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

2.2.6 Sandwich Theorem u.a.

Seien $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty, (c_n)_{n=1}^\infty$ Folgen in \mathbb{R} mit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \text{ und } \gamma \in \mathbb{R}$$

Dann gilt:

- $a_n \leq \gamma \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq \gamma$
- $a_n \geq \gamma \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \geq \gamma$
- $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq b$
- $a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \wedge a = b \Rightarrow c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a = b$

2.2.7 Monotonie

Eine Folge $(a_n)_{n=1}^\infty$ in \mathbb{R} heißt:

- Monoton wachsend falls: $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (Schreibweise: $a_n \nearrow$)
- Monoton fallend falls: $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (Schreibweise: $a_n \searrow$)
- Streng monoton wachsend falls: $a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (Schreibweise: $a_n \uparrow$)
- Streng monoton fallend falls: $a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (Schreibweise: $a_n \downarrow$)

2.2.8 Zusammenhang Monotonie und Beschränktheit

Jede Monotone und beschränkte Folge konvergiert.

2.3 Häufungswerte

Häufungswerte sind Grenzwerte einer Teilfolge.

2.3.1 Teilfolgen

Eine Folge $(b_n)_{n=1}^\infty$ heißt Teilfolge von $(a_n)_{n=1}^\infty$, wenn eine streng monotone Funktion $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ existiert mit $b_n = a_{\varphi(n)}$.

2.3.2 Teilfolgen einer Konvergenten Folge

Sei $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine konvergente Folge in \mathbb{C} mit: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $(b_n)_{n=1}^\infty$ sei eine Teilfolge. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

2.3.3 Häufungswerte

Sei $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge in \mathbb{C} . Dann heißt $a \in \mathbb{C}$ ein Häufungswert einer Folge, falls eine Teilfolge gegen a konvergiert.

2.3.4 Limes superior/inferior

Sei $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine reelle Folge, dann heißt:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \sup\{x \in \mathbb{R}, a_n > x \text{ } \infty\text{-oft}\}$$

der Limes superior von $(a_n)_{n=1}^\infty$ und

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \inf\{x \in \mathbb{R}, a_n < x \text{ } \infty\text{-oft}\}$$

der Limes inferior von $(a_n)_{n=1}^\infty$.

2.3.5 Charakterisierung limsup/liminf

Sei $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine reelle Folge und $s \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(a)

$$s = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt:}$$

i $a_n < s + \varepsilon$ für fast alle n

ii $a_n > s - \varepsilon$ für ∞ -viele n

(b)

$$s = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt:}$$

i $a_n > s - \varepsilon$ für fast alle n

ii $a_n < s + \varepsilon$ für ∞ -viele n

2.3.6 Konvergenz und limsup/liminf

Eine beschränkte Folge $(a_n)_{n=1}^\infty$ in \mathbb{R} konvergiert \Leftrightarrow

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$$

2.3.7 Satz von Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge in \mathbb{C} besitzt eine konvergente Teilfolge.

2.3.8 Cauchy-Kriterium

Sei $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge in \mathbb{C} , dann gilt

$$(a_n)_{n=1}^\infty \text{ konv. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : |a_n - a_m| < \varepsilon \forall n, m > n_0(\varepsilon)$$

Bemerkung

Im Gegensatz zur Definition der Folgenkonvergenz muss der Grenzwert nicht bekannt sein.

2.4 Unendliche Reihen

2.4.1 Definition

Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in \mathbb{C} , dann heißt die durch

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

definiert Folge $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von Partialsummen der unendlichen Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Falls die Folge $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert setzen wir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n =: \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

2.4.2 Cauchy-Kriterium für unendliche Reihen

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine ∞ -Reihe, dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon \quad \forall n, m > n_0(\varepsilon)$$

und:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

2.4.3 Grenzwertrechenregeln für unendliche Reihen

Seien

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} b_k \text{ gegeben und } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

dann gilt:

(a)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} b_k \text{ konv.:} \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) \text{ konv.} \\ \text{und: } \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_k \end{aligned}$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}(a_k) \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im}(a_k) \text{ konv.}$$

(c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Leftrightarrow \text{die Restreihe } R_n := \sum_{k=n}^{\infty} a_k \text{ konv. gegen } 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$$

2.4.4 Positive Folgen

Es sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge mit $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in [0, \infty)$ dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Leftrightarrow \text{Folge der Partialsummen } \sum_{k=1}^n a_k \text{ ist beschr.}$$

2.4.5 Leibniz-Kriterium

Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine monoton fallende, reelle Folge. Dann gilt falls $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ist, konv. die sogenannte alternierende Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

2.4.6 Absolute Konvergenz

Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, wenn

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert.

Bemerkung

Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent.

2.4.7 Majorantenkriterium

Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ mit $b_k \geq 0$ gegeben.
Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konv. und ein $c > 0$ ex. mit

$$|a_k| \leq c \cdot |b_k|$$

für fast alle k , dann konv. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

2.4.8 Minorantenkriterium

Falls ein $c > 0$ ex. mit $a_k \geq c \cdot b_k > 0$ für fast alle k , dann:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ div.} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ div.}$$

2.4.9 Wurzel- und Quotientenkriterium

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ gegeben. Dann gilt:

(a) Wenn

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

gilt, dann konv. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

Wenn

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

gilt, dann div. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

(b) Wenn $a_n \neq 0 \forall n$ und

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

gilt, dann konv. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

Wenn $a_n \neq 0 \forall n$ und

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$$

gilt, dann divergiert. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Bemerkung

Wenn das Wurzelkriterium keine Aussage macht, kann das Quotientenkriterium trotzdem eine Aussage machen.

2.4.10 Umordnung einer Reihe

Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ heißt Umordnung der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, wenn eine bij. Abb $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ex. mit $b_k = a_{\varphi(k)}$.

Bemerkung

Die Reihe konvergiert nur gegen den selben Wert, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent ist.

2.4.11 Cauchy-Produkt

Die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ seien absolut konv.. Dann gilt:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k a_j \cdot b_{k-j} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

und $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konv. ebenfalls absolut.

2.4.12 Cauchy-Verdichtungssatz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ konv.}$$

2.5 Potenzreihen

2.5.1 Definition

Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in \mathbb{C} und $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k$$

eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt z_0 und Koeffizienten a_n .

Bemerkung

Viele wichtige Funktionen können als Potenzreihen dargestellt werden.

2.5.2 Hadamard (Konvergenzradius mit Wurzelkriterium)

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ eine PR. Definiere

$$R := \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Dabei sei $R := \infty$, falls $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ und $R = 0$ falls $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$.

Dann konv. die PR absolut, falls $|z - z_0| < R$ und divergiert falls $|z - z_0| > R$.

Bemerkung I

Für $|z - z_0| = R$ wird keine Aussage gemacht.

Bemerkung II

R heißt der Konvergenzradius der Potenzreihe.

2.5.3 Konvergenzradius mit Quotientenkriterium

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ eine PR. Der Potenzradius kann ebenfalls berechnet werden durch:

$$R = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

2.5.4 Hinweis

Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

2.5.5 Integration und Differentiation von Potenzreihen

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ mit Konvergenzradius R . Dann besitzen auch die Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a_k(z - z_0)^{k-1} \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (z - z_0)^{k+1}$$

den Konvergenzradius R .

2.5.6 Cauchy-Produkt für Potenzreihen

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z - z_0)^k$ Potenzreihen, die den Konvergenzradius R_1 bzw. R_2 besitzen. Dann besitzt

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k \text{ mit } c_k = \sum_{l=0}^k a_l \cdot b_{k-l}$$

den Konvergenzradius $R = \min\{R_1, R_2\}$.

2.5.7 Wichtige Potenzreihen

(a) Die Exponentialfunktion ist definiert durch:

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

(b) Die Trigonometrischen Funktionen sind definiert durch:

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \sin(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \\ \cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \cos(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \end{aligned}$$

(c) Tangens und Cotangens sind dann definiert als:

$$\begin{aligned}\tan : \{z \in \mathbb{C} : \cos(z) \neq 0\} &\rightarrow \mathbb{C} & z \mapsto \tan(z) &:= \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \\ \cot : \{z \in \mathbb{C} : \sin(z) \neq 0\} &\rightarrow \mathbb{C} & z \mapsto \cot(z) &:= \frac{\cos(z)}{\sin(z)}\end{aligned}$$

2.5.8 Alternative Definition der Exponentialfunktion

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp(z)$$

2.6 Funktionsgrenzwerte

2.6.1 Bemerkung

In diesem Intervall bezeichnet I stets ein offenes Intervall und \bar{I} dessen sog. Abschluss z.B.:

- (a) $I = (a, b)$ und $\bar{I} = [a, b]$
- (b) $I = (-\infty, b)$ und $\bar{I} = (-\infty, b]$
- (c) $I = (a, \infty)$ und $\bar{I} = [a, \infty)$
- (d) $I = (\infty, \infty)$ und $\bar{I} = (\infty, \infty)$

2.6.2 Epsilon-Umgebung

Für $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ heißt

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

die ε -Umgebung von x_0 . Und

$$\dot{U}_\varepsilon(x_0) := U_\varepsilon(x_0) \setminus \{0\} = (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$$

die punktierte ε -Umgebung von x_0 .

2.6.3 Funktionsgrenzwerte (über Delta-Epsilon-Kriterium)

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$

- (a) f konv. gegen ein $a \in \mathbb{R}$ für $x \rightarrow x_0$ (kurz: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$) wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : |f(x) - a| < \varepsilon \quad \forall x \text{ mit } |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \text{ und } x \neq x_0$$

Schreibweise:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \text{ oder } f(x) = a \text{ für } x \rightarrow x_0$$

(b) Sei $x_0 \in I$, dann konv. f einseitig von links gegen $a \in \mathbb{R}$ wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : |f(x) - a| < \varepsilon \quad \forall x \in (x_0 - \delta\varepsilon, x_0)$$

Schreibweise:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$$

(c) Sei $x_0 \in I$, dann konv. f einseitig von rechts gegen $a \in \mathbb{R}$ wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : |f(x) - a| < \varepsilon \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta\varepsilon)$$

Schreibweise:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$$

(d) Sei $I = (\alpha, \infty)$ (bzw. $I = (-\infty, \beta)$) dann konv. f gegen a für $x \rightarrow \infty$ (bzw. $x \rightarrow -\infty$) wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_1(\varepsilon) : |f(x) - a| < \varepsilon \quad \forall x \in I : x > x_1(\varepsilon) \text{ (bzw. } x < x_1(\varepsilon))$$

2.6.4 Folgenkriterium

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in \bar{I}, u \in \mathbb{R}$ dann gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \Leftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Für eine beliebige Folge } (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ mit} \\ \text{(i) } x_n \neq x_0 \forall n \\ \text{(ii) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \\ \text{gilt stets:} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a \end{array} \right.$$

2.6.5 Rechenregeln für Funktionsgrenzwerte

Seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$ und gelte

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$$

Dann gilt:

(a)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha \cdot f(x)) = \alpha \cdot a$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) + f(x)) = a + b$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) \cdot f(x)) = a \cdot b$$

(d)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{a}{b} \quad \text{falls } b \neq 0$$

2.6.6 Cauchy-Kriterium für Funktionsgrenzwerte

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$ dann ex. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : |f(x) - f(y)| < \varepsilon \forall x, y \in I \text{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \text{ und } 0 < |y - x_0| < \delta(\varepsilon)$$

2.6.7 Bestimmte Divergenz

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ dann definieren wir die bestimmte Divergenz (uneigentliche Konvergenz) von $(f \rightarrow \infty)$ durch

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall c > 0 \exists \delta(c) : f(x) > c \forall x \text{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta(c)$$

Analog definieren man links- und rechtsseitig Divergenz gegen ∞ bzw. $-\infty$.

2.6.8 Monotone Funktionen

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dann heißt (auf I)

- (a) monoton wachsend ($f \nearrow$), falls gilt

$$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

- (b) streng monoton wachsend ($f \uparrow$), falls gilt

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

- (c) monoton fallend ($f \searrow$), falls gilt

$$x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

- (d) streng monoton fallend ($f \downarrow$)

$$x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

- (e) monoton falls f monoton fallend oder monoton steigend ist

- (f) streng monoton falls f streng monoton fallend oder streng monoton steigend ist

- (g) Beschränkt falls gilt:

$$\exists c : |f(x)| < c \forall x \in I$$

2.6.9 Grenzwerte an Intervallgrenzen

Sei $a \leq b$ und $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ monoton und beschränkt, dann ex.

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \text{ und } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

2.7 Stetigkeit

2.7.1 Anschaulich

Graph einer Funktion kann ohne Absetzen gezeichnet werden \Leftrightarrow

Es gibt keine Sprünge \Leftrightarrow

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ an keiner Stelle $x_0 \in I$ ist ein Sprung \Leftrightarrow

$$\forall x_0 \in I : \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

2.7.2 Stetigkeit: Delta-Epsilon-Kriterium

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$, dann ist f in x_0 stetig falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in I \text{ mit } |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$$

Und f ist stetig (auf I), wenn f in jedem $x_0 \in I$ stetig ist.

2.7.3 Bemerkungen

(a) f ist stetig in $x_0 \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

gilt.

(b) f ist stetig in x_0 dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

2.7.4 Rechenregeln für Stetigkeit

Sind $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann sind auch die Funktionen

(a) $c \cdot f$ (für $c \in \mathbb{R}$)

(b) $f + g$

(c) $f \cdot g$

(d) und falls $g(x) \neq 0 \forall x \in I$ $\frac{f}{g}$

stetig.

Ist $f : I \rightarrow J, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ und beide stetig dann ist auch $g \circ f$ stetig.

2.7.5 Stetigkeit von Potenzreihen

Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$, dann gilt für $x_1 \in U_R(x_0)$, dass $\lim_{x \rightarrow x_1} f(x) = f(x_1)$ (d.h. Potenzreihen sind innerhalb des Konvergenzradius stetig).

2.7.6 Umgebung positiver Funktionswerte

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in x_0 , dann gilt:

$$f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : f(x) > 0 \quad \forall x \in I \text{ mit } |x - x_0| < \delta$$

2.7.7 Zwischenwertsatz

Sei $D = [a, b]$ (also abgeschlossen) und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig dann ex. zu jedem y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.

Genauer:

$$\forall y \in [m, M] \quad \exists x \in [a, b] \text{ mit } f(x) = y$$

Wobei $m = \min\{f(a), f(b)\}$ und $M = \max\{f(a), f(b)\}$.

Bemerkung

Bei einer Funktion ist das Bild eines Intervalls wieder ein Intervall. D.h.

$$f([a, b]) = [c, d]$$

2.7.8 Existenz des Logarithmus

Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ist bijektiv. Das heißt es existiert eine Umkehrfunktion, diese wird $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ genannt.

2.7.9 Maximum/Minimum/Infimum/Supremum einer Funktion

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$, dann heißt im Fall der Existenz:

(a)

$$\max_{x \in D} f(x) := \max_D f(x) := \max\{f(x) \mid x \in D\}$$

das Maximum von f auf D .

(b)

$$\min_{x \in D} f(x) := \min_D f(x) := \min\{f(x) \mid x \in D\}$$

das Minimum von f auf D .

(c)

$$\sup_{x \in D} f(x) := \sup_D f(x) := \sup\{f(x) \mid x \in D\}$$

das Supremum von f auf D .

(d)

$$\inf_{x \in D} f(x) := \inf_D f(x) := \inf\{f(x) \mid x \in D\}$$

das Infimum von f auf D .

2.7.10 Beschränktheit einer stetigen Funktion

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, dann ist f beschränkt. (d.h. $\sup_{[a,b]}(f) < \infty$ und $\inf_{[a,b]}(f) > -\infty$).

2.7.11 Weierstraß: Existenz von Min und Max

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann ex.:

$$\min_{[a,b]} f \text{ und } \max_{[a,b]} f$$

2.7.12 Zusammenhang Injektivität — Stetigkeit

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$f \text{ inj. auf } I \Leftrightarrow f \text{ ist streng monoton}$$

2.7.13 Existenz und Monotonie der Umkehrfunktion

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton auf einem Intervall I . Dann ex. auf $J := f(I)$ die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \rightarrow I$ und diese ist im gleichen Sinn wie f streng Monoton und stetig.

2.7.14 Gleichmäßige Stetigkeit

Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig auf I , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \forall x_1, x_2 \in I \text{ mit } |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$$

Bemerkung

Im Gegensatz zur normalen Stetigkeit wird bei der gleichmäßigen Stetigkeit eine Funktion $\delta(\varepsilon)$ für die ganze Funktion bestimmt und nicht nur für jeden Punkt einzeln (also $\delta(x_0, \varepsilon)$). Es wird also zwischen Stetigkeit in einem Punkt und Stetigkeit auf einem Intervall unterschieden.

Kapitel 3

Differentialrechnung

3.1 Ableitung

3.1.1 Definition Differenzen-Quotient

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt f in $x_0 \in D$ differentierbar, falls

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

für alle $x_0 \in D$ existiert.

3.1.2 Rechtsseitige und linksseitige Ableitung

Im Fall der Existenz heißen

$$\begin{aligned} f'(x_0^+) &:= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ bzw.} \\ f'(x_0^-) &:= \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

die rechts- bzw. linksseitige Ableitung in x_0

Bemerkung

$$f'(x_0) \text{ ex.} \Leftrightarrow f'(x_0^+) \text{ und } f'(x_0^-) \text{ ex. und } f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$$

3.1.3 Ableitungsregeln

Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ differentierbar in $x_0 \in D$, dann gilt:

- (a) $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- (b) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

(c) Falls $g(x_0) \neq 0$: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

3.1.4 Alternative Definition der Ableitung

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. Dann gilt: f differenzierbar in $x_0 \Leftrightarrow$

$\exists A \in \mathbb{R}$ und $r : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\lim_{x \rightarrow x_0} r(x) = 0$ so dass gilt: $f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + r(x) \cdot (x - x_0)$

3.1.5 Zusammenhang Differenzierbarkeit — Stetigkeit

Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D \Rightarrow f$ stetig in x_0

3.1.6 Differentiation von Potenzreihen

Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ eine Potenzreihe mit $R > 0$, dann ist f für x mit $|x - x_0| < R$ differenzierbar, und es gilt:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (x - x_0)^{k-1}$$

Bemerkung

Der Konvergenzradius von $f'(x)$ ist ebenfalls R .

3.1.7 Ableitung der Umkehrfunktion

Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $f : I \rightarrow J$ sei differenzierbar und bijektiv, dann ist auch $f^{-1} : J \rightarrow I$ differenzierbar und es gilt:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{d}{dx} f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \forall y_0 \in J \text{ für ein } y_0 = f(x_0) \text{ und } f'(y_0) \neq 0$$

3.1.8 Kettenregel

Seien $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ mit $A, B \subseteq \mathbb{R}$ differenzierbar auf A bzw. B , dann ist auch $g \circ f$ auf A differenzierbar und es gilt:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \quad \forall x_0 \in A$$

3.2 Mittelwertsätze

3.2.1 Satz von Rolle

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Falls $f(a) = f(b)$ gilt, existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$

3.2.2 Definition lokaler Extrempunkt

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. Dann besitzt f in x_0 ein lokales Maximum (bzw. Minimum): \Leftrightarrow

$$\exists \delta > 0 : f(x) \leq f(x_0) \text{ (bzw. } f(x) \geq f(x_0)) \quad \forall x \in D \cap U_\delta(x_0)$$

3.2.3 Notwendige Bedingung für lokale Extrema

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D$ und x_0 sei kein Randpunkt, dann gilt:
Liegt bei x_0 ein lokales Maximum/Minimum $\Rightarrow f'(x_0) = 0$.

3.2.4 2. Mittelwertsatz

Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) \cdot (g(b) - g(a)) = g'(x_0) \cdot (f(b) - f(a))$$

Bzw. falls nicht durch Null geteilt wird:

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

3.2.5 1. Mittelwertsatz (Folgerung aus 2. Mittelwertsatz)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar

$$\Rightarrow \exists x_0 \in (a, b) \text{ mit } f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

3.2.6 L'Hospital

Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a < b, b \in (\mathbb{R} \cup \infty)$) differenzierbar auf (a, b) mit $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$. Falls der Grenzwert $\alpha = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ex. und:

(a) $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$ oder

(b) $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = \infty$

dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3.2.7 Satz von Taylor

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $n + 1$ mal differentierbar auf (a, b) und $x_0 \in (a, b)$. Dann gilt für ein $\xi \in (x_0, x)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

Teil II

HM 2 — Zusammenfassung

Kapitel 4

Integration

4.1 Integration

4.1.1 Definition Zerlegung, Zwischenwerte

Eine Teilmenge T von $[a, b]$ mit $a, b \in T$ nennt man eine Unterteilung, Zerlegung oder Partitionierung von $[a, b]$ wenn gilt:

$$T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \text{ mit} \\ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

Schreibweise für diese Menge T sei:

$$T : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

Ist T eine Zerlegung, dann heißt:

- (a) Die Zahl $\mu(T) := \max \{ |x_k - x_{k+1}|, k = 1, \dots, n \}$ das Feinheitsmaß von T .
- (b) Ein Vektor $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ heißt ein Zwischenwertvektor zu T , wenn gilt

$$x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k \text{ für } k = 1, \dots, n$$

Dann heißt die Komponente ξ_k ein Zwischenwert von x_{k-1} und x_k .

4.1.2 Definition Riemannsumme

Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $T : a = x_0 < \dots < x_n = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ein Zwischenwertevektor zu T , dann nennen wir die Summe

$$S(f; T, \xi) = S_f(T, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

die Riemansumme von f bezüglich T und ξ .

4.1.3 Definition Riemann-Integral

Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Riemann-Integrierbar unter $[a, b]$ wenn für jede Folge $(T_N)_{N=1}^{\infty}$ von Zerlegungen von $[a, b]$ mit $\mu(T_N) \rightarrow 0$ für $N \rightarrow \infty$ und jede Folge $(\xi_N)_{N=1}^{\infty}$ von Zwischenpunktvektoren der Grenzwert

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S(f; T_N, \xi_N) \text{ existiert.}$$

Behauptung

Der Grenzwert ist im Fall der Existenz für jede Folge identisch.

Bemerkung

(a) Im Fall der Existenz bezeichnet man den Grenzwert durch:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{N \rightarrow \infty} S(f; T_N, \xi_N)$$

(b) Zu $(T_N)_{N=1}^{\infty}$, also T_1, T_2, T_3, \dots :

$$\begin{aligned} T_1 : & \quad a = x_0^{(1)} < \dots < x_n^{(1)} = b \\ T_2 : & \quad a = x_0^{(2)} < \dots < x_n^{(2)} = b \\ T_3 : & \quad a = x_0^{(3)} < \dots < x_n^{(3)} = b \\ & \quad \vdots \\ T_l : & \quad a = x_0^{(l)} < \dots < x_n^{(l)} = b \end{aligned}$$

(c) Zu $(\xi_N)_{N=1}^{\infty}$, also $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_n^{(1)}) \text{ mit } x_{k-1}^{(1)} \leq \xi_k^{(1)} \leq x_k^{(1)} \text{ mit } 1 \leq k \leq n_1 \\ \xi_2 &= (\xi_1^{(2)}, \dots, \xi_n^{(2)}) \text{ mit } x_{k-1}^{(2)} \leq \xi_k^{(2)} \leq x_k^{(2)} \text{ mit } 1 \leq k \leq n_2 \\ \xi_3 &= (\xi_1^{(3)}, \dots, \xi_n^{(3)}) \text{ mit } x_{k-1}^{(3)} \leq \xi_k^{(3)} \leq x_k^{(3)} \text{ mit } 1 \leq k \leq n_3 \\ & \quad \vdots \\ \xi_l &= (\xi_1^{(l)}, \dots, \xi_n^{(l)}) \text{ mit } x_{k-1}^{(l)} \leq \xi_k^{(l)} \leq x_k^{(l)} \text{ mit } 1 \leq k \leq n_l \end{aligned}$$

(d) Sei f integrierbar und $(T_N)_{N=1}^{\infty}$ und $(\xi_N)_{N=1}^{\infty}$ sowie $(\tilde{T}_N)_{N=1}^{\infty}$ und $(\tilde{\xi}_N)_{N=1}^{\infty}$ entsprechende Folgen, d.h. $\mu(T_N) \rightarrow 0, \mu(\tilde{T}_N) \rightarrow 0$ für $N \rightarrow \infty$. Dann gilt für $(\hat{T}_N)_{N=1}^{\infty}$ und $(\hat{\xi}_N)_{N=1}^{\infty}$ mit

$$\hat{T}_N := \begin{cases} T_N & \text{für } N \text{ gerade} \\ \tilde{T}_N & \text{für } N \text{ ungerade} \end{cases}$$

und

$$\hat{\xi}_N := \begin{cases} \xi_N & \text{für } N \text{ gerade} \\ \tilde{\xi}_N & \text{für } N \text{ ungerade} \end{cases}$$

dass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S(f; \hat{T}_N, \hat{S}_N)$$

existiert, da f integrierbar ist.

Dann stimmt der Grenzwert von $\lim_{N \rightarrow \infty} S(f; \tilde{T}_N, \tilde{S}_N)$ und $\lim_{N \rightarrow \infty} S(f; T_N, S_N)$ überein.

4.1.4 Menge der Riemann-Integrierbaren Funktionen

Mit $R[a, b]$ oder $R([a, b])$ bezeichnen wir die Menge von Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ die auf $[a, b]$ Riemann integrierbar sind.

4.1.5 Kriterien für Riemann-Integrierbarkeit

(a)

$$f \in R[a, b] \Rightarrow f \text{ ist auf } [a, b] \text{ beschränkt}$$

(b) Ist $f, g \in R[a, b]$ und $c \in \mathbb{R}$ dann sind auch die Funktionen

$$\begin{array}{rcl} f & + & g \\ f & - & g \\ c & \cdot & f \end{array}$$

Riemann integrierbar auf $[a, b]$.

(c) Ist $f, g \in R[a, b]$, dann ist auch

$$f \cdot g \in R[a, b]$$

(d) Ist $f, g \in R[a, b]$ und falls $|g(x)| > \delta > 0 \forall x \in [a, b]$ dann ist auch

$$\frac{f}{g} \in R[a, b]$$

(e) Für beliebiges $c \in [a, b]$ gilt:

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow f \in R[a, c] \wedge f \in R[c, b]$$

und weiter gilt:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

(f)

$$f \in R[a, b] \Rightarrow |f| \in R[a, b]$$

und

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx$$

4.1.6 Änderung von Funktionen

Wenn $f \in R[a, b]$ ist und durch endlich viele Änderungen daraus $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konstruiert werden kann, d.h.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \notin \{x_1, \dots, x_n\} \\ y_1 & \text{falls } x = x_1 \\ \vdots & \end{cases}$$

dann gilt $g \in R[a, b]$ und

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b g(x) \, dx$$

4.1.7 Zusammenhang Stetigkeit und Integrierbarkeit

Es gilt:

$$f \in C[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$$

4.1.8 Stückweise Integration

Falls $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig ist, d.h. es existieren endlich viele Intervall-Stücke auf denen f stetig ist, dann ist $f \in R[a, b]$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) \, dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) \, dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) \, dx$$

4.1.9 1. Mittelwertsatz der Integralrechnung

Seien $f, g \in R[a, b]$ und $g \geq 0$ auf $[a, b]$. Dann gibt es ein $\mu \in \mathbb{R}$ mit $\inf_{[a,b]} f(x) \leq \mu \leq \sup_{[a,b]} f(x)$ sodass gilt:

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = \mu \int_a^b g(x) \, dx$$

Ist f stetig auf $[a, b]$, dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = f(\xi) \int_a^b g(x) \, dx$$

Bemerkung

Für $g(x) = 1$ und f stetig lautet die Aussage also:

$$\int_a^b f(x) \, dx = f(\xi) \cdot (b - a)$$

4.1.10 Existenz der Stammfunktion

Sei $f \in R[a, b]$, dann ist für jedes $c \in [a, b]$ durch:

$$F(x) := \int_c^x f(t) dt$$

eine stetige Funktion definiert. Und für jedes $x_0 \in (a, b)$ gilt:

$$f \text{ stetig in } x_0 \Rightarrow F \text{ ist differentierbar in } x_0 \wedge F'(x_0) = f(x_0)$$

4.1.11 Definition Stammfunktion

Gilt $F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b]$ dann wird F als Stammfunktion von f bezeichnet.

4.1.12 Eindeutigkeit der Stammfunktion

Sind F und G Stammfunktionen von f , dann existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = G(x) + c \quad \forall x \in [a, b]$$

4.1.13 Hauptsatz der Differential und Integralrechnung

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben dann gilt:

(a) Ist $f \in R[a, b]$ und F eine Stammfunktion, dann gilt:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b$$

(b) Ist $f \in C[a, b]$ dann existiert eine Stammfunktion und zwar

$$F(x) := \int_c^x f(t) dt$$

Bemerkung

Aus dem Hauptsatz folgen Integrationstechniken wie partielles Integrieren oder die Substitutionsregel.

4.1.14 Zusammenhang Monotonie und Riemann-Integrierbarkeit

Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ monoton, dann ist $f \in R[a, b]$.

4.1.15 Zweiter Mittelwertsatz der Integralrechnung

Ist f monoton auf $[a, b]$, g integrierbar auf $[a, b]$, dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit:

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = f(a) \int_a^\xi g(x) \, dx + \int_\xi^b g(x) \, dx$$

Kapitel 5

Uneigentliche Integrale

5.1 Definition uneigentliches Integral

Eine Funktion $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $a < b \leq \infty$ heißt über $[a, b)$ uneigentlich Riemann integrierbar, wenn gilt:

(a) $\forall c$ mit $a \leq c < b$ ist $f \in R[a, c]$

(b) Der Grenzwert

$$\alpha = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c f(x) \, dx$$

existiert. In dem Fall schreiben wir

$$\alpha = \int_a^b f(x) \, dx$$

und sagen das uneigentliche Integral

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

konvergiert gegen α oder hat den Wert α .

Andernfalls divergiert das uneigentliche Integral. Analog geht man für Funktionen

- $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $-\infty \leq a < b$ und
- $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$

vor.

5.1.1 Cauchy-Kriterium

Sei $f \in R[a, b]$ $\forall c \in (a, b)$, $a < c \leq \infty$ Dann konv.

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

(a) Im Fall $b < \infty$ genau dann, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \left| \int_{T_1}^{T_2} f(x) \, dx \right| < \varepsilon \, \forall T_1, T_2 \in [b - \delta, b)$$

(b) Im Fall $b = \infty$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists K \geq a : \left| \int_{T_1}^{T_2} f(x) \, dx \right| < \varepsilon \, \forall T_1, T_2 \geq K$$

Teil III

Beweisansätze

5.2 HM 1

5.2.1 Eindeutigkeit des Grenzwert einer Folge

Zeige, dass Grenzwert a = Grenzwert b , nahrhafte 0

5.2.2 Konvergente Folgen sind beschränkt

Nahrhafte 0, Dreiecks-ugl.

5.2.3 Grenzwertrechenregeln

Nahrhafte 0, Dreiecks-ugl. $a_n \leq \gamma \forall n \Rightarrow a \leq \gamma$ Ausgehend von a über nahrh. 0 zu Def Konvergenz $a_n \leq b_n \forall n \Rightarrow a \leq b$ Definiere Hilfsfolge, argumentiere nach s.o Sandwich-Theorem Zeige, dass $-\varepsilon < c_n < \varepsilon$ (Quasi Epsilon-Schlauch)

5.2.4 Monotoniekriterium

Da $|a_n| < c \forall n$, argumentiere über das Supremum der Menge, die aus a_n besteht

5.2.5 Grenzwert einer konv. Folge = Grenzwert jeder Teilfolge

Def. Konvergenz + Def Teilfolge

5.2.6 Charakterisierung $\overline{\lim}$ und $\underline{\lim}$

Argumentiere über Eigenschaften \sup und \inf

5.2.7 Folge konv. $\overline{\lim} = \underline{\lim}$

Hin: Eindeutigkeit des Grenzwert; Rück: Charakterisierung \limsup und \liminf

5.2.8 Bolzano-Weierstraß

Zunächst für reelle Folge (trivial), dann für komplex: Realteil ist klar, Imaginärteil: Teilfolge konstruieren

5.2.9 Cauchy Kriterium

Hin: nahrhafte 0; Rück: zeige Beschränktheit, dann folge daraus, dass ein Häufungswert existiert und benutze diesen als Grenzwert-Kandidat

5.2.10 Reihe konv. Folge ist Nullfolge

Cauchy für Reihen

5.2.11 GrenzwertRR für Reihen

GrenzwertRR für Folgen

5.2.12 Reihe konv g. 0

Restreihe als Differenz darstellen

5.2.13 Leibniz

Cauchy für Reihen

5.2.14 Absolut konv. \Rightarrow konv.

Cauchy und Dreiecks-ugl.

5.2.15 Majorantenkriterium

Cauchy

5.2.16 Minorantenkriterium

Kontradiktion von Majorantenkriterium

5.2.17 Wurzelkriterium

Majorantenkrit: geom. Summe über $Q := q + \varepsilon < 1$, in q das Wurzelkriterium einsetzen, Charakterisierung $\overline{\lim}$

5.2.18 Quotientenkriterium

Majorantenkrit: setze in q das Quotientenkriterium ein und Argumentation über \lim

5.2.19 Hadamard

Wurzelkriterium+ Fallunterscheidung für Sonderfälle

5.2.20 Differenzieren / Integrieren von Potenzreihen

Wurzelkriterium

5.2.21 Lemma zu sin, cos und exp

Cauchy-Produkt + Definitionen

5.2.22 $e^z \neq 0$ und $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$

Inverses Element der Multiplikation

5.2.23 Pythagoras

3. binomische Formel

5.2.24 $e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Betrachte $x \geq 0$, angeordneter Körper

5.2.25 $1 + x \leq e^x \ \forall x \in \mathbb{R}$

Bernoulli

5.2.26 $x < y \Rightarrow e^x < e^y$

nährhafte 0

5.2.27 Folgenkriterium

Hin: Def. Folgenkonv. und dann Def Funktionsgrenzwert einsetzen; Rück: Wähle versch. δ und zeige Widerspruch

5.2.28 Cauchy für Funktionen

Hin: Def. FunktionsGrenzwert + Nährhafte 0; Rück: Cauchy für Folgen

5.2.29 Grenzwerte an Intervallgrenzen

Argumentiere über Supremum / Infimum

5.2.30 Verknüpfungen stetiger Funktionen stetig

Folgenkriterium

5.2.31 Potenzreihen sind innerhalb des Konvergenzradius stetig

Abschätzung: $\exists r > 0 : |x - x_0| \text{ bzw. } |x_1| \leq r$, dann einfach $|f(x) - f(x_1)|$ nach oben abschätzen

5.2.32 Umgebung pos. Funktionswerte

Wähle $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$, Def. Stetigkeit

5.2.33 Zwischenwertsatz

Definiere $x_0 := \sup\{x \in [a, b] : f(x) \leq y\}$ und zwei Hilfsfolgen, die gegen x_0 konvergieren

5.2.34 Existenz \log

Zeigen \exp ist bijektiv (Zwischenwertsatz)

5.2.35 Beschränktheit stetiger Funktionen

Annahme f nicht beschränkt Folgenkriterium

5.2.36 Weierstraß existenz \min bzw. \max

Zeigen das $\sup = \max$

5.3 HM 2

Teil IV

Appendix

Kapitel 6

Grenzwerte

6.1 Konvergenzkriterien

Zusammenfassung verschiedener Konvergenzkriterien nach Wikipedia (Seite: Konvergenzkriterium):

Kriterium	nur f. mon. F.	Konv.	Div.	abs. Konv.	Absch.	Fehlerabsch.
Nullfolgenkriterium			x			
Monotoniekriterium		x		x		
Leibniz-Kriterium	x	x			x	x
Cauchy-Kriterium		x	x			
Abel-Kriterium	x	x				
Dirichlet-Kriterium	x	x				
Majorantenkriterium		x		x		
Minorantenkriterium			x			
Wurzelkriterium		x	x	x		x
Integralkriterium	x	x	x	x	x	
Cauchy-Kriterium	x	x	x	x		
Grenzwertkriterium		x	x			
Quotientenkriterium		x	x	x		x
Gauß-Kriterium		x	x	x		
Raabe-Kriterium		x	x	x		
Kummer-Kriterium		x	x	x		
Bertrand-Kriterium		x	x	x		
Ermakoff-Kriterium	x	x	x	x		