Teoria da Computação

Autômatos de Pilha e LLCs

Aula 08

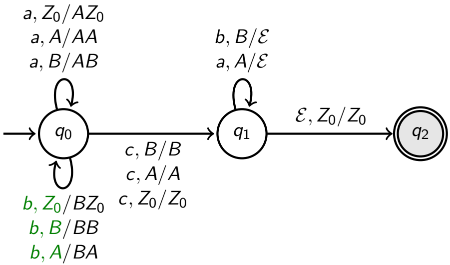
Prof. Felipe A. Louza

UFU

Roteiro

Na aula anterior

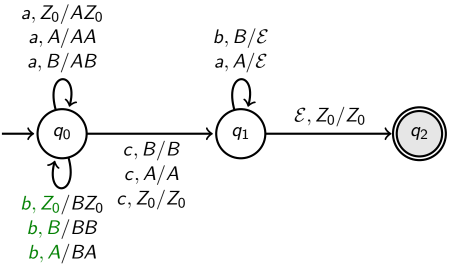
Vimos um AP para a linguagem $L_1 = \{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$



- Esse é um **AP determinístico**.

Na aula anterior

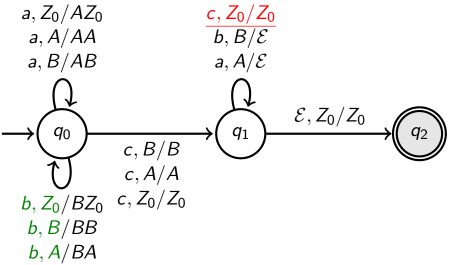
Vimos um AP para a linguagem $L_1 = \{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$



- Esse é um **AP determinístico**.
  1. $\delta(q_i, a, X)$ tem no máximo 1 elemento $\{(q_j, \gamma)\}$, para $a \in (\Sigma \cup \mathcal{E})$.
  2. Se $\delta(q_i, a, X)$ é não vazio para $a \in \Sigma$, então $\delta(q_i, \mathcal{E}, X)$ deve ser vazio.

Na aula anterior

Vimos um AP para a linguagem $L_1 = \{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$



- Esse é um **AP determinístico**.
  1. $\delta(q_i, a, X)$ tem no máximo 1 elemento $\{(q_j, \gamma)\}$, para $a \in (\Sigma \cup \mathcal{E})$.
  2. Se $\delta(q_i, a, X)$ é não vazio para $a \in \Sigma$, então $\delta(q_i, \mathcal{E}, X)$ deve ser vazio.

AP determinístico

Outra forma de identificar um AP determinístico:

w_i / pilha	a: Z_0	a: A	a: B	b: Z_0	b: A	b: B	c: Z_0	c: A	c: B	$\mathcal{E}$: Z_0	$\mathcal{E}$: A	$\mathcal{E}$: B
q_0	$\{(q_0, AZ_0)\}$	$\{(q_0, AA)\}$	$\{(q_0, AB)\}$	$\{(q_0, A)\}$	$\{(q_0, BA)\}$	$\{(q_0, BB)\}$	$\{(q_1, Z_0)\}$	$\{(q_1, A)\}$	$\{(q_1, B)\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
q_1	$\varnothing$	$\{(q_1, \mathcal{E})\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{(q_1, \mathcal{E})\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{(q_2, Z_0)\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
q_2	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

Figura: Tabela de transições

As células correspondentes às colunas $\mathcal{E}$ nunca sobrepõem o que foi definido nas células das colunas dos outros símbolos de entrada.

Relembrando...

Para **AFs** o não-determinismo não adiciona poder de reconhecimento aos autômatos, ou seja:

- AFDs reconhecem as mesmas linguagens que AFNs, que são as **Linguagens Regulares**.
- É possível converter: AFD $\leftrightarrows$ AFN.

Não-determinismo

O mesmo não é verdade para os **APs**:

- O não-determinismo é importante e necessário, pois aumenta o poder de reconhecimento dos APs.
- Existem linguagens[1] que podem ser aceitas por **AP não-determinísticos** e não podem por AP determinísticos.

[1] Vamos ver que essas são as LLCs.

Não-determinismo

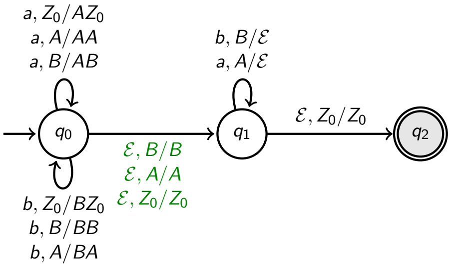
O mesmo não é verdade para os **APs**:

- O não-determinismo é importante e necessário, pois aumenta o poder de reconhecimento dos APs.
- Existem linguagens[1] que podem ser aceitas por **AP não-determinísticos** e não podem por AP determinísticos.

[1] Vamos ver que essas são as LLCs.

Exemplo

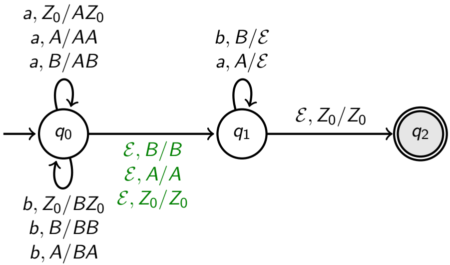
A linguagem $L_2 = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$ só pode ser reconhecida por uma AP (não determinístico).



- O AP "*advinha*" quando chegou no meio da cadeia w, e passa a desempilhar os símbolos.
  - Na verdade, todas as possibilidades de transição, a partir de (q_0, w, Z_0) são testadas.

Exemplo

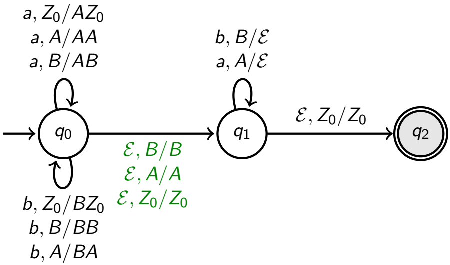
A linguagem $L_2 = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$ só pode ser reconhecida por uma AP (não determinístico).



- O AP "*advinha*" quando chegou no meio da cadeia w, e passa a desempilhar os símbolos.
  - Na verdade, todas as possibilidades de transição, a partir de (q_0, w, Z_0) são testadas.

Exemplo

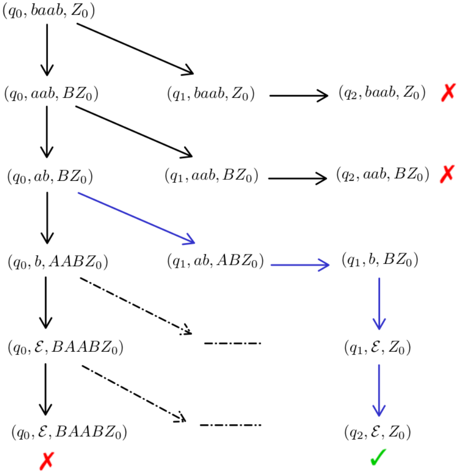
A linguagem $L_2 = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$ só pode ser reconhecida por uma AP (não determinístico).



- O AP "*advinha*" quando chegou no meio da cadeia w, e passa a desempilhar os símbolos.
  - Na verdade, todas as possibilidades de transição, a partir de (q_0, w, Z_0) são testadas.

Exemplo

Considere $L_2 = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$ e $w = baab$:



Pelo menos um caminho assume um estado final, com pilha Z_0, ao processar w.

Exemplo

Nesse exemplo:

w_i pilha	a: Z_0	a: A	a: B	b: Z_0	b: A	b: B	$\mathcal{E}$: Z_0	$\mathcal{E}$: A	$\mathcal{E}$: B
q_0	$\{(q_0, AZ_0)\}$	$\{(q_0, AA)\}$	$\{(q_0, AB)\}$	$\{(q_0, A)\}$	$\{(q_0, BA)\}$	$\{(q_0, BB)\}$	$\{(q_1, Z_0)\}$	$\{(q_1, A)\}$	$\{(q_1, B)\}$
q_1	$\varnothing$	$\{(q_1, \mathcal{E})\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{(q_1, \mathcal{E})\}$	$\{(q_2, Z_0)\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
q_2	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

Figura: Tabela de transições

As células correspondentes às colunas $\mathcal{E}$ sobrepõem o que foi definido nas células das colunas das entradas.

Não determinismo

A **prova** de que a linguagem L_2 e outras **não podem** ser aceitas por nenhum AP determinístico é complexa, mas a intuição é transparente.

$$L_2 = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

AP determinísticos

AP determinísticos (APD) são importantes em muitas aplicações[2].

- Isso porque todas as linguagens aceitas por APD têm Gramáticas Não-Ambiguas.
  - As derivações (mais à esquerda) que levam a cadeias da linguagem **são únicas**.

Mas nem todas as linguagens não-inerentemente ambíguas podem ser aceitas pelos APD.

[2] Ex: Compiladores (análise sintática)

AP determinísticos

AP determinísticos (APD) são importantes em muitas aplicações[2].

- Isso porque todas as linguagens aceitas por APD têm Gramáticas Não-Ambiguas.
  - As derivações (mais à esquerda) que levam a cadeias da linguagem **são únicas**.

Mas nem todas as linguagens não-inerentemente ambíguas podem ser aceitas pelos APD.

[2] Ex: Compiladores (análise sintática)

AP determinísticos

Além disso, é fácil ver que o conjunto das linguagens aceitas pelos APD incluí as **Linguagens Regulares**.

Teorema

Se L é uma **LR**, então $L = L(P)$ para algum APD P.

AP determinísticos

Além disso, é fácil ver que o conjunto das linguagens aceitas pelos APD incluí as **Linguagens Regulares**.

Teorema

Se L é uma **LR**, então $L = L(P)$ para algum APD P.

AP determinísticos

Prova:

- Em essência, um APD pode "simular" um Autômato Finito Determinístico (AFD) ignorando a sua pilha.
  - Considere $M = (Q, \Sigma, \delta, F)$, então:

$$P = (Q, \Sigma, \{Z_0\}, \delta_P, q_0, Z_0, F)$$

  - $\delta_p(q, a, Z_0) = (p, Z_0)$, para todo $p, q \in Q$ e $\delta(q, a) = p$
  - Portanto,

$$(q_0, w, Z_0) \Rightarrow^* (p, \mathcal{E}, Z_0) \iff \delta^*(q, w) = p$$

- Ou seja, o APD utiliza apenas o controle de estados finitos.

A prova em ambos os sentidos são induções fáceis sobre $|w|$.

AP determinísticos

Prova:

- Em essência, um APD pode "simular" um Autômato Finito Determinístico (AFD) ignorando a sua pilha.
  - Considere $M = (Q, \Sigma, \delta, F)$, então:

$$P = (Q, \Sigma, \{Z_0\}, \delta_P, q_0, Z_0, F)$$

  - $\delta_p(q, a, Z_0) = (p, Z_0)$, para todo $p, q \in Q$ e $\delta(q, a) = p$
  - Portanto,

$$(q_0, w, Z_0) \Rightarrow^* (p, \mathcal{E}, Z_0) \iff \delta^*(q, w) = p$$

- Ou seja, o APD utiliza apenas o controle de estados finitos.

A prova em ambos os sentidos são induções fáceis sobre $|w|$.

AP determinísticos

Prova:

- Em essência, um APD pode "simular" um Autômato Finito Determinístico (AFD) ignorando a sua pilha.
  - Considere $M = (Q, \Sigma, \delta, F)$, então:

$$P = (Q, \Sigma, \{Z_0\}, \delta_P, q_0, Z_0, F)$$

  - $\delta_p(q, a, Z_0) = (p, Z_0)$, para todo $p, q \in Q$ e $\delta(q, a) = p$
  - Portanto,

$$(q_0, w, Z_0) \Rightarrow^* (p, \mathcal{E}, Z_0) \iff \delta^*(q, w) = p$$

- Ou seja, o APD utiliza apenas o controle de estados finitos.

A prova em ambos os sentidos são induções fáceis sobre $|w|$.

AP determinísticos

Prova:

- Em essência, um APD pode "simular" um Autômato Finito Determinístico (AFD) ignorando a sua pilha.
  - Considere $M = (Q, \Sigma, \delta, F)$, então:

$$P = (Q, \Sigma, \{Z_0\}, \delta_P, q_0, Z_0, F)$$

  - $\delta_p(q, a, Z_0) = (p, Z_0)$, para todo $p, q \in Q$ e $\delta(q, a) = p$
  - Portanto,

$$(q_0, w, Z_0) \Rightarrow^* (p, \mathcal{E}, Z_0) \iff \delta^*(q, w) = p$$

- Ou seja, o APD utiliza apenas o controle de estados finitos.

A prova em ambos os sentidos são induções fáceis sobre $|w|$.

AP determinísticos

Prova:

- Em essência, um APD pode "simular" um Autômato Finito Determinístico (AFD) ignorando a sua pilha.
  - Considere $M = (Q, \Sigma, \delta, F)$, então:

$$P = (Q, \Sigma, \{Z_0\}, \delta_P, q_0, Z_0, F)$$

  - $\delta_p(q, a, Z_0) = (p, Z_0)$, para todo $p, q \in Q$ e $\delta(q, a) = p$
  - Portanto,

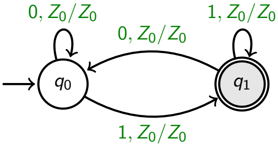
$$(q_0, w, Z_0) \Rightarrow^* (p, \mathcal{E}, Z_0) \iff \delta^*(q, w) = p$$

- Ou seja, o APD utiliza apenas o controle de estados finitos.

A prova em ambos os sentidos são induções fáceis sobre $|w|$.

Exemplo

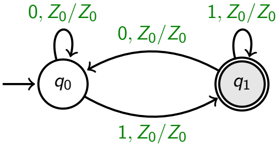
A linguagem $L_3 = \{w \mid w \text{ termina com } 1 \text{ e } w \in \{0,1\}^*\}$ pode ser reconhecida pelo seguinte uma APD.



- O APD "*simula*" o AF ignorando a sua pilha.

Exemplo

A linguagem $L_3 = \{w \mid w \text{ termina com } 1 \text{ e } w \in \{0,1\}^*\}$ pode ser reconhecida pelo seguinte uma APD.



- O APD "*simula*" o AF ignorando a sua pilha.

AP determinísticos

Qual é a classe de linguagens aceitas pelos APD?

- Linguagens Regulares
- Vimos também Linguagens Não-Regulares que podem ser aceitas por APDs
- Por outro lado, existem LLC como [illegible] que não podem ser aceitas por um APD.

Podemos mostrar que $L_1 = \{wcw^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$ não é regular pelo [illegible] bombeamento p/ LRs.

AP determinísticos

Qual é a classe de linguagens aceitas pelos APD?

- Linguagens Regulares ✓
- Vimos também Linguagens Não-Regulares que podem ser aceitas por APDs
- Por outro lado, existem LLC como $L_2 = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$ que não podem ser aceitas por um APD.

Podemos mostrar que $L_1 = \{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$ não é regular pelo lema do bombemanto p/ LRs.

AP determinísticos

Qual é a classe de linguagens aceitas pelos APD?

- Linguagens Regulares ✓
- Vimos também Linguagens Não-Regulares que podem ser aceitas por APDs
- Por outro lado, existem LLC como $L_2 = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$ que não podem ser aceitas por um APD.

Podemos mostrar que $L_1 = \{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$ não é regular pelo lema do bombemanto p/ LRs.

AP determinísticos

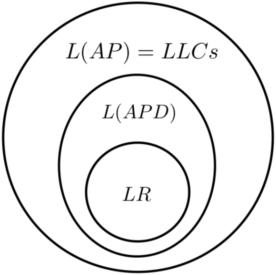
Qual é a classe de linguagens aceitas pelos APD?

- Linguagens Regulares ✓
- Vimos também Linguagens Não-Regulares que podem ser aceitas por APDs
- Por outro lado, existem LLC como $L_2 = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$ que não podem ser aceitas por um APD.

Podemos mostrar que $L_1 = \{wcw^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$ não é regular pelo lema do bombemanto p/ LRs.

AP determinísticos

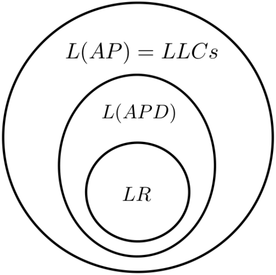
Dessa forma, podemos dizer que a classe de linguagens aceitas pelos APD incluem as **LRs**, mas não todas as LLCs:



- Agora, vamos ver que $L(AP) = LLCs$.

AP determinísticos

Dessa forma, podemos dizer que a classe de linguagens aceitas pelos APD incluem as **LRs**, mas não todas as LLCs:



- Agora, vamos ver que $L(AP) = LLCs$.

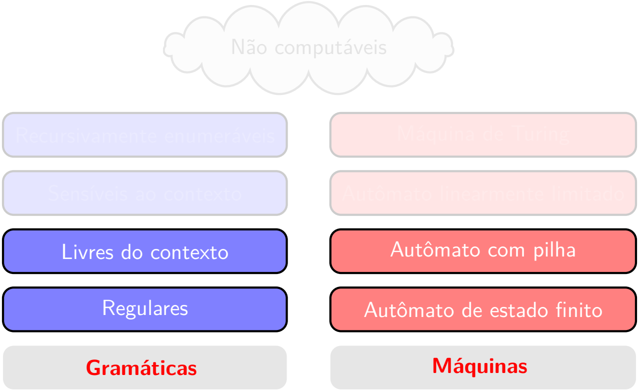
Roteiro

Equivalência entre APs e GLCs

Vamos ver que os **APs** e as **GLCs** são equivalentes em poder.

- Ambos são capazes de reconhecer/descrever as LLCs.

Equivalência entre APs e GLCs



GLC: restrições nas regras de produção menores do que nas GR.

Roteiro

1. Não-determinismo
2. Equivalência entre APs e GLCs
   - De GLCs para APs
   - De APs para GLCs
3. Lema do Bombeamento para as LLCs
4. Referências

GLCs $\rightarrow$ APs

Teorema

Se L é uma linguagem gerada por uma **GLC** G, então existe um **AP** P_F que reconhece L, ou seja,

$$L(P_F) = L$$

Vamos ver um procedimento para converter uma **GLC** G em um **AP**:

- Vamos assumir que G está na Forma Normal de Greibach (FNG)[2]

[2] Sempre existe uma GLC equivalente na FNG

GLCs $\rightarrow$ APs

Teorema

Se L é uma linguagem gerada por uma **GLC** G, então existe um **AP** P_F que reconhece L, ou seja,

$$L(P_F) = L$$

Vamos ver um procedimento para converter uma **GLC** G em um **AP**:

Vamos assumir que G está na Forma Normal de Greibach (FNG)[1]

[1] Sempre existe uma GLC equivalente na FNG

GLCs $\rightarrow$ APs

Teorema

Se L é uma linguagem gerada por uma **GLC** G, então existe um **AP** P_F que reconhece L, ou seja,

$$L(P_F) = L$$

Vamos ver um procedimento para converter uma **GLC** G em um **AP**:

- Vamos assumir que G está na Forma Normal de Greibach (FNG)[3].

[3] Sempre existe uma GLC equivalente na FNG

Relembrando...

Definição

Uma **GLC** $G = (V, \Sigma, P, S)$ está na Forma Normal de Greibach (FNG) quando todas as regras de produção são da forma:

$$A \rightarrow a\alpha$$

para $A \in V$, $a \in \Sigma$ e $\alpha \in V^*$

Caso particular:

- Quando $\mathcal{E} \in L(G)$ permite-se $S \rightarrow \mathcal{E}$, e $S \notin \alpha$

Exemplo

Considere: $L(G) = \{a^n b^n \mid n > 0\}$

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P: \quad S \rightarrow \mathbf{a}S\mathbf{b} \mid \mathbf{ab}$$

$$G_{FNG} = (\{S, B\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P: \quad S \rightarrow \mathbf{a}SB \mid \mathbf{a}B$$
$$B \rightarrow \mathbf{b}$$

Derivações: *aaabbb*

$$S \Rightarrow aSB \Rightarrow aaSBB \Rightarrow aaaBBB \Rightarrow aaabBB \Rightarrow aaabbB \Rightarrow aaabbb$$

FNG: $A \rightarrow a\alpha$ com $A \in V$, $a \in \Sigma$ e $\alpha \in V^*$

Exemplo

Considere: $L(G) = \{a^n b^n \mid n > 0\}$

$G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$

$P: \quad S \rightarrow \mathbf{a}S\mathbf{b} \mid \mathbf{ab}$

$G_{FNG} = (\{S, B\}, \{a, b\}, P, S)$

$$P: \quad \begin{array}{l} S \rightarrow \mathbf{a}SB \mid \mathbf{a}B \\ B \rightarrow \mathbf{b} \end{array}$$

Derivações: $aaabbb$

$$S \Rightarrow aSB \Rightarrow aaSBB \Rightarrow aaaBBB \Rightarrow aaabBB \Rightarrow aaabbB \Rightarrow aaabbb$$

FNG: $A \rightarrow a\alpha$ com $A \in V$, $a \in \Sigma$ e $\alpha \in V^*$

Exemplo

Considere: $L(G) = \{a^n b^n \mid n > 0\}$

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P: \quad S \to \mathbf{a}S\mathbf{b} \mid \mathbf{ab}$$

$$G_{FNG} = (\{S, B\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P: \quad S \to \mathbf{a}SB \mid \mathbf{a}B$$
$$B \to \mathbf{b}$$

Derivações: *aaabbb*

$$S \Rightarrow aSB \Rightarrow aaSBB \Rightarrow aaaBBB \Rightarrow aaabBB \Rightarrow aaabbB \Rightarrow aaabbb$$

FNG: $A \to a\alpha$ com $A \in V$, $a \in \Sigma$ e $\alpha \in V^*$

Exemplo

Considere: $L(G) = \{a^n b^n \mid n > 0\}$

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P: \quad S \to \mathbf{a}S\mathbf{b} \mid \mathbf{ab}$$

$$G_{FNG} = (\{S, B\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P: \quad \begin{array}{l} S \to \mathbf{a}SB \mid \mathbf{a}B \\ B \to \mathbf{b} \end{array}$$

Derivações: *aaabbb*

$$S \Rightarrow aSB \Rightarrow aaSBB \Rightarrow aaaBBB \Rightarrow aaabBB \Rightarrow aaabbB \Rightarrow aaabbb$$

FNG: $A \to a\alpha$ com $A \in V$, $a \in \Sigma$ e $\alpha \in V^*$

Exemplo

Considere: $L(G) = \{a^n b^n \mid n > 0\}$

$G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$

$P: \quad S \to \mathbf{a}S\mathbf{b} \mid \mathbf{ab}$

$G_{FNG} = (\{S, B\}, \{a, b\}, P, S)$

$P: \quad S \to \mathbf{a}SB \mid \mathbf{a}B$
$\quad\quad B \to \mathbf{b}$

Derivações: *aaabbb*

$$S \Rightarrow aSB \Rightarrow aaSBB \Rightarrow aaaBBB \Rightarrow aaabBB \Rightarrow aaabbB \Rightarrow aaabbb$$

FNG: $A \to a\alpha$ com $A \in V$, $a \in \Sigma$ e $\alpha \in V^*$

Exemplo

Considere: $L(G) = \{a^n b^n \mid n > 0\}$

$G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$

$P: \quad S \rightarrow \mathbf{a}S\mathbf{b} \mid \mathbf{ab}$

$G_{FNG} = (\{S, B\}, \{a, b\}, P, S)$

$$P: \quad \begin{array}{l} S \rightarrow \mathbf{a}SB \mid \mathbf{a}B \\ B \rightarrow \mathbf{b} \end{array}$$

Derivações: *aaabbb*

$$S \Rightarrow aSB \Rightarrow aaSBB \Rightarrow aaaBBB \Rightarrow aaabBB \Rightarrow aaabbB \Rightarrow aaabbb$$

FNG: $A \rightarrow a\alpha$ com $A \in V$, $a \in \Sigma$ e $\alpha \in V^*$

Exemplo

Considere: $L(G) = \{a^n b^n \mid n > 0\}$

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P: \quad S \to \mathbf{a}S\mathbf{b} \mid \mathbf{ab}$$

$$G_{FNG} = (\{S, B\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P: \quad \begin{array}{l} S \to \mathbf{a}SB \mid \mathbf{a}B \\ B \to \mathbf{b} \end{array}$$

Derivações: *aaabbb*

$$S \Rightarrow aSB \Rightarrow aaSBB \Rightarrow aaaBBB \Rightarrow aaabBB \Rightarrow aaabbB \Rightarrow aaabbb$$

FNG: $A \to a\alpha$ com $A \in V$, $a \in \Sigma$ e $\alpha \in V^*$

Exemplo

Considere: $L(G) = \{a^n b^n \mid n > 0\}$

$G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$

$P: \quad S \rightarrow \mathbf{a}S\mathbf{b} \mid \mathbf{ab}$

$G_{FNG} = (\{S, B\}, \{a, b\}, P, S)$

$P: \quad S \rightarrow \mathbf{a}SB \mid \mathbf{a}B$
$\quad\quad B \rightarrow \mathbf{b}$

Derivações: *aaabbb*

$$S \Rightarrow aSB \Rightarrow aaSBB \Rightarrow aaaBBB \Rightarrow aaabBB \Rightarrow aaabbB \Rightarrow aaabbb$$

FNG: $A \rightarrow a\alpha$ com $A \in V$, $a \in \Sigma$ e $\alpha \in V^*$

Exemplo

Considere: $L(G) = \{a^n b^n \mid n > 0\}$

$G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$

$P: \quad S \rightarrow \mathbf{a}S\mathbf{b} \mid \mathbf{ab}$

$G_{FNG} = (\{S, B\}, \{a, b\}, P, S)$

$P: \quad S \rightarrow \mathbf{a}SB \mid \mathbf{a}B$
$\quad\quad\; B \rightarrow \mathbf{b}$

Derivações: *aaabbb*

$$S \Rightarrow aSB \Rightarrow aaSBB \Rightarrow aaaBBB \Rightarrow aaabBB \Rightarrow aaabbB \Rightarrow aaabbb$$

FNG: $A \rightarrow a\alpha$ com $A \in V$, $a \in \Sigma$ e $\alpha \in V^*$

GLCs $\rightarrow$ APs

Ideia do procedimento:

O **AP** P_F que vamos construir *"simula"* as derivações mais à esquerda da gramática G_{FNG}:

Para cada produção $A \to a\alpha$, o AP:

GLCs $\to$ APs

Ideia do procedimento:

O **AP** P_F que vamos construir *"simula"* as derivações mais à esquerda da gramática G_{FNG}:

- Para cada produção $A \to a\alpha$, o AP:
  1. ler o símbolo a em w;
  2. ler o símbolo A da pilha; e
  3. empilhar a palavra α.

GLCs $\rightarrow$ APs

Ideia do procedimento:

O **AP** P_F que vamos construir *"simula"* as derivações mais à esquerda da gramática G_{FNG}:

- Para cada produção $A \rightarrow a\alpha$, o AP:
  1. ler o símbolo a em w;
  2. ler o símbolo A da pilha; e
  3. empilhar a palavra α.

GLCs $\rightarrow$ APs

Ideia do procedimento:

O **AP** P_F que vamos construir *"simula"* as derivações mais à esquerda da gramática G_{FNG}:

- Para cada produção $A \rightarrow a\alpha$, o AP:
  1. ler o símbolo a em w;
  2. ler o símbolo A da pilha; e
  3. empilhar a palavra α.

GLCs $\rightarrow$ APs

Ideia do procedimento:

O **AP** P_F que vamos construir *"simula"* as derivações mais à esquerda da gramática G_{FNG}:

- Para cada produção $A \rightarrow a\alpha$, o AP:
  1. ler o símbolo a em w;
  2. ler o símbolo A da pilha; e
  3. empilhar a palavra α.

GLCs $\rightarrow$ APs

Procedimento:

Seja $G = (V, \Sigma, S, P)$ uma **GLC** na FNG.

GLCs $\rightarrow$ APs

Procedimento:

Seja $G = (V, \Sigma, S, P)$ uma **GLC** na FNG.

- Definimos $P_F = (\{q_0, q_1, q_f\}, \Sigma, V \cup \{Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_f\})$, com δ:
    1. $\delta(q_0, \mathcal{E}, Z_0) = \{(q_1, SZ_0)\}$
    2. para cada $A \rightarrow a\alpha$ em P, definimos: $\delta(q_1, a, A) = \{(q_1, \alpha), \dots\}$
    3. $\delta(q_1, \mathcal{E}, Z_0) = \{(q_f, Z_0)\}$

Ou seja, ao ler a, desempilha A, e empilha o α.

GLCs $\rightarrow$ APs

Procedimento:

Seja $G = (V, \Sigma, S, P)$ uma **GLC** na FNG.

- Definimos $P_F = (\{q_0, q_1, q_f\}, \Sigma, V \cup \{Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_f\})$, com δ:
  1. $\delta(q_0, \mathcal{E}, Z_0) = \{(q_1, SZ_0)\}$
  2. para cada $A \rightarrow a\alpha$ em P, definimos: $\delta(q_1, a, A) = \{(q_1, \alpha), \ldots\}$
  3. $\delta(q_1, \mathcal{E}, Z_0) = \{(q_f, Z_0)\}$

Ou seja, ao ler a, desempilha A, e empilha o α.

GLCs $\rightarrow$ APs

Procedimento:

Seja $G = (V, \Sigma, S, P)$ uma **GLC** na FNG.

- Definimos $P_F = (\{q_0, q_1, q_f\}, \Sigma, V \cup \{Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_f\})$, com δ:
  1. $\delta(q_0, \mathcal{E}, Z_0) = \{(q_1, SZ_0)\}$
  2. para cada $A \rightarrow a\alpha$ em P, definimos: $\delta(q_1, a, A) = \{(q_1, \alpha), \dots\}$
  3. $\delta(q_1, \mathcal{E}, Z_0) = \{(q_f, Z_0)\}$

Ou seja, ao ler a, desempilha A, e empilha o α.

GLCs $\rightarrow$ APs

Procedimento:

Seja $G = (V, \Sigma, S, P)$ uma **GLC** na FNG.

- Definimos $P_F = (\{q_0, q_1, q_f\}, \Sigma, V \cup \{Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_f\})$, com δ:
  1. $\delta(q_0, \mathcal{E}, Z_0) = \{(q_1, SZ_0)\}$
  2. para cada $A \rightarrow a\alpha$ em P, definimos: $\delta(q_1, a, A) = \{(q_1, \alpha), \dots\}$
  3. $\delta(q_1, \mathcal{E}, Z_0) = \{(q_f, Z_0)\}$

Exemplo

Considere: $L(G) = \{a^n b^n \mid n > 0\}$

$$G_{FNG} = (\{S, B\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P: \quad \begin{array}{l} S \to \mathbf{a}SB \mid \mathbf{a}B \\ B \to \mathbf{b} \end{array}$$

Procedimento:

Exemplo

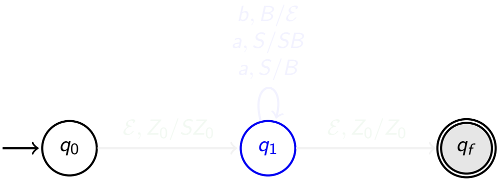
Considere: $L(G) = \{a^n b^n \mid n > 0\}$

$$G_{FNG} = (\{S, B\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P: \quad \begin{array}{l} S \to \mathbf{a}SB \mid \mathbf{a}B \\ B \to \mathbf{b} \end{array}$$

Procedimento:

- Definimos $P_F = (\{q_0, q_1, q_2\}, \Sigma, \{S, B, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_f\})$, com δ:
  1. $\delta(q_0, \mathcal{E}, Z_0) = \{(q_1, SZ_0)\}$
  2. para cada $A \to a\alpha$ em P, definimos: $\delta(q_1, a, A) = \{(q_1, \alpha), \ldots\}$
  3. $\delta(q_1, \mathcal{E}, Z_0) = \{(q_f, Z_0)\}$



Exemplo

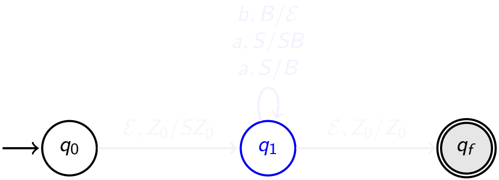
Considere: $L(G) = \{a^n b^n \mid n > 0\}$

$$G_{FNG} = (\{S, B\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P: \quad \begin{aligned} S &\rightarrow \mathbf{a}SB \mid \mathbf{a}B \\ B &\rightarrow \mathbf{b} \end{aligned}$$

Procedimento:

- Definimos $P_F = (\{q_0, q_1, q_2\}, \Sigma, \{S, B, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_f\})$, com δ:
  1. $\delta(q_0, \mathcal{E}, Z_0) = \{(q_1, SZ_0)\}$
  2. para cada $A \rightarrow a\alpha$ em P, definimos: $\delta(q_1, a, A) = \{(q_1, \alpha), \ldots\}$
  3. $\delta(q_1, \mathcal{E}, Z_0) = \{(q_f, Z_0)\}$



Exemplo

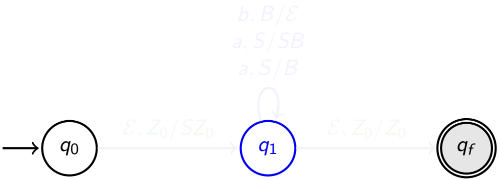
Considere: $L(G) = \{a^n b^n \mid n > 0\}$

$$G_{FNG} = (\{S, B\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P: \quad \begin{array}{l} S \rightarrow \mathbf{a}SB \mid \mathbf{a}B \\ B \rightarrow \mathbf{b} \end{array}$$

Procedimento:

- Definimos $P_F = (\{q_0, q_1, q_2\}, \Sigma, \{S, B, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_f\})$, com δ:
  1. $\delta(q_0, \mathcal{E}, Z_0) = \{(q_1, SZ_0)\}$
  2. para cada $A \rightarrow a\alpha$ em P, definimos: $\delta(q_1, a, A) = \{(q_1, \alpha), \ldots\}$
  3. $\delta(q_1, \mathcal{E}, Z_0) = \{(q_f, Z_0)\}$



Exemplo

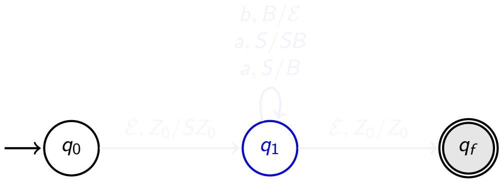
Considere: $L(G) = \{a^n b^n \mid n > 0\}$

$$G_{FNG} = (\{S, B\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \to \mathbf{a}SB \mid \mathbf{a}B \\ & B \to \mathbf{b} \end{aligned}$$

Procedimento:

- Definimos $P_F = (\{q_0, q_1, q_2\}, \Sigma, \{S, B, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_f\})$, com δ:
  1. $\delta(q_0, \mathcal{E}, Z_0) = \{(q_1, SZ_0)\}$
  2. para cada $A \to a\alpha$ em P, definimos: $\delta(q_1, a, A) = \{(q_1, \alpha), \ldots\}$
  3. $\delta(q_1, \mathcal{E}, Z_0) = \{(q_f, Z_0)\}$



Exemplo

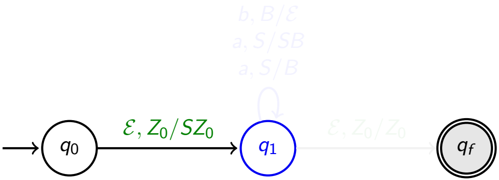
Considere: $L(G) = \{a^n b^n \mid n > 0\}$

$$G_{FNG} = (\{S, B\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow \mathbf{a}SB \mid \mathbf{a}B \\ & B \rightarrow \mathbf{b} \end{aligned}$$

Procedimento:

- Definimos $P_F = (\{q_0, q_1, q_2\}, \Sigma, \{S, B, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_f\})$, com δ:
  1. $\delta(q_0, \mathcal{E}, Z_0) = \{(q_1, SZ_0)\}$
  2. para cada $A \rightarrow a\alpha$ em P, definimos: $\delta(q_1, a, A) = \{(q_1, \alpha), \dots\}$
  3. $\delta(q_1, \mathcal{E}, Z_0) = \{(q_f, Z_0)\}$



Exemplo

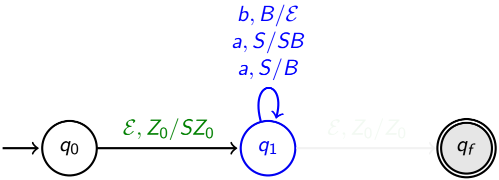
Considere: $L(G) = \{a^n b^n \mid n > 0\}$

$$G_{FNG} = (\{S, B\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P: \quad \begin{array}{l} S \rightarrow \mathbf{a}SB \mid \mathbf{a}B \\ B \rightarrow \mathbf{b} \end{array}$$

Procedimento:

- Definimos $P_F = (\{q_0, q_1, q_2\}, \Sigma, \{S, B, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_f\})$, com δ:
  1. $\delta(q_0, \mathcal{E}, Z_0) = \{(q_1, SZ_0)\}$
  2. para cada $A \rightarrow a\alpha$ em P, definimos: $\delta(q_1, a, A) = \{(q_1, \alpha), \ldots\}$
  3. $\delta(q_1, \mathcal{E}, Z_0) = \{(q_f, Z_0)\}$



Exemplo

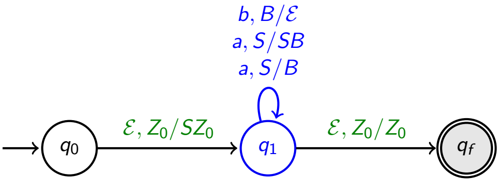
Considere: $L(G) = \{a^n b^n \mid n > 0\}$

$$G_{FNG} = (\{S, B\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P: \quad \begin{array}{l} S \to \mathbf{a}SB \mid \mathbf{a}B \\ B \to \mathbf{b} \end{array}$$

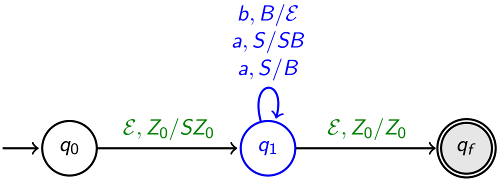
Procedimento:

- Definimos $P_F = (\{q_0, q_1, q_2\}, \Sigma, \{S, B, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_f\})$, com δ:
  1. $\delta(q_0, \mathcal{E}, Z_0) = \{(q_1, SZ_0)\}$
  2. para cada $A \to a\alpha$ em P, definimos: $\delta(q_1, a, A) = \{(q_1, \alpha), \dots\}$
  3. $\delta(q_1, \mathcal{E}, Z_0) = \{(q_f, Z_0)\}$



Exemplo

Considere: $L(G) = \{a^n b^n \mid n > 0\}$

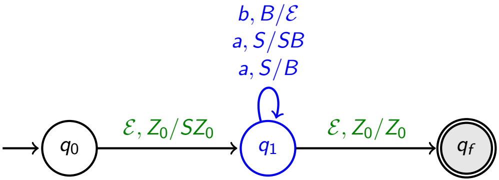


DIs para $w = aaabbb$

$$
\begin{aligned}
(q_0, aaabbb, Z_0) &\Rightarrow (q_1, aaabbb, SZ_0)\\
&\Rightarrow (q_1, aabbb, SBZ_0)\\
&\Rightarrow (q_1, abbb, SBBZ_0)\\
&\Rightarrow (q_1, bbb, BBBZ_0)\\
&\quad \ldots
\end{aligned}
$$

Exemplo

Considere: $L(G) = \{a^n b^n \mid n > 0\}$

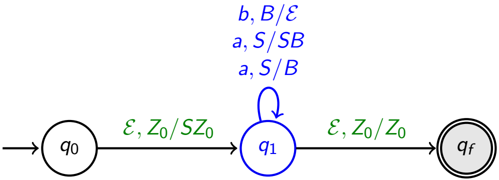


DIs para $w = aaabbb$

$$
\begin{aligned}
(q_0, aaabbb, Z_0) \quad & \Rightarrow (q_1, aaabbb, SZ_0) \\
& \Rightarrow (q_1, aabbb, SBZ_0) \\
& \Rightarrow (q_1, abbb, SBBZ_0) \\
& \Rightarrow (q_1, bbb, BBBZ_0) \\
& \quad \ldots
\end{aligned}
$$

Exemplo

Considere: $L(G) = \{a^n b^n \mid n > 0\}$

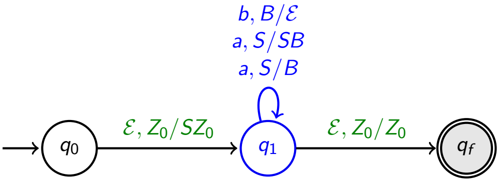


DIs para $w = aaabbb$

$$
\begin{aligned}
(q_0, aaabbb, Z_0) &\Rightarrow (q_1, aaabbb, SZ_0) \\
&\Rightarrow (q_1, aabbb, SBZ_0) \\
&\Rightarrow (q_1, abbb, SBBZ_0) \\
&\Rightarrow (q_1, bbb, BBBZ_0) \\
&\quad \cdots
\end{aligned}
$$

Exemplo

Considere: $L(G) = \{a^n b^n \mid n > 0\}$

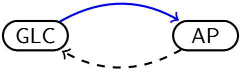


DIs para $w = aaabbb$

$$
\begin{aligned}
(q_0, aaabbb, Z_0) \quad &\Rightarrow (q_1, aaabbb, SZ_0)\\
&\Rightarrow (q_1, aabbb, SBZ_0)\\
&\Rightarrow (q_1, abbb, SBBZ_0)\\
&\Rightarrow (q_1, bbb, BBBZ_0)\\
&\quad \ldots
\end{aligned}
$$

GLCs $\rightarrow$ APs

A prova de corretude é feita por indução no número de movimentos do **AP** P_F e será omitida.



Roteiro

APs $\rightarrow$ GLCs

Agora, vamos ver um procedimento na outra direção: converter um **AP** em uma **GLC** G

APs $\rightarrow$ GLCs

Teorema

Se L é uma linguagem reconhecida por um **AP**, então existe uma **GLC** G que gera L, ou seja, L é uma **LLC**

Procedimento:

Seja $P_N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$ um **AP**, vamos assumir que:

- P_N reconhece a linguagem por pilha vazia;
- $Q = \{q_0\}$
- δ possui apenas transições do tipo:
  1. $\delta(q_0, a, A) = (q_0, \mathcal{E})$
  2. $\delta(q_0, a, A) = (q_0, BC)$ com $a \in (\Sigma \cup \{\mathcal{E}\})$ e $A, B, C \in \Gamma$.

Não vamos provar, mas todo AP pode ser convertido para outro equivalente com transições nas formas (1) e (2).

APs $\rightarrow$ GLCs

Procedimento:

Seja $P_N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$ um **AP**, vamos assumir que:

- P_N reconhece a linguagem por pilha vazia;
- $Q = \{q_0\}$
- δ possui apenas transições do tipo:

1. $\delta(q_0, a, A) = (q_0, \mathcal{E})$
2. $\delta(q_0, a, A) = (q_0, BC)$ com $a \in (\Sigma \cup \{\mathcal{E}\})$ e $A, B, C \in \Gamma$.

Não vamos provar, mas todo AP pode ser convertido para outro equivalente com transições nas formas (1) e (2).

Procedimento:

Seja $P_N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$ um **AP**, vamos assumir que:

- P_N reconhece a linguagem por pilha vazia;
- $Q = \{q_0\}$
- δ possui apenas transições do tipo:

  1. $\delta(q_0, a, A) = (q_0, \mathcal{E})$
  2. $\delta(q_0, a, A) = (q_0, BC)$ com $a \in (\Sigma \cup \{\mathcal{E}\})$ e $A, B, C \in \Gamma$.

Não vamos provar, mas todo AP pode ser convertido para outro equivalente com transições nas formas (1) e (2).

APs $\rightarrow$ GLCs

Procedimento:

Seja $P_N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$ um **AP**, vamos assumir que:

- P_N reconhece a linguagem por pilha vazia;
- $Q = \{q_0\}$
- δ possui apenas transições do tipo:

  1. $\delta(q_0, a, A) = (q_0, \mathcal{E})$
  2. $\delta(q_0, a, A) = (q_0, BC)$ com $a \in (\Sigma \cup \{\mathcal{E}\})$ e $A, B, C \in \Gamma$.

Não vamos provar, mas todo AP pode ser convertido para outro equivalente com transições nas formas (1) e (2).

APs $\rightarrow$ GLCs

Procedimento:

Seja $P_N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$ um **AP**, vamos assumir que:

- P_N reconhece a linguagem por pilha vazia;
- $Q = \{q_0\}$
- δ possui apenas transições do tipo:

  1. $\delta(q_0, a, A) = (q_0, \mathcal{E})$
  2. $\delta(q_0, a, A) = (q_0, BC)$ com $a \in (\Sigma \cup \{\mathcal{E}\})$ e $A, B, C \in \Gamma$.

Não vamos provar, mas todo AP pode ser convertido para outro equivalente com transições nas formas (1) e (2).

APs $\rightarrow$ GLCs

Procedimento (continuação):

Vamos definir uma gramática $G = (V, \Sigma, P, S)$:

- $V = \Gamma$, o conteúdo da pilha torna-se variáveis em G
- $S = Z_0$
- Para cada transição do tipo:
  1. $\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, \mathcal{E})\}$, adicionamos: $X \rightarrow a$
  2. $\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, BC)\}$, adicionamos: $X \rightarrow aBC$
- Além disso, adicionamos: $Z_0 \rightarrow \mathcal{E}$

Esse procedimento pode gerar produções inúteis, não alcançaveis a partir de Z_0

APs $\rightarrow$ GLCs

Procedimento (continuação):

Vamos definir uma gramática $G = (V, \Sigma, P, S)$:

- $V = \Gamma$, o conteúdo da pilha torna-se variáveis em G
- $S = Z_0$
- Para cada transição do tipo:
  1. $\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, \mathcal{E})\}$, adicionamos: $X \rightarrow a$
  2. $\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, BC)\}$, adicionamos: $X \rightarrow aBC$
- Além disso, adicionamos: $Z_0 \rightarrow \mathcal{E}$

Esse procedimento pode gerar produções inúteis, não alcançaveis a partir de Z_0

APs $\rightarrow$ GLCs

Procedimento (continuação):

Vamos definir uma gramática $G = (V, \Sigma, P, S)$:

- $V = \Gamma$, o conteúdo da pilha torna-se variáveis em G
- $S = Z_0$
- Para cada transição do tipo:
  1. $\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, \mathcal{E})\}$, adicionamos: $X \rightarrow a$
  2. $\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, BC)\}$, adicionamos: $X \rightarrow aBC$
- Além disso, adicionamos: $Z_0 \rightarrow \mathcal{E}$

Esse procedimento pode gerar produções inúteis, não alcançaveis a partir de Z_0

APs $\rightarrow$ GLCs

Procedimento (continuação):

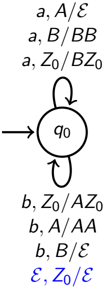
Vamos definir uma gramática $G = (V, \Sigma, P, S)$:

- $V = \Gamma$, o conteúdo da pilha torna-se variáveis em G
- $S = Z_0$
- Para cada transição do tipo:
  1. $\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, \mathcal{E})\}$, adicionamos: $X \rightarrow a$
  2. $\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, BC)\}$, adicionamos: $X \rightarrow aBC$
- Além disso, adicionamos: $Z_0 \rightarrow \mathcal{E}$

Esse procedimento pode gerar produções inúteis, não alcançaveis a partir de Z_0

Exemplo

Considere: $N(N_P) = \{w \mid \text{w possui o mesmo número de a's e b's}\}$

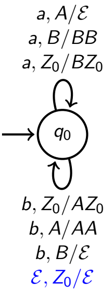


Procedimento:

- Definimos $G = (\{Z_0, A, B\}, \{a, b\}, P, Z_0)$

Exemplo

Considere: $N(N_P) = \{w \mid \text{w possui o mesmo número de a's e b's}\}$

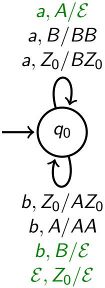


Procedimento:

- Definimos $G = (\{Z_0, A, B\}, \{a, b\}, P, Z_0)$

Exemplo

Considere: $N(N_P) = \{w \mid \text{w possui o mesmo número de a's e b's}\}$



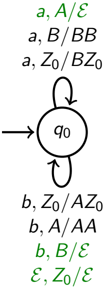
Procedimento:

- Para cada transição do tipo:
  1. $\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, \mathcal{E})\}$, adicionamos: $X \rightarrow a$

$A \rightarrow a \qquad B \rightarrow b \qquad Z_0 \rightarrow \mathcal{E}$

Exemplo

Considere: $N(N_P) = \{w \mid \text{w possui o mesmo número de a's e b's}\}$



Procedimento:

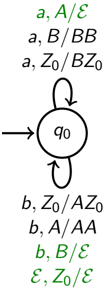
- Para cada transição do tipo:

  1. $\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, \mathcal{E})\}$, adicionamos: $X \rightarrow a$

$$A \rightarrow a \qquad B \rightarrow b \qquad Z_0 \rightarrow \mathcal{E}$$

Exemplo

Considere: $N(N_P) = \{w \mid \text{w possui o mesmo número de a's e b's}\}$



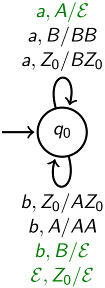
Procedimento:

- Para cada transição do tipo:
  1. $\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, \mathcal{E})\}$, adicionamos: $X \rightarrow a$

$$A \rightarrow a \qquad B \rightarrow b \qquad Z_0 \rightarrow \mathcal{E}$$

Exemplo

Considere: $N(N_P) = \{w \mid \text{w possui o mesmo número de a's e b's}\}$



Procedimento:

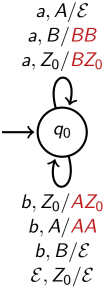
- Para cada transição do tipo:

  1. $\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, \mathcal{E})\}$, adicionamos: $X \rightarrow a$

$$A \rightarrow a \qquad B \rightarrow b \qquad Z_0 \rightarrow \mathcal{E}$$

Exemplo

Considere: $N(N_P) = \{w \mid \text{w possui o mesmo número de a's e b's}\}$



Procedimento:

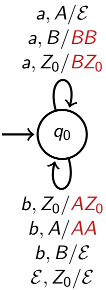
- Para cada transição do tipo:

  2. $\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, BC)\}$, adicionamos: $X \to aBC$

     $B \to aBB$ $\quad Z_0 \to aBZ_0$ $\quad A \to bAA$ $\quad Z_0 \to bAZ_0$

Exemplo

Considere: $N(N_P) = \{w \mid \text{w possui o mesmo número de a's e b's}\}$



Procedimento:

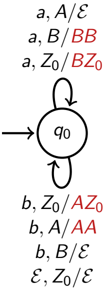
- Para cada transição do tipo:

  2. $\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, BC)\}$, adicionamos: $X \rightarrow aBC$

     $B \rightarrow aBB$ $\quad Z_0 \rightarrow aBZ_0$ $\quad A \rightarrow bAA$ $\quad Z_0 \rightarrow bAZ_0$

Exemplo

Considere: $N(N_P) = \{w \mid \text{w possui o mesmo número de a's e b's}\}$



Procedimento:

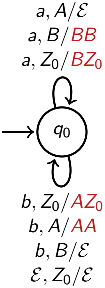
- Para cada transição do tipo:

  2. $\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, BC)\}$, adicionamos: $X \rightarrow aBC$

  $B \rightarrow aBB$ $\quad Z_0 \rightarrow aBZ_0$ $\quad A \rightarrow bAA$ $\quad Z_0 \rightarrow bAZ_0$

Exemplo

Considere: $N(N_P) = \{w \mid \text{w possui o mesmo número de a's e b's}\}$



Procedimento:

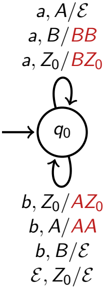
- Para cada transição do tipo:

  2. $\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, BC)\}$, adicionamos: $X \rightarrow aBC$

     $B \rightarrow aBB \qquad Z_0 \rightarrow aBZ_0 \qquad A \rightarrow bAA \qquad Z_0 \rightarrow bAZ_0$

Exemplo

Considere: $N(N_P) = \{w \mid \text{w possui o mesmo número de a's e b's}\}$



Procedimento:

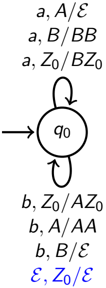
- Para cada transição do tipo:

  2. $\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, BC)\}$, adicionamos: $X \rightarrow aBC$

  $B \rightarrow aBB \qquad Z_0 \rightarrow aBZ_0 \qquad A \rightarrow bAA \qquad Z_0 \rightarrow bAZ_0$

Exemplo

Considere: $N(N_P) = \{w \mid \text{w possui o mesmo número de a's e b's}\}$



Procedimento:

- Por último, adicionamos:

$$Z_0 \rightarrow \mathcal{E}$$

Exemplo

Resultado: $L(G) = \{w \mid \text{w possui o mesmo número de a's e b's}\}$

$$G = (\{Z_0, A, B\}, \{a, b\}, P, Z_0)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & Z_0 \rightarrow \mathbf{a}BZ_0 \mid \mathbf{b}AZ_0 \mid \mathcal{E} \\ & A \rightarrow \mathbf{b}AA \mid \mathbf{a} \\ & B \rightarrow \mathbf{a}BB \mid \mathbf{b} \end{aligned}$$

- Considere w = abbbaa:

$$Z_0 \Rightarrow aBZ_0 \Rightarrow abZ_0 \Rightarrow abbAZ_0 \Rightarrow abbbAAZ_0 \Rightarrow abbbaAZ_0 \Rightarrow abbbaaZ_0 \Rightarrow abbbaa\mathcal{E}$$

Exemplo

Resultado: $L(G) = \{w \mid \text{w possui o mesmo número de a's e b's}\}$

$$G = (\{Z_0, A, B\}, \{a, b\}, P, Z_0)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & Z_0 \rightarrow \mathbf{a}BZ_0 \mid \mathbf{b}AZ_0 \mid \mathcal{E} \\ & A \rightarrow \mathbf{b}AA \mid \mathbf{a} \\ & B \rightarrow \mathbf{a}BB \mid \mathbf{b} \end{aligned}$$

- Considere w = abbbaa:

$$Z_0 \Rightarrow aBZ_0 \Rightarrow abZ_0 \Rightarrow abbAZ_0 \Rightarrow abbbAAZ_0 \Rightarrow abbbaAZ_0 \Rightarrow abbbaaZ_0 \Rightarrow abbbaa\mathcal{E}$$

Exemplo

Resultado: $L(G) = \{w \mid \text{w possui o mesmo número de a's e b's}\}$

$$G = (\{Z_0, A, B\}, \{a, b\}, P, Z_0)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & Z_0 \rightarrow \mathbf{a}BZ_0 \mid \mathbf{b}AZ_0 \mid \mathcal{E} \\ & A \rightarrow \mathbf{b}AA \mid \mathbf{a} \\ & B \rightarrow \mathbf{a}BB \mid \mathbf{b} \end{aligned}$$

- Considere w = abbbaa:

$$Z_0 \Rightarrow aBZ_0 \Rightarrow abZ_0 \Rightarrow abbAZ_0 \Rightarrow abbbAAZ_0 \Rightarrow abbbaAZ_0 \Rightarrow abbbaaZ_0 \Rightarrow abbbaa\mathcal{E}$$

Exemplo

Resultado: $L(G) = \{w \mid \text{w possui o mesmo número de a's e b's}\}$

$$G = (\{Z_0, A, B\}, \{a, b\}, P, Z_0)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & Z_0 \rightarrow \mathbf{a}BZ_0 \mid \mathbf{b}AZ_0 \mid \mathcal{E} \\ & A \rightarrow \mathbf{b}AA \mid \mathbf{a} \\ & B \rightarrow \mathbf{a}BB \mid \mathbf{b} \end{aligned}$$

- Considere w = abbbaa:

$$Z_0 \Rightarrow aBZ_0 \Rightarrow abZ_0 \Rightarrow abbAZ_0 \Rightarrow abbbAAZ_0 \Rightarrow abbbaAZ_0 \Rightarrow abbbaaZ_0 \Rightarrow abbbaa\mathcal{E}$$

Exemplo

Resultado: $L(G) = \{w \mid \text{w possui o mesmo número de a's e b's}\}$

$$G = (\{Z_0, A, B\}, \{a, b\}, P, Z_0)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & Z_0 \rightarrow \mathbf{a}BZ_0 \mid \mathbf{b}AZ_0 \mid \mathcal{E} \\ & A \rightarrow \mathbf{b}AA \mid \mathbf{a} \\ & B \rightarrow \mathbf{a}BB \mid \mathbf{b} \end{aligned}$$

- Considere w = abbbaa:

$$Z_0 \Rightarrow aBZ_0 \Rightarrow abZ_0 \Rightarrow abbAZ_0 \Rightarrow abbbAAZ_0 \Rightarrow abbbaAZ_0 \Rightarrow abbbaaZ_0 \Rightarrow abbbaa\mathcal{E}$$

Exemplo

Resultado: $L(G) = \{w \mid \text{w possui o mesmo número de a's e b's}\}$

$$G = (\{Z_0, A, B\}, \{a, b\}, P, Z_0)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & Z_0 \rightarrow \mathbf{a}BZ_0 \mid \mathbf{b}AZ_0 \mid \mathcal{E} \\ & A \rightarrow \mathbf{b}AA \mid \mathbf{a} \\ & B \rightarrow \mathbf{a}BB \mid \mathbf{b} \end{aligned}$$

- Considere w = abbbaa:

$$Z_0 \Rightarrow aBZ_0 \Rightarrow abZ_0 \Rightarrow abbAZ_0 \Rightarrow abbbAAZ_0 \Rightarrow abbbaAZ_0 \Rightarrow abbbaaZ_0 \Rightarrow abbbaa\mathcal{E}$$

Exemplo

Resultado: $L(G) = \{w \mid \text{w possui o mesmo número de a's e b's}\}$

$$G = (\{Z_0, A, B\}, \{a, b\}, P, Z_0)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & Z_0 \to \mathbf{a}BZ_0 \mid \mathbf{b}AZ_0 \mid \mathcal{E} \\ & A \to \mathbf{b}AA \mid \mathbf{a} \\ & B \to \mathbf{a}BB \mid \mathbf{b} \end{aligned}$$

- Considere w = abbbaa:

$$Z_0 \Rightarrow aBZ_0 \Rightarrow abZ_0 \Rightarrow abbAZ_0 \Rightarrow abbbAAZ_0 \Rightarrow abbbaAZ_0 \Rightarrow abbbaaZ_0 \Rightarrow abbbaa\mathcal{E}$$

Exemplo

Resultado: $L(G) = \{w \mid \text{w possui o mesmo número de a's e b's}\}$

$$G = (\{Z_0, A, B\}, \{a, b\}, P, Z_0)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & Z_0 \rightarrow \mathbf{a}BZ_0 \mid \mathbf{b}AZ_0 \mid \mathcal{E} \\ & A \rightarrow \mathbf{b}AA \mid \mathbf{a} \\ & B \rightarrow \mathbf{a}BB \mid \mathbf{b} \end{aligned}$$

- Considere w = abbbaa:

$$Z_0 \Rightarrow aBZ_0 \Rightarrow abZ_0 \Rightarrow abbAZ_0 \Rightarrow abbbAAZ_0 \Rightarrow abbbaAZ_0 \Rightarrow abbbaaZ_0 \Rightarrow abbbaa\mathcal{E}$$

Exemplo

Resultado: $L(G) = \{w \mid \text{w possui o mesmo número de a's e b's}\}$

$$G = (\{Z_0, A, B\}, \{a, b\}, P, Z_0)$$

$$\begin{aligned} P:\quad & Z_0 \rightarrow \mathbf{a}BZ_0 \mid \mathbf{b}AZ_0 \mid \mathcal{E} \\ & A \rightarrow \mathbf{b}AA \mid \mathbf{a} \\ & B \rightarrow \mathbf{a}BB \mid \mathbf{b} \end{aligned}$$

- Considere w = abbbaa:

$$Z_0 \Rightarrow aBZ_0 \Rightarrow abZ_0 \Rightarrow abbAZ_0 \Rightarrow abbbAAZ_0 \Rightarrow abbbaAZ_0 \Rightarrow abbbaaZ_0 \Rightarrow abbbaa\mathcal{E}$$

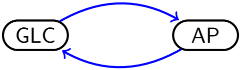
APs $\rightarrow$ GLCs

A prova de corretude desse procedimento não é simples, e será omitida.

Ver no livro (Sipser, Teorema 2.20).

APs $\rightarrow$ GLCs

Com isso, mostramos que os **APs** são equivalentes às **GLCs**, portanto reconhecem a clase das **LLCs**



Equivalência entre APs e GLCs

Teorema

Se L é uma linguagem reconhecida por um **AP** P, então L é uma **Linguagem Livre de Contexto** (ou **Tipo 2**).

Roteiro

Lema do Bombeamento para as LLCs

Embora as **LLCs** sejam mais gerais do que as **LRs**, elas ainda são relativamente restritas.

- É fácil definir linguagens que **não** são Livres de Contexto:

$$L_1 = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$$

$$L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

Lema do Bombeamento para as LLCs

Embora as **LLCs** sejam mais gerais do que as **LRs**, elas ainda são relativamente restritas.

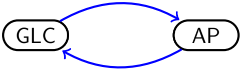
- É fácil definir linguagens que **não** são Livres de Contexto:

$$L_1 = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$$
$$L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

Lema do Bombeamento para as LLCs

Para mostrar que L é uma **LLCs**:

- É suficiente apresentar um dos formalismos para reconhecer/gerar a linguagem:



Para provar que L não é uma **LLC**:

- Vamos utilizar o *Lema do Bombeamento para LLCs.*

Lema do Bombeamento para as LLCs

Para mostrar que L é uma **LLCs**:

- É suficiente apresentar um dos formalismos para reconhecer/gerar a linguagem:

$$\begin{tikzcd} \text{GLC} \arrow[r, bend left] & \text{AP} \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

Para provar que L não é uma **LLC**:

- Vamos utilizar o *Lema do Bombeamento para LLCs*.

Lema do Bombeamento para as LLCs

Uso do Lema do Bombeamento:

Lema L é uma **LLC** $\rightarrow \exists$ propriedades do bombeamento

Uso $\nexists$ propriedades do bombeamento $\rightarrow L$ **não é** uma **LLC**

Para cada caso, iremos construir uma prova por absurdo.

Relembrando: Se $P \rightarrow Q$ então $\neg Q \rightarrow \neg P$ (Contrapositiva).

Lema do Bombeamento para as LLCs

Uso do Lema do Bombeamento:

Lema L é uma **LLC** $\rightarrow \exists$ propriedades do bombeamento

Uso $\nexists$ propriedades do bombeamento $\rightarrow$ L **não é** uma **LLC**

Para cada caso, iremos construir uma prova por absurdo.

Relembrando: Se $P \rightarrow Q$ então $\neg Q \rightarrow \neg P$ (Contrapositiva).

Lema do Bombeamento para as LLCs

Uso do Lema do Bombeamento:

Lema L é uma **LLC** $\rightarrow \exists$ propriedades do bombeamento

Uso $\nexists$ propriedades do bombeamento $\rightarrow$ L **não é** uma **LLC**

Para cada caso, iremos construir uma prova por absurdo.

Relembrando: Se $P \rightarrow Q$ então $\neg Q \rightarrow \neg P$ (Contrapositiva).

Lema do Bombeamento para as LLCs

Teorema

Se L é uma **LLC**, então existe um número p, chamado de comprimento do bombeamento, tal que, se $w \in L$, com $|w| \geq p$, então w pode ser dividida em cinco partes $w = uvxyz$, satisfazendo:

1. para $i \geq 0$, a palavra $w' = uv^ixy^iz \in L$;
2. $|vy| > 0$; e
3. $|vxy| \leq p$.

Observações:

- Pela condição 2 temos que $v \neq \mathcal{E}$ ou $y \neq \mathcal{E}$. Caso contrário, o lema seria trivialmente verdadeiro.
- Pela condição 3: $|vxy|$ tem tamanho máximo p.

Considere $w = u\mathcal{E}x\mathcal{E}z$.

Lema do Bombeamento para as LLCs

Teorema

Se L é uma **LLC**, então existe um número p, chamado de comprimento do bombeamento, tal que, se $w \in L$, com $|w| \geq p$, então w pode ser dividida em cinco partes $w = uvxyz$, satisfazendo:

1. para $i \geq 0$, a palavra $w' = uv^ixy^iz \in L$;
2. $|vy| > 0$; e
3. $|vxy| \leq p$.

Observações:

- Pela condição 2 temos que $v \neq \mathcal{E}$ ou $y \neq \mathcal{E}$. Caso contrário, o lema seria trivialmente verdadeiro.
- Pela condição 3: $|vxy|$ tem tamanho máximo p.

Considere $w = u\mathcal{E}x\mathcal{E}z$.

Lema do Bombeamento para as LLCs

Teorema

Se L é uma **LLC**, então existe um número p, chamado de comprimento do bombeamento, tal que, se $w \in L$, com $|w| \geq p$, então w pode ser dividida em cinco partes $w = uvxyz$, satisfazendo:

1. para $i \geq 0$, a palavra $w' = uv^ixy^iz \in L$;
2. $|vy| > 0$; e
3. $|vxy| \leq p$.

Observações:

- Pela condição 2 temos que $v \neq \mathcal{E}$ ou $y \neq \mathcal{E}$. Caso contrário, o lema seria trivialmente verdadeiro.
- Pela condição 3: $|vxy|$ tem tamanho máximo p.

Considere $w = u\mathcal{E}x\mathcal{E}z$.

Lema do Bombeamento para as LLCs

Teorema

Se L é uma **LLC**, então existe um número p, chamado de comprimento do bombeamento, tal que, se $w \in L$, com $|w| \geq p$, então w pode ser dividida em cinco partes $w = uvxyz$, satisfazendo:

1. para $i \geq 0$, a palavra $w' = uv^ixy^iz \in L$;
2. $|vy| > 0$; e
3. $|vxy| \leq p$.

Observações:

- Pela condição 2 temos que $v \neq \mathcal{E}$ ou $y \neq \mathcal{E}$. Caso contrário, o lema seria trivialmente verdadeiro.
- Pela condição 3: $|vxy|$ tem tamanho máximo p.

Considere $w = u\mathcal{E}x\mathcal{E}z$.

Lema do Bombeamento para as LLCs

Teorema

Se L é uma **LLC**, então existe um número p, chamado de comprimento do bombeamento, tal que, se $w \in L$, com $|w| \geq p$, então w pode ser dividida em cinco partes $w = uvxyz$, satisfazendo:

1. para $i \geq 0$, a palavra $w' = uv^ixy^iz \in L$;
2. $|vy| > 0$; e
3. $|vxy| \leq p$.

Observações:

- Pela condição 2 temos que $v \neq \mathcal{E}$ ou $y \neq \mathcal{E}$. Caso contrário, o lema seria trivialmente verdadeiro.
- Pela condição 3: $|vxy|$ tem tamanho máximo p.

Considere $w = u\mathcal{E}x\mathcal{E}z$.

Lema do Bombeamento para as LLCs

Teorema

Se L é uma **LLC**, então existe um número p, chamado de comprimento do bombeamento, tal que, se $w \in L$, com $|w| \geq p$, então w pode ser dividida em cinco partes $w = uvxyz$, satisfazendo:

1. para $i \geq 0$, a palavra $w' = uv^ixy^iz \in L$;
2. $|vy| > 0$; e
3. $|vxy| \leq p$.

Observações:

- Pela condição 2 temos que $v \neq \mathcal{E}$ ou $y \neq \mathcal{E}$. Caso contrário, o lema seria trivialmente verdadeiro.
- Pela condição 3: $|vxy|$ tem tamanho máximo p.

Considere $w = u\mathcal{E}x\mathcal{E}z$.

Lema do Bombeamento para as LLCs

Teorema

Se L é uma **LLC**, então existe um número p, chamado de comprimento do bombeamento, tal que, se $w \in L$, com $|w| \geq p$, então w pode ser dividida em cinco partes $w = uvxyz$, satisfazendo:

1. para $i \geq 0$, a palavra $w' = uv^ixy^iz \in L$;
2. $|vy| > 0$; e
3. $|vxy| \leq p$.

Observações:

- Pela condição 2 temos que $v \neq \mathcal{E}$ ou $y \neq \mathcal{E}$. Caso contrário, o lema seria trivialmente verdadeiro.
- Pela condição 3: $|vxy|$ tem tamanho máximo p.

Considere $w = u\mathcal{E}x\mathcal{E}z$.

Lema do Bombeamento para as LLCs

Em outras palavras, $w \in L$ pode ser dividida em

$$w = \underline{uvxyz}$$

tal que, v e y podem ser repetidas (bombeadas) qualquer número de vezes e a cadeia

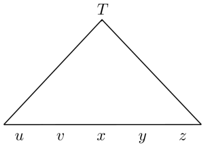
$$w' = \underline{uv^i xy^i z}$$

para $i \geq 0$ pertence à L.

Lema do Bombeamento para as LLCs

Ideia da prova: Seja L uma **LLC** e suponha que a GLC G gere L.

- Considere $w = uvxyz \in L$ uma cadeia longa e que T é a árvore de derivação que gera w.
- No caminho entre a variável inicial (raiz de T) e os símbolos terminais (folhas) temos uma variável $R \in V$:
  - Pelo princípio da casa dos pombos, a variável R deve se repetir no caminho.

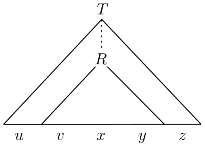


(Sipser, Figura 2.35)

Lema do Bombeamento para as LLCs

Ideia da prova: Seja L uma **LLC** e suponha que a GLC G gere L.

- Considere $w = uvxyz \in L$ uma cadeia longa e que T é a árvore de derivação que gera w.
- No caminho entre a variável inicial (raiz de T) e os símbolos terminais (folhas) temos uma variável $R \in V$:
  - Pelo princípio da casa dos pombos, a variável R deve se repetir no caminho.

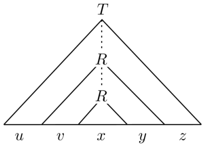


(Sipser, Figura 2.35)

Lema do Bombeamento para as LLCs

Ideia da prova: Seja L uma **LLC** e suponha que a GLC G gere L.

- Considere $w = uvxyz \in L$ uma cadeia longa e que T é a árvore de derivação que gera w.
- No caminho entre a variável inicial (raiz de T) e os símbolos terminais (folhas) temos uma variável $R \in V$:
  - Pelo princípio da casa dos pombos, a variável R deve se repetir no caminho.

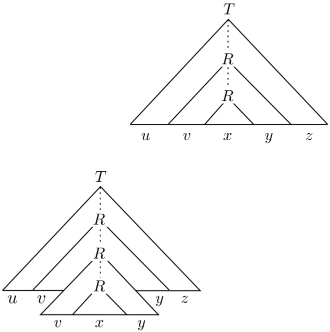


(Sipser, Figura 2.35)

Lema do Bombeamento para as LLCs

Ideia da prova (continuação):

- Essa repetição nos permite substituir a subárvore sob a segunda ocorrência de *R*, pela subárvore da primeira.
  - A árvore obtida é válida, ou seja, a palavra gerada também.

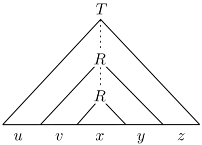


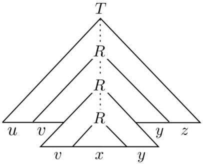
(Sipser, Figura 2.35)

Lema do Bombeamento para as LLCs

Ideia da prova (continuação):

- Essa repetição nos permite substituir a subárvore sob a segunda ocorrência de R, pela subárvore da primeira.
  - A árvore obtida é válida, ou seja, a palavra gerada também.



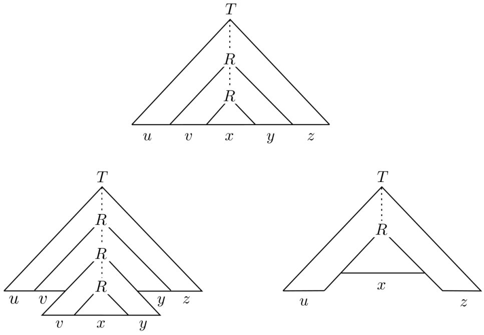


(Sipser, Figura 2.35)

Lema do Bombeamento para as LLCs

Ideia da prova (continuação):

- Essa repetição nos permite substituir a subárvore sob a segunda ocorrência de R, pela subárvore da primeira.
  - A árvore obtida é válida, ou seja, a palavra gerada também.



(Sipser, Figura 2.35)

Lema do Bombeamento para as LLCs

Não vamos ver a prova formal do lema.

Ver no livro (Sipser, Teorema 2.34).

Exemplo

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

Suponha que L é uma **LLC**, e p o comprimento de bombeamento, vamos considerar $w = \underline{a^p b^p c^p} \in L$, com $|w| \geq p$.

- Pelo *Lema do bombeamento* reescrevemos $w = \underline{uvxyz}$, tal que:
  1. $w' = \underline{uv^i xy^i z} \in L$, qualquer para $i \geq 0$;
  2. $|vy| > 0$; e
  3. $|vxy| \leq p$.
- Pela condição (3), temos as seguintes possibilidades:
  1. Vamos supor que $\underline{v}$ e $\underline{y}$ contém um mesmo símbolo: a's, b's ou c's
  2. Vamos supor que $\underline{v}$ e $\underline{y}$ contém dois tipos de símbolos: $vxy = a^k b^k$ ou $vxy = b^k c^k$

Exemplo

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

Suponha que L é uma **LLC**, e p o comprimento de bombeamento, vamos considerar $w = a^p b^p c^p \in L$, com $|w| \geq p$.

- Pelo *Lema do bombeamento* reescrevemos $w = uvxyz$, tal que:
  1. $w' = uv^ixy^iz \in L$, qualquer para $i \geq 0$;
  2. $|vy| > 0$; e
  3. $|vxy| \leq p$.
- Pela condição (3), temos as seguintes possibilidades:

Exemplo

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

Suponha que L é uma **LLC**, e p o comprimento de bombeamento, vamos considerar $w = \underline{a^p b^p c^p} \in L$, com $|w| \geq p$.

- Pelo *Lema do bombeamento* reescrevemos $w = \underline{uvxyz}$, tal que:
  1. $w' = \underline{uv^i xy^i z} \in L$, qualquer para $i \geq 0$;
  2. $|vy| > 0$; e
  3. $|vxy| \leq p$.
- Pela condição (3), temos as seguintes possibilidades:

Exemplo

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

Suponha que L é uma **LLC**, e p o comprimento de bombeamento, vamos considerar $w = \underline{a^p b^p c^p} \in L$, com $|w| \geq p$.

- Pelo *Lema do bombeamento* reescrevemos $w = \underline{uvxyz}$, tal que:
  1. $w' = \underline{uv^i xy^i z} \in L$, qualquer para $i \geq 0$;
  2. $|vy| > 0$; e
  3. $|vxy| \leq p$.
- Pela condição (3), temos as seguintes possibilidades:
  1. Vamos supor que $\underline{v}$ e $\underline{y}$ contém um mesmo símbolo: **a**'s, **b**'s ou **c**'s
     - Neste caso, $\underline{uv^2xy^2z}$ tem mais de um símbolo do que do outro, e $uv^2xy^2z \notin L \leftarrow$ **Contradição!**
  2. Vamos supor que $\underline{v}$ e $\underline{y}$ contém dois tipos de símbolos: $vxy = \mathbf{a}^\ell \mathbf{b}^k$ ou $vxy = \mathbf{b}^\ell \mathbf{c}^k$
     - $\underline{uv^2xy^2z}$ pode ter quantidade iguais de a's, b's ou c's, mas não na mesma ordem, então $uv^2xy^2z \notin L \leftarrow$ Contradição!

$\nexists$ propriedades do bombeamento $\rightarrow$ L não é uma LLC

Exemplo

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

Suponha que L é uma **LLC**, e p o comprimento de bombeamento, vamos considerar $w = \underline{a^p b^p c^p} \in L$, com $|w| \geq p$.

- Pelo *Lema do bombeamento* reescrevemos $w = \underline{uvxyz}$, tal que:
  1. $w' = \underline{uv^i xy^i z} \in L$, qualquer para $i \geq 0$;
  2. $|vy| > 0$; e
  3. $|vxy| \leq p$.
- Pela condição (3), temos as seguintes possibilidades:
  1. Vamos supor que $\underline{v}$ e $\underline{y}$ contém um mesmo símbolo: **a**'s, **b**'s ou **c**'s
     - Neste caso, $\underline{uv^2xy^2z}$ tem mais de um símbolo do que do outro, e $uv^2xy^2z \notin L$ ← **Contradição!**
  2. Vamos supor que $\underline{v}$ e $\underline{y}$ contém dois tipos de símbolos: $vxy = \mathbf{a}^\ell \mathbf{b}^k$ ou $vxy = \mathbf{b}^\ell \mathbf{c}^k$
     - $\underline{uv^2xy^2z}$ pode ter quantidade iguais de a's, b's ou c's, mas não na mesma ordem, então $uv^2xy^2z \notin L$ ← Contradição!

$\nexists$ propriedades do bombeamento $\rightarrow L$ não é uma LLC

Exemplo

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

Suponha que L é uma **LLC**, e p o comprimento de bombeamento, vamos considerar $w = \underline{a^p b^p c^p} \in L$, com $|w| \geq p$.

- Pelo *Lema do bombeamento* reescrevemos $w = \underline{uvxyz}$, tal que:
  1. $w' = \underline{uv^i xy^i z} \in L$, qualquer para $i \geq 0$;
  2. $|vy| > 0$; e
  3. $|vxy| \leq p$.
- Pela condição (3), temos as seguintes possibilidades:
  1. Vamos supor que $\underline{v}$ e $\underline{y}$ contém um mesmo símbolo: **a**'s, **b**'s ou **c**'s
     - Neste caso, $\underline{uv^2xy^2z}$ tem mais de um símbolo do que do outro, e $uv^2xy^2z \notin L \leftarrow$ **Contradição!**
  2. Vamos supor que $\underline{v}$ e $\underline{y}$ contém dois tipos de símbolos: $vxy = \mathbf{a}^\ell \mathbf{b}^k$ ou $vxy = \mathbf{b}^\ell \mathbf{c}^k$
     - $\underline{uv^2xy^2z}$ pode ter quantidade iguais de **a**'s, **b**'s ou **c**'s, mas não na mesma ordem, então $uv^2xy^2z \notin L$. $\leftarrow$ **Contradição!**

$\nexists$ propriedades do bombeamento $\rightarrow$ L **não é uma LLC**

Exemplo

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

Suponha que L é uma **LLC**, e p o comprimento de bombeamento, vamos considerar $w = \underline{a^p b^p c^p} \in L$, com $|w| \geq p$.

- Pelo *Lema do bombeamento* reescrevemos $w = \underline{uvxyz}$, tal que:
  1. $w' = \underline{uv^i xy^i z} \in L$, qualquer para $i \geq 0$;
  2. $|vy| > 0$; e
  3. $|vxy| \leq p$.
- Pela condição (3), temos as seguintes possibilidades:
  1. Vamos supor que $\underline{v}$ e $\underline{y}$ contém um mesmo símbolo: **a**'s, **b**'s ou **c**'s
     - Neste caso, $\underline{uv^2xy^2z}$ tem mais de um símbolo do que do outro, e $uv^2xy^2z \notin L \leftarrow$ **Contradição!**
  2. Vamos supor que $\underline{v}$ e $\underline{y}$ contém dois tipos de símbolos: $vxy = \mathbf{a}^\ell \mathbf{b}^k$ ou $vxy = \mathbf{b}^\ell \mathbf{c}^k$
     - $\underline{uv^2xy^2z}$ pode ter quantidade iguais de **a**'s, **b**'s ou **c**'s, mas não na mesma ordem, então $uv^2xy^2z \notin L$. $\leftarrow$ **Contradição!**

$\nexists$ propriedades do bombeamento $\rightarrow$ L **não é uma LLC**

Exemplo

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

Suponha que L é uma **LLC**, e p o comprimento de bombeamento, vamos considerar $w = \underline{a^p b^p c^p} \in L$, com $|w| \geq p$.

- Pelo *Lema do bombeamento* reescrevemos $w = \underline{uvxyz}$, tal que:
  1. $w' = \underline{uv^i xy^i z} \in L$, qualquer para $i \geq 0$;
  2. $|vy| > 0$; e
  3. $|vxy| \leq p$.
- Pela condição (3), temos as seguintes possibilidades:
  1. Vamos supor que $\underline{v}$ e $\underline{y}$ contém um mesmo símbolo: **a**'s, **b**'s ou **c**'s
     - Neste caso, $\underline{uv^2xy^2z}$ tem mais de um símbolo do que do outro, e $uv^2xy^2z \notin L \leftarrow$ **Contradição!**
  2. Vamos supor que $\underline{v}$ e $\underline{y}$ contém dois tipos de símbolos: $vxy = \mathbf{a}^\ell \mathbf{b}^k$ ou $vxy = \mathbf{b}^\ell \mathbf{c}^k$
     - $\underline{uv^2xy^2z}$ pode ter quantidade iguais de **a**'s, **b**'s ou **c**'s, mas não na mesma ordem, então $uv^2xy^2z \notin L$. $\leftarrow$ **Contradição!**

$\nexists$ propriedades do bombeamento $\rightarrow$ L **não é** uma **LLC**

Lema do Bombeamento para as LLCs

Portanto existem linguagens que não são do **Tipo 2**:

Na próxima aula veremos essas linguagens.

Fim

Dúvidas?

Roteiro

Referências

Referências:

1. *“Introdução à Teoria da Computação”* de M. Sipser, 2007.
2. *“Linguagens formais e autômatos”* de Paulo F. B. Menezes, 2002.
3. Materiais adaptados dos slides do Prof. Evandro E. S. Ruiz, da USP.