Teoria da Computação

Lema do Bombeamento e Operações Regulares

Aula 04

Prof. Felipe A. Louza

UFU

Roteiro

Roteiro

1. Lema do Bombeamento para Linguagens Regulares
   - Limitações dos AFs
   - Enunciado do Lema do Bombeamento
   - Linguagens Não-Regulares
2. Operações sobre Linguagens
   - Operações Regulares
   - Fecho sobre as Operações Regulares
   - Outras Operações
3. Referências

Limitações dos AFs

Para entender o poder computacional dos AFs precisamos entender suas limitações:

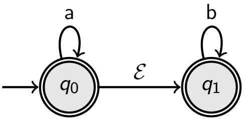
- Vamos ver que certas linguagens não podem ser reconhecidas por nenhum AF.

Limitações dos AFs

Exemplo:

$$L_1 = \{a^n b^n, n \geq 0\}$$

- Precisamos de um AF que *"lembre"* quantos **a**'s foram vistos a medida que processamos $w = w_1 w_2 \ldots w_i \ldots w_n$



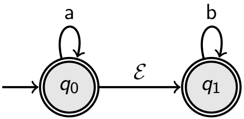
- Vamos ver que <u>não é possível</u> reconhecer $L_1 = \{a^n b^n, n \geq 0\}$ com nenhum AF!
    - Logo, L não é uma Linguagem Regular

Limitações dos AFs

Exemplo:

$$L_1 = \{a^n b^n, n \geq 0\}$$

- Precisamos de um AF que *"lembre"* quantos **a**'s foram vistos a medida que processamos $w = w_1 w_2 \dots w_i \dots w_n$



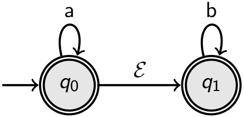
- Vamos ver que não é possível reconhecer $L_1 = \{a^n b^n, n \geq 0\}$ com nenhum AF!
  - Logo, L não é uma Linguagem Regular.

Limitações dos AFs

Exemplo:

$$L_1 = \{a^n b^n, n \geq 0\}$$

- Precisamos de um AF que *"lembre"* quantos **a**'s foram vistos a medida que processamos $w = w_1 w_2 \ldots w_i \ldots w_n$



- Vamos ver que não é possível reconhecer $L_1 = \{a^n b^n, n \geq 0\}$ com nenhum AF!
  - Logo, L não é uma Linguagem Regular.

Limitações dos AFs

Atenção:

- Nem sempre uma linguagem que *"parece requerer"* um AF com memória ilimitada realmente precisa.

Exemplo:

$$L_2 = \{w \mid w \in \{0,1\}^* \text{ e } w \text{ contém um número igual de 01 e 10}\}$$

$w = 101 \in L_2$, mas $w' = 1010 \notin L_2$.

Limitações dos AFs

Atenção:

- Nem sempre uma linguagem que *"parece requerer"* um AF com memória ilimitada realmente precisa.

Exemplo:

$$L_2 = \{w \mid w \in \{0,1\}^* \text{ e } w \text{ contém um número igual de 01 e 10}\}$$

$w = 101 \in L_2$, mas $w' = 1010 \notin L_2$.

Exemplo:

$$L_2 = \{w \mid w \in \{0,1\}^* \text{ e } w \text{ contém um número igual de 01 e 10}\}$$

$$\mathbf{r_2} = (1^+0^*1^+)^* + (0^+1^*0^+)^*$$

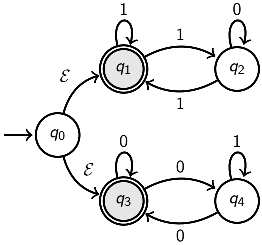
$$L_2 = L(N_2)$$

Logo L_2 é uma Linguagem Regular.

Exemplo:

$$L_2 = \{w \mid w \in \{0,1\}^* \text{ e } w \text{ contém um número igual de 01 e 10}\}$$

$$\mathbf{r_2} = (1^+0^*1^+)^* + (0^+1^*0^+)^*$$



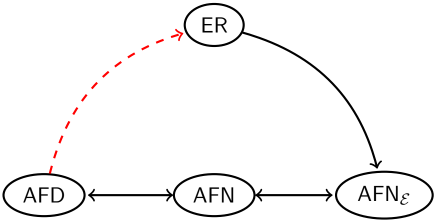
$L_2 = L(N_2)$

Logo L_2 é uma Linguagem Regular.

Limitações dos AFs

Para mostrar que L é uma Linguagem Regular:

- É suficiente apresentar algum dos formalismos para reconhecer/gerar a linguagem:



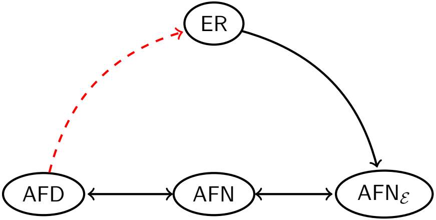
Para provar que L não é uma Linguagem Regular:

- Vamos utilizar uma técnica conhecida como *Lema do Bombeamento*.

Limitações dos AFs

Para mostrar que L é uma Linguagem Regular:

- É suficiente apresentar algum dos formalismos para reconhecer/gerar a linguagem:



Para provar que L não é uma Linguagem Regular:

- Vamos utilizar uma técnica conhecida como *Lema do Bombeamento*.

Roteiro

Lema do Bombeamento

Lema do Bombeamento

Se L é uma Linguagem Regular, então existe um número p, chamado de comprimento do bombeamento, tal que, para qualquer palavra $w \in L$, com $|w| \geq p$, w pode ser dividida em $w = xyz$, satisfazendo:

1. $w' = xy^iz \in L$, para qualquer $i \geq 0$;
2. $|y| > 0$, e
3. $|xy| \leq p$.

Relembrando:

- $|y|$ representa o tamanho da cadeia y.
- $y^i = \underbrace{yyy\ldots y}_{i}$

Lema do Bombeamento

Provado em 1959 por Michael Rabin e Dana Scott[1], ambos receberam o ACM Turing Award em 1976.

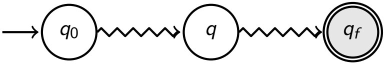
[1] Ambos foram orientados por Alonzo Church.

Lema do Bombeamento

Ideia do Lema:

- Se L é uma LR, então ela aceita um AFD M com p estados.
- Se o AFD M reconhece w, com $|w| \geq p$, obrigatoriamente[2] o AFD assume alguma estado q mais de uma vez, ou seja, existe um ciclo que passa por q.
- Logo, w pode ser dividida em $w = xyz$, com $|y| > 0$ e $|xy| \leq p$.

  Portanto, qualquer cadeia xy^iz, para $i \geq 0$, é aceita pelo AFD M, isto é, $xy^iz \in L$.



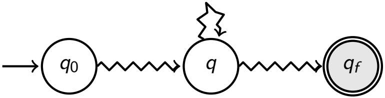
[2] Pelo **princípio da casa dos pombos**.

Lema do Bombeamento

Ideia do Lema:

- Se L é uma LR, então ela aceita um AFD M com p estados.
- Se o AFD M reconhece w, com $|w| \geq p$, obrigatoriamente[2] o AFD assume alguma estado q mais de uma vez, ou seja, existe um ciclo que passa por q.
- Logo, w pode ser dividida em $w = xyz$, com $|y| > 0$ e $|xy| \leq p$.

  Portanto, qualquer cadeia xy^iz, para $i \geq 0$, é aceita pelo AFD M, isto é, $xy^iz \in L$.

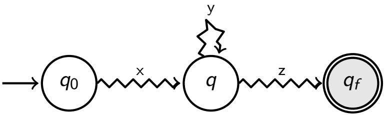


[2] Pelo **princípio da casa dos pombos**.

Lema do Bombeamento

Ideia do Lema:

- Se L é uma LR, então ela aceita um AFD M com p estados.
- Se o AFD M reconhece w, com $|w| \geq p$, obrigatoriamente[2] o AFD assume alguma estado q mais de uma vez, ou seja, existe um ciclo que passa por q.
- Logo, w pode ser dividida em $w = xyz$, com $|y| > 0$ e $|xy| \leq p$.
  - Portanto, qualquer cadeia xy^iz, para $i \geq 0$, é aceita pelo AFD M, isto é, $xy^iz \in L$.

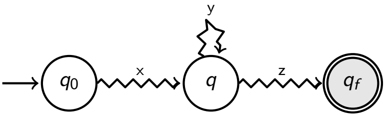


[2] Pelo **princípio da casa dos pombos**.

Lema do Bombeamento

Ideia do Lema:

- Se L é uma LR, então ela aceita um AFD M com p estados.
- Se o AFD M reconhece w, com $|w| \geq p$, obrigatoriamente[2] o AFD assume alguma estado q mais de uma vez, ou seja, existe um ciclo que passa por q.
- Logo, w pode ser dividida em $w = xyz$, com $|y| > 0$ e $|xy| \leq p$.
  - Portanto, qualquer cadeia xy^iz, para $i \geq 0$, é aceita pelo AFD M, isto é, $xy^iz \in L$.



[2] Pelo **princípio da casa dos pombos**.

Lema do Bombeamento

Prova do Lema:

- Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFD com p estados que reconhece a linguagem L.
- Seja $w = w_1 w_2 \ldots w_n$ uma cadeia em L, com $|w| = n \geq p$.
- Considere a sequência de estados $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}$ nos quais M passa ao processar w, de forma que:

$$\delta(r_i, w_i) = r_{i+1}$$

ou seja,

$$\longrightarrow r_1 \xrightarrow{w_1} r_2 \xrightarrow{w_2} \cdots \xrightarrow{w_{n-1}} r_n \xrightarrow{w_n} r_{n+1}$$

Lema do Bombeamento

Prova do Lema:

- Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFD com p estados que reconhece a linguagem L.
- Seja $w = w_1 w_2 \ldots w_n$ uma cadeia em L, com $|w| = n \geq p$.
- Considere a sequência de estados $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}$ nos quais M passa ao processar w, de forma que:

$$\delta(r_i, w_i) = r_{i+1}$$

ou seja,

Lema do Bombeamento

Prova do Lema:

- Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFD com p estados que reconhece a linguagem L.
- Seja $w = w_1 w_2 \ldots w_n$ uma cadeia em L, com $|w| = n \geq p$.
- Considere a sequência de estados $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}$ nos quais M passa ao processar w, de forma que:

$$\delta(r_i, w_i) = r_{i+1}$$

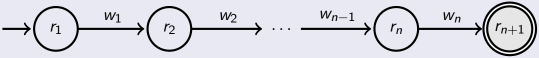
ou seja,

$$\rightarrow r_1 \xrightarrow{w_1} r_2 \xrightarrow{w_2} \cdots \xrightarrow{w_{n-1}} r_n \xrightarrow{w_n} r_{n+1}$$

Lema do Bombeamento

Prova do Lema: (continuação)

- Temos que $|r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}| = n + 1$, que é pelo menos $p + 1$ já que $|w| \geq p$.



- Então, pelo **princípio da casa dos pombos**, pelo menos dois estados devem ser o mesmo entre os primeiros $p + 1$ estados.
- Suponha que $r_j = r_k$, para $1 \leq j < k \leq p + 1$:

$$r_1, r_2, \ldots, \mathbf{r_j}, \ldots, \mathbf{r_k}, \ldots, r_{n+1}$$

Lema do Bombeamento

Prova do Lema: (continuação)

- Temos que $|r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}| = n + 1$, que é pelo menos $p + 1$ já que $|w| \geq p$.

$$\to r_1 \xrightarrow{w_1} r_2 \xrightarrow{w_2} \cdots \xrightarrow{w_{n-1}} r_n \xrightarrow{w_n} r_{n+1}$$

- Então, pelo **princípio da casa dos pombos**, pelo menos dois estados devem ser o mesmo entre os primeiros $p + 1$ estados.

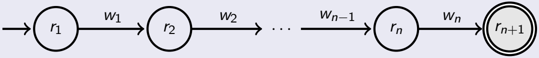
- Suponha que $r_j = r_k$, para $1 \leq j < k \leq p + 1$:

$$r_1, r_2, \ldots, \mathbf{r_j}, \ldots, \mathbf{r_k}, \ldots, r_{n+1}$$

Lema do Bombeamento

Prova do Lema: (continuação)

- Temos que $|r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}| = n + 1$, que é pelo menos $p + 1$ já que $|w| \geq p$.



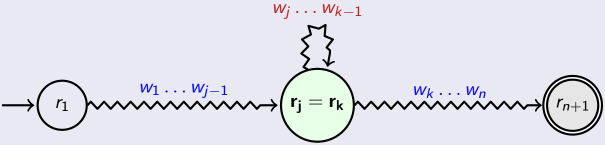
- Então, pelo **princípio da casa dos pombos**, pelo menos dois estados devem ser o mesmo entre os primeiros $p + 1$ estados.
- Suponha que $r_j = r_k$, para $1 \leq j < k \leq p + 1$:

$$r_1, r_2, \ldots, \mathbf{r_j}, \ldots, \mathbf{r_k}, \ldots, r_{n+1}$$

Lema do Bombeamento

Prova do Lema: (continuação)

- O caminho $\underline{\delta}(r_1, w)$ está ilustrado na figura abaixo:



$$r_1, r_2, \dots, \mathbf{r_j}, \dots, \mathbf{r_k}, \dots, r_{n+1}$$

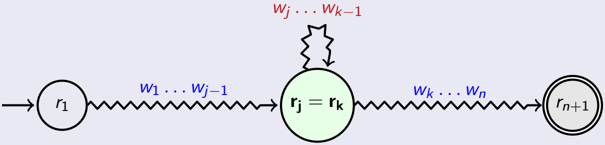
Dessa forma:

1. $\underline{\delta}(r_1, w_1 \dots w_{j-1}) = r_j$
2. $\underline{\delta}(r_j, w_j \dots w_{k-1}) = \mathbf{r_j} = \mathbf{r_k}$
3. $\underline{\delta}(r_j, w_k \dots w_n) = r_{n+1}$

Lema do Bombeamento

Prova do Lema: (continuação)

- O caminho $\underline{\delta}(r_1, w)$ está ilustrado na figura abaixo:



$$r_1, r_2, \ldots, \mathbf{r_j}, \ldots, \mathbf{r_k}, \ldots, r_{n+1}$$

Dessa forma:

1. $\underline{\delta}(r_1, w_1 \ldots w_{j-1}) = r_j$
2. $\underline{\delta}(r_j, w_j \ldots w_{k-1}) = \mathbf{r_j} = \mathbf{r_k}$
3. $\underline{\delta}(r_j, w_k \ldots w_n) = r_{n+1}$

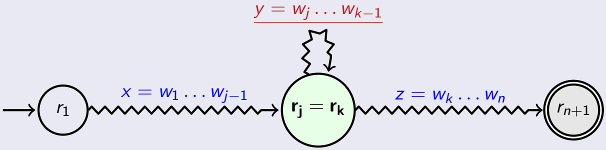
$\square$

Lema do Bombeamento

Prova do Lema: (continuação)

Agora, considere $x = w_1 \dots w_{j-1}$, $y = w_j \dots w_{k-1}$ e $z = w_k \dots w_n$, então temos que:

1. O AFD M deve aceitar qualquer cadeia $\underline{xy^iz}$, para $i \geq 0$.
2. $|y| > 0$, já que $j \neq k$.
3. $|xy| \leq p$, já que $k \leq \underline{p+1}$.



$$r_1, r_2, \dots, \mathbf{r_j}, \dots, \mathbf{r_k}, \dots, r_{n+1}$$

Portanto:

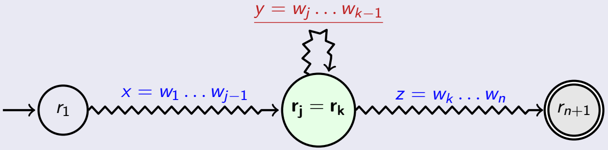
$$\underline{xy^iz \in L}$$

Lema do Bombeamento

Prova do Lema: (continuação)

Agora, considere $x = w_1 \dots w_{j-1}$, $y = w_j \dots w_{k-1}$ e $z = w_k \dots w_n$, então temos que:

1. O AFD M deve aceitar qualquer cadeia xy^iz, para $i \geq 0$.
2. $|y| > 0$, já que $j \neq k$.
3. $|xy| \leq p$, já que $k \leq p+1$.



$$r_1, r_2, \dots, \mathbf{r_j}, \dots, \mathbf{r_k}, \dots, r_{n+1}$$

Portanto:

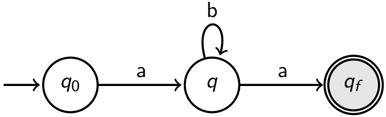
$$xy^iz \in L$$

□

Lema do Bombeamento

Exemplo do Lema: $L_3 = \{ab^na \mid n \geq 0\}$

- Sabemos que L_3 é regular:



$L(M_3) = L_3$

- Pelo *Lema do bombeamento* podemos reescrever $w = xyz \in L_3$, com $|w| \geq p$ e, nesse caso $p = 3$, tal que:
  1. $w = xy^iz \in L_3$, para qualquer $i \geq 0$;
  2. $|y| > 0$; e
  3. $|xy| \leq p$.

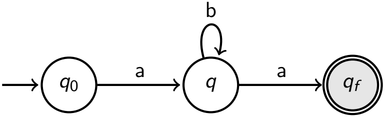
$$a\underline{b}a \rightarrow \{aa, a\underline{b}a, a\underline{bb}a, a\underline{bbb}a, \ldots\}$$
$$a\underline{b}bba \rightarrow \{abba, a\underline{b}bba, a\underline{bb}bba, a\underline{bbb}bba, \ldots\}$$
$$ab\underline{b}bbba \rightarrow \{abbbba, ab\underline{b}bbbba, ab\underline{bb}bbbba, ab\underline{bbb}bbbba, \ldots\}$$

Algumas divisões possíveis de $\underline{w}$ produzem cadeias fora de L_3, ex: $w = \mathcal{E}\underline{ab}a$.

Lema do Bombeamento

Exemplo do Lema: $L_3 = \{ab^na \mid n \geq 0\}$

- Sabemos que L_3 é regular:



$$L(M_3) = L_3$$

- Pelo *Lema do bombeamento* podemos reescrever $w = xyz \in L_3$, com $|w| \geq p$ e, nesse caso $p = 3$, tal que:
  1. $w = xy^iz \in L_3$, para qualquer $i \geq 0$;
  2. $|y| > 0$; e
  3. $|xy| \leq p$.

$$a\underline{b}a \rightarrow \{aa, a\underline{b}a, a\underline{bb}a, a\underline{bbb}a, \ldots\}$$

$$a\underline{b}bba \rightarrow \{abba, a\underline{b}bba, a\underline{bb}bba, a\underline{bbb}bba, \ldots\}$$

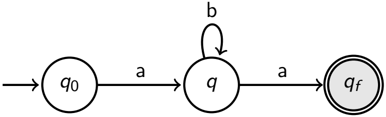
$$ab\underline{b}bbbba \rightarrow \{abbbbba, ab\underline{b}bbbba, ab\underline{bb}bbbba, ab\underline{bbb}bbbba, \ldots\}$$

Algumas divisões possíveis de $\underline{w}$ produzem cadeias fora de L_3, ex: $w = \mathcal{E}\underline{ab}a$.

Lema do Bombeamento

<u>Exemplo do Lema:</u> $L_3 = \{ab^n a \mid n \geq 0\}$

- Sabemos que L_3 é regular:



$$L(M_3) = L_3$$

- Pelo *Lema do bombeamento* podemos reescrever $\underline{w = xyz \in L_3}$, com $|w| \geq p$ e, nesse caso $p = 3$, tal que:
  1. $\underline{w = xy^i z \in L_3}$, para qualquer $i \geq 0$;
  2. $|y| > 0$; e
  3. $|xy| \leq p$.

$$a\underline{b}a \rightarrow \{aa, a\underline{b}a, a\underline{bb}a, a\underline{bbb}a, \dots\}$$

$$a\underline{b}bba \rightarrow \{abba, a\underline{b}bba, a\underline{bb}bba, a\underline{bbb}bba, \dots\}$$

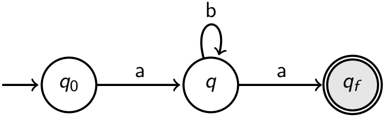
$$ab\underline{b}bbbba \rightarrow \{abbbbba, ab\underline{b}bbbba, ab\underline{bb}bbbba, ab\underline{bbb}bbbba, \dots\}$$

Algumas divisões possíveis de $\underline{w}$ produzem cadeias fora de L_3, ex: $w = \mathcal{E}\underline{ab}a$.

Lema do Bombeamento

Exemplo do Lema: $L_3 = \{ab^n a \mid n \geq 0\}$

- Sabemos que L_3 é regular:



$L(M_3) = L_3$

- Pelo *Lema do bombeamento* podemos reescrever $w = xyz \in L_3$, com $|w| \geq p$ e, nesse caso $p = 3$, tal que:
  1. $w = xy^i z \in L_3$, para qualquer $i \geq 0$;
  2. $|y| > 0$; e
  3. $|xy| \leq p$.

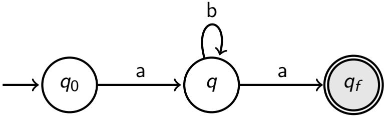
$$a\underline{b}a \rightarrow \{aa, a\underline{b}a, a\underline{bb}a, a\underline{bbb}a, \dots\}$$
$$a\underline{b}bba \rightarrow \{abba, a\underline{b}bba, a\underline{bb}bba, a\underline{bbb}bba, \dots\}$$
$$ab\underline{b}bbbba \rightarrow \{abbbbba, ab\underline{b}bbbba, ab\underline{bb}bbbba, ab\underline{bbb}bbbba, \dots\}$$

Algumas divisões possíveis de w produzem cadeias fora de L_3, ex: $w = \mathcal{E}\underline{a}ba$.

Lema do Bombeamento

Exemplo do Lema: $L_3 = \{ab^n a \mid n \geq 0\}$

- Sabemos que L_3 é regular:



$$L(M_3) = L_3$$

- Pelo *Lema do bombeamento* podemos reescrever $w = xyz \in L_3$, com $|w| \geq p$ e, nesse caso $p = 3$, tal que:
  1. $w = xy^i z \in L_3$, para qualquer $i \geq 0$;
  2. $|y| > 0$; e
  3. $|xy| \leq p$.

$$a\underline{b}a \to \{aa, a\underline{b}a, a\underline{bb}a, a\underline{bbb}a, \ldots\}$$
$$a\underline{b}bba \to \{abba, a\underline{b}bba, a\underline{bb}bba, a\underline{bbb}bba, \ldots\}$$
$$ab\underline{b}bbbba \to \{abbbbba, ab\underline{b}bbbba, ab\underline{bb}bbbba, ab\underline{bbb}bbbba, \ldots\}$$

Algumas divisões possíveis de w produzem cadeias fora de L_3, ex: $w = \mathcal{E}\underline{ab}a$.

Lema do Bombeamento

Importante:

O lema do bombeamento **não é** uma condição necessária e suficiente para a regularidade de uma linguagem:

- Se o lema não é satisfeito para $L \implies L$ não é regular.
- Mas se o lema é satisfeito para L, então L pode ou não ser regular.

Lema do Bombeamento

Vamos usar o **Lema do Bombeamento** para provar que uma linguagem L não é regular.

Uso do Lema do Bombeamento:

Lema L é uma **LR** $\rightarrow \exists$ propriedades do bombeamento

Uso $\nexists$ propriedades do bombeamento $\rightarrow L$ **não é** uma **LR**

Para cada caso, iremos construir uma prova por absurdo.

Relembrando: Se $P \rightarrow Q$ então $\neg Q \rightarrow \neg P$ (Contrapositiva).

Lema do Bombeamento

Vamos usar o **Lema do Bombeamento** para provar que uma linguagem L não é regular.

Uso do Lema do Bombeamento:

Lema L é uma **LR** $\rightarrow \exists$ propriedades do bombeamento

Uso $\nexists$ propriedades do bombeamento $\rightarrow$ L **não é** uma **LR**

Para cada caso, iremos construir uma prova por absurdo.

Relembrando: Se $P \rightarrow Q$ então $\neg Q \rightarrow \neg P$ (Contrapositiva).

Lema do Bombeamento

Vamos usar o **Lema do Bombeamento** para provar que uma linguagem L não é regular.

Uso do Lema do Bombeamento:

Lema L é uma **LR** $\rightarrow \exists$ propriedades do bombeamento

Uso $\nexists$ propriedades do bombeamento $\rightarrow$ L **não é** uma **LR**

Para cada caso, iremos construir uma prova por absurdo.

Relembrando: Se $P \rightarrow Q$ então $\neg Q \rightarrow \neg P$ (Contrapositiva).

Lema do Bombeamento

Antes, vamos pensar no seguinte caso:

- E se a linguagem L possui apenas palavras com tamanho menor do que p?

$$L_4 = \{a^n b^n \mid n \leq 5\}$$

  - Por vacuidade, todos os casos do lema para $|w| \geq p$ são verdadeiros.
  - Nesses casos em que L possui apenas $|w|$ limitado, sempre podemos construir um AFD para reconhecer L:

$L_4 = L(M_4)$

Corolário:

Toda linguagem L finita é uma Linguagem Regular.

Lema do Bombeamento

Antes, vamos pensar no seguinte caso:

- E se a linguagem L possui apenas palavras com tamanho menor do que p?

$$L_4 = \{a^n b^n \mid n \leq 5\}$$

  - Por vacuidade, todos os casos do lema para $|w| \geq p$ são verdadeiros.
  - Nesses casos em que L possui apenas $|w|$ limitado, sempre podemos construir um AFD para reconhecer L:

$L_4 = L(M_4)$

Corolário:

Toda linguagem L finita é uma Linguagem Regular.

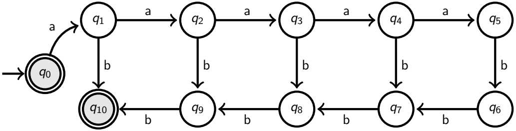
Lema do Bombeamento

Antes, vamos pensar no seguinte caso:

- E se a linguagem L possui apenas palavras com tamanho menor do que p?

$$L_4 = \{a^n b^n \mid n \leq 5\}$$

  - Por vacuidade, todos os casos do lema para $|w| \geq p$ são verdadeiros.
  - Nesses casos em que L possui apenas $|w|$ limitado, sempre podemos construir um AFD para reconhecer L:



$L_4 = L(M_4)$

Corolário:

Toda linguagem L finita é uma Linguagem Regular.

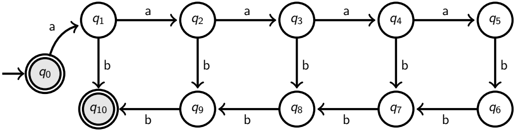
Lema do Bombeamento

Antes, vamos pensar no seguinte caso:

- E se a linguagem L possui apenas palavras com tamanho menor do que p?

$$L_4 = \{a^n b^n \mid n \leq 5\}$$

  - Por vacuidade, todos os casos do lema para $|w| \geq p$ são verdadeiros.
  - Nesses casos em que L possui apenas $|w|$ limitado, sempre podemos construir um AFD para reconhecer L:



$L_4 = L(M_4)$

Corolário:

Toda linguagem L finita é uma Linguagem Regular.

Roteiro

1. Lema do Bombeamento para Linguagens Regulares
   - Limitações dos AFs
   - Enunciado do Lema do Bombeamento
   - Linguagens Não-Regulares
2. Operações sobre Linguagens
   - Operações Regulares
   - Fecho sobre as Operações Regulares
   - Outras Operações
3. Referências

Exemplo 1

$$L_5 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

Suponha que L_5 é regular, e p o comprimento de bombeamento, considere $\underline{w = \mathbf{a}^p\mathbf{b}^p \in L_5}$, com $|w| \geq p$.

Casos:

Exemplo 1

$$L_5 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

Suponha que L_5 é regular, e p o comprimento de bombeamento, considere $\underline{w = \mathbf{a}^p\mathbf{b}^p \in L_5}$, com $|w| \geq p$.

Pelo *Lema do bombeamento* reescrevemos $w = xyz$, tal que:

Casos:

Exemplo 1

$$L_5 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

Suponha que L_5 é regular, e p o comprimento de bombeamento, considere $\underline{w = \mathbf{a}^p\mathbf{b}^p \in L_5}$, com $|w| \geq p$.

- Pelo *Lema do bombeamento* reescrevemos $w = \underline{xyz}$, tal que:
  1. $w = \underline{xy^iz} \in L_5$, para qualquer $i \geq 0$;
  2. $|y| > 0$; e
  3. $|xy| \leq p$.
- Casos:

  Vamos supor que $\underline{y}$ contém apenas a's:

  Vamos supor que $\underline{y}$ contém apenas b's:

  Vamos supor que $\underline{y = a \ldots ab \ldots b}$:

Exemplo 1

$$L_5 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

Suponha que L_5 é regular, e p o comprimento de bombeamento, considere $w = \mathbf{a}^p\mathbf{b}^p \in L_5$, com $|w| \geq p$.

- Pelo *Lema do bombeamento* reescrevemos $w = xyz$, tal que:
  1. $w = xy^iz \in L_5$, para qualquer $i \geq 0$;
  2. $|y| > 0$; e
  3. $|xy| \leq p$.
- Casos:

Exemplo 1

$$L_5 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

Suponha que L_5 é regular, e p o comprimento de bombeamento, considere $\underline{w = \mathbf{a}^p\mathbf{b}^p \in L_5}$, com $|w| \geq p$.

- Pelo *Lema do bombeamento* reescrevemos $w = \underline{xyz}$, tal que:
  1. $w = \underline{xy^iz} \in L_5$, para qualquer $i \geq 0$;
  2. $|y| > 0$; e
  3. $|xy| \leq p$.
- Casos:
  - Vamos supor que $\underline{y}$ contém apenas a's:
  - Vamos supor que $\underline{y}$ contém apenas b's:
  - Vamos supor que $\underline{y = a\ldots ab\ldots b}$:

Exemplo 1

$$L_5 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

Suponha que L_5 é regular, e p o comprimento de bombeamento, considere $\underline{w = \mathbf{a}^p\mathbf{b}^p \in L_5}$, com $|w| \geq p$.

- Pelo *Lema do bombeamento* reescrevemos $w = \underline{xyz}$, tal que:
  1. $w = \underline{xy^iz} \in L_5$, para qualquer $i \geq 0$;
  2. $|y| > 0$; e
  3. $|xy| \leq p$.
- Casos:
  - Vamos supor que $\underline{y}$ contém apenas a's:
  - Vamos supor que $\underline{y}$ contém apenas b's:
  - Vamos supor que $\underline{y = a \ldots ab \ldots b}$:

Exemplo 1

$$L_5 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

Suponha que L_5 é regular, e p o comprimento de bombeamento, considere $\underline{w = \mathbf{a}^p\mathbf{b}^p \in L_5}$, com $|w| \geq p$.

- Pelo *Lema do bombeamento* reescrevemos $w = \underline{xyz}$, tal que:
  1. $w = \underline{xy^iz} \in L_5$, para qualquer $i \geq 0$;
  2. $|y| > 0$; e
  3. $|xy| \leq p$.
- Casos:
  - Vamos supor que $\underline{y}$ contém apenas a's:
    Neste caso, $\underline{xy^2z}$ tem mais a's do que b's, e $xy^2z \notin L_5 \leftarrow$ Contradição!
  - Vamos supor que $\underline{y}$ contém apenas b's:
    Da mesma forma, $xy^2z \notin L_5 \leftarrow$ Contradição!
  - Vamos supor que $\underline{y = a \ldots ab \ldots b}$:
    $xy^2z = x\,\underline{a \ldots ab \ldots b}\,\underline{a \ldots ab \ldots b}\,z \notin L_5 \leftarrow$ Contradição!

Exemplo 1

$$L_5 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

Suponha que L_5 é regular, e p o comprimento de bombeamento, considere $w = \mathbf{a}^p\mathbf{b}^p \in L_5$, com $|w| \geq p$.

- Pelo *Lema do bombeamento* reescrevemos $w = xyz$, tal que:
  1. $w = xy^iz \in L_5$, para qualquer $i \geq 0$;
  2. $|y| > 0$; e
  3. $|xy| \leq p$.
- Casos:
  - Vamos supor que y contém apenas a's:
    - Neste caso, xy^2z tem mais a's do que b's, e $xy^2z \notin L_5 \leftarrow$ **Contradição!**
  - Vamos supor que y contém apenas b's:
  - Vamos supor que $y = a \ldots ab \ldots b$:

Exemplo 1

$$L_5 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

Suponha que L_5 é regular, e p o comprimento de bombeamento, considere $w = \mathbf{a}^p\mathbf{b}^p \in L_5$, com $|w| \geq p$.

- Pelo *Lema do bombeamento* reescrevemos $w = xyz$, tal que:
  1. $w = xy^iz \in L_5$, para qualquer $i \geq 0$;
  2. $|y| > 0$; e
  3. $|xy| \leq p$.

- Casos:
  - Vamos supor que y contém apenas a's:
    - Neste caso, xy^2z tem mais a's do que b's, e $xy^2z \notin L_5$ ← **Contradição!**
  - Vamos supor que y contém apenas b's:
    - Da mesma forma, $xy^2z \notin L_5$ ← Contradição!
  - Vamos supor que $y = a\ldots ab\ldots b$:

Exemplo 1

$$L_5 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

Suponha que L_5 é regular, e p o comprimento de bombeamento, considere $w = \mathbf{a}^p\mathbf{b}^p \in L_5$, com $|w| \geq p$.

- Pelo *Lema do bombeamento* reescrevemos $w = xyz$, tal que:
  1. $w = xy^iz \in L_5$, para qualquer $i \geq 0$;
  2. $|y| > 0$; e
  3. $|xy| \leq p$.
- Casos:
  - Vamos supor que y contém apenas a's:
    - Neste caso, xy^2z tem mais a's do que b's, e $xy^2z \notin L_5$ ← **Contradição!**
  - Vamos supor que y contém apenas b's:
    - Da mesma forma, $xy^2z \notin L_5$. ← **Contradição!**
  - Vamos supor que $y = a \ldots ab \ldots b$:
    - $xy^2z = x\,a \ldots ab \ldots b\,a \ldots ab \ldots b\,z \notin L_5$ ← **Contradição!**

Exemplo 1

$$L_5 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

Suponha que L_5 é regular, e p o comprimento de bombeamento, considere $\underline{w = \mathbf{a}^p\mathbf{b}^p \in L_5}$, com $|w| \geq p$.

- Pelo *Lema do bombeamento* reescrevemos $w = \underline{xyz}$, tal que:
  1. $w = \underline{xy^iz} \in L_5$, para qualquer $i \geq 0$;
  2. $|y| > 0$; e
  3. $|xy| \leq p$.

- Casos:
  - Vamos supor que $\underline{y}$ contém apenas a's:
    - Neste caso, $\underline{xy^2z}$ tem mais a's do que b's, e $xy^2z \notin L_5 \leftarrow$ **Contradição!**
  - Vamos supor que $\underline{y}$ contém apenas b's:
    - Da mesma forma, $xy^2z \notin L_5$. $\leftarrow$ **Contradição!**
  - Vamos supor que $\underline{y = a \ldots ab \ldots b}$:
    - $xy^2z = x\,\underline{a \ldots ab \ldots b\, a \ldots ab \ldots b}\,z \notin L_5 \leftarrow$ **Contradição!**

Exemplo 1

$$L_5 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

Suponha que L_5 é regular, e p o comprimento de bombeamento, considere $\underline{w = \mathbf{a}^p\mathbf{b}^p \in L_5}$, com $|w| \geq p$.

- Pelo *Lema do bombeamento* reescrevemos $w = \underline{xyz}$, tal que:
  1. $w = \underline{xy^iz} \in L_5$, para qualquer $i \geq 0$;
  2. $|y| > 0$; e
  3. $|xy| \leq p$.

- Casos:
  - Vamos supor que $\underline{y}$ contém apenas a's:
    - Neste caso, $\underline{xy^2z}$ tem mais a's do que b's, e $xy^2z \notin L_5$ ← **Contradição!**
  - Vamos supor que $\underline{y}$ contém apenas b's:
    - Da mesma forma, $xy^2z \notin L_5$. ← **Contradição!**
  - Vamos supor que $\underline{y = a \dots ab \dots b}$:
    - $xy^2z = x\ \underline{a \dots ab \dots b}\ \underline{a \dots ab \dots b}\ z \notin L_5$. ← **Contradição!** □

∄ propriedades do bombeamento → L não é uma LR

Exemplo 1

$$L_5 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

Suponha que L_5 é regular, e p o comprimento de bombeamento, considere $\underline{w = \mathbf{a}^p \mathbf{b}^p \in L_5}$, com $|w| \geq p$.

- Pelo *Lema do bombeamento* reescrevemos $w = \underline{xyz}$, tal que:
  1. $w = \underline{xy^iz} \in L_5$, para qualquer $i \geq 0$;
  2. $|y| > 0$; e
  3. $|xy| \leq p$.
- Casos:
  - Vamos supor que $\underline{y}$ contém apenas a's:
    - Neste caso, $\underline{xy^2z}$ tem mais a's do que b's, e $xy^2z \notin L_5$ $\leftarrow$ **Contradição!**
  - Vamos supor que $\underline{y}$ contém apenas b's:
    - Da mesma forma, $xy^2z \notin L_5$. $\leftarrow$ **Contradição!**
  - Vamos supor que $\underline{y = a \ldots ab \ldots b}$:
    - $xy^2z = x\ \underline{a \ldots ab \ldots b}\ \underline{a \ldots ab \ldots b}\ z \notin L_5$. $\leftarrow$ **Contradição!** $\square$

$\nexists$ propriedades do bombeamento $\rightarrow$ L **não é uma LR**

Exemplo 1

$$L_5 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

Suponha que L_5 é regular, e p o comprimento de bombeamento, considere $\underline{w = \mathbf{a}^p\mathbf{b}^p \in L_5}$, com $|w| \geq p$.

- Pelo *Lema do bombeamento* reescrevemos $w = \underline{xyz}$, tal que:
  1. $w = \underline{xy^iz} \in L_5$, para qualquer $i \geq 0$;
  2. $|y| > 0$; e
  3. $|xy| \leq p$.
- Casos:
  - Vamos supor que $\underline{y}$ contém apenas a's:
    - Neste caso, $\underline{xy^2z}$ tem mais a's do que b's, e $xy^2z \notin L_5 \leftarrow$ **Contradição!**
  - Vamos supor que $\underline{y}$ contém apenas b's:
    - Da mesma forma, $xy^2z \notin L_5$. $\leftarrow$ **Contradição!**
  - Vamos supor que $\underline{y = a \ldots ab \ldots b}$:
    - $xy^2z = x\ \underline{a \ldots ab \ldots b}\ \underline{a \ldots ab \ldots b}\ z \notin L_5$. $\leftarrow$ **Contradição!** $\square$

$\nexists$ propriedades do bombeamento $\rightarrow$ L **não é** uma **LR**

Exemplo 2

$$L_6 = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

Suponha que L_6 é regular, e p o comprimento de bombeamento, considere $w = 0^p10^p1 \in L_6$, com $|w| \geq p$.

- Pelo *Lema do bombeamento* reescrevemos $w = xyz$, tal que:
  1. $w = xy^iz \in L_6$, para qualquer $i \geq 0$;
  2. $|y| > 0$; e
  3. $|xy| \leq p$.

- Casos:

  Pela condição (3): $|xy| \leq p \implies y$ contém apenas 0's

Exemplo 2

$$L_6 = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

Suponha que L_6 é regular, e p o comprimento de bombeamento, considere $\underline{w = 0^p 1 0^p 1 \in L_6}$, com $|w| \geq p$.

- Pelo *Lema do bombeamento* reescrevemos $w = \underline{xyz}$, tal que:
  1. $w = \underline{xy^iz} \in L_6$, para qualquer $i \geq 0$;
  2. $|y| > 0$; e
  3. $|xy| \leq p$.
- Casos:

  Pela condição (3): $|xy| \leq p \implies \underline{y}$ contém apenas 0's

Exemplo 2

$$L_6 = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

Suponha que L_6 é regular, e p o comprimento de bombeamento, considere $\underline{w = 0^p10^p1 \in L_6}$, com $|w| \geq p$.

- Pelo *Lema do bombeamento* reescrevemos $w = \underline{xyz}$, tal que:
  1. $w = \underline{xy^iz} \in L_6$, para qualquer $i \geq 0$;
  2. $|y| > 0$; e
  3. $|xy| \leq p$.

- Casos:
  - Pela condição (3): $|xy| \leq p \implies \underline{y}$ contém apenas 0's

Exemplo 2

$$L_6 = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

Suponha que L_6 é regular, e p o comprimento de bombeamento, considere $\underline{w = 0^p10^p1 \in L_6}$, com $|w| \geq p$.

- Pelo *Lema do bombeamento* reescrevemos $w = \underline{xyz}$, tal que:
  1. $w = \underline{xy^iz} \in L_6$, para qualquer $i \geq 0$;
  2. $|y| > 0$; e
  3. $|xy| \leq p$.

- Casos:
  - Pela condição (3): $|xy| \leq p \implies \underline{y}$ contém apenas 0's
    - Logo, para $i \geq 2$, $\underline{xy^iz \notin L_6} \leftarrow$ **Contradição!**
    - Por exemplo, $xy^2z = 0\ldots0\underline{0\ldots0}\ \underline{0\ldots0}\ 1\underline{0\ldots0}1 \notin L_6$

$\square$

$\nexists$ propriedades do bombeamento $\implies L$ não é uma LR

Exemplo 2

$$L_6 = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

Suponha que L_6 é regular, e p o comprimento de bombeamento, considere $\underline{w = 0^p10^p1 \in L_6}$, com $|w| \geq p$.

- Pelo *Lema do bombeamento* reescrevemos $w = \underline{xyz}$, tal que:
  1. $w = \underline{xy^iz} \in L_6$, para qualquer $i \geq 0$;
  2. $|y| > 0$; e
  3. $|xy| \leq p$.

- Casos:
  - Pela condição (3): $|xy| \leq p \implies \underline{y}$ contém apenas 0's
    - Logo, para $i \geq 2$, $\underline{xy^iz \notin L_6} \leftarrow$ **Contradição!**
    - Por exemplo, $xy^2z = 0\ldots0\underline{0\ldots0}\ \underline{0\ldots0}\ 1\underline{0\ldots0}1 \notin L_6$

Exemplo 2

$$L_6 = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

Suponha que L_6 é regular, e p o comprimento de bombeamento, considere $\underline{w = 0^p10^p1 \in L_6}$, com $|w| \geq p$.

- Pelo *Lema do bombeamento* reescrevemos $w = \underline{xyz}$, tal que:
  1. $w = \underline{xy^iz} \in L_6$, para qualquer $i \geq 0$;
  2. $|y| > 0$; e
  3. $|xy| \leq p$.

- Casos:
  - Pela condição (3): $|xy| \leq p \implies \underline{y}$ contém apenas 0's
    - Logo, para $i \geq 2$, $\underline{xy^iz \notin L_6} \leftarrow$ **Contradição!**
    - Por exemplo, $xy^2z = 0\ldots0\underline{0\ldots0}\ \underline{0\ldots0}\ 1\underline{0\ldots0}1 \notin L_6$

$\square$

$\nexists$ propriedades do bombeamento $\rightarrow$ L **não é uma LR**

Exemplo 2

$$L_6 = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

Suponha que L_6 é regular, e p o comprimento de bombeamento, considere $\underline{w = 0^p10^p1 \in L_6}$, com $|w| \geq p$.

- Pelo *Lema do bombeamento* reescrevemos $w = \underline{xyz}$, tal que:
  1. $w = \underline{xy^iz} \in L_6$, para qualquer $i \geq 0$;
  2. $|y| > 0$; e
  3. $|xy| \leq p$.

- Casos:
  - Pela condição (3): $|xy| \leq p \implies \underline{y}$ contém apenas 0's
    - Logo, para $i \geq 2$, $\underline{xy^iz \notin L_6} \leftarrow$ **Contradição!**
    - Por exemplo, $xy^2z = 0\ldots0\underline{0\ldots0}\ \underline{0\ldots0}\ 1\underline{0\ldots0}1 \notin L_6$

$\square$

$\nexists$ propriedades do bombeamento $\rightarrow$ L **não é** uma **LR**

Roteiro

Roteiro

Operações Regulares

Definição:

Sejam A e B duas linguagens. Definimos as seguintes *operações sobre linguagens*:

1. **União**: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
2. **Concatenação**: $AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$.
3. **Estrela**: $A^* = \{x_1 x_2 \ldots x_k \mid k \geq 0 \text{ e cada } x_i \in A\}$.

Exemplos:

- Considere $A = \{\texttt{legal}, \texttt{ruim}\}$ e $B = \{\texttt{garoto}, \texttt{garota}\}$:
  1. $A \cup B = \{\texttt{legal}, \texttt{ruim}, \texttt{garoto}, \texttt{garota}\}$
  2. $AB = \{\texttt{legalgaroto}, \texttt{legalgarota}, \texttt{ruimgaroto}, \texttt{ruimgarota}\}$

Operações Regulares

Definição:

Sejam A e B duas linguagens. Definimos as seguintes *operações sobre linguagens*:

1. **União**: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
2. **Concatenação**: $AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$.
3. **Estrela**: $A^* = \{x_1 x_2 \ldots x_k \mid k \geq 0 \text{ e cada } x_i \in A\}$.

Exemplos:

- Considere $A = \{\texttt{legal}, \texttt{ruim}\}$ e $B = \{\texttt{garoto}, \texttt{garota}\}$:
  1. $A \cup B = \{\texttt{legal}, \texttt{ruim}, \texttt{garoto}, \texttt{garota}\}$
  2. $AB = \{\texttt{legalgaroto}, \texttt{legalgarota}, \texttt{ruimgaroto}, \texttt{ruimgarota}\}$
  3. $A^* = \{\varepsilon, \texttt{legal}, \texttt{legallegal}, \texttt{legalruim}, \texttt{ruim}, \texttt{ruimruim}, \ldots\}$

Operações Regulares

Definição:

Sejam A e B duas linguagens. Definimos as seguintes *operações sobre linguagens*:

1. **União**: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
2. **Concatenação**: $AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$.
3. **Estrela**: $A^* = \{x_1 x_2 \ldots x_k \mid k \geq 0 \text{ e cada } x_i \in A\}$.

Exemplos:

- Considere $A = \{\texttt{legal}, \texttt{ruim}\}$ e $B = \{\texttt{garoto}, \texttt{garota}\}$:
  1. $A \cup B = \{\texttt{legal}, \texttt{ruim}, \texttt{garoto}, \texttt{garota}\}$
  2. $AB = \{\texttt{legalgaroto}, \texttt{legalgarota}, \texttt{ruimgaroto}, \texttt{ruimgarota}\}$
  3. $A^* = \{\varepsilon, \texttt{legal}, \texttt{legallegal}, \texttt{legalruim}, \texttt{ruim}, \texttt{ruimruim}, \ldots\}$

Operações Regulares

Definição:

Sejam A e B duas linguagens. Definimos as seguintes *operações sobre linguagens*:

1. **União**: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
2. **Concatenação**: $AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$.
3. **Estrela**: $A^* = \{x_1 x_2 \dots x_k \mid k \geq 0 \text{ e cada } x_i \in A\}$.

Exemplos:

- Considere $A = \{\texttt{legal}, \texttt{ruim}\}$ e $B = \{\texttt{garoto}, \texttt{garota}\}$:
  1. $A \cup B = \{\texttt{legal}, \texttt{ruim}, \texttt{garoto}, \texttt{garota}\}$
  2. $AB = \{\texttt{legalgaroto}, \texttt{legalgarota}, \texttt{ruimgaroto}, \texttt{ruimgarota}\}$
  3. $A^* = \{\varepsilon, \texttt{legal}, \texttt{legallegal}, \texttt{legalruim}, \texttt{ruim}, \texttt{ruimruim}, \dots\}$

Operações Regulares

Definição:

Sejam A e B duas linguagens. Definimos as seguintes *operações sobre linguagens*:

1. **União**: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
2. **Concatenação**: $AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$.
3. **Estrela**: $A^* = \{x_1 x_2 \ldots x_k \mid k \geq 0 \text{ e cada } x_i \in A\}$.

Exemplos:

- Considere $A = \{\texttt{legal}, \texttt{ruim}\}$ e $B = \{\texttt{garoto}, \texttt{garota}\}$:
  1. $A \cup B = \{\texttt{legal}, \texttt{ruim}, \texttt{garoto}, \texttt{garota}\}$
  2. $AB = \{\texttt{legalgaroto}, \texttt{legalgarota}, \texttt{ruimgaroto}, \texttt{ruimgarota}\}$
  3. $A^* = \{\varepsilon, \texttt{legal}, \texttt{legallegal}, \texttt{legalruim}, \texttt{ruim}, \texttt{ruimruim}, \ldots\}$

Operações Regulares

Definição:

Sejam A e B duas linguagens. Definimos as seguintes *operações sobre linguagens*:

1. **União**: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
2. **Concatenação**: $AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$.
3. **Estrela**: $A^* = \{x_1 x_2 \dots x_k \mid k \geq 0 \text{ e cada } x_i \in A\}$.

Exemplos:

- Considere $A = \{\texttt{legal}, \texttt{ruim}\}$ e $B = \{\texttt{garoto}, \texttt{garota}\}$:
  1. $A \cup B = \{\texttt{legal}, \texttt{ruim}, \texttt{garoto}, \texttt{garota}\}$
  2. $AB = \{\texttt{legalgaroto}, \texttt{legalgarota}, \texttt{ruimgaroto}, \texttt{ruimgarota}\}$
  3. $A^* = \{\mathcal{E}, \texttt{legal}, \texttt{legallegal}, \texttt{legalruim}, \texttt{ruim}, \texttt{ruimruim}, \dots\}$

Operações Regulares

Definição:

Sejam A e B duas linguagens. Definimos as seguintes *operações sobre linguagens*:

1. **União**: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
2. **Concatenação**: $AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$.
3. **Estrela**: $A^* = \{x_1 x_2 \dots x_k \mid k \geq 0 \text{ e cada } x_i \in A\}$.

Exemplos:

- Considere $A = \{\texttt{legal}, \texttt{ruim}\}$ e $B = \{\texttt{garoto}, \texttt{garota}\}$:
  1. $A \cup B = \{\texttt{legal}, \texttt{ruim}, \texttt{garoto}, \texttt{garota}\}$
  2. $AB = \{\texttt{legalgaroto}, \texttt{legalgarota}, \texttt{ruimgaroto}, \texttt{ruimgarota}\}$
  3. $A^* = \{\mathcal{E}, \texttt{legal}, \texttt{legallegal}, \texttt{legalruim}, \texttt{ruim}, \texttt{ruimruim}, \dots\}$

Definição:

Sejam A e B duas linguagens. Definimos as seguintes *operações sobre linguagens*:

1. **União**: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
2. **Concatenação**: $AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$.
3. **Estrela**: $A^* = \{x_1 x_2 \ldots x_k \mid k \geq 0 \text{ e cada } x_i \in A\}$.

Exemplos:

- Considere $A = \{\texttt{legal}, \texttt{ruim}\}$ e $B = \{\texttt{garoto}, \texttt{garota}\}$:
  1. $A \cup B = \{\texttt{legal}, \texttt{ruim}, \texttt{garoto}, \texttt{garota}\}$
  2. $AB = \{\texttt{legalgaroto}, \texttt{legalgarota}, \texttt{ruimgaroto}, \texttt{ruimgarota}\}$
  3. $A^* = \{\mathcal{E}, \texttt{legal}, \texttt{legallegal}, \texttt{legalruim}, \texttt{ruim}, \texttt{ruimruim}, \ldots\}$

Operações Regulares

Definição:

Sejam A e B duas linguagens. Definimos as seguintes *operações sobre linguagens*:

1. **União**: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
2. **Concatenação**: $AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$.
3. **Estrela**: $A^* = \{x_1 x_2 \ldots x_k \mid k \geq 0 \text{ e cada } x_i \in A\}$.

Exemplos:

- Considere $A = \{\texttt{legal}, \texttt{ruim}\}$ e $B = \{\texttt{garoto}, \texttt{garota}\}$:
  1. $A \cup B = \{\texttt{legal}, \texttt{ruim}, \texttt{garoto}, \texttt{garota}\}$
  2. $AB = \{\texttt{legalgaroto}, \texttt{legalgarota}, \texttt{ruimgaroto}, \texttt{ruimgarota}\}$
  3. $A^* = \{\mathcal{E}, \texttt{legal}, \texttt{legallegal}, \texttt{legalruim}, \texttt{ruim}, \texttt{ruimruim}, \ldots\}$

Relembrando...

Definição

Dizemos que uma coleção de objetos $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ é **fechada** sobre uma operação $\circ$ se quando aplicamos essa operação a membros da coleção:

$$x_i \circ x_j = x_k$$

obtemos objetos da mesma coleção $x_i, x_j, x_k \in X$.

Por Exemplo:

- Considere o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$

Relembrando...

Definição

Dizemos que uma coleção de objetos $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ é **fechada** sobre uma operação $\circ$ se quando aplicamos essa operação a membros da coleção:

$$x_i \circ x_j = x_k$$

obtemos objetos da mesma coleção $x_i, x_j, x_k \in X$.

Por Exemplo:

- Considere o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$:
  1. $\mathbb{N}$ é fechado sobre a operação de **multiplicação**, já que para quaisquer $x, y \in \mathbb{N}$, $x * y$ está em $\mathbb{N}$.
  2. Entretanto, $\mathbb{N}$ não é fechado sobre a **divisão**, pois 1 e 2 estão em $\mathbb{N}$, mas $1/2$ não está.

Relembrando...

Definição

Dizemos que uma coleção de objetos $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é **fechada** sobre uma operação $\circ$ se quando aplicamos essa operação a membros da coleção:

$$x_i \circ x_j = x_k$$

obtemos objetos da mesma coleção $x_i, x_j, x_k \in X$.

Por Exemplo:

- Considere o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$:
  1. $\mathbb{N}$ é fechado sobre a operação de **multiplicação**, já que para quaisquer $x, y \in \mathbb{N}$, $x * y$ está em $\mathbb{N}$.
  2. Entretanto, $\mathbb{N}$ não é fechado sobre a **divisão**, pois 1 e 2 estão em $\mathbb{N}$, mas $1/2$ não está.

Relembrando...

Definição

Dizemos que uma coleção de objetos $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ é **fechada** sobre uma operação $\circ$ se quando aplicamos essa operação a membros da coleção:

$$x_i \circ x_j = x_k$$

obtemos objetos da mesma coleção $x_i, x_j, x_k \in X$.

Por Exemplo:

- Considere o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$:
  1. $\mathbb{N}$ é fechado sobre a operação de **multiplicação**, já que para quaisquer $x, y \in \mathbb{N}$, $x * y$ está em $\mathbb{N}$.
  2. Entretanto, $\mathbb{N}$ não é fechado sobre a **divisão**, pois 1 e 2 estão em $\mathbb{N}$, mas $1/2$ não está.

Operações Regulares

Vamos ver que as Linguagens Regulares são fechadas sobre as operações de **União**, **Concatenação** e **Estrela**.

- Isso significa que podemos "formar" Linguagens Regulares a partir de outras com essas operações.
- Essas operações são chamadas de Operações Regulares.

Operações Regulares

Vamos ver que as Linguagens Regulares são fechadas sobre as operações de **União**, **Concatenação** e **Estrela**.

- Isso significa que podemos "formar" Linguagens Regulares a partir de outras com essas operações.
- Essas operações são chamadas de Operações Regulares.

Roteiro

Fecho sobre a operação de **União** $A_1 \cup A_2$

Teorema:

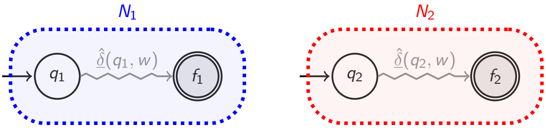
A classe das Linguagens Regulares é fechada sobre a operação de **União**.

Em outras palavras, se A_1 e A_2 são linguagens regulares, o mesmo vale para $A_1 \cup A_2 = \{x \mid x \in A_1 \text{ ou } x \in A_2\}$.

Fecho sobre a operação de **União** $A_1 \cup A_2$

Ideia da prova:

- Sejam N_1 e N_2 os AFN$_\mathcal{E}$s que reconhecem as linguagens A_1 e A_2.

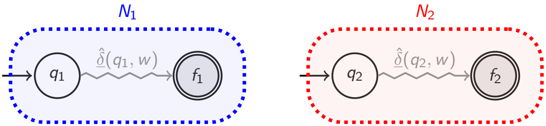


- Vamos construir um novo AFN$_\mathcal{E}$ N que aceita uma cadeia w se N_1 ou N_2 aceita w.

Fecho sobre a operação de **União** $A_1 \cup A_2$

Ideia da prova:

- Sejam N_1 e N_2 os AFN$_\mathcal{E}$s que reconhecem as linguagens A_1 e A_2.

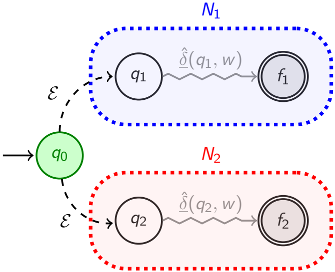


- Vamos construir um novo AFN$_\mathcal{E}$ N que aceita uma cadeia w se N_1 ou N_2 aceita w.

Fecho sobre a operação de **União** $A_1 \cup A_2$

Ideia da prova (continuação):

- O $\text{AFN}_{\mathcal{E}}$ N tem um novo estado inicial que ramifica para os estados inicias de N_1 e N_2 com arcos-$\mathcal{E}$:



- Não-determinísmo:
  - O novo $\text{AFN}_{\mathcal{E}}$ "adivinha" qual dos autômatos aceita a entrada. Se N_1 ou N_2 aceitar, N também aceitará.

Fecho sobre a operação de **União** $A_1 \cup A_2$

Prova:

- Suponha que:
  - $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ reconhece A_1; e
  - $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ reconhece A_2.

- Construa $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ para reconhecer $A_1 \cup A_2$.
  1. $Q = \{q_0\} \cup Q_1 \cup Q_2$
  2. q_0 é o estado inicial
  3. Os estados de aceitação são $F = F_1 \cup F_2$
  4. $$\delta(q, a) = \begin{cases} \delta_1(q, a) & q \in Q_1 \\ \delta_2(q, a) & q \in Q_2 \\ \{q_1\} \cup \{q_2\} & q = q_0 \text{ e } a = \mathcal{E} \\ \varnothing & q = q_0 \text{ e } a \neq \mathcal{E} \end{cases}$$

Por construção, é fácil ver que N aceita $w \iff N_1$ ou N_2 aceitam w.

$\square$

Fecho sobre a operação de **Concatenação** A_1A_2

Teorema:

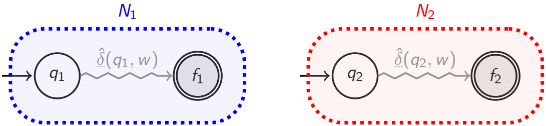
A classe das Linguagens Regulares é fechada sobre a operação de **Concatenação**.

Em outras palavras, se A_1 e A_2 são linguagens regulares, o mesmo vale para $A_1A_2 = \{xy \mid x \in A_1 \text{ e } y \in A_2\}$.

Fecho sobre a operação de **Concatenação** A_1A_2

Ideia da prova:

- Sejam N_1 e N_2 os AFN$_\mathcal{E}$s que reconhecem as linguagens A_1 e A_2.

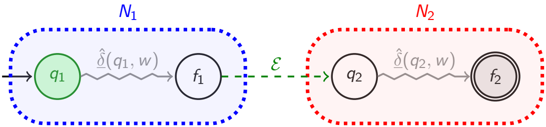


- Vamos construir um novo AFN$_\mathcal{E}$ N que aceita w se a primeira parte dela (prefixo) for aceita por N_1 e a segunda parte (sufixo) for aceito por N_2.

Fecho sobre a operação de **Concatenação** $A_1 A_2$

Ideia da prova (continuação):

- O estado inicial do $\text{AFN}_{\mathcal{E}}$ N é o mesmo de N_1.
- Os estados em F_1 tem arcos-$\mathcal{E}$ para q_2.
- $F = F_2$.



O aceita qualquer cadeia que pode ser dividida em duas partes, a primeira aceita por N_1 e a segunda por N_2.

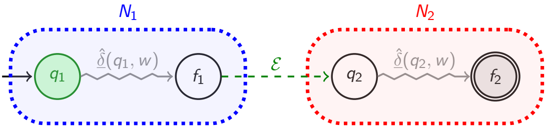
Não-determinismo

$A_1 A_2 = \{w \mid w = w_1 w_2 \text{ com } w_1 \in A_1 \text{ e } w_2 \in A_2\}$

Fecho sobre a operação de **Concatenação** $A_1 A_2$

Ideia da prova (continuação):

- O estado inicial do AFN$_\mathcal{E}$ N é o mesmo de N_1.
- Os estados em F_1 tem arcos-$\mathcal{E}$ para q_2.
- $F = F_2$.



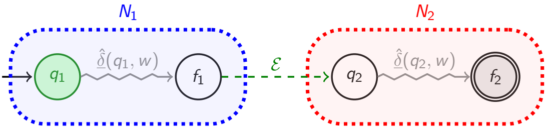
- O novo AFN$_\mathcal{E}$ aceita qualquer cadeia que pode ser dividida em duas partes, a primeira aceita por N_1 e a segunda por N_2.
- Não-determinísmo:

$A_1 A_2 = \{w \mid w = w_1 w_2 \text{ com } w_1 \in A_1 \text{ e } w_2 \in A_2\}$

Fecho sobre a operação de **Concatenação** A_1A_2

Ideia da prova (continuação):

- O estado inicial do $\text{AFN}_{\mathcal{E}}$ N é o mesmo de N_1.
- Os estados em F_1 tem arcos-$\mathcal{E}$ para q_2.
- $F = F_2$.



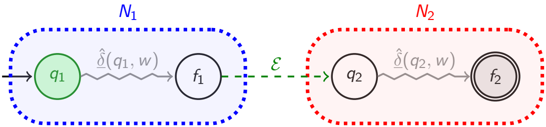
- O novo $\text{AFN}_{\mathcal{E}}$ aceita qualquer cadeia que pode ser dividida em duas partes, a primeira aceita por N_1 e a segunda por N_2.
- Não-determinísmo:
  - Podemos pensar que N "*adivinha*" onde dividir w.

$A_1A_2 = \{w \mid w = w_1w_2 \text{ com } w_1 \in A_1 \text{ e } w_2 \in A_2\}$

Fecho sobre a operação de **Concatenação** $A_1 A_2$

Ideia da prova (continuação):

- O estado inicial do AFN$_\mathcal{E}$ N é o mesmo de N_1.
- Os estados em F_1 tem arcos-$\mathcal{E}$ para q_2.
- $F = F_2$.



- O novo AFN$_\mathcal{E}$ aceita qualquer cadeia que pode ser dividida em duas partes, a primeira aceita por N_1 e a segunda por N_2.
- Não-determinísmo:
  - Podemos pensar que N "*adivinha*" onde dividir w.

$A_1 A_2 = \{w \mid w = w_1 w_2 \text{ com } w_1 \in A_1 \text{ e } w_2 \in A_2\}$

Fecho sobre a operação de **Concatenação** $A_1 A_2$

Prova:

- Suponha que:
  - $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ reconhece A_1; e
  - $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ reconhece A_2.

- Construa $N = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$ para reconhecer $A_1 \cup A_2$.
  1. $Q = Q_1 \cup Q_2$
  2. q_1 é o estado inicial
  3. Os estados de aceitação são $F = F_2$
  4. $$\delta(q, a) = \begin{cases} \delta_1(q, a) & q \in Q_1 \text{ e } q \notin F_1 \\ \delta_1(q, a) & q \in F_1 \text{ e } a \neq \mathcal{E} \\ \delta_1(q, a) \cup \{q_2\} & q \in F_1 \text{ e } a = \mathcal{E} \\ \delta_2(q, a) & q \in Q_2 \end{cases}$$

Por construção, é fácil ver que N aceita $w \iff N_1$ aceita um prefixo de w e N_2 aceita o sufixo restante. $\square$

Fecho sobre a operação de **Estrela** A_1^*

Teorema:

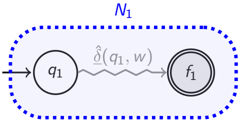
A classe das Linguagens Regulares é fechada sobre a operação de **Estrela**.

Em outras palavras, se A_1 é uma linguagem regular, o mesmo vale para $A_1^* = \{x_1 x_2 \ldots x_k \mid k \geq 0 \text{ e cada } x_i \in A\}$.

Fecho sobre a operação de **Estrela** A_1^*

Ideia da prova:

- Seja N_1 o $\text{AFN}_{\mathcal{E}}$ que reconhece a linguagem A_1.



- Vamos construir um novo $\text{AFN}_{\mathcal{E}}$ N que aceita w se ela puder ser "*quebrada*" em várias partes e N_1 aceite cada uma das partes

Fecho sobre a operação de **Estrela** A_1^*

Ideia da prova (continuação):

- O AFN$_\mathcal{E}$ N tem um novo estado inicial com um arco-$\mathcal{E}$ para q_1.
- Adicionamos arcos-$\mathcal{E}$ retornando para q_1 a partir de todos os estados $q_i \in F_1$.
- N deve aceitar $\mathcal{E}$, por isso $q_0 \in F$.

- Não-determinísmo:

  No final de N_1 a máquina tem a ao estado q_1 e lerá outra parte de w.

$A_1^* = \{x_1 x_2 \ldots x_k \mid k \geq 0 \text{ e cada } x_i \in A\}$

Fecho sobre a operação de **Estrela** A_1^*

Ideia da prova (continuação):

- O AFN$_\mathcal{E}$ N tem um novo estado inicial com um arco-$\mathcal{E}$ para q_1.
- Adicionamos arcos-$\mathcal{E}$ retornando para q_1 a partir de todos os estados $q_i \in F_1$.
- N deve aceitar $\mathcal{E}$, por isso $q_0 \in F$.

- Não-determinísmo:

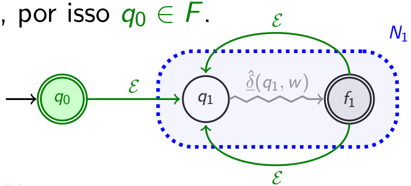
  No final de N_1 a máquina tem a ... ao estado q_1 e ler a outra parte de w.

$A_1^* = \{x_1 x_2 \ldots x_k \mid k \geq 0 \text{ e cada } x_i \in A\}$

Fecho sobre a operação de **Estrela** A_1^*

Ideia da prova (continuação):

- O AFN$_\mathcal{E}$ N tem um novo estado inicial com um arco-$\mathcal{E}$ para q_1.
- Adicionamos arcos-$\mathcal{E}$ retornando para q_1 a partir de todos os estados $q_i \in F_1$.
- N deve aceitar $\mathcal{E}$, por isso $q_0 \in F$.



- Não-determinísmo:

  No final de N_1 a máquina tem a ... ao estado q_1 e ler a outra parte de w

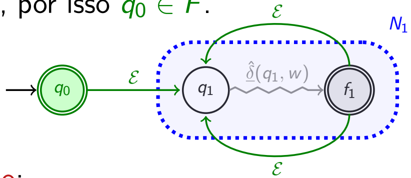
---

$A_1^* = \{x_1 x_2 \ldots x_k \mid k \geq 0 \text{ e cada } x_i \in A\}$

Fecho sobre a operação de **Estrela** A_1^*

Ideia da prova (continuação):

- O AFN$_{\mathcal{E}}$ N tem um novo estado inicial com um arco-$\mathcal{E}$ para q_1.
- Adicionamos arcos-$\mathcal{E}$ retornando para q_1 a partir de todos os estados $q_i \in F_1$.
- N deve aceitar $\mathcal{E}$, por isso $q_0 \in F$.



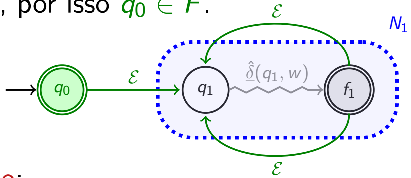
- Não-determinísmo:
  - No final de N_1 a máquina tem a opção de voltar ao estado q_1 e ler a outra parte de w.

$A_1^* = \{x_1 x_2 \ldots x_k \mid k \geq 0 \text{ e cada } x_i \in A\}$

Fecho sobre a operação de **Estrela** A_1^*

Ideia da prova (continuação):

- O AFN$_\mathcal{E}$ N tem um novo estado inicial com um arco-$\mathcal{E}$ para q_1.
- Adicionamos arcos-$\mathcal{E}$ retornando para q_1 a partir de todos os estados $q_i \in F_1$.
- N deve aceitar $\mathcal{E}$, por isso $q_0 \in F$.



- Não-determinísmo:
  - No final de N_1 a máquina tem a opção de voltar ao estado q_1 e ler a outra parte de w.

$A_1^* = \{x_1 x_2 \ldots x_k \mid k \geq 0 \text{ e cada } x_i \in A\}$

Fecho sobre a operação de **Estrela** A_1^*

Prova:

- Suponha que:
  - $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ reconhece A_1.
- Construa $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ para reconhecer A_1^*.
  1. $Q = Q_1 \cup \{q_0\}$
  2. q_0 é o estado inicial
  3. $F = F_1 \cup \{q_0\}$
  4. $$\delta(q, a) = \begin{cases} \delta_1(q, a) & q \in Q_1 \text{ e } q \notin F_1 \\ \delta_1(q, a) & q \in F_1 \text{ e } a \neq \mathcal{E} \\ \delta_1(q, a) \cup \{q_1\} & q \in F_1 \text{ e } a = \mathcal{E} \\ \{q_1\} & q = q_0 \text{ e } a = \mathcal{E} \\ \varnothing & q = q_0 \text{ e } a \neq \mathcal{E} \end{cases}$$

Por construção, é fácil ver que N aceita $w \iff N_1$ aceita w por partes $w_1 w_2 \dots w_k, w_{k+1} w_{k+2} \dots w_{2k}, \dots$. □

Roteiro

Outras Operações

Vamos ver que as Linguagens Regulares também são fechadas para outras operações sobre linguagens:

1. **Complemento**: $\Sigma^* - A = \{x \mid x \in \Sigma^* \text{ e } x \notin A\}$.
2. **Intersecção**: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$.

Σ^* são todas as palavras que podem ser geradas pelo alfabeto Σ.

Outras Operações

Vamos ver que as Linguagens Regulares também são fechadas para outras operações sobre linguagens:

1. **Complemento**: $\Sigma^* - A = \{x \mid x \in \Sigma^* \text{ e } x \notin A\}$.
2. **Intersecção**: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$.

Σ^* são todas as palavras que podem ser geradas pelo alfabeto Σ.

Fecho sobre a operação de **Complemento** $\Sigma^* - A_1$

Teorema:

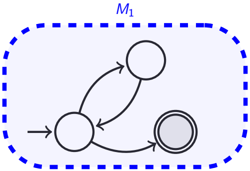
A classe das Linguagens Regulares é fechada sobre a operação de **Complemento**.

Em outras palavras, se $A_1 \subseteq \Sigma^*$ é uma linguagem regular, o mesmo vale para $\overline{A_1} = \Sigma^* - A_1 = \{x \mid x \in \Sigma^* \text{ e } x \notin A_1\}$.

Fecho sobre a operação de **Complemento** $\Sigma^* - A_1$

Ideia da prova:

- Seja $M_1 = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFD que reconhece a linguagem $A_1 \subseteq \Sigma^*$.

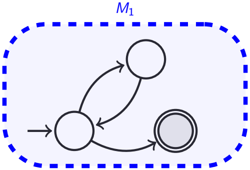


- Vamos construir um novo AFD M_1' tal que as condições ACEITA/REJEITA de M_1 sejam invertidas para reconhecer $\overline{A_1} = \Sigma^* - A_1$.

Fecho sobre a operação de **Complemento** $\Sigma^* - A_1$

Ideia da prova:

- Seja $M_1 = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFD que reconhece a linguagem $A_1 \subseteq \Sigma^*$.



- Vamos construir um novo AFD M_1' tal que as condições ACEITA/REJEITA de M_1 sejam invertidas para reconhecer $\overline{A_1} = \Sigma^* - A_1$.

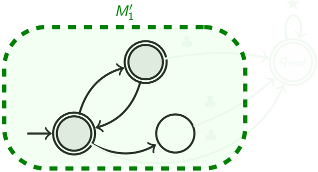
Fecho sobre a operação de **Complemento** $\Sigma^* - A_1$

Ideia da prova: (continuação)

- Para isso, vamos inverter os estados finais em não-finais, e vice-versa.

  (ex. $w = 111 \in \overline{A_1}$ e $w = 01 \in \overline{A_1}$).

- Adicionamos um novo estado q_{end}, tal que $\delta'(q, a) = q_{end}$ sempre que $\delta(q, a) = \perp$ em M.



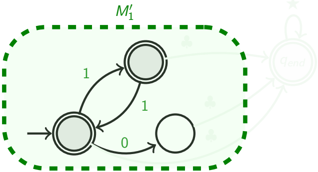
Funcionamento

No diagrama acima, ♣ são os símbolos $a \in \Sigma$ para os quais não existem transições $\delta(q, a)$, e ★ são todos os símbolos de Σ.

Fecho sobre a operação de **Complemento** $\Sigma^* - A_1$

Ideia da prova: (continuação)

- Para isso, vamos inverter os estados finais em não-finais, e vice-versa. *(ex. $w = 111 \in \overline{A_1}$ e $w = 01 \in \overline{A_1}$)*.
- Adicionamos um novo estado q_{end}, tal que $\delta'(q, a) = q_{end}$ sempre que $\delta(q, a) = \perp$ em M.



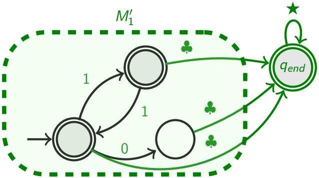
Funcionamento

No diagrama acima, ♣ são os símbolos $a \in \Sigma$ para os quais não existem transições $\delta(q, a)$, e ★ são todos os símbolos de Σ.

Fecho sobre a operação de **Complemento** $\Sigma^* - A_1$

Ideia da prova: (continuação)

- Para isso, vamos inverter os estados finais em não-finais, e vice-versa. *(ex. $w = 111 \in \overline{A_1}$ e $w = 01 \in \overline{A_1}$)*.
- Adicionamos um novo estado q_{end}, tal que $\delta'(q, a) = q_{end}$ sempre que $\delta(q, a) = \perp$ em M.

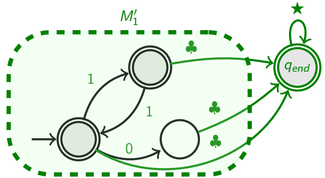


No diagrama acima, ♣ são os símbolos $a \in \Sigma$ para os quais não existem transições $\delta(q, a)$, e ★ são todos os símbolos de Σ.

Fecho sobre a operação de **Complemento** $\Sigma^* - A_1$

Ideia da prova: (continuação)

- Para isso, vamos inverter os estados finais em não-finais, e vice-versa. *(ex. $w = 111 \in \overline{A_1}$ e $w = 01 \in \overline{A_1}$)*.
- Adicionamos um novo estado q_{end}, tal que $\delta'(q, a) = q_{end}$ sempre que $\delta(q, a) = \perp$ em M.



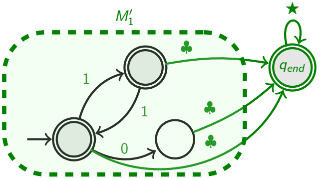
- Funcionamento:
  - O novo AFD M'_1 aceita w sempre que M_1 rejeita w, portanto $L(M'_1) = \overline{A_1} = \Sigma^* - A_1$.

No diagrama acima, ♣ são os símbolos $a \in \Sigma$ para os quais não existem transições $\delta(q, a)$, e ★ são todos os símbolos de Σ.

Fecho sobre a operação de **Complemento** $\Sigma^* - A_1$

Ideia da prova: (continuação)

- Para isso, vamos inverter os estados finais em não-finais, e vice-versa. (ex. $w = 111 \in \overline{A_1}$ e $w = 01 \in \overline{A_1}$).
- Adicionamos um novo estado q_{end}, tal que $\delta'(q, a) = q_{end}$ sempre que $\delta(q, a) = \perp$ em M.



- Funcionamento:
  - O novo AFD M_1' aceita w sempre que M_1 rejeita w, portanto $L(M_1') = \overline{A_1} = \Sigma^* - A_1$.

No diagrama acima, ♣ são os símbolos $a \in \Sigma$ para os quais não existem transições $\delta(q, a)$, e ★ são todos os símbolos de Σ.

Fecho sobre a operação de **Complemento** $\Sigma^* - A_1$

Prova:

- Suponha que:
  - $M_1 = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ reconhece A_1.

- Construa $M_1' = (Q', \Sigma, \delta', q_0, F')$ para reconhecer $\overline{A_1} = \Sigma^* - A_1$:
  1. $Q' = \{q_{end}\} \cup Q$
  2. q_0 é o estado inicial
  3. Os estados de aceitação são $F' = Q' - F$
  4. $\delta'(q, a) = \begin{cases} \delta(q, a) & \delta(q, a) \neq \perp \\ q_{end} & \delta(q, a) = \perp \\ q_{end} & q = q_{end} \end{cases}$

Por construção, é fácil ver que M_1' aceita $w \iff M_1$ rejeita w, com $w \in \Sigma^*$.

$\square$

Fecho sobre a operação de **Intersecção** $A_1 \cap A_2$

Teorema:

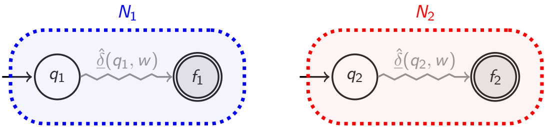
A classe das Linguagens Regulares é fechada sobre a operação de **Intersecção**.

Em outras palavras, se A_1 e A_2 são linguagens regulares, o mesmo vale para $A_1 \cap A_2 = \{x \mid x \in A_1 \text{ e } x \in A_2\}$.

Fecho sobre a operação de **Intersecção** $A_1 \cap A_2$

Ideia da prova:

- Sejam N_1 e N_2 os AFN$_{\mathcal{E}}$s que reconhecem as linguagens A_1 e A_2.



- Como construir um AFN$_{\mathcal{E}}$ N que aceita uma cadeia $w \iff N_1$ e N_2 aceitam w???

Fecho sobre a operação de **Intersecção** $A_1 \cap A_2$

Prova:

- Sejam A_1 e A_2 linguagens regulares.
  - Lei de *De Morgan*:

$$A_1 \cap A_2 = \overline{\overline{A_1} \cup \overline{A_2}}$$

- E como já foi verificado a classe das Linguagens Regulares é fechada para complemento e união

Portanto, as Linguagens Regulares são fechadas sobre a operação de **Intersecção**. □

Fecho sobre a operação de **Intersecção** $A_1 \cap A_2$

Prova:

- Sejam A_1 e A_2 linguagens regulares.
  - Lei de *De Morgan*:

$$A_1 \cap A_2 = \overline{\overline{A_1} \cup \overline{A_2}}$$

- E como já foi verificado a classe das Linguagens Regulares é fechada para complemento e união

Portanto, as Linguagens Regulares são fechadas sobre a operação de **Intersecção**. □

Fecho sobre a operação de **Intersecção** $A_1 \cap A_2$

Prova:

- Sejam A_1 e A_2 linguagens regulares.
  - Lei de *De Morgan*:

$$A_1 \cap A_2 = \overline{\overline{A_1} \cup \overline{A_2}}$$

- E como já foi verificado a classe das Linguagens Regulares é fechada para complemento e união

Portanto, as Linguagens Regulares são fechadas sobre a operação de **Intersecção**. $\square$

Fecho sobre a operação de **Intersecção** $A_1 \cap A_2$

Prova:

- Sejam A_1 e A_2 linguagens regulares.
  - Lei de *De Morgan*:

$$A_1 \cap A_2 = \overline{\overline{A_1} \cup \overline{A_2}}$$

- E como já foi verificado a classe das Linguagens Regulares é fechada para complemento e união

Portanto, as Linguagens Regulares são fechadas sobre a operação de **Intersecção**. $\square$

Fim

Dúvidas?

Roteiro

Referências

Referências:

1. *"Introdução à Teoria da Computação"* de M. Sipser, 2007.
2. *"Introdução à Teoria de Autômatos, Linguagens e Computação"* de J. E. Hopcroft, R. Motwani, e J. D. Ullman, 2003.
3. Materiais adaptados dos slides do Prof. Evandro E. S. Ruiz, da USP.