Teoria da Computação

Autômatos de Pilha

Aula 07

Prof. Felipe A. Louza

UFU

Roteiro

1. Autômatos de Pilha
   - Primeiro exemplo $L = \{a^n b^n \mid n > 0\}$
   - Formalização de um AP
   - Descrição Instantânea (DI)
2. Modelos de aceitação de um AP
   - Aceitação por estado final e por pilha vazia
   - De pilha vazia para estado final
   - De estado final para pilha vazia
3. Referências

Roteiro

1. Autômatos de Pilha
   - Primeiro exemplo $L = \{a^n b^n \mid n > 0\}$
   - Formalização de um AP
   - Descrição Instantânea (DI)
2. Modelos de aceitação de um AP
   - Aceitação por estado final e por pilha vazia
   - De pilha vazia para estado final
   - De estado final para pilha vazia
3. Referências

Autômatos de Pilha

Vamos introduzir um novo tipo de modelo computacional denominado de **Autômato de Pilha (AP)**:

- Um AP é essencialmente um AFN com uma pilha adicional como memória auxiliar.
- A pilha é independente da cadeia de entrada w, e não possuí limite de tamanho (*"infinita"*).

Autômatos de Pilha

Vamos introduzir um novo tipo de modelo computacional denominado de **Autômato de Pilha (AP)**:

- Um AP é essencialmente um AFN com uma pilha adicional como memória auxiliar.
- A pilha é independente da cadeia de entrada w, e não possuí limite de tamanho (*"infinita"*).

Autômatos de Pilha

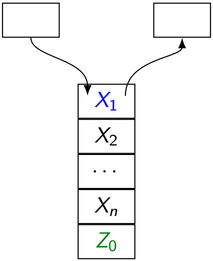
Vamos introduzir um novo tipo de modelo computacional denominado de **Autômato de Pilha (AP)**:

- Um AP é essencialmente um AFN com uma pilha adicional como memória auxiliar.
- A pilha é independente da cadeia de entrada w, e não possuí limite de tamanho (*"infinita"*).

Sobre a pilha

Pilha: operações `push()` e `pop()` somente no topo da pilha:

- Armazenamos *"símbolos de pilha"* $X_i \in \Gamma$ (outro alfabeto)
- Vamos assumir um valor inicial $Z_0 \in \Gamma$ na pilha (*fundo de pilha*).
- Vamos representar por $\underline{X_1 X_2 \ldots X_n Z_0}$ a pilha com topo X_1 e fundo Z_0.

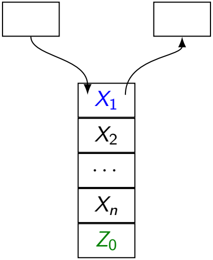


LIFO (*last-in, first-out*): último a entrar é primeiro a sair.

Sobre a pilha

Pilha: operações `push()` e `pop()` somente no topo da pilha:

- Armazenamos *"símbolos de pilha"* $X_i \in \Gamma$ (outro alfabeto)
- Vamos assumir um valor inicial $Z_0 \in \Gamma$ na pilha (*fundo de pilha*).
- Vamos representar por $X_1 X_2 \ldots X_n Z_0$ a pilha com topo X_1 e fundo Z_0.

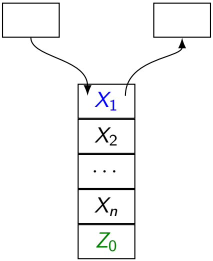


LIFO (*last-in, first-out*): último a entrar é primeiro a sair .

Sobre a pilha

Pilha: operações `push()` e `pop()` somente no topo da pilha:

- Armazenamos *"símbolos de pilha"* $X_i \in \Gamma$ (outro alfabeto)
- Vamos assumir um valor inicial $Z_0 \in \Gamma$ na pilha (*fundo de pilha*).
- Vamos representar por $\underline{X_1 X_2 \ldots X_n Z_0}$ a pilha com topo X_1 e fundo Z_0.

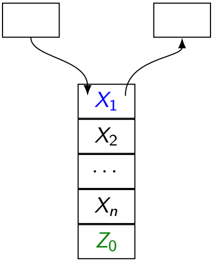


LIFO (*last-in, first-out*): último a entrar é primeiro a sair.

Sobre a pilha

Pilha: operações `push()` e `pop()` somente no topo da pilha:

- Armazenamos *"símbolos de pilha"* $X_i \in \Gamma$ (outro alfabeto)
- Vamos assumir um valor inicial $Z_0 \in \Gamma$ na pilha (*fundo de pilha*).
- Vamos representar por $X_1X_2\ldots X_nZ_0$ a pilha com topo X_1 e fundo Z_0.

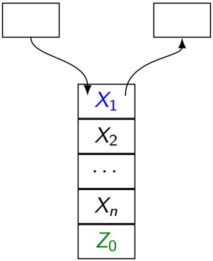


LIFO (*last-in, first-out*): último a entrar é primeiro a sair .

Sobre a pilha

Pilha: operações `push()` e `pop()` somente no topo da pilha:

- Armazenamos *"símbolos de pilha"* $X_i \in \Gamma$ (outro alfabeto)
- Vamos assumir um valor inicial $Z_0 \in \Gamma$ na pilha (*fundo de pilha*).
- Vamos representar por $\underline{X_1X_2\ldots X_nZ_0}$ a pilha com topo X_1 e fundo Z_0.



LIFO (*last-in, first-out*): último a entrar é primeiro a sair .

A presença da pilha significa que o AP pode "memorizar" uma quantidade infinita de informações:

- Entretanto, essas informações só podem ser acessadas pela pilha, o que limita o poder de reconhecimento desse modelo.

Vamos ver que a classe de linguagens aceitas pelos AP é exatamente a classe das LLCs (**Tipo 2**).

Autômatos de Pilha

A presença da pilha significa que o AP pode “memorizar” uma quantidade infinita de informações:

- Entretanto, essas informações só podem ser acessadas pela pilha, o que limita o poder de reconhecimento desse modelo.

Vamos ver que a classe de linguagens aceitas pelos AP é exatamente a classe das LLCs (**Tipo 2**).

Autômatos de Pilha

A presença da pilha significa que o AP pode “memorizar” uma quantidade infinita de informações:

- Entretanto, essas informações só podem ser acessadas pela pilha, o que limita o poder de reconhecimento desse modelo.

Vamos ver que a classe de linguagens aceitas pelos AP é exatamente a classe das LLCs (**Tipo 2**).

- O não-determinismo é importante e necessário para isso.

Autômatos de Pilha

A presença da pilha significa que o AP pode "memorizar" uma quantidade infinita de informações:

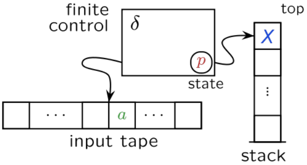
- Entretanto, essas informações só podem ser acessadas pela pilha, o que limita o poder de reconhecimento desse modelo.

Vamos ver que a classe de linguagens aceitas pelos AP é exatamente a classe das LLCs (**Tipo 2**).

- O não-determinismo é importante e necessário para isso.

Autômatos de Pilha

Podemos visualizar (informalmente) AP como:



Comportamento:

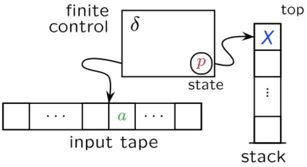
- A partir do estado corrente $q \in Q$, do símbolo na cadeia de entrada $w_i = a \in \Sigma$, e do símbolo no topo da pilha $X \in \Gamma$:

$$\delta(q, a, X) = \{(p, \gamma)\}$$

1. O AP assume um novo estado $p \in Q$; e
2. O topo da pilha é substituído pela cadeia $\gamma \in (\Gamma^* \cup \{\mathcal{E}\})$.

Autômatos de Pilha

Podemos visualizar (informalmente) AP como:



Comportamento:

- A partir do estado corrente $q \in Q$, do símbolo na cadeia de entrada $w_i = a \in \Sigma$, e do símbolo no topo da pilha $X \in \Gamma$:

$$\delta(q, a, X) = \{(p, \gamma)\}$$

1. O AP assume um novo estado $p \in Q$; e
2. O topo da pilha é substituído pela cadeia $\gamma \in (\Gamma^* \cup \{\mathcal{E}\})$.

Autômatos de Pilha

Vamos representar essa transição

$$\delta(q, a, X) = \{(p, \gamma)\}$$

por:

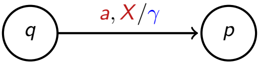


Figura: Diagrama de estados.

- Nesse exemplo, ao processar $w_i = a$, com X no topo da pilha. O AP vai de $q \to p$ e X é **substituído** pela cadeia γ.

Autômatos de Pilha

Vamos supor que $w_i = a$ e a pilha $= XX_1X_2 \dots X_nZ_0$

1. $q \xrightarrow{a, X/Y_1} p$ pilha $= Y_1X_1X_2 \dots X_nZ_0$
2. $q \xrightarrow{a, X/Y_1Y_2Y_3} p$ pilha $= Y_1Y_2Y_3X_1X_2 \dots X_nZ_0$
3. $q \xrightarrow{a, X/X} p$ pilha $= XX_1X_2 \dots X_nZ_0$
4. $q \xrightarrow{a, X/\mathcal{E}} p$ pilha $= X_1X_2 \dots X_nZ_0$
5. $q \xrightarrow{a, \mathcal{E}/X} p$ pilha $= XXX_1X_2 \dots X_nZ_0$

Autômatos de Pilha

Vamos supor que $w_i = a$ e a pilha $= XX_1X_2\ldots X_nZ_0$

1. $q \xrightarrow{a, X/Y_1} p$ pilha $= Y_1X_1X_2\ldots X_nZ_0$
2. $q \xrightarrow{a, X/Y_1Y_2Y_3} p$ pilha $= Y_1Y_2Y_3X_1X_2\ldots X_nZ_0$
3. $q \xrightarrow{a, X/X} p$ pilha $= XX_1X_2\ldots X_nZ_0$
4. $q \xrightarrow{a, X/\mathcal{E}} p$ pilha $= X_1X_2\ldots X_nZ_0$
5. $q \xrightarrow{a, \mathcal{E}/X} p$ pilha $= XXX_1X_2\ldots X_nZ_0$

Autômatos de Pilha

Vamos supor que $w_i = a$ e a pilha $= XX_1X_2\ldots X_nZ_0$

1. $q \xrightarrow{a, X/Y_1} p$ pilha $= Y_1X_1X_2\ldots X_nZ_0$
2. $q \xrightarrow{a, X/Y_1Y_2Y_3} p$ pilha $= Y_1Y_2Y_3X_1X_2\ldots X_nZ_0$
3. $q \xrightarrow{a, X/X} p$ pilha $= XX_1X_2\ldots X_nZ_0$
4. $q \xrightarrow{a, X/\mathcal{E}} p$ pilha $= X_1X_2\ldots X_nZ_0$
5. $q \xrightarrow{a, \mathcal{E}/X} p$ pilha $= XXX_1X_2\ldots X_nZ_0$

Autômatos de Pilha

Vamos supor que $w_i = a$ e a pilha $= XX_1X_2\dots X_nZ_0$

1. $q \xrightarrow{a, X/Y_1} p$ pilha $= Y_1X_1X_2\dots X_nZ_0$
2. $q \xrightarrow{a, X/Y_1Y_2Y_3} p$ pilha $= Y_1Y_2Y_3X_1X_2\dots X_nZ_0$
3. $q \xrightarrow{a, X/X} p$ pilha $= XX_1X_2\dots X_nZ_0$
4. $q \xrightarrow{a, X/\mathcal{E}} p$ pilha $= X_1X_2\dots X_nZ_0$
5. $q \xrightarrow{a, \mathcal{E}/X} p$ pilha $= XXX_1X_2\dots X_nZ_0$

Autômatos de Pilha

Vamos supor que $w_i = a$ e a pilha $= XX_1X_2\dots X_nZ_0$

1. $q \xrightarrow{a,X/Y_1} p$ pilha $= Y_1X_1X_2\dots X_nZ_0$
2. $q \xrightarrow{a,X/Y_1Y_2Y_3} p$ pilha $= Y_1Y_2Y_3X_1X_2\dots X_nZ_0$
3. $q \xrightarrow{a,X/X} p$ pilha $= XX_1X_2\dots X_nZ_0$
4. $q \xrightarrow{a,X/\mathcal{E}} p$ pilha $= X_1X_2\dots X_nZ_0$
5. $q \xrightarrow{a,\mathcal{E}/X} p$ pilha $= XXX_1X_2\dots X_nZ_0$

Autômatos de Pilha

Vamos supor que $w_i = a$ e a pilha $= XX_1X_2 \dots X_nZ_0$

1. $q \xrightarrow{a, X/Y_1} p$ pilha $= Y_1X_1X_2 \dots X_nZ_0$
2. $q \xrightarrow{a, X/Y_1Y_2Y_3} p$ pilha $= Y_1Y_2Y_3X_1X_2 \dots X_nZ_0$
3. $q \xrightarrow{a, X/X} p$ pilha $= XX_1X_2 \dots X_nZ_0$
4. $q \xrightarrow{a, X/\mathcal{E}} p$ pilha $= X_1X_2 \dots X_nZ_0$
5. $q \xrightarrow{a, \mathcal{E}/X} p$ pilha $= XXX_1X_2 \dots X_nZ_0$

Autômatos de Pilha

Arcos-$\mathcal{E}$:

$$\delta(q, \mathcal{E}, X) = \{(p, \gamma)\}$$

por:

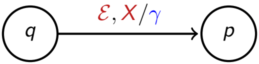


Figura: Diagrama de estados.

- Transições vazias não consomem símbolos da entrada w, assim como nos AFN$_{\mathcal{E}}$s.
  - Pode-se mudar de estado e/ou alterar o topo da pilha.

Autômatos de Pilha

Arcos-$\mathcal{E}$:

$$\delta(q, \mathcal{E}, X) = \{(p, \gamma)\}$$

por:

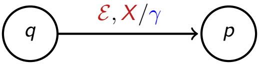


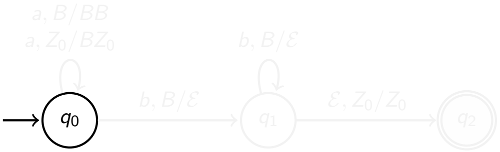
Figura: Diagrama de estados.

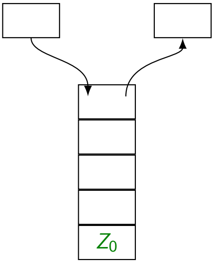
- Transições vazias não consomem símbolos da entrada w, assim como nos AFN$_{\mathcal{E}}$s.
  - Pode-se mudar de estado e/ou alterar o topo da pilha.

Exemplo

Vamos projetar um AP para reconhecer $L_1 = \{a^n b^n \mid n > 0\}$

1. Definimos q_0 como estado inicial.
2. Enquanto lemos 'a' em w, vamos empilhar o *símbolo de pilha* B.
3. No momento em que lemos o primeiro 'b' em w, mudamos para o estado q_1 e desempilhamos um B.
4. A partir de agora, temos que desempilhar $(n-1)$ B's:
   - Se no final a pilha estiver vazia (no topo), aceitamos w

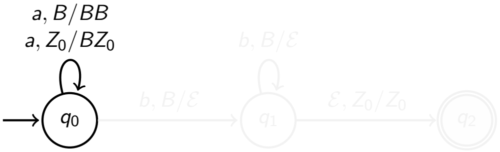


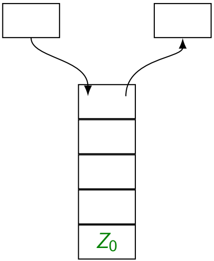


Exemplo

Vamos projetar um AP para reconhecer $L_1 = \{a^n b^n \mid n > 0\}$

1. Definimos q_0 como estado inicial.
2. Enquanto lemos 'a' em w, vamos empilhar o *símbolo de pilha* B.
3. No momento em que lemos o primeiro 'b' em w, mudamos para o estado q_1 e desempilhamos um B.
4. A partir de agora, temos que desempilhar $(n-1)$ B's:
   - Se no final a pilha estiver vazia ([illegible] no topo), aceitamos w

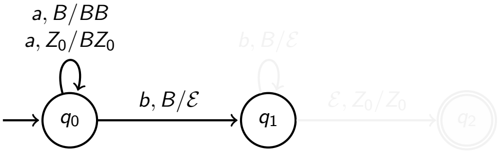


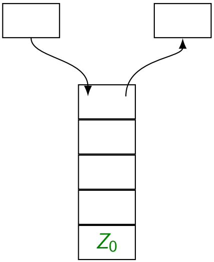


Exemplo

Vamos projetar um AP para reconhecer $L_1 = \{a^n b^n \mid n > 0\}$

1. Definimos q_0 como estado inicial.
2. Enquanto lemos 'a' em w, vamos empilhar o *símbolo de pilha* B.
3. No momento em que lemos o primeiro 'b' em w, mudamos para o estado q_1 e desempilhamos um B.
4. A partir de agora, temos que desempilhar $(n-1)$ B's:
   - Se no final a pilha estiver vazia ([illegible] no topo), aceitamos w.

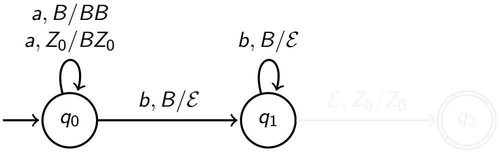


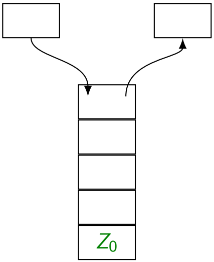


Exemplo

Vamos projetar um AP para reconhecer $L_1 = \{a^n b^n \mid n > 0\}$

1. Definimos q_0 como estado inicial.
2. Enquanto lemos 'a' em w, vamos empilhar o *símbolo de pilha* B.
3. No momento em que lemos o primeiro 'b' em w, mudamos para o estado q_1 e desempilhamos um B.
4. A partir de agora, temos que desempilhar $(n-1)$ B's:
   – Se no final a pilha estiver vazia (Z_0 no topo), aceitamos w ✓

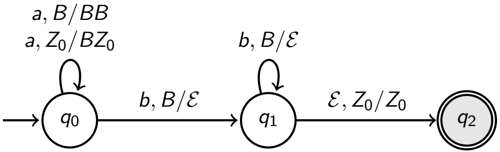


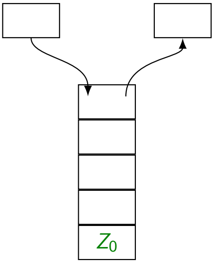


Exemplo

Vamos projetar um AP para reconhecer $L_1 = \{a^n b^n \mid n > 0\}$

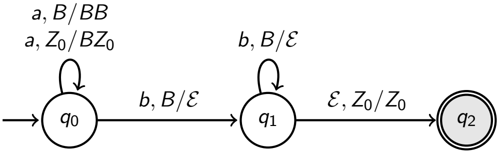
1. Definimos q_0 como estado inicial.
2. Enquanto lemos 'a' em w, vamos empilhar o *símbolo de pilha* B.
3. No momento em que lemos o primeiro 'b' em w, mudamos para o estado q_1 e desempilhamos um B.
4. A partir de agora, temos que desempilhar $(n-1)$ B's:
   - Se no final a pilha estiver vazia (Z_0 no topo), aceitamos w ✓





Exemplo

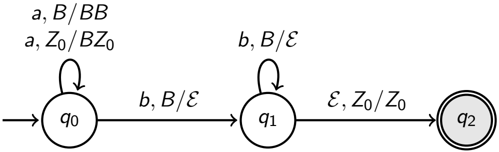
$L_1 = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ e $w = aaabbb$



cadeia	**pilha**
$aaabbb$	Z_0
$aabbb$	BZ_0
$abbb$	BBZ_0
bbb	$BBBZ_0$
bb	BBZ_0
b	BZ_0
	Z_0

Exemplo

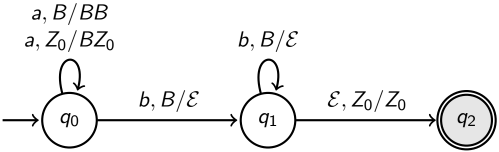
$L_1 = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ e $w = aaabbb$



cadeia	**pilha**
$aaabbb$	Z_0
$aabbb$	BZ_0
$abbb$	BBZ_0
bbb	$BBBZ_0$
bb	BBZ_0
b	BZ_0
	Z_0

Exemplo

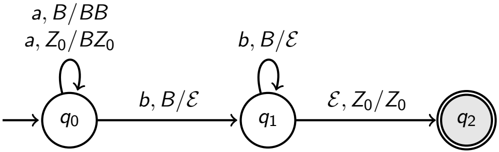
$L_1 = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ e $w = aaabbb$



cadeia	**pilha**
$aaabbb$	Z_0
$aabbb$	BZ_0
$abbb$	BBZ_0
bbb	$BBBZ_0$
bb	BBZ_0
b	BZ_0
	Z_0

Exemplo

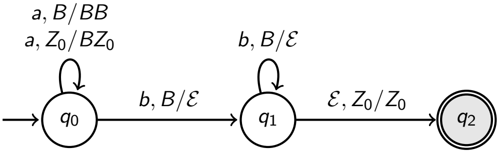
$L_1 = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ e $w = aaabbb$



cadeia	pilha
$aaabbb$	Z_0
$aabbb$	BZ_0
$abbb$	BBZ_0
bbb	$BBBZ_0$
bb	BBZ_0
b	BZ_0
	Z_0

Exemplo

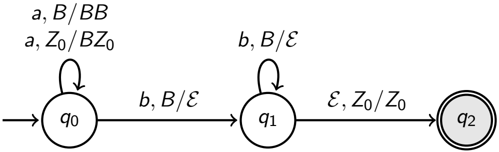
$L_1 = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ e $w = aaabbb$



cadeia	**pilha**
$aaabbb$	Z_0
$aabbb$	BZ_0
$abbb$	BBZ_0
bbb	$BBBZ_0$
bb	BBZ_0
b	BZ_0
	Z_0

Exemplo

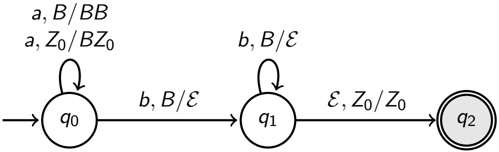
$L_1 = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ e $w = aaabbb$



cadeia	**pilha**
$aaabbb$	Z_0
$aabbb$	BZ_0
$abbb$	BBZ_0
bbb	$BBBZ_0$
bb	BBZ_0
b	BZ_0
	Z_0

Exemplo

$L_1 = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ e $w = aaabbb$



cadeia	**pilha**
$aaabbb$	Z_0
$aabbb$	BZ_0
$abbb$	BBZ_0
bbb	$BBBZ_0$
bb	BBZ_0
b	BZ_0
	Z_0

Roteiro

1. Autômatos de Pilha
   - Primeiro exemplo $L = \{a^n b^n \mid n > 0\}$
   - Formalização de um AP
   - Descrição Instantânea (DI)
2. Modelos de aceitação de um AP
   - Aceitação por estado final e por pilha vazia
   - De pilha vazia para estado final
   - De estado final para pilha vazia
3. Referências

Formalização de um AP

Definição

Um autômato com pilha é uma 7-tupla $(Q, \Sigma, \boldsymbol{\Gamma}, \delta, q_0, \mathbf{Z_0}, F)$, em que:

1. Q é o conjunto finito de estados;
2. Σ é o alfabeto da cadeia de entrada;
3. Γ (gama) é o alfabeto da pilha;
4. $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\mathcal{E}\}) \times (\Gamma \cup \{\mathcal{E}\}) \rightarrow 2^{(Q \times \Gamma^*)}$ é a função de transição;

$$\delta(q, a, X) = \{(p_1, \gamma_1), (p_2, \gamma_2), \ldots, (p_r, \gamma_r)\}$$

5. $q_0 \in Q$ é o estado inicial; e
6. $Z_0 \in \Gamma$ é o símbolo inicial da pilha.
7. $F \subseteq Q$ é o conjunto de estados de aceitação.

- Note que o estado atual, o símbolo lido e o símbolo do topo da pilha determinam as transições, isto é, o novo estado e o topo da pilha.

Exemplo

Considere a linguagem:

$$L_2 = \{w \mid \text{w possuí o mesmo número de a's e b's, com } w \in \{a, b\}^*\}$$

- Vamos construir um AP

$$P_2 = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{Z_0, A, B\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_1\})$$

entrada	a			b			$\mathcal{E}$		
pilha	Z_0	A	B	Z_0	A	B	Z_0	A	B
q_0	$\{(q_0, BZ_0)\}$	$\{(q_0, \mathcal{E})\}$	$\{(q_0, BB)\}$	$\{(q_0, AZ_0)\}$	$\{(q_0, AA)\}$	$\{(q_0, \mathcal{E})\}$	$\{(q_1, Z_0)\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Figura: Tabela de transições

Exemplo

Considere a linguagem:

$$L_2 = \{w \mid \text{w possuí o mesmo número de a's e b's, com } w \in \{a, b\}^*\}$$

- Vamos construir um AP

$$P_2 = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{Z_0, A, B\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_1\})$$

entrada	a			b			$\mathcal{E}$		
pilha	Z_0	A	B	Z_0	A	B	Z_0	A	B
q_0	$\{(q_0, BZ_0)\}$	$\{(q_0, \mathcal{E})\}$	$\{(q_0, BB)\}$	$\{(q_0, AZ_0)\}$	$\{(q_0, AA)\}$	$\{(q_0, \mathcal{E})\}$	$\{(q_1, Z_0)\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
q_1	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

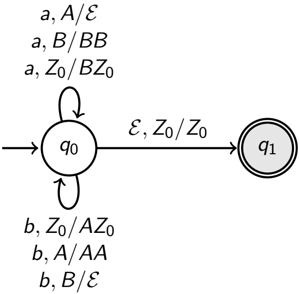
Figura: Tabela de transições

Exemplo

Considere a linguagem:

$$L_2 = \{w \mid \text{w possuí o mesmo número de a's e b's, com } w \in \{a, b\}^*\}$$

- Considere $w = abbbaa$



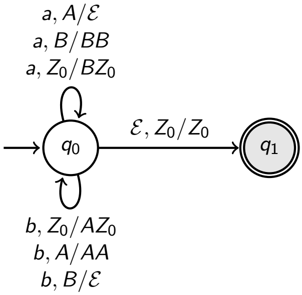
cadeia	**pilha**
$abbbaa$	Z_0
$bbbaa$	BZ_0
$bbaa$	Z_0
baa	AZ_0
aa	AAZ_0
a	AZ_0
	Z_0

Exemplo

Considere a linguagem:

$$L_2 = \{w \mid \text{w possuí o mesmo número de a's e b's, com } w \in \{a, b\}^*\}$$

- Considere $w = abbbaa$



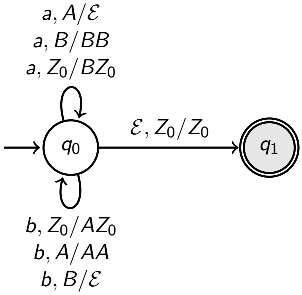
cadeia	**pilha**
$abbbaa$	Z_0
$bbbaa$	BZ_0
$bbaa$	Z_0
baa	AZ_0
aa	AAZ_0
a	AZ_0
	Z_0

Exemplo

Considere a linguagem:

$$L_2 = \{w \mid \text{w possuí o mesmo número de a's e b's, com } w \in \{a, b\}^*\}$$

- Considere $w = abbbaa$



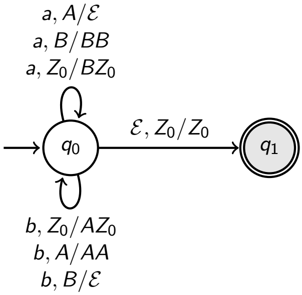
cadeia	**pilha**
$abbbaa$	Z_0
$bbbaa$	BZ_0
$bbaa$	Z_0
baa	AZ_0
aa	AAZ_0
a	AZ_0
	Z_0

Exemplo

Considere a linguagem:

$$L_2 = \{w \mid \text{w possuí o mesmo número de a's e b's, com } w \in \{a, b\}^*\}$$

- Considere $w = abbbaa$



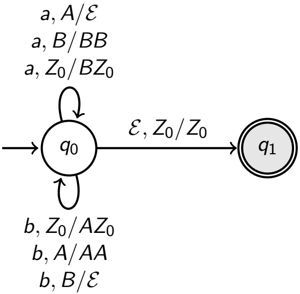
cadeia	**pilha**
$abbbaa$	Z_0
$bbbaa$	BZ_0
$bbaa$	Z_0
baa	AZ_0
aa	AAZ_0
a	AZ_0
	Z_0

Exemplo

Considere a linguagem:

$$L_2 = \{w \mid \text{w possuí o mesmo número de a's e b's, com } w \in \{a, b\}^*\}$$

- Considere $w = abbbaa$



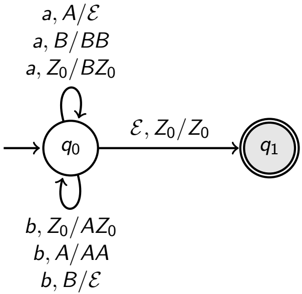
cadeia	**pilha**
$abbbaa$	Z_0
$bbbaa$	BZ_0
$bbaa$	Z_0
baa	AZ_0
aa	AAZ_0
a	AZ_0
	Z_0

Exemplo

Considere a linguagem:

$$L_2 = \{w \mid \text{w possuí o mesmo número de a's e b's, com } w \in \{a, b\}^*\}$$

- Considere $w = abbbaa$



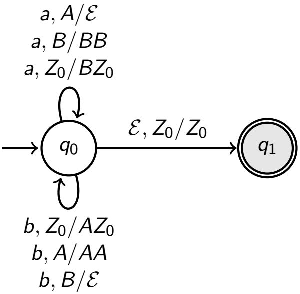
cadeia	**pilha**
$abbbaa$	Z_0
$bbbaa$	BZ_0
$bbaa$	Z_0
baa	AZ_0
aa	AAZ_0
a	AZ_0
	Z_0

Exemplo

Considere a linguagem:

$$L_2 = \{w \mid \text{w possuí o mesmo número de a's e b's, com } w \in \{a, b\}^*\}$$

- Considere $w = abbbaa$



cadeia	**pilha**
$abbbaa$	Z_0
$bbbaa$	BZ_0
$bbaa$	Z_0
baa	AZ_0
aa	AAZ_0
a	AZ_0
	Z_0

Roteiro

1. Autômatos de Pilha
   - Primeiro exemplo $L = \{a^n b^n \mid n > 0\}$
   - Formalização de um AP
   - Descrição Instantânea (DI)
2. Modelos de aceitação de um AP
   - Aceitação por estado final e por pilha vazia
   - De pilha vazia para estado final
   - De estado final para pilha vazia
3. Referências

Descrição instantânea

Intuitivamente, um AP vai de configuração em configuração em resposta:

1. ao que lê da cadeia de entrada (ou, as vezes à $\mathcal{E}$);
2. ao estado corrente; e
3. ao conteúdo do topo da pilha.

Descrição instantânea

Vamos representar a configuração de um AP com a tripla:

$$(q, w_i w_{i+1} \dots w_n, \gamma)$$

em que:

1. q é o estado corrente;
2. $w_i w_{i+1} \dots w_n$ é a parte não lida da cadeia de entrada; e
3. $\gamma = X_1 X_2 \dots X_n Z_0$ é o conteúdo da pilha.

Essa tripla é chamada de *Descrição instantânea* (DI) de um AP.

Descrição instantânea

Vamos representar a configuração de um AP com a tripla:

$$(q, w_i w_{i+1} \ldots w_n, \gamma)$$

em que:

1. q é o estado corrente;
2. $w_i w_{i+1} \ldots w_n$ é a parte não lida da cadeia de entrada; e
3. $\gamma = X_1 X_2 \ldots X_n Z_0$ é o conteúdo da pilha.

Essa tripla é chamada de *Descrição instantânea* (DI) de um AP.

Descrição instantânea

Adotaremos a seguinte notação para conectar pares de DIs, que representão transições no AP:

$$(q, w_i w_{i+1} \ldots w_n, X\gamma) \Rightarrow (p, w_{i+1} \ldots w_n, X_i X_j \ldots X_k \gamma)$$

$$q \xrightarrow{a,\, X/X_i X_j \ldots X_k} p$$

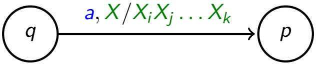
- Esse movimento reflete a ideia de que no estado q:
  1. Ao ler $w_i = a$ (pode ser $\mathcal{E}$);
  2. Substituímos $X \in \Gamma$ por uma cadeia $X_i X_j \ldots X_k \in \Gamma^*$ na pilha; e
  3. O AP vai para o estado p.

Observe que tanto $w_{i+1} \ldots w_n$ quanto γ não são alterados e não influenciam as ações do AP.

Descrição instantânea

Adotaremos a seguinte notação para conectar pares de DIs, que representão transições no AP:

$$(q, w_i w_{i+1} \dots w_n, X\gamma) \Rightarrow (p, w_{i+1} \dots w_n, X_i X_j \dots X_k \gamma)$$



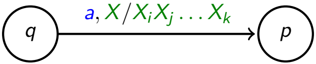
- Esse movimento reflete a ideia de que no estado q:
  1. Ao ler $w_i = a$ (pode ser $\mathcal{E}$);
  2. Substituímos $X \in \Gamma$ por uma cadeia $X_iX_j \dots X_k \in \Gamma^*$ na pilha; e
  3. O AP vai para o estado p.

Observe que tanto $w_{i+1} \dots w_n$ quanto γ não são alterados e não influenciam as ações do AP.

Descrição instantânea

Adotaremos a seguinte notação para conectar pares de DIs, que representão transições no AP:

$$(q, w_i w_{i+1} \ldots w_n, X\gamma) \Rightarrow (p, w_{i+1} \ldots w_n, X_i X_j \ldots X_k \gamma)$$



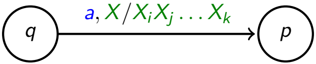
- Esse movimento reflete a ideia de que no estado q:
  1. Ao ler $w_i = a$ (pode ser $\mathcal{E}$);
  2. Substituímos $X \in \Gamma$ por uma cadeia $X_i X_j \ldots X_k \in \Gamma^*$ na pilha; e
  3. O AP vai para o estado p.

Observe que tanto $w_{i+1} \ldots w_n$ quanto γ não são alterados e não influenciam as ações do AP.

Descrição instantânea

Adotaremos a seguinte notação para conectar pares de DIs, que representão transições no AP:

$$(q, w_i w_{i+1} \ldots w_n, X\gamma) \Rightarrow (p, w_{i+1} \ldots w_n, X_i X_j \ldots X_k \gamma)$$



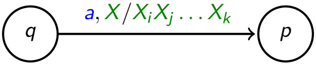
- Esse movimento reflete a ideia de que no estado q:
  1. Ao ler $w_i = a$ (pode ser $\mathcal{E}$);
  2. Substituímos $X \in \Gamma$ por uma cadeia $X_i X_j \ldots X_k \in \Gamma^*$ na pilha; e
  3. O AP vai para o estado p.

Observe que tanto $w_{i+1} \ldots w_n$ quanto γ não são alterados e não influenciam as ações do AP.

Descrição instantânea

Adotaremos a seguinte notação para conectar pares de DIs, que representão transições no AP:

$$(q, w_i w_{i+1} \ldots w_n, X\gamma) \Rightarrow (p, w_{i+1} \ldots w_n, X_i X_j \ldots X_k \gamma)$$



- Esse movimento reflete a ideia de que no estado q:
  1. Ao ler $w_i = a$ (pode ser $\mathcal{E}$);
  2. Substituímos $X \in \Gamma$ por uma cadeia $X_i X_j \ldots X_k \in \Gamma^*$ na pilha; e
  3. O AP vai para o estado p.

Observe que tanto $w_{i+1} \ldots w_n$ quanto γ não são alterados e não influenciam as ações do AP.

Descrição instantânea

Utilizaremos $\Rightarrow^*$ para representar zero ou mais transições de DIs.

- Então, se

  $$I = (q, w_i \dots w_n, \gamma) \Rightarrow^* (p, w_j \dots w_n, \gamma') = J$$

  com $1 \leq i \leq j \leq n$.

- Então existe uma sequência de DIs conectando I e J, tal que

  $$I = K_1 \Rightarrow K_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow K_n = J$$

Descrição instantânea

Utilizaremos $\Rightarrow^*$ para representar zero ou mais transições de DIs.

- Então, se

  $$I = (q, w_i \ldots w_n, \gamma) \Rightarrow^* (p, w_j \ldots w_n, \gamma') = J$$

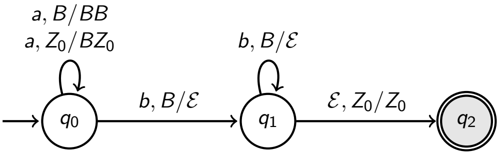
  com $1 \leq i \leq j \leq n$.

- Então existe uma sequência de DIs conectando I e J, tal que

  $$I = K_1 \Rightarrow K_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow K_n = J$$

Exemplo

$L_1 = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ e $w = aaabbb$

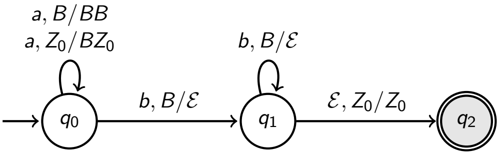


- DIs:

$$
\begin{array}{llll}
(q_0, aaabbb, Z_0) & \Rightarrow & (q_0, aabbb, BZ_0) & \Rightarrow \\
 & & (q_0, abbb, BBZ_0) & \Rightarrow \\
 & & (q_0, bbb, BBBZ_0) & \Rightarrow \\
 & & (q_1, bb, BBZ_0) & \Rightarrow \\
 & & (q_1, b, BZ_0) & \Rightarrow \\
 & & (q_1, \mathcal{E}, Z_0) & \Rightarrow \\
 & & (q_2, \mathcal{E}, Z_0) & \checkmark
\end{array}
$$

Exemplo

$L_1 = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ e $w = aaabbb$

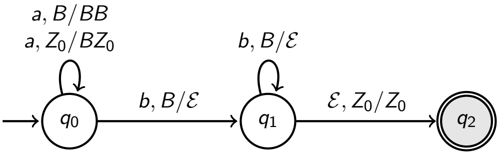


- DIs:

$$
\begin{array}{lll}
(q_0, aaabbb, Z_0) & \Rightarrow & (q_0, aabbb, BZ_0) & \Rightarrow \\
 & & (q_0, abbb\ , BBZ_0) & \Rightarrow \\
 & & (q_0, bbb\ , BBBZ_0) & \Rightarrow \\
 & & (q_1, bb\ , BBZ_0) & \Rightarrow \\
 & & (q_1, b\ , BZ_0) & \Rightarrow \\
 & & (q_1, \mathcal{E}\ , Z_0) & \Rightarrow \\
 & & (q_2, \mathcal{E}\ , Z_0) & \checkmark
\end{array}
$$

Exemplo

$L_1 = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ e $w = aaabbb$

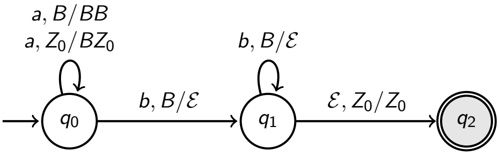


- DIs:

$$
\begin{array}{lcll}
(q_0, aaabbb, Z_0) & \Rightarrow & (q_0, aabbb, BZ_0) & \Rightarrow \\
 & & (q_0, abbb\ \ , BBZ_0) & \Rightarrow \\
 & & (q_0, bbb\ \ \ , BBBZ_0) & \Rightarrow \\
 & & (q_1, bb\ \ \ \ , BBZ_0) & \Rightarrow \\
 & & (q_1, b\ \ \ \ \ , BZ_0) & \Rightarrow \\
 & & (q_1, \mathcal{E}\ \ \ \ \ , Z_0) & \Rightarrow \\
 & & (q_2, \mathcal{E}\ \ \ \ \ , Z_0) & \checkmark
\end{array}
$$

Exemplo

$L_1 = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ e $w = aaabbb$

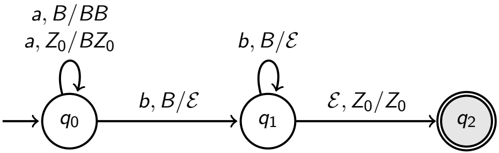


- DIs:

$$
\begin{array}{llll}
(q_0, aaabbb, Z_0) & \Rightarrow & (q_0, aabbb, BZ_0) & \Rightarrow \\
 & & (q_0, abbb, BBZ_0) & \Rightarrow \\
 & & (q_0, bbb, BBBZ_0) & \Rightarrow \\
 & & (q_1, bb, BBZ_0) & \Rightarrow \\
 & & (q_1, b, BZ_0) & \Rightarrow \\
 & & (q_1, \mathcal{E}, Z_0) & \Rightarrow \\
 & & (q_2, \mathcal{E}, Z_0) & \checkmark
\end{array}
$$

Exemplo

$L_1 = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ e $w = aaabbb$

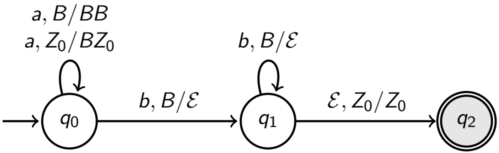


- DIs:

$$
\begin{array}{lclr}
(q_0, aaabbb, Z_0) & \Rightarrow & (q_0, aabbb, BZ_0) & \Rightarrow \\
& & (q_0, abbb, BBZ_0) & \Rightarrow \\
& & (q_0, bbb, BBBZ_0) & \Rightarrow \\
& & (q_1, bb, BBZ_0) & \Rightarrow \\
& & (q_1, b, BZ_0) & \Rightarrow \\
& & (q_1, \mathcal{E}, Z_0) & \Rightarrow \\
& & (q_2, \mathcal{E}, Z_0) & \checkmark
\end{array}
$$

Exemplo

$L_1 = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ e $w = aaabbb$

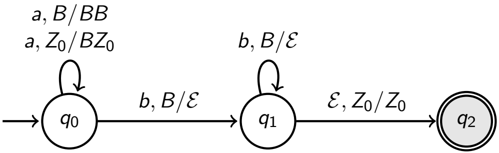


- DIs:

$$
\begin{array}{llll}
(q_0, aaabbb, Z_0) & \Rightarrow & (q_0, aabbb, BZ_0) & \Rightarrow \\
 & & (q_0, abbb, BBZ_0) & \Rightarrow \\
 & & (q_0, bbb, BBBZ_0) & \Rightarrow \\
 & & (q_1, bb, BBZ_0) & \Rightarrow \\
 & & (q_1, b, BZ_0) & \Rightarrow \\
 & & (q_1, \mathcal{E}, Z_0) & \Rightarrow \\
 & & (q_2, \mathcal{E}, Z_0) & \checkmark
\end{array}
$$

Exemplo

$L_1 = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ e $w = aaabbb$



- DIs:

$$
\begin{array}{lcll}
(q_0, aaabbb, Z_0) & \Rightarrow & (q_0, aabbb, BZ_0) & \Rightarrow \\
 & & (q_0, abbb, BZ_0) & \Rightarrow \\
 & & (q_0, bbb, BBZ_0) & \Rightarrow \\
 & & (q_1, bb, BZ_0) & \Rightarrow \\
 & & (q_1, b, BZ_0) & \Rightarrow \\
 & & (q_1, \mathcal{E}, Z_0) & \Rightarrow \\
 & & (q_2, \mathcal{E}, Z_0) & \checkmark
\end{array}
$$

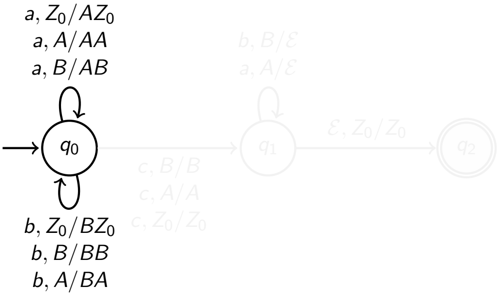
Outro exemplo

Considere a linguagem:

$$L_3 = \{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

- Vamos construir um AP

$$P_3 = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \{Z_0, A, B\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$$



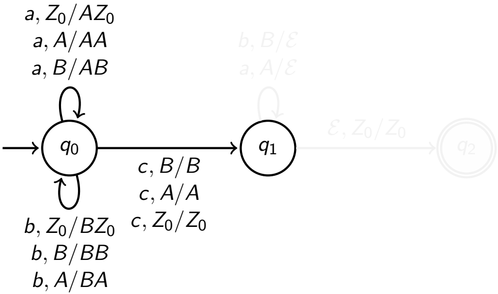
Outro exemplo

Considere a linguagem:

$$L_3 = \{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

- Vamos construir um AP

$$P_3 = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \{Z_0, A, B\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$$



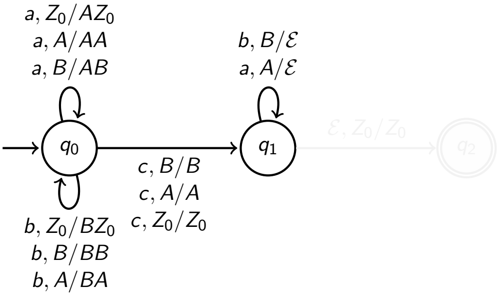
Outro exemplo

Considere a linguagem:

$$L_3 = \{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

- Vamos construir um AP

$$P_3 = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \{Z_0, A, B\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$$



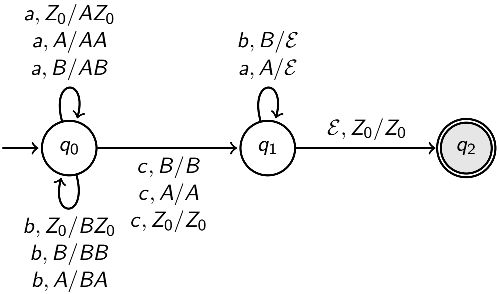
Outro exemplo

Considere a linguagem:

$$L_3 = \{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

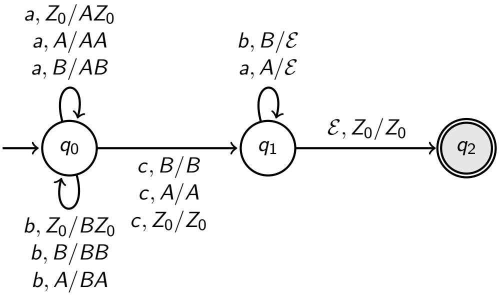
- Vamos construir um AP

$$P_3 = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \{Z_0, A, B\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$$



Descrição instantânea

$L_3 = \{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$ e $w = abbcbba$



- DIs:

$$(q_0, abbcbba, Z_0) \quad \Rightarrow^* \quad (q_2, \mathcal{E}, Z_0) \quad \checkmark$$

Roteiro

1. Autômatos de Pilha
   - Primeiro exemplo $L = \{a^n b^n \mid n > 0\}$
   - Formalização de um AP
   - Descrição Instantânea (DI)
2. Modelos de aceitação de um AP
   - Aceitação por estado final e por pilha vazia
   - De pilha vazia para estado final
   - De estado final para pilha vazia
3. Referências

Roteiro

1. Autômatos de Pilha
   - Primeiro exemplo $L = \{a^n b^n \mid n > 0\}$
   - Formalização de um AP
   - Descrição Instantânea (DI)
2. Modelos de aceitação de um AP
   - Aceitação por estado final e por pilha vazia
   - De pilha vazia para estado final
   - De estado final para pilha vazia
3. Referências

Modelos de aceitação

Existem duas alternativas (equivalentes) para a aceitação de uma palavra por um AP:

1. Aceitação por estado final
2. Aceitação por pilha vazia

Aceitação pelo estado final

Definição

Seja $P = (Q, \Sigma, \mathbf{\Gamma}, \delta, q_0, \mathbf{Z_0}, F)$ um AP.
Então $L(P)$ é a linguagem reconhecida por P pelo estado final, definida por:

$$L(P) = \{w \mid (q_0, w, Z_0) \Rightarrow^* (q_f, \mathcal{E}, \gamma)\}$$

para algum $q_f \in F$ e qualquer γ na pilha.

- Observe que o conteúdo final na pilha é irrelevante.

Aceitação pelo estado final

Definição

Seja $P = (Q, \Sigma, \mathbf{\Gamma}, \delta, q_0, \mathbf{Z_0}, F)$ um AP.
Então $L(P)$ é a linguagem reconhecida por P pelo estado final, definida por:

$$L(P) = \{w \mid (q_0, w, Z_0) \Rightarrow^* (q_f, \mathcal{E}, \gamma)\}$$

para algum $q_f \in F$ e qualquer γ na pilha.

- Observe que o conteúdo final na pilha é irrelevante.

Aceitação por pilha vazia

Definição

Seja $P = (Q, \Sigma, \mathbf{\Gamma}, \delta, q_0, \mathbf{Z_0})$ um AP.
Então $N(P)$ é a linguagem reconhecida por P por pilha vazia, definida por:

$$N(P) = \{w \mid (q_0, w, Z_0) \Rightarrow^* (q, \mathcal{E}, \mathcal{E})\}$$

para qualquer $q \in Q$.

- Na definição de P podemos omitir o conjunto de estados F.

Aceitação por pilha vazia

Definição

Seja $P = (Q, \Sigma, \mathbf{\Gamma}, \delta, q_0, \mathbf{Z_0})$ um AP.
Então $N(P)$ é a linguagem reconhecida por P por pilha vazia, definida por:

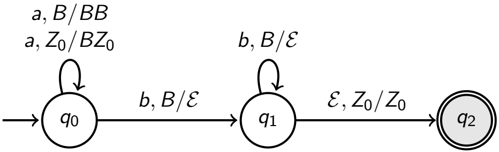
$$N(P) = \{w \mid (q_0, w, Z_0) \Rightarrow^* (q, \mathcal{E}, \mathcal{E})\}$$

para qualquer $q \in Q$.

- Na definição de P podemos omitir o conjunto de estados F.

Exemplo

O AP visto para reconhecer $L_1 = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ reconhece L_1 pelo estado final.

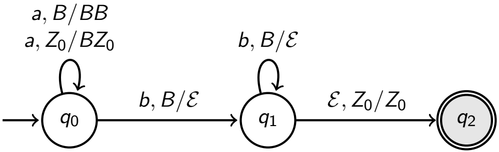


- Nesse caso, P nunca esvazia a pilha.
- Então a linguagem reconhecida por pilha vazia é $N(P) = \varnothing$

Na maioria das vezes $L(P) \neq N(P)$ para um mesmo AP.

Exemplo

O AP visto para reconhecer $L_1 = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ reconhece L_1 pelo estado final.

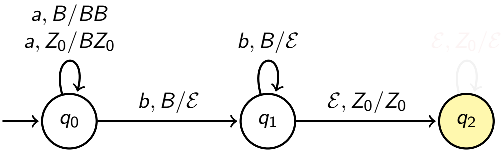


- Nesse caso, P nunca esvazia a pilha.
- Então a linguagem reconhecida por pilha vazia é $N(P) = \varnothing$

Na maioria das vezes $L(P) \neq N(P)$ para um mesmo AP.

Exemplo

Porém, com uma simples modificação podemos alterar P para reconhecer $L_1 = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ por pilha vazia:



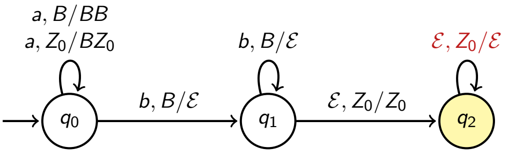
- Agora P' reconhece por pilha vazia.

Vamos ver que esses dois formalismos são equivalentes.

q_2 não é mais estado de aceitação.

Exemplo

Porém, com uma simples modificação podemos alterar P para reconhecer $L_1 = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ por pilha vazia:



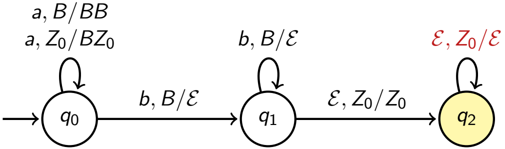
- Agora P' reconhece por pilha vazia.

Vamos ver que esses dois formalismos são equivalentes.

q_2 não é mais estado de aceitação.

Exemplo

Porém, com uma simples modificação podemos alterar P para reconhecer $L_1 = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ por pilha vazia:



- Agora P' reconhece por pilha vazia.

Vamos ver que esses dois formalismos são equivalentes.

---

q_2 não é mais estado de aceitação.

Roteiro

1. Autômatos de Pilha
   - Primeiro exemplo $L = \{a^n b^n \mid n > 0\}$
   - Formalização de um AP
   - Descrição Instantânea (DI)
2. Modelos de aceitação de um AP
   - Aceitação por estado final e por pilha vazia
   - De pilha vazia para estado final
   - De estado final para pilha vazia
3. Referências

De pilha vazia para estado final

Teorema

Seja $L = N(P_N)$ para algum AP $P_N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_{\mathbf{N}}, q_0, Z_0)$.
Então existe um outro AP equivalente P_F tal que:

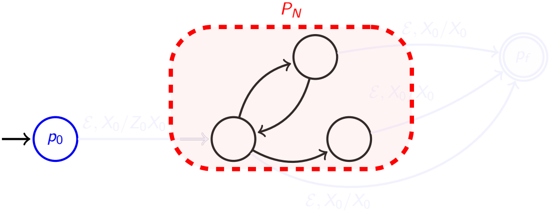
$$N(P_N) = L(P_F)$$

Em outras palavras, a linguagem reconhecida por pilha vazia por P_N é igual à linguagem reconhecida por estado final por P_F

De pilha vazia para estado final

Procedimento 1:

- Vamos definir $P_F = (Q \cup \{p_0, p_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_F, p_0, X_0, \{p_f\})$
  1. p_0 é o novo estado inicial;
  2. p_f é o estado de aceitação; e
  3. X_0 é o símbolo de fundo de pilha.

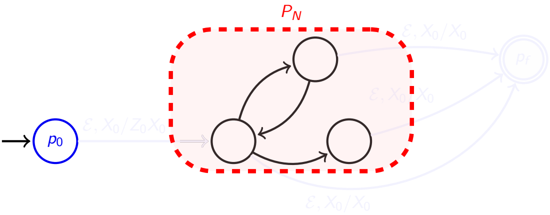


- A ideia é sempre que X_0 está no topo, a pilha está vazia, e vamos para $p_f \in F$.

De pilha vazia para estado final

Procedimento 1:

- Vamos definir $P_F = (Q \cup \{p_0, p_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_F, p_0, X_0, \{p_f\})$
  1. p_0 é o novo estado inicial;
  2. p_f é o estado de aceitação; e
  3. X_0 é o símbolo de fundo de pilha.

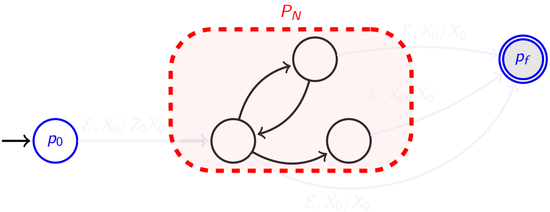


- A ideia é sempre que X_0 está no topo, a pilha está vazia, e vamos para $p_f \in F$.

De pilha vazia para estado final

Procedimento 1:

- Vamos definir $P_F = (Q \cup \{p_0, p_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_F, p_0, X_0, \{p_f\})$
  1. p_0 é o novo estado inicial;
  2. p_f é o estado de aceitação; e
  3. X_0 é o símbolo de fundo de pilha.

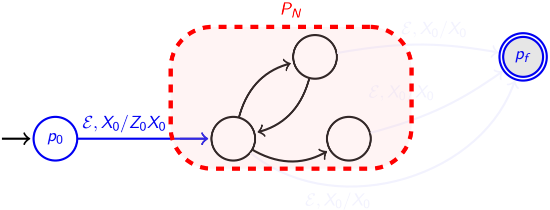


- A ideia é sempre que X_0 está no topo, a pilha está vazia, e vamos para $p_f \in F$.

De pilha vazia para estado final

Procedimento 1:

- Vamos definir $P_F = (Q \cup \{p_0, p_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_F, p_0, X_0, \{p_f\})$
  1. p_0 é o novo estado inicial;
  2. p_f é o estado de aceitação; e
  3. X_0 é o símbolo de fundo de pilha.

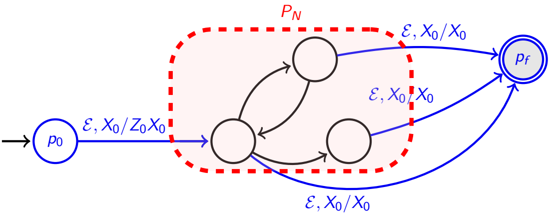


- A ideia é sempre que X_0 está no topo, a pilha está vazia, e vamos para $p_f \in F$.

De pilha vazia para estado final

Procedimento 1:

- Vamos definir $P_F = (Q \cup \{p_0, p_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_F, p_0, X_0, \{p_f\})$
  1. p_0 é o novo estado inicial;
  2. p_f é o estado de aceitação; e
  3. X_0 é o símbolo de fundo de pilha.

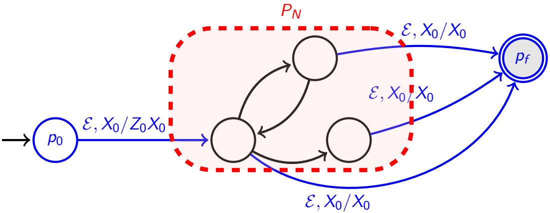


- A ideia é sempre que X_0 está no topo, a pilha está vazia, e vamos para $p_f \in F$.

De pilha vazia para estado final

Procedimento 1:

- Isto é, definimos $\delta_{\mathbf{F}}$: por:
  1. $\delta_F(p_0, \mathcal{E}, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\}$;
  2. $\delta_F(q, a, X) = \delta_N(q, a, X)$, para todo $q \in Q$, $a \in (\Sigma \cup \{\mathcal{E}\})$ e $X \in \Gamma$;
  3. $\delta_F(q, \mathcal{E}, X_0) = \{(q_f, X_0)\}$, para todo $q \in Q$.

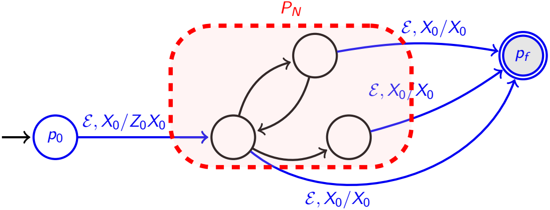


Item 2: simula P_N em P_F

De pilha vazia para estado final

Procedimento 1:

- Isto é, definimos $\delta_{\mathbf{F}}$: por:
  1. $\delta_F(p_0, \mathcal{E}, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\}$;
  2. $\delta_F(q, a, X) = \delta_N(q, a, X)$, para todo $q \in Q$, $a \in (\Sigma \cup \{\mathcal{E}\})$ e $X \in \Gamma$;
  3. $\delta_F(q, \mathcal{E}, X_0) = \{(q_f, X_0)\}$, para todo $q \in Q$.

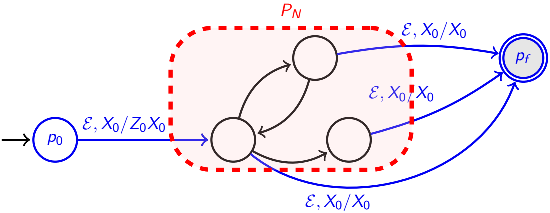


Item 2: simula P_N em P_F

De pilha vazia para estado final

Procedimento 1:

- Isto é, definimos $\delta_{\mathbf{F}}$: por:
  1. $\delta_F(p_0, \mathcal{E}, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\}$;
  2. $\delta_F(q, a, X) = \delta_N(q, a, X)$, para todo $q \in Q$, $a \in (\Sigma \cup \{\mathcal{E}\})$ e $X \in \Gamma$;
  3. $\delta_F(q, \mathcal{E}, X_0) = \{(q_f, X_0)\}$, para todo $q \in Q$.

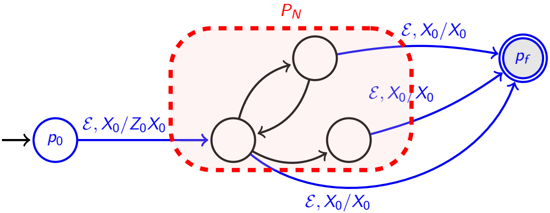


Item 2: simula P_N em P_F

De pilha vazia para estado final

Procedimento 1:

- Isto é, definimos $\delta_{\mathbf{F}}$: por:
  1. $\delta_F(p_0, \mathcal{E}, X_0) = \{(q_0, Z_0 X_0)\}$;
  2. $\delta_F(q, a, X) = \delta_N(q, a, X)$, para todo $q \in Q$, $a \in (\Sigma \cup \{\mathcal{E}\})$ e $X \in \Gamma$;
  3. $\delta_F(q, \mathcal{E}, X_0) = \{(q_f, X_0)\}$, para todo $q \in Q$.



Item 2: simula P_N em P_F

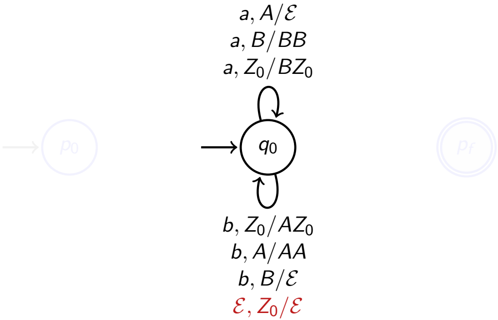
De pilha vazia para estado final

A prova de corretude deste procedimento é simples e será omitida.

Exemplo

Considere:

$N(P_N) = \{w \mid \text{w possui o mesmo número de a's e b's, com } w \in \{a, b\}^*\}$

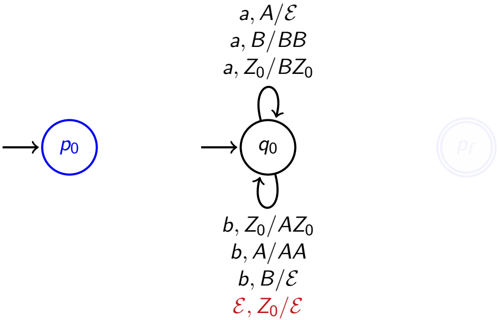


Dessa forma, $L(P_F) = N(P_N)$

Exemplo

Considere:

$N(P_N) = \{w \mid$ w possui o mesmo número de a's e b's, com $w \in \{a, b\}^*\}$

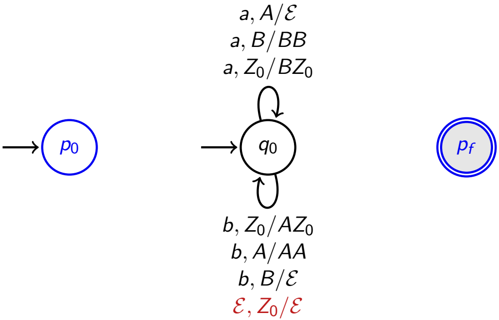


Dessa forma, $L(P_F) = N(P_N)$

Exemplo

Considere:

$N(P_N) = \{w \mid \text{w possui o mesmo número de a's e b's, com } w \in \{a, b\}^*\}$

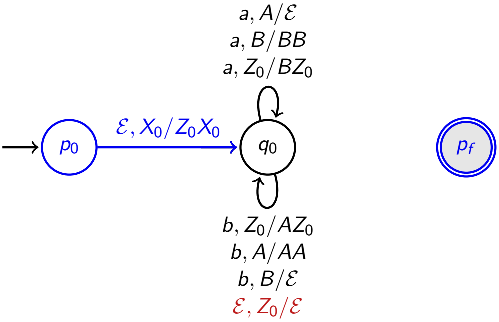


Dessa forma, $L(P_F) = N(P_N)$

Exemplo

Considere:

$N(P_N) = \{w \mid \text{w possui o mesmo número de a's e b's, com } w \in \{a,b\}^*\}$

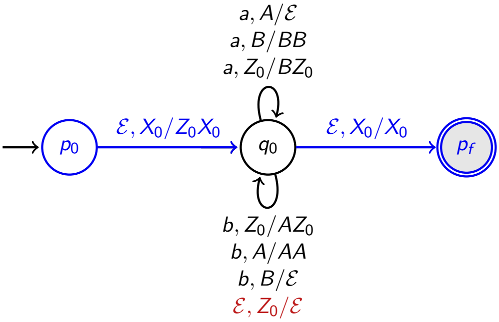


Dessa forma, $L(P_F) = N(P_N)$

Exemplo

Considere:

$N(P_N) = \{w \mid \text{w possui o mesmo número de a's e b's, com } w \in \{a, b\}^*\}$

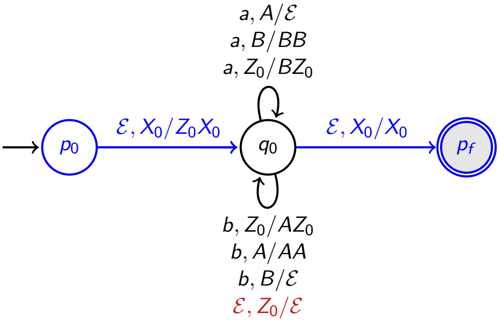


Dessa forma, $L(P_F) = N(P_N)$

Exemplo

Considere:

$N(P_N) = \{w \mid \text{w possui o mesmo número de a's e b's, com } w \in \{a, b\}^*\}$



Dessa forma, $L(P_F) = N(P_N)$

Roteiro

1. Autômatos de Pilha
   - Primeiro exemplo $L = \{a^n b^n \mid n > 0\}$
   - Formalização de um AP
   - Descrição Instantânea (DI)
2. Modelos de aceitação de um AP
   - Aceitação por estado final e por pilha vazia
   - De pilha vazia para estado final
   - De estado final para pilha vazia
3. Referências

De estado final para pilha vazia

Teorema

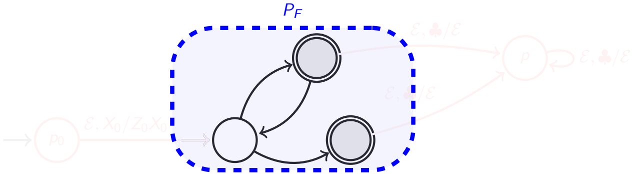
Seja $L = L(P_F)$ para algum AP $P_F = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_{\mathbf{F}}, q_0, Z_0, \mathbf{F})$.
Então existe um outro AP equivalente P_N tal que:

$$L(P_F) = N(P_N)$$

De estado final para pilha vazia

Procedimento 2:

- Vamos definir $P_N = (Q \cup \{p_0, p\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_N, p_0, X_0)$
  1. p_0 é o novo estado inicial;
  2. p é o um novo estado (para "esvaziar" a pilha); e
  3. X_0 é o símbolo de fundo de pilha.



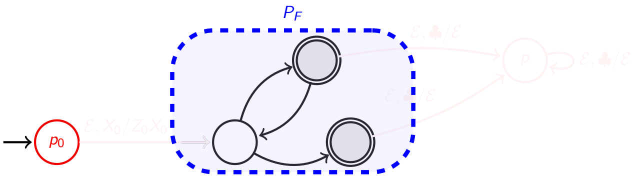
- A ideia é sempre que P_N esta em um estado final de P_F e a w foi consumida, a pilha deve ser esvaziada em p_f.

♣ é igual à qualquer símbolo da pilha.

De estado final para pilha vazia

Procedimento 2:

- Vamos definir $P_N = (Q \cup \{p_0, p\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_N, p_0, X_0)$
  1. p_0 é o novo estado inicial;
  2. p é o um novo estado (para "esvaziar" a pilha); e
  3. X_0 é o símbolo de fundo de pilha.



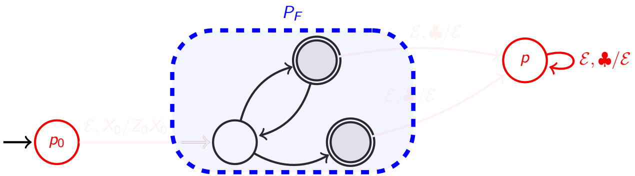
- A ideia é sempre que P_N esta em um estado final de P_F e a w foi consumida, a pilha deve ser esvaziada em p_f.

♣ é igual à qualquer símbolo da pilha.

De estado final para pilha vazia

Procedimento 2:

- Vamos definir $P_N = (Q \cup \{p_0, p\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_N, p_0, X_0)$
  1. p_0 é o novo estado inicial;
  2. p é o um novo estado (para "esvaziar" a pilha); e
  3. X_0 é o símbolo de fundo de pilha.



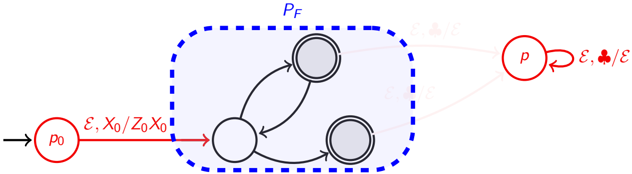
- A ideia é sempre que P_N esta em um estado final de P_F e a w foi consumida, a pilha deve ser esvaziada em p_f.

♣ é igual à qualquer símbolo da pilha.

De estado final para pilha vazia

Procedimento 2:

- Vamos definir $P_N = (Q \cup \{p_0, p\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_N, p_0, X_0)$
  1. p_0 é o novo estado inicial;
  2. p é o um novo estado (para "esvaziar" a pilha); e
  3. X_0 é o símbolo de fundo de pilha.



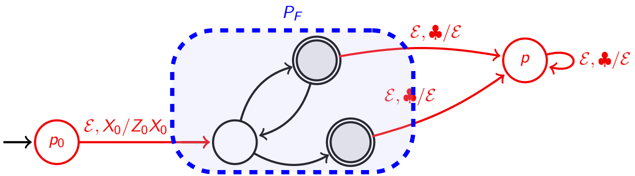
- A ideia é sempre que P_N esta em um estado final de P_F e a w foi consumida, a pilha deve ser esvaziada em p_f.

♣ é igual à qualquer símbolo da pilha.

De estado final para pilha vazia

Procedimento 2:

- Vamos definir $P_N = (Q \cup \{p_0, p\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_N, p_0, X_0)$
  1. p_0 é o novo estado inicial;
  2. p é o um novo estado (para "esvaziar" a pilha); e
  3. X_0 é o símbolo de fundo de pilha.



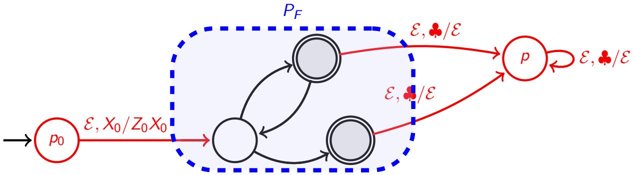
- A ideia é sempre que P_N esta em um estado final de P_F e a w foi consumida, a pilha deve ser esvaziada em p_f.

♣ é igual à qualquer símbolo da pilha.

De estado final para pilha vazia

Procedimento 2:

- Observe que X_0 evita que a pilha seja esvaziada acidentalmente (sem consumir w ou $q \notin F$).



De estado final para pilha vazia

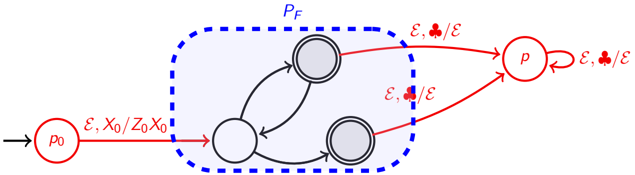
Procedimento 2:

- Isto é, definimos $\delta_{\mathbf{N}}$: por:

1. $\delta_N(p_0, \mathcal{E}, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\}$;
2. $\delta_N(q, a, X) = \delta_F(q, a, X)$, para todo $q \in Q$, $a \in (\Sigma \cup \{\mathcal{E}\})$ e $X \in \Gamma$;
3. Para todo $q \in F$ e qualquer $X \in (\Gamma \cup \{X_0\})$, temos:

$$\delta_N(q, \mathcal{E}, X) \subseteq \{(p, X_0)\}$$

4. $\delta_N(p, \mathcal{E}, X) = \{(p, \mathcal{E})\}$, para todo $X \in \Gamma \cup \{X_0\}$



Item 2: simula P_F em P_N

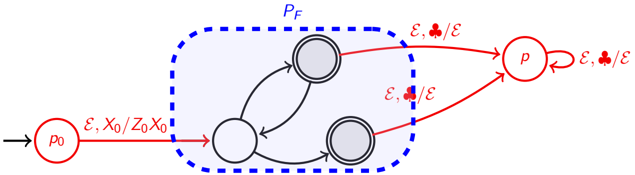
De estado final para pilha vazia

Procedimento 2:

- Isto é, definimos $\delta_{\mathbf{N}}$: por:
  1. $\delta_N(p_0, \mathcal{E}, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\}$;
  2. $\delta_N(q, a, X) = \delta_F(q, a, X)$, para todo $q \in Q$, $a \in (\Sigma \cup \{\mathcal{E}\})$ e $X \in \Gamma$;
  3. Para todo $q \in F$ e qualquer $X \in (\Gamma \cup \{X_0\})$, temos:

$$\delta_N(q, \mathcal{E}, X) \subseteq \{(p, X_0)\}$$

  4. $\delta_N(p, \mathcal{E}, X) = \{(p, \mathcal{E})\}$, para todo $X \in \Gamma \cup \{X_0\}$



Item 2: simula P_F em P_N

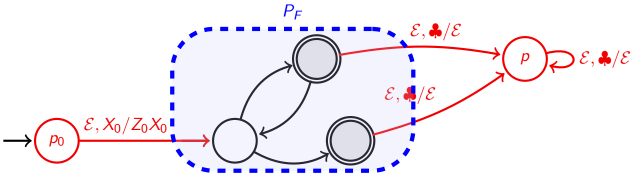
De estado final para pilha vazia

Procedimento 2:

- Isto é, definimos $\delta_{\mathbf{N}}$: por:
  1. $\delta_N(p_0, \mathcal{E}, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\}$;
  2. $\delta_N(q, a, X) = \delta_F(q, a, X)$, para todo $q \in Q$, $a \in (\Sigma \cup \{\mathcal{E}\})$ e $X \in \Gamma$;
  3. Para todo $q \in F$ e qualquer $X \in (\Gamma \cup \{X_0\})$, temos:

$$\delta_N(q, \mathcal{E}, X) \subseteq \{(p, X_0)\}$$

  4. $\delta_N(p, \mathcal{E}, X) = \{(p, \mathcal{E})\}$, para todo $X \in \Gamma \cup \{X_0\}$



Item 2: simula P_F em P_N

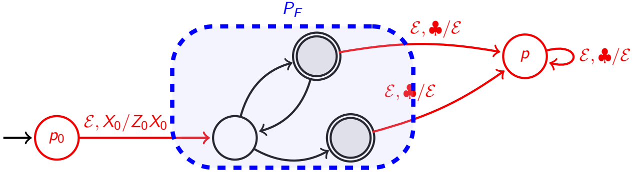
De estado final para pilha vazia

Procedimento 2:

- Isto é, definimos $\delta_{\mathbf{N}}$: por:
  1. $\delta_N(p_0, \mathcal{E}, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\}$;
  2. $\delta_N(q, a, X) = \delta_F(q, a, X)$, para todo $q \in Q$, $a \in (\Sigma \cup \{\mathcal{E}\})$ e $X \in \Gamma$;
  3. Para todo $q \in F$ e qualquer $X \in (\Gamma \cup \{X_0\})$, temos:

$$\delta_N(q, \mathcal{E}, X) \subseteq \{(p, X_0)\}$$

  4. $\delta_N(p, \mathcal{E}, X) = \{(p, \mathcal{E})\}$, para todo $X \in \Gamma \cup \{X_0\}$



Item 2: simula P_F em P_N

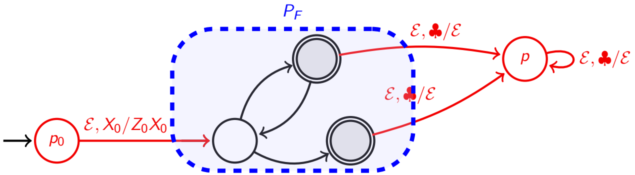
De estado final para pilha vazia

Procedimento 2:

- Isto é, definimos $\delta_{\mathbf{N}}$: por:
  1. $\delta_N(p_0, \mathcal{E}, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\}$;
  2. $\delta_N(q, a, X) = \delta_F(q, a, X)$, para todo $q \in Q$, $a \in (\Sigma \cup \{\mathcal{E}\})$ e $X \in \Gamma$;
  3. Para todo $q \in F$ e qualquer $X \in (\Gamma \cup \{X_0\})$, temos:

$$\delta_N(q, \mathcal{E}, X) \subseteq \{(p, X_0)\}$$

  4. $\delta_N(p, \mathcal{E}, X) = \{(p, \mathcal{E})\}$, para todo $X \in \Gamma \cup \{X_0\}$



Item 2: simula P_F em P_N

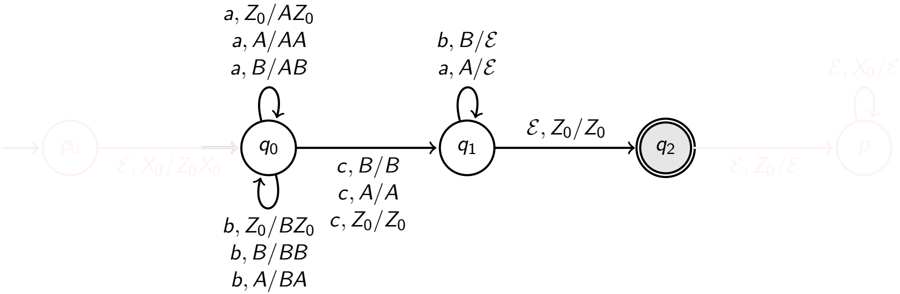
De estado final para pilha vazia

A prova de corretude deste procedimento também será omitida.

Exemplo

Considere:

$$L(P_F) = \{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

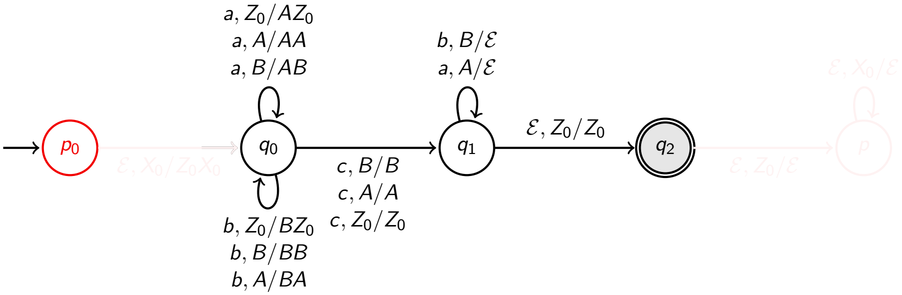


Dessa forma, $N(P_N) = L(P_F)$

Exemplo

Considere:

$$L(P_F) = \{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

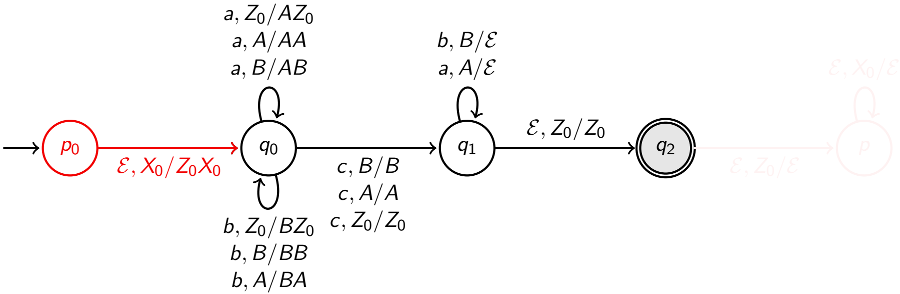


Dessa forma, $N(P_N) = L(P_F)$

Exemplo

Considere:

$$L(P_F) = \{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

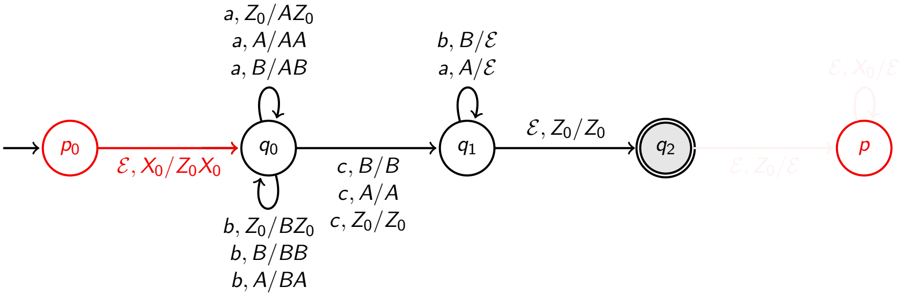


Dessa forma, $N(P_N) = L(P_F)$

Exemplo

Considere:

$$L(P_F) = \{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

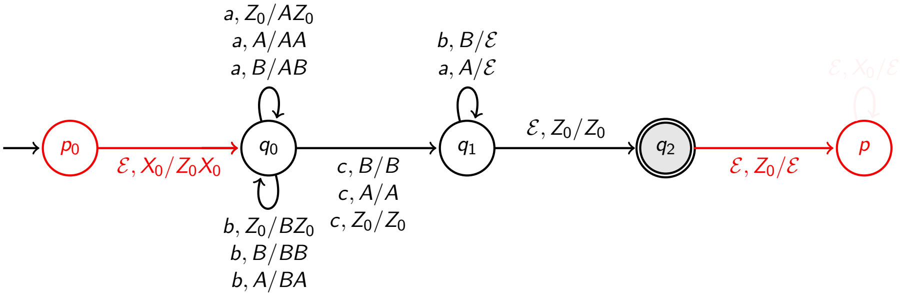


Dessa forma, $N(P_N) = L(P_F)$

Exemplo

Considere:

$$L(P_F) = \{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

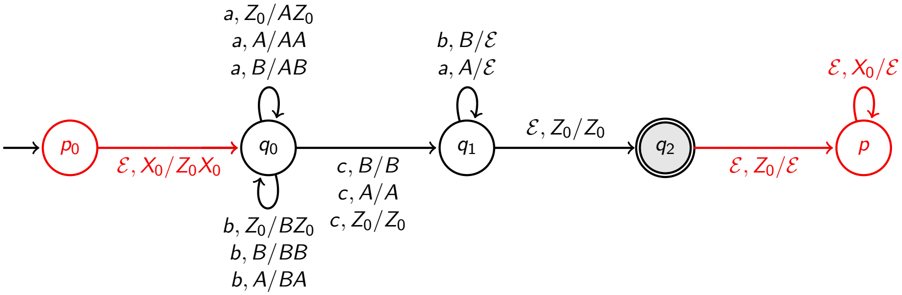


Dessa forma, $N(P_N) = L(P_F)$

Exemplo

Considere:

$$L(P_F) = \{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$$



Dessa forma, $N(P_N) = L(P_F)$

Modelos de aceitação

Acabamos de ver que os dois formalismos para a aceitação por um AP são equivalentes:

1. Aceitação por estado final
2. Aceitação por pilha vazia

Vamos considerar por padrão a primeira.

Modelos de aceitação

Acabamos de ver que os dois formalismos para a aceitação por um AP são equivalentes:

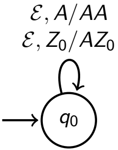
1. Aceitação por estado final
2. Aceitação por pilha vazia

Vamos considerar por padrão a primeira.

Loop infinito

É possível que um AP nunca pare.

- Um exemplo simples:
  - Um AP que empilha e desempilha sem ler w_i

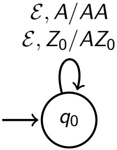


- Nesse caso, o AP fica processando indefinidamente w (ciclo ou loop infinito)

Loop infinito

É possível que um AP nunca pare.

- Um exemplo simples:
  - Um AP que empilha e desempilha sem ler w_i

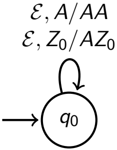


- Nesse caso, o AP fica processando indefinidamente w (ciclo ou loop infinito)

Loop infinito

É possível que um AP nunca pare.

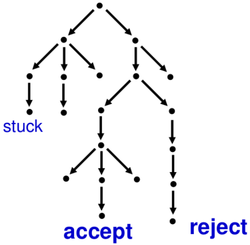
- Um exemplo simples:
  - Um AP que empilha e desempilha sem ler w_i



- Nesse caso, o AP fica processando indefinidamente w (ciclo ou loop infinito)

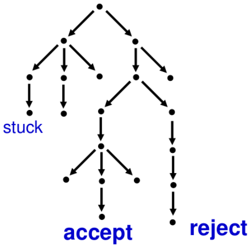
Parada de um AP

1. Aceita: pelo menos um dos caminhos alternativos partindo de (q_0, w, Z_0) atinge um estado final ao processar $w_1 w_2 \ldots w_n$;
2. Rejeita: todos os caminhos rejeitam a entrada; e
3. Loop: pelo menos um caminho partindo de (q_0, w, Z_0) está em loop e os demais rejeitam (ou estão em loop).



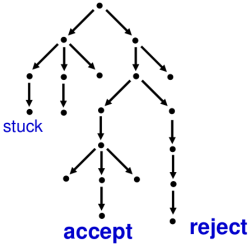
Parada de um AP

1. Aceita: pelo menos um dos caminhos alternativos partindo de (q_0, w, Z_0) atinge um estado final ao processar $w_1 w_2 \dots w_n$;
2. Rejeita: todos os caminhos rejeitam a entrada; e
3. Loop: pelo menos um caminho partindo de (q_0, w, Z_0) está em loop e os demais rejeitam (ou estão em loop).



Parada de um AP

1. Aceita: pelo menos um dos caminhos alternativos partindo de (q_0, w, Z_0) atinge um estado final ao processar $w_1 w_2 \ldots w_n$;
2. Rejeita: todos os caminhos rejeitam a entrada; e
3. Loop: pelo menos um caminho partindo de (q_0, w, Z_0) está em loop e os demais rejeitam (ou estão em loop).



Poder computacional dos APs

Embora o poder computacional dos AP seja muito superior ao dos AFs, ele ainda é restrito, não sendo possível reconhecer linguagens simples como:

$$L_4 = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

$$L_5 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

Vamos ver que a classe das linguagens reconhecidas pelos APs é a classe das LLCs.

Vamos ver os limites dos APs na próxima aula.

Poder computacional dos APs

Embora o poder computacional dos AP seja muito superior ao dos AFs, ele ainda é restrito, não sendo possível reconhecer linguagens simples como:

$$L_5 = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

$$L_6 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

Vamos ver que a classe das linguagens reconhecidas pelos APs é a classe das LLCs.

Vamos ver os limites dos APs na próxima aula.

Fim

Dúvidas?

Roteiro

1. Autômatos de Pilha
   - Primeiro exemplo $L = \{a^n b^n \mid n > 0\}$
   - Formalização de um AP
   - Descrição Instantânea (DI)
2. Modelos de aceitação de um AP
   - Aceitação por estado final e por pilha vazia
   - De pilha vazia para estado final
   - De estado final para pilha vazia
3. Referências

Referências

Referências:

1. *"Introdução à Teoria da Computação"* de M. Sipser, 2007.
2. *"Linguagens formais e autômatos"* de Paulo F. B. Menezes, 2002.
3. Materiais adaptados dos slides do Prof. Evandro E. S. Ruiz, da USP.