Teoria da Computação

Gramáticas e Linguagens Regulares

Aula 05

Prof. Felipe A. Louza

UFU

Roteiro

Motivação

Na primeira parte do curso, vimos dois formalismos para descrever/reconhecer linguagens:

1. Autômatos Finitos
2. Expressões Regulares

Entretanto, vimos que algumas linguagens como

$$L = \{a^n b^n | n \geq 0\}$$

não podem ser descritas com esses formalismos.

Gramáticas

Vamos ver um outro formalismo para definir Linguagens Formais.

Gramáticas

Uma gramática possui regras para geração de todas as palavras de uma linguagem.

- Os formalismos vistos até aqui são úteis apenas para as Linguagens Regulares.

Roteiro

1. Gramáticas e Linguagens
   - Gramáticas
   - Formalização de uma Gramática
   - Hierarquia de Chomsky
2. Gramáticas Regulares
   - Gramáticas Lineares
   - GLUD $\rightarrow$ Linguagem Regular
   - Linguagem Regular $\rightarrow$ GLUD
3. Referências

Gramáticas

Definição informal:

- É basicamente um conjunto finito de regras que, quando aplicadas sucessivamente, **geram palavras**.

$$
\begin{array}{ccc}
S & \rightarrow & \mathbf{a}S\mathbf{b} \\
S & \rightarrow & A \\
A & \rightarrow & \mathcal{E}
\end{array}
$$

O *conjunto de todas as palavras* geradas por uma gramática G define a linguagem $L(G)$.

$$\{ab, aabb, aaabbb, aaaabbbb, \ldots\}$$

Já vimos essa linguagem antes?

Gramáticas

Definição informal:

- É basicamente um conjunto finito de regras que, quando aplicadas sucessivamente, **geram palavras**.

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & \mathbf{a}S\mathbf{b} \\
S & \rightarrow & A \\
A & \rightarrow & \mathcal{E}
\end{array}
$$

O *conjunto de todas as palavras* geradas por uma gramática G define a linguagem $L(G)$.

$$\{ab, aabb, aaabbb, aaaabbbb, \ldots\}$$

Já vimos essa linguagem antes?

Gramáticas

Definição informal:

- É basicamente um conjunto finito de regras que, quando aplicadas sucessivamente, **geram palavras**.

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & \mathbf{a}S\mathbf{b} \\ S & \rightarrow & A \\ A & \rightarrow & \mathcal{E} \end{array}$$

O *conjunto de todas as palavras* geradas por uma gramática G define a linguagem $L(G)$.

$$\{ab, aabb, aaabbb, aaaabbbb, \ldots\}$$

Já vimos essa linguagem antes?

Linguagens Naturais

A **motivação original** para o estudo de Gramáticas encontra-se na descrição de Linguagens Naturais:

- Relacionamentos entre termos tais como *nomes*, *verbos* e *adjetivos*.

$$
\begin{array}{rcl}
\langle \textit{sentence} \rangle & \rightarrow & \langle \textit{noun phrase} \rangle \langle \textit{verb phrase} \rangle \\
\langle \textit{noun phrase} \rangle & \rightarrow & \langle \textit{article} \rangle \langle \textit{noun} \rangle \mid \langle \textit{noun} \rangle \\
\langle \textit{verb phrase} \rangle & \rightarrow & \langle \textit{verb} \rangle \langle \textit{adjetive} \rangle \\
\langle \textit{article} \rangle & \rightarrow & \textbf{the} \\
\langle \textit{noun} \rangle & \rightarrow & \textbf{boy} \mid \textbf{girl} \\
\langle \textit{adjetive} \rangle & \rightarrow & \textbf{small} \mid \textbf{big} \\
\langle \textit{verb} \rangle & \rightarrow & \textbf{is}
\end{array}
$$

Mais tarde, viu-se que Gramáticas são úteis para descrever Linguagens Artificiais, em especial, linguagens de programação.

Linguagens Naturais

A **motivação original** para o estudo de Gramáticas encontra-se na descrição de Linguagens Naturais:

- Relacionamentos entre termos tais como *nomes*, *verbos* e *adjetivos*.

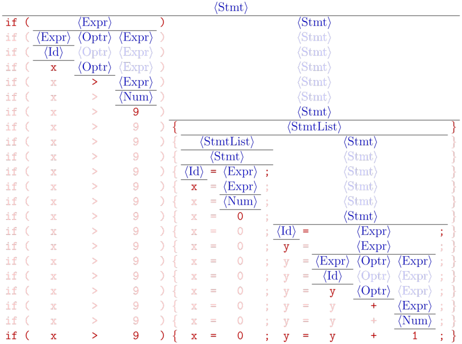
$$
\begin{array}{rcl}
\langle \textit{sentence} \rangle & \rightarrow & \langle \textit{noun phrase} \rangle \langle \textit{verb phrase} \rangle \\
\langle \textit{noun phrase} \rangle & \rightarrow & \langle \textit{article} \rangle \langle \textit{noun} \rangle \mid \langle \textit{noun} \rangle \\
\langle \textit{verb phrase} \rangle & \rightarrow & \langle \textit{verb} \rangle \langle \textit{adjetive} \rangle \\
\langle \textit{article} \rangle & \rightarrow & \textbf{the} \\
\langle \textit{noun} \rangle & \rightarrow & \textbf{boy} \mid \textbf{girl} \\
\langle \textit{adjetive} \rangle & \rightarrow & \textbf{small} \mid \textbf{big} \\
\langle \textit{verb} \rangle & \rightarrow & \textbf{is}
\end{array}
$$

Mais tarde, viu-se que Gramáticas são úteis para descrever Linguagens Artificiais, em especial, linguagens de programação.

Gramáticas e Compiladores:

- Regras de sintaxe (estrutura) em uma Linguagem de programação:

⟨Stmt⟩	→	⟨Id⟩ = ⟨Expr⟩ ;
⟨Stmt⟩	→	{ ⟨StmtList⟩ }
⟨Stmt⟩	→	if (⟨Expr⟩) ⟨Stmt⟩
⟨StmtList⟩	→	⟨Stmt⟩
⟨StmtList⟩	→	⟨StmtList⟩ ⟨Stmt⟩
⟨Expr⟩	→	⟨Id⟩
⟨Expr⟩	→	⟨Num⟩
⟨Expr⟩	→	⟨Expr⟩ ⟨Optr⟩ ⟨Expr⟩
⟨Id⟩	→	x
⟨Id⟩	→	y
⟨Num⟩	→	0
⟨Num⟩	→	1
⟨Num⟩	→	9
⟨Optr⟩	→	>
⟨Optr⟩	→	+



Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Context-free_grammar

Roteiro

Gramática

Definição

Uma gramática (irrestrita), denotada por G, é uma 4-tupla ordenada

$$G = (V, \Sigma, P, S)$$

tal que:

- V é um conjunto de símbolos não terminais (ou variáveis)
- Σ é um conjunto de símbolos terminais, com Σ disjunto de V
- $P : (V \cup \Sigma)^+ \rightarrow (V \cup \Sigma)^*$ é o conjunto de regras de produções, em que cada par (α, β) é representado por $\alpha \rightarrow \beta$
- $S \in V$ é denominado símbolo inicial.

Vamos entender mais tarde o por quê de (irrestrita).

Gramática

Definição

Uma gramática (irrestrita), denotada por G, é uma 4-tupla ordenada

$$G = (V, \Sigma, P, S)$$

tal que:

- V é um conjunto de símbolos não terminais (ou variáveis)
- Σ é um conjunto de símbolos terminais, com Σ disjunto de V
- $P : (V \cup \Sigma)^+ \to (V \cup \Sigma)^*$ é o conjunto de regras de produções, em que cada par (α, β) é representado por $\alpha \to \beta$
- $S \in V$ é denominado símbolo inicial.

Vamos entender mais tarde o por quê de (irrestrita).

Regras de produção

Cada *regra de produção* (α, β) pode ser representada como:

$$\alpha \rightarrow \beta$$

Um grupo de regras de produção da forma

$$\begin{gathered} \alpha \rightarrow \beta_1 \\ \alpha \rightarrow \beta_2 \\ \ldots \\ \alpha \rightarrow \beta_n \end{gathered}$$

pode ser abreviado como:

$$\alpha \rightarrow \beta_1 \mid \beta_2 \mid \ldots \mid \beta_n$$

Regras de produção

Exemplo:

$$G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$$

- Regras de produção:

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow \mathbf{a}S\mathbf{b} | A \\ & A \rightarrow \mathcal{E} \end{aligned}$$

$P = \{(S, aSb), (S, A), (A, \mathcal{E})\}$.

Derivação

Informalmente:

- A aplicação de uma regra de produção é denominada derivação de uma **palavra**.

Nota:

A aplicação sucessiva de regras de produção permite derivar as palavras da linguagem gerada pela gramática.

Derivação

Informalmente:

- A aplicação de uma regra de produção é denominada derivação de uma **palavra**.

Nota:

A aplicação sucessiva de regras de produção permite derivar as palavras da linguagem gerada pela gramática.

Relação de derivação

Definição

Uma derivação é um par $\langle \alpha, \beta \rangle$ da Relação de Derivação denotada por $\alpha \Rightarrow \beta$ com domínio em $(V \cup \Sigma)^+$ e imagem $(V \cup \Sigma)^*$

Esta relação é definida indutivamente como:

- Para toda produção na forma $S \rightarrow \beta$, (S símbolo inicial em G)

$$S \Rightarrow \beta$$

- Para todo par, $\alpha \Rightarrow \beta$, onde $\beta \Rightarrow \beta_u \beta_v \beta_w$
  - se $\beta_v \rightarrow \beta_t$ é regra de P, então:

$$\beta \Rightarrow \beta_u \beta_t \beta_w$$

Em outras palavras, uma derivação é a substituição de uma subpalavra de acordo com uma regra de produção.

Relação de derivação

Definição

Uma derivação é um par $\langle \alpha, \beta \rangle$ da Relação de Derivação denotada por $\alpha \Rightarrow \beta$ com domínio em $(V \cup \Sigma)^+$ e imagem $(V \cup \Sigma)^*$

Esta relação é definida indutivamente como:

- Para toda produção na forma $S \rightarrow \beta$, (S símbolo inicial em G)

$$S \Rightarrow \beta$$

- Para todo par, $\alpha \Rightarrow \beta$, onde $\beta \Rightarrow \beta_u \beta_v \beta_w$
  - se $\beta_v \rightarrow \beta_t$ é regra de P, então:

$$\beta \Rightarrow \beta_u \beta_t \beta_w$$

Em outras palavras, uma derivação é a substituição de uma subpalavra de acordo com uma regra de produção.

Relação de derivação

Definição

Uma derivação é um par $\langle \alpha, \beta \rangle$ da Relação de Derivação denotada por $\alpha \Rightarrow \beta$ com domínio em $(V \cup \Sigma)^+$ e imagem $(V \cup \Sigma)^*$

Esta relação é definida indutivamente como:

- Para toda produção na forma $S \rightarrow \beta$, (S símbolo inicial em G)

$$S \Rightarrow \beta$$

- Para todo par, $\alpha \Rightarrow \beta$, onde $\beta \Rightarrow \beta_u \beta_v \beta_w$
  - se $\beta_v \rightarrow \beta_t$ é regra de P, então:

$$\beta \Rightarrow \beta_u \beta_t \beta_w$$

Em outras palavras, uma derivação é a substituição de uma subpalavra de acordo com uma regra de produção.

Derivação

Definição

Dizemos que α deriva (diretamente) β, se β puder ser obtido substituindo alguma subcadeia de α, utilizando uma regra de P, denotado por:

$$\alpha \Rightarrow \beta.$$

No exemplo anterior:

$$G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P: \quad S \rightarrow \mathbf{a}S\mathbf{b} | A$$
$$A \rightarrow \mathcal{E}$$

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aaaSbbb \Rightarrow aaa\mathcal{E}bbb = aaabbb$$

Derivação

Definição

Dizemos que α deriva (diretamente) β, se β puder ser obtido substituindo alguma subcadeia de α, utilizando uma regra de P, denotado por:

$$\alpha \Rightarrow \beta.$$

No exemplo anterior:

$$G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P: \quad \begin{array}{l} S \to \mathbf{a}S\mathbf{b} | A \\ A \to \mathcal{E} \end{array}$$

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aaaSbbb \Rightarrow aaa\mathcal{E}bbb = aaabbb$$

Derivação

Definição

Dizemos que α deriva (diretamente) β, se β puder ser obtido substituindo alguma subcadeia de α, utilizando uma regra de P, denotado por:

$$\alpha \Rightarrow \beta.$$

No exemplo anterior:

$$G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \to \mathbf{a}S\mathbf{b} | A \\ & A \to \mathcal{E} \end{aligned}$$

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aaaSbbb \Rightarrow aaa\mathcal{E}bbb = aaabbb$$

Derivação

Definição

Dizemos que α deriva (diretamente) β, se β puder ser obtido substituindo alguma subcadeia de α, utilizando uma regra de P, denotado por:

$$\alpha \Rightarrow \beta.$$

No exemplo anterior:

$$G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow \mathbf{a}S\mathbf{b} | A \\ & A \rightarrow \mathcal{E} \end{aligned}$$

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aaaSbbb \Rightarrow aaa\mathcal{E}bbb = aaabbb$$

Derivação

Definição

Dizemos que α deriva (diretamente) β, se β puder ser obtido substituindo alguma subcadeia de α, utilizando uma regra de P, denotado por:

$$\alpha \Rightarrow \beta.$$

No exemplo anterior:

$$G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow \mathbf{a}S\mathbf{b} | A \\ & A \rightarrow \mathcal{E} \end{aligned}$$

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aaaSbbb \Rightarrow aaa\mathcal{E}bbb = aaabbb$$

Derivação em múltiplos passos

Definição

Dizemos que α deriva em múltiplos passos β, se houver uma sequência de derivações tais que $\alpha \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \beta$, denotado por:

$$\alpha \Rightarrow^* \beta.$$

No exemplo anterior:

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aaaSbbb \Rightarrow aaa\mathcal{E}bbb = aaabbb$$

$$S \Rightarrow^* aaa\mathcal{E}bbb = aaabbbb$$

Passos de derivação

Os sucessivos passos de derivação podem ser definidos como:

- $\Rightarrow^*$: zero ou mais passos sucessivos de derivação;
- $\Rightarrow^+$: um ou mais passos sucessivos de derivação;
- $\Rightarrow^i$: exatos i passos de derivações sucessivas, $i \in \mathbb{N}$.

Linguagem gerada

Definição

Seja $G = (V, \Sigma, P, S)$ uma gramática.

- A linguagem gerada por G, denotada por $L(G)$, é composta por todas as palavras de símbolos terminais deriváveis a partir do símbolo inicial S, ou seja,

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow^+ w\}$$

Linguagem gerada

Exemplo:

$$G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$$

- Regras de produção:

$$\begin{aligned} P: \quad & S \to \mathbf{a}S\mathbf{b}|A \\ & A \to \mathcal{E} \end{aligned}$$

- Cadeias geradas:

$$\begin{aligned} & S \Rightarrow^* ab \\ & S \Rightarrow^* aabb \\ & S \Rightarrow^* aaabbb \\ & \dots \end{aligned}$$

$$L(G) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

$P = \{(S, aSb), (S, A), (A, \mathcal{E})\}$.

Linguagem gerada

Nota:

Dizemos que duas gramáticas G_1 e G_2 são equivalentes se:

$$L(G_1) = L(G_2)$$

Linguagem gerada

Mais um exemplo:

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$$

- Regras de produção:

$$P: \quad S \rightarrow \mathbf{a}S\mathbf{a} \mid \mathbf{b}S\mathbf{b} \mid \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \mid \mathcal{E}$$

- Cadeias geradas:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow^* a \\ S &\Rightarrow^* b \\ S &\Rightarrow^* aa \\ S &\Rightarrow^* bb \\ S &\Rightarrow^* aba \\ S &\Rightarrow^* ababab \\ &\ldots \end{aligned}$$

$$L(G) = \{\text{palíndromos sobre o alfabeto terminal } \{a, b\}\}$$

Linguagem gerada

Mais um exemplo:

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$$

- Regras de produção:

$$P: \quad S \rightarrow \mathbf{a}S\mathbf{a} \mid \mathbf{b}S\mathbf{b} \mid \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \mid \mathcal{E}$$

- Cadeias geradas:

$$\begin{aligned} &S \Rightarrow^* a \\ &S \Rightarrow^* b \\ &S \Rightarrow^* aa \\ &S \Rightarrow^* bb \\ &S \Rightarrow^* aba \\ &S \Rightarrow^* ababab \\ &\ldots \end{aligned}$$

$$L(G) = \{\text{palíndromos sobre o alfabeto terminal } \{a, b\}\}$$

Roteiro

Hierarquia de Chomsky

Noam Chomsky, classificou gramáticas (e linguagens) a partir de restrições em suas regras de produção.

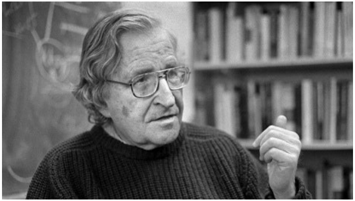


Figura: Noam Chomsky

Chomsky definiu estas classes como (potenciais) modelos para linguagens naturais.

Tipos de Gramáticas e Linguagens

Definição:

Uma gramática $G = (V, \Sigma, S, P)$ é do **Tipo 3** se toda produção de P for da forma:

$$A \rightarrow bC \text{ ou } A \rightarrow b$$

com $A, C \in V$ e $b \in \Sigma$ ou $b = \mathcal{E}$.

Essas são as **Gramáticas Regulares (GR)**.

Definição:

Uma gramática $G = (V, \Sigma, S, P)$ é do **Tipo 3** se toda produção de P for da forma:

$$A \rightarrow bC \text{ ou } A \rightarrow b$$

com $A, C \in V$ e $b \in \Sigma$ ou $b = \mathcal{E}$.

Essas são as **Gramáticas Regulares (GR)**.

Tipos de Gramáticas e Linguagens

Definição:

Uma gramática $G = (V, \Sigma, S, P)$ é do **Tipo 2** se toda produção de P for da forma:

$$A \rightarrow \omega$$

com $A \in V$ e $\omega \in (\Sigma \cup V)^*$.

Estas são as **Gramáticas Livres de Contexto (GLC)**.

Tipos de Gramáticas e Linguagens

Definição:

Uma gramática $G = (V, \Sigma, S, P)$ é do **Tipo 2** se toda produção de P for da forma:

$$A \rightarrow \omega$$

com $A \in V$ e $\omega \in (\Sigma \cup V)^*$.

Estas são as **Gramáticas Livres de Contexto (GLC)**.

Definição:

Uma gramática $G = (V, \Sigma, S, P)$ é do **Tipo 1** se toda produção de P for da forma:

$$vAw \rightarrow vzw$$

com $A \in V$, $v, w \in (\Sigma \cup V)^*$ e $z \in (\Sigma \cup V)^+$ (isto é, $z \neq \mathcal{E}$).

Além disso, permite-se uma única regra $S \rightarrow \mathcal{E}$ quando S não aparece do lado direito de nenhuma produção.

Estas são as **Gramáticas Sensíveis de Contexto (GSC)**.

Tipos de Gramáticas e Linguagens

Definição:

Uma gramática $G = (V, \Sigma, S, P)$ é do **Tipo 1** se toda produção de P for da forma:

$$vAw \rightarrow vzw$$

com $A \in V$, $v, w \in (\Sigma \cup V)^*$ e $z \in (\Sigma \cup V)^+$ (isto é, $z \neq \mathcal{E}$).

Além disso, permite-se uma única regra $S \rightarrow \mathcal{E}$ quando S não aparece do lado direito de nenhuma produção.

Estas são as **Gramáticas Sensíveis de Contexto (GSC)**.

Tipos de Gramáticas e Linguagens

Definição:

Uma gramática $G = (V, \Sigma, S, P)$ é do **Tipo 1** se toda produção de P for da forma:

$$vAw \rightarrow vzw$$

com $A \in V$, $v, w \in (\Sigma \cup V)^*$ e $z \in (\Sigma \cup V)^+$ (isto é, $z \neq \mathcal{E}$).

Além disso, permite-se uma única regra $S \rightarrow \mathcal{E}$ quando S não aparece do lado direito de nenhuma produção.

Estas são as **Gramáticas Sensíveis de Contexto (GSC)**.

Tipos de Gramáticas e Linguagens

Definição:

Qualquer gramática $G = (V, \Sigma, S, P)$ é do **Tipo 0**.

Não existem restrições na forma das produções para as gramáticas desta classe.

Estas são as **Gramáticas Recursivamente Enumeráveis**.

Tipos de Gramáticas e Linguagens

Definição:

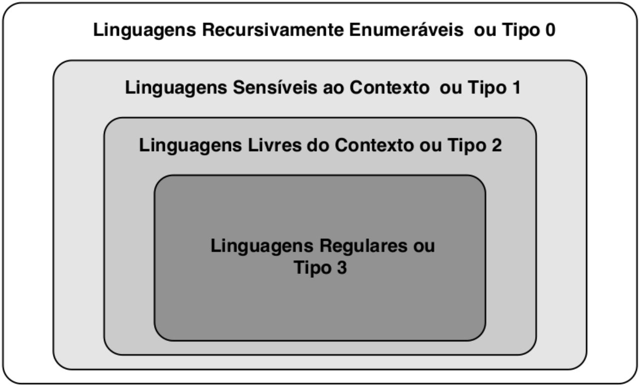
Qualquer gramática $G = (V, \Sigma, S, P)$ é do **Tipo 0**.

Não existem restrições na forma das produções para as gramáticas desta classe.

Estas são as **Gramáticas Recursivamente Enumeráveis**.

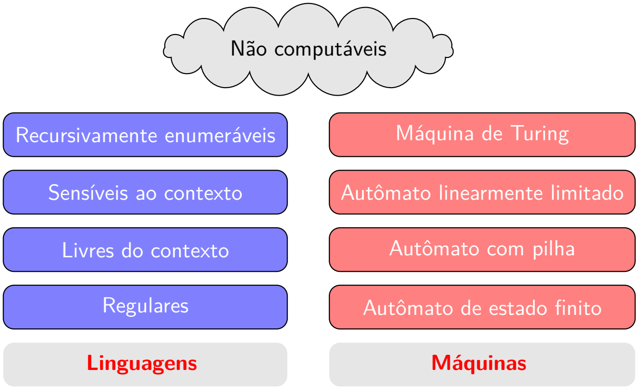
Hierarquia de Chomsky

$$\mathcal{L}_3 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_0$$



$\mathcal{L}_i$ corresponde à linguagem de tipo i.

Hierarquia de Chomsky



Roteiro

1. Gramáticas e Linguagens
   - Gramáticas
   - Formalização de uma Gramática
   - Hierarquia de Chomsky
2. Gramáticas Regulares
   - Gramáticas Lineares
   - GLUD $\rightarrow$ Linguagem Regular
   - Linguagem Regular $\rightarrow$ GLUD
3. Referências

Roteiro

Gramáticas Lineares

Vamos ver gramáticas do **Tipo 3** e mostrar que elas geram exatamente as Linguagens Regulares.

- Essas gramáticas também são conhecidas como **Gramáticas Lineares**.

Gramáticas Lineares

Vamos estudar 4 formas de gramáticas do **Tipo 3**:

1. **GLD**: Gramática linear à direita
2. **GLE**: Gramática linear à esquerda
3. **GLUD**: Gramática linear unitária à direita
4. **GLUE**: Gramática linear unitária à esquerda

Gramática Linear à Direita - GLD

Definição

$G = (V, \Sigma, P, S)$ é uma **GLD** se todas as regras de produção forem da forma:

$$A \rightarrow \omega B \text{ ou } A \rightarrow \omega$$

com $A, B \in V$ e $\omega \in \Sigma^*$.

Exemplo:

$$G_1 = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow \mathbf{a}A \\ & A \rightarrow \mathbf{ba}A \mid \mathcal{E} \end{aligned}$$

Gramática Linear à Esquerda - GLE

Definição

$G = (V, \Sigma, P, S)$ é uma **GLE** se todas as regras de produção forem da forma:

$$A \rightarrow B\omega \text{ ou } A \rightarrow \omega$$

com $A, B \in V$ e $\omega \in \Sigma^*$.

Exemplo:

$$G_2 = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P: \quad S \rightarrow S\mathbf{ba} \mid a$$

Gramática Linear Unitária à Direita - GLUD

Definição

$G = (V, \Sigma, P, S)$ é um **GLUD** se todas as regras de produção forem da forma:

$$A \rightarrow wB \text{ ou } A \rightarrow w$$

com $A, B \in V$ e $w \in (\Sigma \cup \{\mathcal{E}\})$, ou seja, $|w| \leq 1$.

Exemplo:

$$G_3 = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow \mathbf{a}A \\ & A \rightarrow \mathbf{b}B \mid \mathcal{E} \\ & B \rightarrow \mathbf{a}A \end{aligned}$$

Gramática Linear Unitária à Esquerda - GLUE

Definição

$G = (V, \Sigma, P, S)$ é um **GLUE** se todas as regras de produção são da forma:

$$A \rightarrow Bw \text{ ou } A \rightarrow w$$

com $A, B \in V$ e $w \in (\Sigma \cup \{\mathcal{E}\})$, ou seja, $|w| \leq 1$.

Exemplo:

$$G_4 = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow A\mathbf{a} \mid a \\ & A \rightarrow S\mathbf{b} \end{aligned}$$

Equivalência das Gramáticas Lineares

Teorema da Equivalência das Gramáticas Lineares

Seja L uma linguagem. Então:

L é gerada por uma **GLD**, se e somente se,

L é gerada por uma **GLE**, se e somente se,

L é gerada por uma **GLUD**, se e somente se,

L é gerada por uma **GLUE**.

Ou seja, todas as Gramáticas Lineares são equivalentes.

A demonstração fica como exercício.

Equivalência das Gramáticas Lineares

Exemplos: A linguagem $\mathbf{a}(\mathbf{ba})^*$ é gerada pelas seguintes gramáticas:

$$G_1 = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P: \quad \begin{aligned} S &\rightarrow \mathbf{a}A \\ A &\rightarrow \mathbf{ba}A | \mathcal{E} \end{aligned}$$

$$G_2 = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P: \quad S \rightarrow S\mathbf{ba}|a$$

$$G_3 = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P: \quad \begin{aligned} S &\rightarrow \mathbf{a}A \\ A &\rightarrow \mathbf{b}B | \mathcal{E} \\ B &\rightarrow \mathbf{a}A \end{aligned}$$

$$G_4 = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P: \quad \begin{aligned} S &\rightarrow A\mathbf{a}|a \\ A &\rightarrow S\mathbf{b} \end{aligned}$$

Portanto, G_1, G_2, G_3 e G_4 são equivalentes.

Gramáticas Lineares

Importante:

- Se uma gramática tiver produções de ambos os tipos:
  - Linear à Direita ($A \rightarrow \omega B$); e
  - Linear à Esquerda ($A \rightarrow B\omega$).

- Então esta **não é** uma Gramática Linear.

Gramática Regular $\times$ Linguagem Regular

Os resultados a seguir mostram que a classe das Gramáticas Lineares denota exatamente a Classe das Linguagens Regulares.

Roteiro

Gramática Linear $\rightarrow$ Linguagem Regular

Teorema

Se L é uma linguagem gerada por uma Gramática Linear, então L é uma Linguagem Regular.

Gramática Linear → Linguagem Regular

Ideia da prova:

- Para mostrar que uma linguagem é Regular, vamos construir um AF que a reconheça.
- Vamos construir um AFN_{ε} N, tal que $L(N) = L(G)$ para qualquer **GLUD** G.

Todas as Gramática Lineares são equivalentes. Vamos utilizar uma **GLUD**.

Gramática Linear $\rightarrow$ Linguagem Regular

Ideia da prova:

- Para mostrar que uma linguagem é Regular, vamos construir um AF que a reconheça.
- Vamos construir um $\text{AFN}_{\mathcal{E}}$ N, tal que $L(N) = L(G)$ para qualquer **GLUD** G.

GLUD - Gramática Linear Unitária à Direita $(A \rightarrow wB \mid w$, com $w \in (\Sigma \cup \{\mathcal{E}\}))$.

Gramática Linear → Linguagem Regular

Procedimento:

- O AFN$_\mathcal{E}$ descrito abaixo simula as derivações de uma **GLUD** $G = (V, \Sigma, P, S)$.

$$N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

  - $Q = V \cup \{q_f\}$
  - $q_0 = S$
  - $F = \{q_f\}$
  - δ é definida como:

Tipo de Produção	Transição
$A \rightarrow \mathcal{E}$	$\delta(A, \mathcal{E}) = q_f$
$A \rightarrow w$	$\delta(A, w) = q_f$
$A \rightarrow B$	$\delta(A, \mathcal{E}) = B$
$A \rightarrow wB$	$\delta(A, w) = B$

Gramática Linear $\rightarrow$ Linguagem Regular

Procedimento:

- O AFN$_\mathcal{E}$ descrito abaixo simula as derivações de uma **GLUD** $G = (V, \Sigma, P, S)$.

$$\underline{N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)}$$

  - $Q = V \cup \{q_f\}$
  - $q_0 = S$
  - $F = \{q_f\}$
  - δ é definida como:

Tipo de Produção	**Transição**
$A \rightarrow \mathcal{E}$	$\delta(A, \mathcal{E}) = q_f$
$A \rightarrow w$	$\delta(A, w) = q_f$
$A \rightarrow B$	$\delta(A, \mathcal{E}) = B$
$A \rightarrow wB$	$\delta(A, w) = B$

Exemplo

Exemplo: Considere a **GLUD** $G_3 = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$, com

$$P: \quad \begin{aligned} S &\rightarrow \mathbf{a}A \\ A &\rightarrow \mathbf{b}B \mid \mathcal{E} \\ B &\rightarrow \mathbf{a}A \end{aligned}$$

Vamos construir o AFN$_{\mathcal{E}}$ N_3 que reconhece $L(G_3) = \mathbf{a}(\mathbf{ba})^*$

$N = (V \cup \{q_f\}, \Sigma, \delta, S, \{q_f\})$

Tipo de Produção	Transição
$A \rightarrow \mathcal{E}$	$\delta(A, \mathcal{E}) = q_f$
$A \rightarrow w$	$\delta(A, w) = q_f$
$A \rightarrow B$	$\delta(A, \mathcal{E}) = B$
$A \rightarrow wB$	$\delta(A, w) = B$

Exemplo

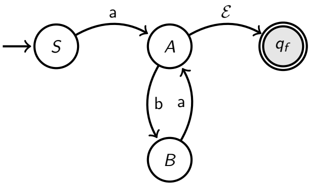
Exemplo: Considere a **GLUD** $G_3 = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$, com

$$P: \quad \begin{aligned} S &\rightarrow \mathbf{a}A \\ A &\rightarrow \mathbf{b}B \mid \mathcal{E} \\ B &\rightarrow \mathbf{a}A \end{aligned}$$

Vamos construir o AFN$_\mathcal{E}$ N_3 que reconhece $L(G_3) = \mathbf{a}(\mathbf{ba})^*$

$N = (V \cup \{q_f\}, \Sigma, \delta, S, \{q_f\})$

Tipo de Produção	Transição
$A \rightarrow \mathcal{E}$	$\delta(A, \mathcal{E}) = q_f$
$A \rightarrow w$	$\delta(A, w) = q_f$
$A \rightarrow B$	$\delta(A, \mathcal{E}) = B$
$A \rightarrow wB$	$\delta(A, w) = B$



Gramática Linear $\rightarrow$ Linguagem Regular

Prova de corretude:

Fica como exercício mostrar que $L(N) = L(G)$.

Ver no livro (Menezes, Seção 2.6).

Roteiro

1. Gramáticas e Linguagens
   - Gramáticas
   - Formalização de uma Gramática
   - Hierarquia de Chomsky

2. Gramáticas Regulares
   - Gramáticas Lineares
   - GLUD $\rightarrow$ Linguagem Regular
   - Linguagem Regular $\rightarrow$ GLUD

3. Referências

Linguagem Regular $\rightarrow$ Gramática Linear

Teorema

Se L é uma Linguagem Regular, então existe uma Gramática Linear que gera L.

Linguagem Regular $\rightarrow$ Gramática Linear

Ideia da prova:

- Se L é uma Linguagem Regular, então existe um **AFD** que reconhece L.
- Vamos construir uma GLUD G a partir de AFD M, tal que $L(M) = L(G)$

GLUD - Gramática Linear Unitária à Direita ($A \rightarrow wB \mid w$, com $w \in (\Sigma \cup \{\mathcal{E}\})$).

Linguagem Regular $\rightarrow$ Gramática Linear

Ideia da prova:

- Se L é uma Linguagem Regular, então existe um **AFD** que reconhece L.
- Vamos construir uma GLUD G a partir de AFD M, tal que $L(M) = L(G)$

GLUD - Gramática Linear Unitária à Direita ($A \rightarrow wB \mid w$, com $w \in (\Sigma \cup \{\mathcal{E}\})$).

Linguagem Regular $\rightarrow$ Gramática Linear

Procedimento:

- As derivações da **GLUD** descrita abaixo simulam a função de transição estendida do AFD M.

$$G = (V, \Sigma, P, S)$$

  - $V = Q \cup \{S\}$
  - $\forall q_f \in F$, ou seja, todos os estados de aceitação

Transição	**Tipo de Produção**
-	$S \rightarrow q_0$
-	$q_f \rightarrow \varepsilon$
$\delta(q_i, a) = q_j$	$q_i \rightarrow aq_j$

Linguagem Regular → Gramática Linear

Procedimento:

- As derivações da **GLUD** descrita abaixo simulam a função de transição estendida do AFD M.

$$G = (V, \Sigma, P, S)$$

  - $V = Q \cup \{S\}$
  - $\forall q_f \in F$, ou seja, todos os estados de aceitação

Transição	**Tipo de Produção**
-	$S \to q_0$
-	$q_f \to \mathcal{E}$
$\delta(q_i, a) = q_j$	$q_i \to a q_j$

Linguagem Regular $\rightarrow$ Gramática Linear

Procedimento:

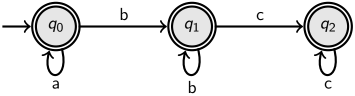
- As derivações da **GLUD** descrita abaixo simulam a função de transição estendida do AFD M.

$$G = (V, \Sigma, P, S)$$

  - $V = Q \cup \{S\}$
  - $\forall q_f \in F$, ou seja, todos os estados de aceitação

Transição	**Tipo de Produção**
-	$S \rightarrow q_0$
-	$q_f \rightarrow \mathcal{E}$
$\delta(q_i, a) = q_j$	$q_i \rightarrow aq_j$

Exemplo: Considere a seguinte Linguagem Regular
$L_5 = \mathbf{a}^* + \mathbf{a}^*\mathbf{b}^+ + \mathbf{a}^*\mathbf{b}^+\mathbf{c}^+$, reconhecida pelo AFD M_5 abaixo:



Vamos construir uma **GLUD** G_5, tal que $L(M) = L(G)$

$G = (Q \cup \{S\}, \Sigma, P, S)$

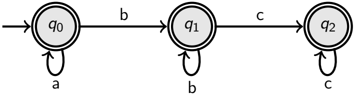
Transição	Tipo de Produção
-	$S \rightarrow q_0$
-	$q_f \rightarrow \mathcal{E}$
$\delta(q_i, a) = q_j$	$q_i \rightarrow aq_j$

$G_5 = (\{S, q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, P, S)$

$$
\begin{array}{lll}
P: & S \rightarrow q_0 & \\
 & q_0 \rightarrow \mathcal{E} & q_0 \rightarrow \mathbf{a}q_0 \mid \mathbf{b}q_1 \\
 & q_1 \rightarrow \mathcal{E} & q_1 \rightarrow \mathbf{b}q_1 \mid \mathbf{c}q_2 \\
 & q_2 \rightarrow \mathcal{E} & q_2 \rightarrow \mathbf{c}q_2
\end{array}
$$

Exemplo

Exemplo: Considere a seguinte Linguagem Regular
$L_5 = \mathbf{a}^* + \mathbf{a}^*\mathbf{b}^+ + \mathbf{a}^*\mathbf{b}^+\mathbf{c}^+$, reconhecida pelo AFD M_5 abaixo:



Vamos construir uma **GLUD** G_5, tal que $L(M) = L(G)$

$G = (Q \cup \{S\}, \Sigma, P, S)$

Transição	Tipo de Produção
-	$S \rightarrow q_0$
-	$q_f \rightarrow \mathcal{E}$
$\delta(q_i, a) = q_j$	$q_i \rightarrow a q_j$

$G_5 = (\{S, q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, P, S)$

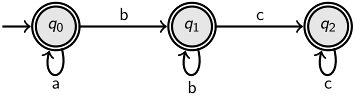
$P: \quad S \rightarrow q_0$

$q_0 \rightarrow \mathcal{E} \qquad q_0 \rightarrow \mathbf{a}q_0 \mid \mathbf{b}q_1$

$q_1 \rightarrow \mathcal{E} \qquad q_1 \rightarrow \mathbf{b}q_1 \mid \mathbf{c}q_2$

$q_2 \rightarrow \mathcal{E} \qquad q_2 \rightarrow \mathbf{c}q_2$

Exemplo: Considere a seguinte Linguagem Regular
$L_5 = \mathbf{a}^* + \mathbf{a}^*\mathbf{b}^+ + \mathbf{a}^*\mathbf{b}^+\mathbf{c}^+$, reconhecida pelo AFD M_5 abaixo:



Vamos construir uma **GLUD** G_5, tal que $L(M) = L(G)$

$G = (Q \cup \{S\}, \Sigma, P, S)$

Transição	**Tipo de Produção**
-	$S \rightarrow q_0$
-	$q_f \rightarrow \mathcal{E}$
$\delta(q_i, a) = q_j$	$q_i \rightarrow aq_j$

$G_5 = (\{S, q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, P, S)$

$P: \quad S \rightarrow q_0$

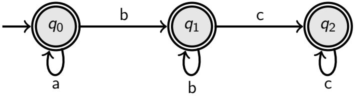
$q_0 \rightarrow \mathcal{E} \qquad q_0 \rightarrow \mathbf{a}q_0 \mid \mathbf{b}q_1$

$q_1 \rightarrow \mathcal{E} \qquad q_1 \rightarrow \mathbf{b}q_1 \mid \mathbf{c}q_2$

$q_2 \rightarrow \mathcal{E} \qquad q_2 \rightarrow \mathbf{c}q_2$

Exemplo

Exemplo: Considere a seguinte Linguagem Regular
$L_5 = \mathbf{a}^* + \mathbf{a}^*\mathbf{b}^+ + \mathbf{a}^*\mathbf{b}^+\mathbf{c}^+$, reconhecida pelo AFD M_5 abaixo:



Vamos construir uma <u>**GLUD**</u> G_5, tal que $L(M) = L(G)$

<u>$G = (Q \cup \{S\}, \Sigma, P, S)$</u>

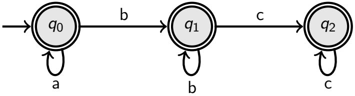
Transição	Tipo de Produção
-	$S \to q_0$
-	$q_f \to \mathcal{E}$
$\delta(q_i, a) = q_j$	$q_i \to aq_j$

$G_5 = (\{S, q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, P, S)$

$$
\begin{aligned}
P: \quad & S \to q_0 \\
& q_0 \to \mathcal{E} \qquad q_0 \to \mathbf{a}q_0 \mid \mathbf{b}q_1 \\
& q_1 \to \mathcal{E} \qquad q_1 \to \mathbf{b}q_1 \mid \mathbf{c}q_2 \\
& q_2 \to \mathcal{E} \qquad q_2 \to \mathbf{c}q_2
\end{aligned}
$$

Exemplo

Exemplo: Considere a seguinte Linguagem Regular
$L_5 = \mathbf{a}^* + \mathbf{a}^*\mathbf{b}^+ + \mathbf{a}^*\mathbf{b}^+\mathbf{c}^+$, reconhecida pelo AFD M_5 abaixo:



Vamos construir uma **GLUD** G_5, tal que $L(M) = L(G)$

$G = (Q \cup \{S\}, \Sigma, P, S)$

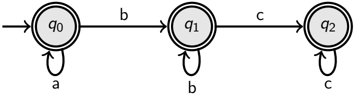
Transição	Tipo de Produção
-	$S \rightarrow q_0$
-	$q_f \rightarrow \mathcal{E}$
$\delta(q_i, a) = q_j$	$q_i \rightarrow aq_j$

$G_5 = (\{S, q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, P, S)$

$$
\begin{aligned}
P: \quad & S \rightarrow q_0 \\
& q_0 \rightarrow \mathcal{E} \qquad q_0 \rightarrow \mathbf{a}q_0 \mid \mathbf{b}q_1 \\
& q_1 \rightarrow \mathcal{E} \qquad q_1 \rightarrow \mathbf{b}q_1 \mid \mathbf{c}q_2 \\
& q_2 \rightarrow \mathcal{E} \qquad q_2 \rightarrow \mathbf{c}q_2
\end{aligned}
$$

Exemplo

Exemplo: Considere a seguinte Linguagem Regular
$L_5 = \mathbf{a}^* + \mathbf{a}^*\mathbf{b}^+ + \mathbf{a}^*\mathbf{b}^+\mathbf{c}^+$, reconhecida pelo AFD M_5 abaixo:



Vamos construir uma **GLUD** G_5, tal que $L(M) = L(G)$

$G = (Q \cup \{S\}, \Sigma, P, S)$

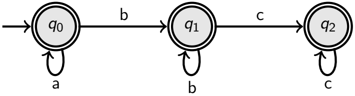
Transição	Tipo de Produção
-	$S \to q_0$
-	$q_f \to \mathcal{E}$
$\delta(q_i, a) = q_j$	$q_i \to aq_j$

$G_5 = (\{S, q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, P, S)$

$$
\begin{aligned}
P: \quad & S \to q_0 \\
& q_0 \to \mathcal{E} \qquad q_0 \to \mathbf{a}q_0 \mid \mathbf{b}q_1 \\
& q_1 \to \mathcal{E} \qquad q_1 \to \mathbf{b}q_1 \mid \mathbf{c}q_2 \\
& q_2 \to \mathcal{E} \qquad q_2 \to \mathbf{c}q_2
\end{aligned}
$$

Exemplo

Exemplo: Considere a seguinte Linguagem Regular
$L_5 = \mathbf{a}^* + \mathbf{a}^*\mathbf{b}^+ + \mathbf{a}^*\mathbf{b}^+\mathbf{c}^+$, reconhecida pelo AFD M_5 abaixo:



Vamos construir uma **GLUD** G_5, tal que $L(M) = L(G)$

$G = (Q \cup \{S\}, \Sigma, P, S)$

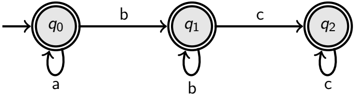
Transição	Tipo de Produção
-	$S \to q_0$
-	$q_f \to \mathcal{E}$
$\delta(q_i, a) = q_j$	$q_i \to aq_j$

$G_5 = (\{S, q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, P, S)$

$$
\begin{aligned}
P:\quad & S \to q_0 \\
& q_0 \to \mathcal{E} \qquad q_0 \to \mathbf{a}q_0 \mid \mathbf{b}q_1 \\
& q_1 \to \mathcal{E} \qquad q_1 \to \mathbf{b}q_1 \mid \mathbf{c}q_2 \\
& q_2 \to \mathcal{E} \qquad q_2 \to \mathbf{c}q_2
\end{aligned}
$$

Exemplo

$L(G_5) = L(M_5) = \mathbf{a}^* + \mathbf{a}^*\mathbf{b}^+ + \mathbf{a}^*\mathbf{b}^+\mathbf{c}^+$:



$$G_5 = (\{S, q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow q_0 \\ & q_0 \rightarrow \mathbf{a}q_0 \mid \mathbf{b}q_1 \mid \mathcal{E} \\ & q_1 \rightarrow \mathbf{b}q_1 \mid \mathbf{c}q_2 \mid \mathcal{E} \\ & q_2 \rightarrow \mathbf{c}q_2 \mid \mathcal{E} \end{aligned}$$

Linguagem Regular $\rightarrow$ Gramática Linear

Prova de corretude:

Fica como exercício mostrar que $L(G) = L(M)$.

Ver no livro (Menezes, Seção 2.6).

Gramática Linear × Linguagem Regular

Em resumo:

- A linguagem gerada por qualquer Gramática Linear é uma Linguagem Regular.
- Toda Linguagem Regular pode ser descrita por uma Gramática Linear.

Definição

Uma Gramática Linear é chamada de Gramática Regular (GR).

Em resumo:

- A linguagem gerada por qualquer Gramática Linear é uma Linguagem Regular.
- Toda Linguagem Regular pode ser descrita por uma Gramática Linear.

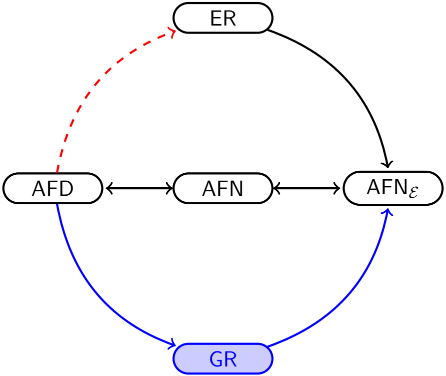
Definição

Uma Gramática Linear é chamada de Gramática Regular (GR).

Formalismos para as Linguagens Regulares

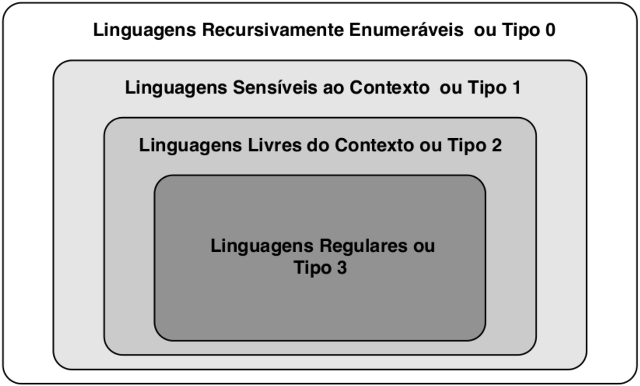
Temos agora mais um formalismo para as Linguagens Regulares:

- Todos eles são equivalentes



Hierarquia de Chomsky

$$\mathcal{L}_3 \subsetneq \mathcal{L}_2$$



Na próxima aula vamos ver as linguagens do **Tipo** 2.

Fim

Dúvidas?

Roteiro

1. Gramáticas e Linguagens
   - Gramáticas
   - Formalização de uma Gramática
   - Hierarquia de Chomsky
2. Gramáticas Regulares
   - Gramáticas Lineares
   - GLUD $\rightarrow$ Linguagem Regular
   - Linguagem Regular $\rightarrow$ GLUD
3. Referências

Referências

Referências:

1. *"Introdução à Teoria da Computação"* de M. Sipser, 2007.
2. *"Linguagens formais e autômatos"* de Paulo F. B. Menezes, 2002.
3. Materiais adaptados dos slides do Prof. Evandro E. S. Ruiz, da USP.