Teoria da Computação

Linguagens Livres de Contexto

Aula 06

Prof. Felipe A. Louza

UFU

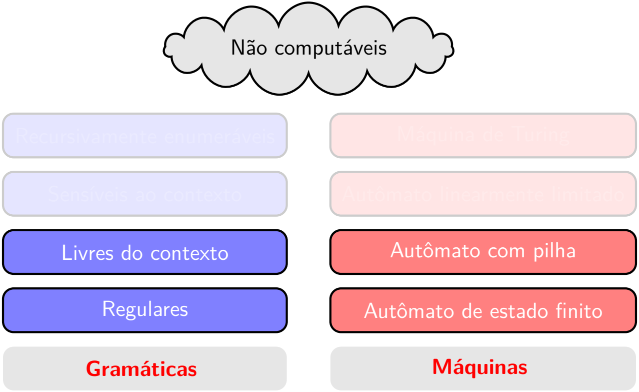
Roteiro

LLC

Vamos estudar uma classe mais ampla de linguagens:

- Linguagens Livres de Contexto (LLC):

LLC



GLC: restrições nas regras de produção menores do que nas GR.

Roteiro

GLC

Definição:

$G = (V, \Sigma, S, P)$ é uma *Gramática Livre de Contexto (GLC)* (ou **Tipo 2**) se toda produção de P for da forma:

$$A \to \omega$$

com $A \in V$ e $\omega \in (\Sigma \cup V)^*$

Importante:

- O lado esquerdo de uma produção é sempre um símbolo não terminal.
- O nome *"livre de contexto"* se deve ao fato de que A deriva ω sem depender dos símbolos que antecedem ou sucedem A.

Definição:

$G = (V, \Sigma, S, P)$ é uma *Gramática Livre de Contexto (GLC)* (ou **Tipo 2**) se toda produção de P for da forma:

$$A \rightarrow \omega$$

com $A \in V$ e $\omega \in (\Sigma \cup V)^*$

Importante:

- O lado esquerdo de uma produção é sempre um símbolo não terminal.
- O nome *"livre de contexto"* se deve ao fato de que A deriva ω sem depender dos símbolos que antecedem ou sucedem A.

GLC

Definição:

$G = (V, \Sigma, S, P)$ é uma *Gramática Livre de Contexto (GLC)* (ou **Tipo 2**) se toda produção de P for da forma:

$$A \rightarrow \omega$$

com $A \in V$ e $\omega \in (\Sigma \cup V)^*$

Importante:

- O lado esquerdo de uma produção é sempre um símbolo não terminal.
- O nome *"livre de contexto"* se deve ao fato de que A deriva ω <u>sem depender</u> dos símbolos que antecedem ou sucedem A.

GLC

Exemplo 1:

$$G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P : \quad S \to \mathbf{a}S\mathbf{b} \mid \mathcal{E}$$

Cadeias geradas:

$$S \Rightarrow^* ab$$
$$S \Rightarrow^* aabb$$
$$S \Rightarrow^* aaabbb$$
$$\ldots$$

$$L(G_1) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

GLC: $A \to \omega$, com $A \in V$ e $\omega \in (\Sigma \cup V)^*$

Exemplo 1:

$$G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P: \quad S \to \mathbf{a}S\mathbf{b} \mid \mathcal{E}$$

Cadeias geradas:

$$S \Rightarrow^* ab$$
$$S \Rightarrow^* aabb$$
$$S \Rightarrow^* aaabbb$$
$$\dots$$

$$L(G_1) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

GLC: $A \to \omega$, com $A \in V$ e $\omega \in (\Sigma \cup V)^*$

GLC

Exemplo 1:

$$G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P: \quad S \rightarrow \mathbf{a}S\mathbf{b} \mid \mathcal{E}$$

Cadeias geradas:

$$S \Rightarrow^* ab$$
$$S \Rightarrow^* aabb$$
$$S \Rightarrow^* aaabbb$$
$$\ldots$$

$$L(G_1) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

GLC: $A \rightarrow \omega$, com $A \in V$ e $\omega \in (\Sigma \cup V)^*$

GLC

Exemplo 1:

$$G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$$
$$P : \quad S \to \mathbf{a}S\mathbf{b} \mid \mathcal{E}$$

Cadeias geradas:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow^* ab \\ S &\Rightarrow^* aabb \\ S &\Rightarrow^* aaabbb \\ &\ldots \end{aligned}$$

$$L(G_1) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

GLC: $A \to \omega$, com $A \in V$ e $\omega \in (\Sigma \cup V)^*$

Definição:

Seja $G = (V, \Sigma, P, S)$ uma GLC.
A linguagem gerada por G,

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow^+ w\}$$

é chamada de Linguagem Livre de Contexto (LLC), ou linguagem do **Tipo 2**.

GLC

Exemplo 2:

$$G_2 = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P: \quad S \to \mathbf{a}S\mathbf{a} \mid \mathbf{b}S\mathbf{b} \mid \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \mid \mathcal{E}$$

Cadeias geradas:

$$S \Rightarrow^* aba$$
$$S \Rightarrow^* babbab$$
$$S \Rightarrow^* aabababaa$$
$$\ldots$$

$L(G_2) = \{w \mid w = w^R$, ou seja w é um palíndromo sobre $\Sigma = \{a, b\}\}$

GLC: $A \to \omega$, com $A \in V$ e $\omega \in (\Sigma \cup V)^*$

GLC

Exemplo 2:

$$G_2 = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P: \quad S \rightarrow \mathbf{a}S\mathbf{a} \mid \mathbf{b}S\mathbf{b} \mid \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \mid \mathcal{E}$$

Cadeias geradas:

$$S \Rightarrow^* aba$$
$$S \Rightarrow^* babbab$$
$$S \Rightarrow^* aabababaa$$
$$\ldots$$

$L(G_2) = \{w \mid w = w^R$, ou seja w é um palíndromo sobre $\Sigma = \{a, b\}\}$

GLC: $A \rightarrow \omega$, com $A \in V$ e $\omega \in (\Sigma \cup V)^*$

GLC

Exemplo 2:

$$G_2 = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P: \quad S \rightarrow \mathbf{a}S\mathbf{a} \mid \mathbf{b}S\mathbf{b} \mid \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \mid \mathcal{E}$$

Cadeias geradas:

$$S \Rightarrow^* aba$$
$$S \Rightarrow^* babbab$$
$$S \Rightarrow^* aabababaa$$
$$\ldots$$

$L(G_2) = \{w \mid w = w^R$, ou seja w é um palíndromo sobre $\Sigma = \{a, b\}\}$

GLC: $A \rightarrow \omega$, com $A \in V$ e $\omega \in (\Sigma \cup V)^*$

Exemplo 2:

$$G_2 = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P: \quad S \rightarrow \mathbf{a}S\mathbf{a} \mid \mathbf{b}S\mathbf{b} \mid \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \mid \mathcal{E}$$

Cadeias geradas:

$$\begin{aligned} &S \Rightarrow^* aba \\ &S \Rightarrow^* babbab \\ &S \Rightarrow^* aabababaa \\ &\ldots \end{aligned}$$

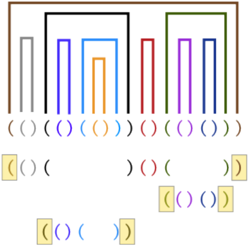
$L(G_2) = \{w \mid w = w^R$, ou seja w é um palíndromo sobre $\Sigma = \{a, b\}\}$

GLC: $A \rightarrow \omega$, com $A \in V$ e $\omega \in (\Sigma \cup V)^*$

GLC

As LLCs tratam questões típicas de linguagens de programação:

- parênteses balanceados
- construções bloco-estruturadas (ex: `begin` e `end`)



GLC

Exemplo 3:

$$G_3 = (\{S\}, \{(,)\}, P, S)$$
$$P: \quad S \rightarrow () \mid (S) \mid SS$$

Cadeias geradas:

$$S \Rightarrow^* (())$$
$$S \Rightarrow^* ()()$$
$$S \Rightarrow^* (()(()))$$
$$\ldots$$

$L(G_3) = \{w \mid w$ é uma cadeia com parênteses balanceados$\}$

GLC: $A \rightarrow \omega$, com $A \in V$ e $\omega \in (\Sigma \cup V)^*$

GLC

Exemplo 3:

$$G_3 = (\{S\}, \{(,)\}, P, S)$$

$$P: \quad S \to () \mid (S) \mid SS$$

Cadeias geradas:

$$S \Rightarrow^* (())$$
$$S \Rightarrow^* ()()$$
$$S \Rightarrow^* (()(()))$$
$$\dots$$

$$L(G_3) = \{w \mid w \text{ é uma cadeia com parênteses balanceados}\}$$

GLC: $A \to \omega$, com $A \in V$ e $\omega \in (\Sigma \cup V)^*$

GLC

Exemplo 3:

$$G_3 = (\{S\}, \{(,)\}, P, S)$$

$$P: \quad S \to () \mid (S) \mid SS$$

Cadeias geradas:

$$S \Rightarrow^* (())$$
$$S \Rightarrow^* ()()$$
$$S \Rightarrow^* (()(()))$$
$$\ldots$$

$$L(G_3) = \{w \mid w \text{ é uma cadeia com parênteses balanceados}\}$$

GLC: $A \to \omega$, com $A \in V$ e $\omega \in (\Sigma \cup V)^*$

GLC

Exemplo 3:

$$G_3 = (\{S\}, \{(,)\}, P, S)$$

$$P: \quad S \to () \mid (S) \mid SS$$

Cadeias geradas:

$$S \Rightarrow^* (())$$
$$S \Rightarrow^* ()()$$
$$S \Rightarrow^* (()(()))$$
$$\ldots$$

$$L(G_3) = \{w \mid w \text{ é uma cadeia com parênteses balanceados}\}$$

GLC: $A \to \omega$, com $A \in V$ e $\omega \in (\Sigma \cup V)^*$

Exemplo 4:

$$G_4 = (\{E\}, \{+, *, \underline{id}\}, P, E)$$

$$P: \quad E \to E + E \mid E * E \mid \underline{id}$$

Cadeias geradas:

$$E \Rightarrow^* \underline{id} + \underline{id} + \underline{id}$$
$$E \Rightarrow^* \underline{id} * \underline{id}$$
$$E \Rightarrow^* \underline{id} * \underline{id} + \underline{id}$$

$$\ldots$$

$$L(G_4) = \{w \mid w \text{ é uma expressão aritmética}\}$$

GLC: $A \to \omega$, com $A \in V$ e $\omega \in (\Sigma \cup V)^*$

GLC

Exemplo 4:

$$G_4 = (\{E\}, \{+, *, \underline{id}\}, P, E)$$

$$P: \quad E \rightarrow E + E \mid E * E \mid \underline{id}$$

Cadeias geradas:

$$E \Rightarrow^* \underline{id} + \underline{id} + \underline{id}$$
$$E \Rightarrow^* \underline{id} * \underline{id}$$
$$E \Rightarrow^* \underline{id} * \underline{id} + \underline{id}$$

$$\ldots$$

$$L(G_4) = \{w \mid w \text{ é uma expressão aritmética}\}$$

GLC: $A \rightarrow \omega$, com $A \in V$ e $\omega \in (\Sigma \cup V)^*$

Exemplo 4:

$$G_4 = (\{E\}, \{+, *, \underline{id}\}, P, E)$$
$$P: \quad E \to E + E \mid E * E \mid \underline{id}$$

Cadeias geradas:

$$E \Rightarrow^* \underline{id} + \underline{id} + \underline{id}$$
$$E \Rightarrow^* \underline{id} * \underline{id}$$
$$E \Rightarrow^* \underline{id} * \underline{id} + \underline{id}$$

$$\ldots$$

$$L(G_4) = \{w \mid w \text{ é uma expressão aritmética}\}$$

GLC: $A \to \omega$, com $A \in V$ e $\omega \in (\Sigma \cup V)^*$

GLC

Exemplo 4:

$$G_4 = (\{E\}, \{+, *, \underline{id}\}, P, E)$$

$$P: \quad E \to E + E \mid E * E \mid \underline{id}$$

Cadeias geradas:

$$E \Rightarrow^* \underline{id} + \underline{id} + \underline{id}$$
$$E \Rightarrow^* \underline{id} * \underline{id}$$
$$E \Rightarrow^* \underline{id} * \underline{id} + \underline{id}$$

$$\dots$$

$$L(G_4) = \{w \mid w \text{ é uma expressão aritmética}\}$$

GLC: $A \to \omega$, com $A \in V$ e $\omega \in (\Sigma \cup V)^*$

BNF: Backus Naur Form

Uma maneira usual de representar GLCs é utilizando a **BNF**:

- Variáveis: palavras delimitadas por $\langle$ e $\rangle$
- Símbolos terminais: palavras não-delimitadas
- Regra de produção $A \to \omega$:

$$A ::= \omega$$

Importante em Compiladores.

BNF: Backus Naur Form

Exemplo 5:

$$G_5 = (\{\langle id \rangle, \langle letter \rangle, \langle digit \rangle\}, \{a, b, \ldots, z, A, B, \ldots, Z, \_\}, P, \langle id \rangle)$$

$$\begin{aligned} P: \quad \langle letter \rangle &::= a \mid b \mid \ldots \mid z \mid A \mid B \mid \ldots \mid Z \\ \langle digit \rangle &::= 0 \mid 1 \mid \ldots \mid 9 \\ \langle id \rangle &::= \langle letter \rangle \mid \langle id \rangle\langle letter \rangle \mid \langle id \rangle\langle digit \rangle \mid \langle id \rangle\_ \end{aligned}$$

Cadeias geradas:

$$\langle id \rangle \Rightarrow^* anumber$$
$$\langle id \rangle \Rightarrow^* some\_number$$
$$\langle id \rangle \Rightarrow^* number123$$
$$\ldots$$

$$L(G_5) = \{w \mid w \text{ é um identificador em } \texttt{ANSI/C}\}$$

---

https://www2.cs.arizona.edu/~debray/Teaching/CSc453/DOCS/cminusminusspec.html

BNF: Backus Naur Form

Exemplo 5:

$$G_5 = (\{\langle id \rangle, \langle letter \rangle, \langle digit \rangle\}, \{a, b, \ldots, z, A, B, \ldots, Z, \_\}, P, \langle id \rangle)$$

$$\begin{array}{lrcl} P: & \langle letter \rangle & ::= & a \mid b \mid \ldots \mid z \mid A \mid B \mid \ldots \mid Z \\ & \langle digit \rangle & ::= & 0 \mid 1 \mid \ldots \mid 9 \\ & \langle id \rangle & ::= & \langle letter \rangle \mid \langle id \rangle\langle letter \rangle \mid \langle id \rangle\langle digit \rangle \mid \langle id \rangle\_ \end{array}$$

Cadeias geradas:

$$\langle id \rangle \Rightarrow^* anumber$$
$$\langle id \rangle \Rightarrow^* some\_number$$
$$\langle id \rangle \Rightarrow^* number123$$
$$\ldots$$

$$L(G_5) = \{w \mid w \text{ é um identificador em } \texttt{ANSI/C}\}$$

https://www2.cs.arizona.edu/~debray/Teaching/CSc453/DOCS/cminusminusspec.html

BNF: Backus Naur Form

Exemplo 5:

$$G_5 = (\{\langle id\rangle, \langle letter\rangle, \langle digit\rangle\}, \{a, b, \ldots, z, A, B, \ldots, Z, \_\}, P, \langle id\rangle)$$

$$\begin{array}{rrcl} P: & \langle letter\rangle & ::= & a \mid b \mid ... \mid z \mid A \mid B \mid ... \mid Z \\ & \langle digit\rangle & ::= & 0 \mid 1 \mid ... \mid 9 \\ & \langle id\rangle & ::= & \langle letter\rangle \mid \langle id\rangle\langle letter\rangle \mid \langle id\rangle\langle digit\rangle \mid \langle id\rangle\_ \end{array}$$

Cadeias geradas:

$$\begin{array}{l} \langle id\rangle \Rightarrow^* anumber \\ \langle id\rangle \Rightarrow^* some\_number \\ \langle id\rangle \Rightarrow^* number123 \\ \ldots \end{array}$$

$$L(G_5) = \{w \mid w \text{ é um identificador em ANSI/C}\}$$

https://www2.cs.arizona.edu/~debray/Teaching/CSc453/DOCS/cminusminusspec.html

BNF: Backus Naur Form

Exemplo 5:

$$G_5 = (\{\langle id \rangle, \langle letter \rangle, \langle digit \rangle\}, \{a, b, \ldots, z, A, B, \ldots, Z, \_\}, P, \langle id \rangle)$$

$$\begin{array}{rrcl} P: & \langle letter \rangle & ::= & a \mid b \mid \ldots \mid z \mid A \mid B \mid \ldots \mid Z \\ & \langle digit \rangle & ::= & 0 \mid 1 \mid \ldots \mid 9 \\ & \langle id \rangle & ::= & \langle letter \rangle \mid \langle id \rangle\langle letter \rangle \mid \langle id \rangle\langle digit \rangle \mid \langle id \rangle\_ \end{array}$$

Cadeias geradas:

$$\begin{array}{l} \langle id \rangle \Rightarrow^* anumber \\ \langle id \rangle \Rightarrow^* some\_number \\ \langle id \rangle \Rightarrow^* number123 \\ \ldots \end{array}$$

$$L(G_5) = \{w \mid w \text{ é um identificador em } \texttt{ANSI/C}\}$$

https://www2.cs.arizona.edu/~debray/Teaching/CSc453/DOCS/cminusminusspec.html

GLC e GR

Observe que $L(G_5)$ pode ser descrita pela seguinte **ER**:

$$\mathbf{r} = (\mathbf{a} + \cdots + \mathbf{z} + \mathbf{A} + \cdots + \mathbf{Z})(\mathbf{a} + \cdots + \mathbf{z} + \mathbf{A} + \cdots + \mathbf{Z} + \mathbf{0} + \cdots + \mathbf{9} + \_)^*$$

G_6 pode ser reescrita como uma GR.

GLC e GR

Corolário:

Toda Gramática Regular é uma GLC.

GLD: $A \rightarrow wB$ ou $A \rightarrow w$, e $A, B \in V$ e $w \in \Sigma^*$.
GLC: $A \rightarrow \omega$, com $A \in V$ e $\omega \in (\Sigma \cup V)^*$

GLC e GR

Corolário:

Toda Linguagem Regular é uma LLC.

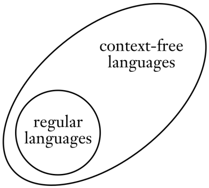


Figura: $\mathcal{L}_3 \subsetneq \mathcal{L}_2$

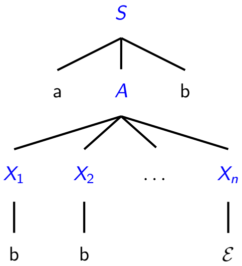
Existem linguagens que podem ser geradas por GLC e não por GR

Roteiro

Árvore de Derivação

Podemos representar a sequência de derivações de uma palavra na forma de uma Árvore de Derivação:

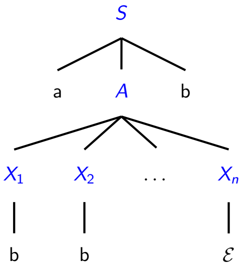
1. Raíz: variável inicial
2. Folhas: símbolos terminais ou $\mathcal{E}$
3. Cada nó interno representa a aplicação de uma regra de derivação, se $A \rightarrow X_1X_2 \ldots X_n$, então A possui filhos $X_1X_2 \ldots X_n$



Árvore de Derivação

Podemos representar a sequência de derivações de uma palavra na forma de uma Árvore de Derivação:

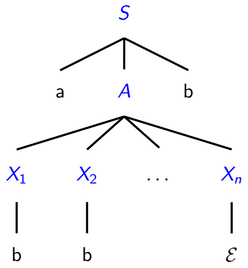
1. Raíz: variável inicial
2. Folhas: símbolos terminais ou $\mathcal{E}$
3. Cada nó interno representa a aplicação de uma regra de derivação, se $A \rightarrow X_1X_2 \ldots X_n$, então A possui filhos $X_1X_2 \ldots X_n$



Árvore de Derivação

Podemos representar a sequência de derivações de uma palavra na forma de uma Árvore de Derivação:

1. Raíz: variável inicial
2. Folhas: símbolos terminais ou $\mathcal{E}$
3. Cada nó interno representa a aplicação de uma regra de derivação, se $A \rightarrow X_1X_2\ldots X_n$, então A possui filhos $X_1X_2\ldots X_n$



Árvore de Derivação

Exemplo: $L(G_2) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

$$G_2 = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P : \quad S \rightarrow \mathbf{a}S\mathbf{b} \mid \mathcal{E}$$

Derivações: *aabb*

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aa\mathcal{E}bb$$

$S \rightarrow \mathcal{E}$ é o único caso em que temos uma folha $\mathcal{E}$.

Árvore de Derivação

Exemplo: $L(G_2) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

$$G_2 = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P: \quad S \rightarrow \mathbf{a}S\mathbf{b} \mid \mathcal{E}$$

Derivações: *aabb*

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aa\mathcal{E}bb$$

$S \rightarrow \mathcal{E}$ é o único caso em que temos uma folha $\mathcal{E}$.

Árvore de Derivação

Exemplo: $L(G_2) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

$$G_2 = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P: \quad S \rightarrow \mathbf{a}S\mathbf{b} \mid \mathcal{E}$$

Derivações: *aabb*

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aa\mathcal{E}bb$$

$S \rightarrow \mathcal{E}$ é o único caso em que temos uma folha $\mathcal{E}$.

Árvore de Derivação

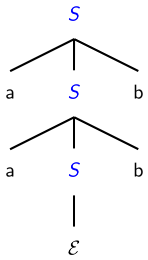
Exemplo: $L(G_2) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

$$G_2 = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P: \quad S \rightarrow \mathbf{a}S\mathbf{b} \mid \mathcal{E}$$

Derivações: *aabb*

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aa\mathcal{E}bb$$



$S \rightarrow \mathcal{E}$ é o único caso em que temos uma folha $\mathcal{E}$.

Árvore de Derivação

Outro exemplo: $L(G_4) = \{w \mid w \text{ é uma expressão aritmética}\}$

$$G_4 = (\{E\}, \{+, *, \underline{id}\}, P, E)$$

$$P: \quad E \to E + E \mid E * E \mid \underline{id}$$

Derivações: $\underline{id} + \underline{id} * \underline{id}$

$$\mathrm{E} \Rightarrow \mathrm{E} + E \Rightarrow \underline{id} + \mathrm{E} \Rightarrow \underline{id} + \mathrm{E} * E \Rightarrow \underline{id} + \underline{id} * \mathrm{E} \Rightarrow \underline{id} + \underline{id} * \underline{id}$$

Árvore de Derivação

Outro exemplo: $L(G_4) = \{w \mid w \text{ é uma expressão aritmética}\}$

$$G_4 = (\{E\}, \{+, *, \underline{id}\}, P, E)$$

$$P: \quad E \rightarrow E + E \mid E * E \mid \underline{id}$$

Derivações: $\underline{id} + \underline{id} * \underline{id}$

$$E \Rightarrow E + E \Rightarrow \underline{id} + E \Rightarrow \underline{id} + E * E \Rightarrow \underline{id} + \underline{id} * E \Rightarrow \underline{id} + \underline{id} * \underline{id}$$

Árvore de Derivação

Outro exemplo: $L(G_4) = \{w \mid w \text{ é uma expressão aritmética}\}$

$$G_4 = (\{E\}, \{+, *, \underline{id}\}, P, E)$$

$$P: \quad E \rightarrow E + E \mid E * E \mid \underline{id}$$

Derivações: $\underline{id} + \underline{id} * \underline{id}$

$$\mathrm{E} \Rightarrow \mathrm{E} + E \Rightarrow \underline{id} + \mathrm{E} \Rightarrow \underline{id} + \mathrm{E} * E \Rightarrow \underline{id} + \underline{id} * \mathrm{E} \Rightarrow \underline{id} + \underline{id} * \underline{id}$$

Árvore de Derivação

Outro exemplo: $L(G_4) = \{w \mid w \text{ é uma expressão aritmética}\}$

$$G_4 = (\{E\}, \{+, *, \underline{id}\}, P, E)$$

$$P: \quad E \rightarrow E + E \mid E * E \mid \underline{id}$$

Derivações: $\underline{id} + \underline{id} * \underline{id}$

$$E \Rightarrow E + E \Rightarrow \underline{id} + E \Rightarrow \underline{id} + E * E \Rightarrow \underline{id} + \underline{id} * E \Rightarrow \underline{id} + \underline{id} * \underline{id}$$

Árvore de Derivação

Outro exemplo: $L(G_4) = \{w \mid w \text{ é uma expressão aritmética}\}$

$$G_4 = (\{E\}, \{+, *, \underline{id}\}, P, E)$$

$$P: \quad E \rightarrow E + E \mid E * E \mid \underline{id}$$

Derivações: $\underline{id} + \underline{id} * \underline{id}$

$$E \Rightarrow E + E \Rightarrow \underline{id} + E \Rightarrow \underline{id} + E * E \Rightarrow \underline{id} + \underline{id} * E \Rightarrow \underline{id} + \underline{id} * \underline{id}$$

Árvore de Derivação

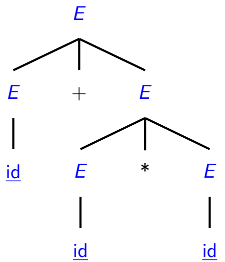
Outro exemplo: $L(G_4) = \{w \mid w \text{ é uma expressão aritmética}\}$

$$G_4 = (\{E\}, \{+, *, \underline{id}\}, P, E)$$

$$P: \quad E \to E + E \mid E * E \mid \underline{id}$$

Derivações: $\underline{id} + \underline{id} * \underline{id}$

$$E \Rightarrow E + E \Rightarrow \underline{id} + E \Rightarrow \underline{id} + E * E \Rightarrow \underline{id} + \underline{id} * E \Rightarrow \underline{id} + \underline{id} * \underline{id}$$



Árvore de Derivação

Uma árvore de derivação pode representar diferentes derivações de uma mesma palavra.

- Derivações: $\underline{id} + \underline{id} * \underline{id}$
  1. $E \Rightarrow E + E \Rightarrow \underline{id} + E \Rightarrow \underline{id} + E * E \Rightarrow \underline{id} + \underline{id} * E \Rightarrow \underline{id} + \underline{id} * \underline{id}$
  2. $E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + E * E \Rightarrow E + E * \underline{id} \Rightarrow E + \underline{id} * \underline{id} \Rightarrow \underline{id} + \underline{id} * \underline{id}$
  3. $E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + E * E \Rightarrow \underline{id} + E * E \Rightarrow \underline{id} + \underline{id} * E \Rightarrow \underline{id} + \underline{id} * \underline{id}$
  4. ...

$G_4 = (\{E\}, \{+, *, \underline{id}\}, P, E)$ e $P : E \rightarrow E + E \mid E * E \mid \underline{id}$

Árvore de Derivação

Uma árvore de derivação pode representar diferentes derivações de uma mesma palavra.

- Derivações: $\underline{id} + \underline{id} * \underline{id}$
  1. $E \Rightarrow E + E \Rightarrow \underline{id} + E \Rightarrow \underline{id} + E * E \Rightarrow \underline{id} + \underline{id} * E \Rightarrow \underline{id} + \underline{id} * \underline{id}$
  2. $E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + E * E \Rightarrow E + E * \underline{id} \Rightarrow E + \underline{id} * \underline{id} \Rightarrow \underline{id} + \underline{id} * \underline{id}$
  3. $E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + E * E \Rightarrow \underline{id} + E * E \Rightarrow \underline{id} + \underline{id} * E \Rightarrow \underline{id} + \underline{id} * \underline{id}$
  4. ...

$G_4 = (\{E\}, \{+, *, \underline{id}\}, P, E)$ e $P : E \rightarrow E + E \mid E * E \mid \underline{id}$

Árvore de Derivação

Uma árvore de derivação pode representar diferentes derivações de uma mesma palavra.

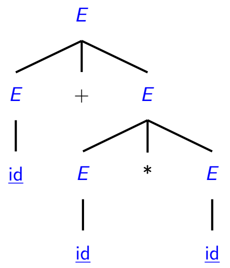
- Derivações: $id + id * id$
  1. $E \Rightarrow E + E \Rightarrow id + E \Rightarrow id + E * E \Rightarrow id + id * E \Rightarrow id + id * id$
  2. $E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + E * E \Rightarrow E + E * id \Rightarrow E + id * id \Rightarrow id + id * id$
  3. $E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + E * E \Rightarrow id + E * E \Rightarrow id + id * E \Rightarrow id + id * id$
  4. ...

$G_4 = (\{E\}, \{+, *, id\}, P, E)$ e $P : E \rightarrow E + E \mid E * E \mid id$

Árvore de Derivação

Uma árvore de derivação pode representar diferentes derivações de uma mesma palavra.

- Derivações: $\underline{id} + \underline{id} * \underline{id}$
  1. $E \Rightarrow E + E \Rightarrow \underline{id} + E \Rightarrow \underline{id} + E * E \Rightarrow \underline{id} + \underline{id} * E \Rightarrow \underline{id} + \underline{id} * \underline{id}$
  2. $E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + E * E \Rightarrow E + E * \underline{id} \Rightarrow E + \underline{id} * \underline{id} \Rightarrow \underline{id} + \underline{id} * \underline{id}$
  3. $E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + E * E \Rightarrow \underline{id} + E * E \Rightarrow \underline{id} + \underline{id} * E \Rightarrow \underline{id} + \underline{id} * \underline{id}$
  4. ...



$G_4 = (\{E\}, \{+, *, \underline{id}\}, P, E)$ e $P : E \to E + E \mid E * E \mid \underline{id}$

Árvore de Derivação

Podemos definir uma ordem fixa para substituição de variáveis:

1. $\underset{e}{\Rightarrow}$ a variável $A \in V$ mais à esquerda é substituída a cada passo.
2. $\underset{d}{\Rightarrow}$ a variável $A \in V$ mais à direita é substituída a cada passo.

No exemplo anterior:

- Derivações: $id + id * id$
  1. $E \underset{e}{\Rightarrow} E + E \underset{e}{\Rightarrow} id + E \underset{e}{\Rightarrow} id + E * E \underset{e}{\Rightarrow} id + id * E \underset{e}{\Rightarrow} id + id * id$
  2. $E \underset{d}{\Rightarrow} E + E \underset{d}{\Rightarrow} E + E * E \underset{d}{\Rightarrow} E + E * id \underset{d}{\Rightarrow} E + id * id \underset{d}{\Rightarrow} id + id * id$

Vamos utilizar a derivação mais à esquerda $\underset{e}{\Rightarrow}$ como forma canonica.

Árvore de Derivação

Podemos definir uma ordem fixa para substituição de variáveis:

1. $\underset{e}{\Rightarrow}$ a variável $A \in V$ mais à esquerda é substituída a cada passo.
2. $\underset{d}{\Rightarrow}$ a variável $A \in V$ mais à direita é substituída a cada passo.

No exemplo anterior:

- Derivações: $id + id * id$
  1. $E \underset{e}{\Rightarrow} E + E \underset{e}{\Rightarrow} id + E \underset{e}{\Rightarrow} id + E * E \underset{e}{\Rightarrow} id + id * E \underset{e}{\Rightarrow} id + id * id$
  2. $E \underset{d}{\Rightarrow} E + E \underset{d}{\Rightarrow} E + E * E \underset{d}{\Rightarrow} E + E * id \underset{d}{\Rightarrow} E + id * id \underset{d}{\Rightarrow} id + id * id$

Vamos utilizar a derivação mais à esquerda $\underset{e}{\Rightarrow}$ como forma canonica.

Árvore de Derivação

Podemos definir uma ordem fixa para substituição de variáveis:

1. $\underset{e}{\Rightarrow}$ a variável $A \in V$ mais à esquerda é substituída a cada passo.
2. $\underset{d}{\Rightarrow}$ a variável $A \in V$ mais à direita é substituída a cada passo.

No exemplo anterior:

- Derivações: $id + id * id$
  1. $E \underset{e}{\Rightarrow} E + E \underset{e}{\Rightarrow} id + E \underset{e}{\Rightarrow} id + E * E \underset{e}{\Rightarrow} id + id * E \underset{e}{\Rightarrow} id + id * id$
  2. $E \underset{d}{\Rightarrow} E + E \underset{d}{\Rightarrow} E + E * E \underset{d}{\Rightarrow} E + E * id \underset{d}{\Rightarrow} E + id * id \underset{d}{\Rightarrow} id + id * id$

Vamos utilizar a derivação mais à esquerda $\underset{e}{\Rightarrow}$ como forma canonica.

Roteiro

Ambiguidade

Pode ocorrer de uma palavra *w* estar associada a **mais de uma** árvore de derivação.

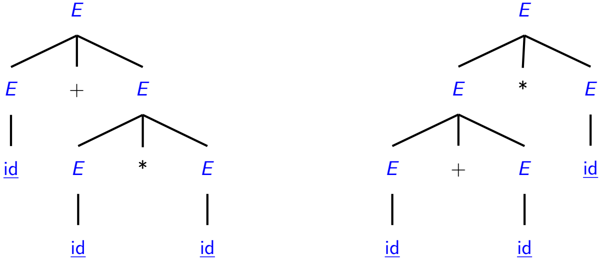
- Nesses casos, dizemos que w é gerada *ambiguamente*

Fixada a ordem de substituição, no nosso caso, mais à esquerda

Ambiguidade

No exemplo anterior:

- Derivações:
  1. $E \underset{e}{\Rightarrow} E + E \underset{e}{\Rightarrow} id + E \underset{e}{\Rightarrow} id + E * E \underset{e}{\Rightarrow} id + id * E \underset{e}{\Rightarrow} id + id * id$
  2. $E \underset{e}{\Rightarrow} E * E \underset{e}{\Rightarrow} E + E * E \underset{e}{\Rightarrow} id + E * E \underset{e}{\Rightarrow} id + id * E \underset{e}{\Rightarrow} id + id * id$



$G_4 = (\{E\}, \{+, *, id\}, P, E)$ e $P : E \rightarrow E + E \mid E * E \mid id$

Ambiguidade

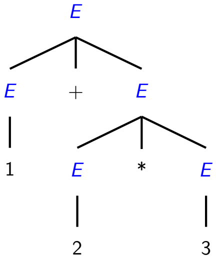
Definição

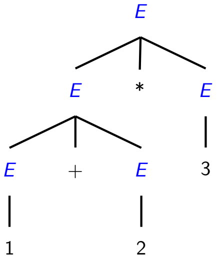
Uma GLC é ambígua se ela gera alguma cadeia ambiguamente.

Ambiguidade

No exemplo anterior a *gramática ambígua* não captura as relações de precedência usuais:

- Considere: $w = \mathbf{1} + \mathbf{2} * \mathbf{3}$





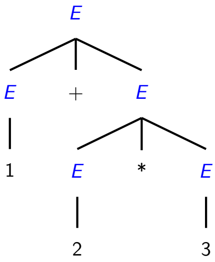
$1 + (2 * 3) = 7$ ✓ $\quad (1 + 2) * 3 = 9$ ✗

$G_4 = (\{E\}, \{+, *, \underline{id}\}, P, E)$ e $P : E \rightarrow E + E \mid E * E \mid \underline{id}$

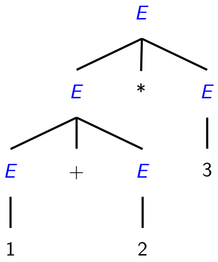
Ambiguidade

No exemplo anterior a *gramática ambígua* não captura as relações de precedência usuais:

- Considere: $w = \mathbf{1} + \mathbf{2} * \mathbf{3}$



$1 + (2 * 3) = 7$ ✓



$(1 + 2) * 3 = 9$ ✗

$G_4 = (\{E\}, \{+, *, \underline{id}\}, P, E)$ e $P : E \rightarrow E + E \mid E * E \mid \underline{id}$

Ambiguidade

Esse resultado pode ser indesejável em algumas aplicações, como em Compiladores:

- A etapa de análise sintática pode gerar dois códigos distintos.

Ambiguidade

Importante:

- Quando dizemos que w é **gerada ambiguamente**, existem duas ou mais árvores de derivação, e não derivações diferentes.
  - Por isso fixamos $\underset{e}{\Rightarrow}$.

Vimos que duas derivações diferentes podem gerar a mesma árvore (Slide 22).

Ambiguidade

Teorema

Uma gramática G é ambígua se existe pelo menos uma palavra gerada por G com duas ou mais derivações $\underset{e}{\Rightarrow}$

Ambiguidade

Em algumas situações, é possível encontrar uma GLC não-ambígua que gera a mesma linguagem.

- Entretanto, algumas LLC só podem ser geradas por gramáticas ambíguas.

Ambiguidade

Em algumas situações, é possível encontrar uma GLC não-ambígua que gera a mesma linguagem.

- Entretanto, algumas LLC só podem ser geradas por gramáticas ambíguas.

Ambiguidade

Definição

Uma linguagem L é inerentemente ambígua se qualquer GLC que a define é ambígua.

Ambiguidade

Exemplo 6:

$$G_6 = (\{S, A, B, C, D\}, \{a, b, c\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \to aBbC \mid AbDc \mid \mathcal{E} \\ & B \to aBb \mid \mathcal{E} \\ & C \to cC \mid \mathcal{E} \\ & A \to aA \mid \mathcal{E} \\ & D \to bDc \mid \mathcal{E} \end{aligned}$$

Cadeias geradas:

$$\begin{aligned} & S \Rightarrow^* aaabbbc \\ & S \Rightarrow^* abbbbcccc \\ & S \Rightarrow^* aabbcc \\ & \ldots \end{aligned}$$

$$L(G_6) = \{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ ou } j = k\}$$

Ambiguidade

Exemplo 6:

$$G_6 = (\{S, A, B, C, D\}, \{a, b, c\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P:\quad & S \rightarrow aBbC \mid AbDc \mid \mathcal{E} \\ & B \rightarrow aBb \mid \mathcal{E} \\ & C \rightarrow cC \mid \mathcal{E} \\ & A \rightarrow aA \mid \mathcal{E} \\ & D \rightarrow bDc \mid \mathcal{E} \end{aligned}$$

Cadeias geradas:

$$\begin{aligned} & S \Rightarrow^* aaabbbc \\ & S \Rightarrow^* abbbbcccc \\ & S \Rightarrow^* aabbcc \\ & \ldots \end{aligned}$$

$$L(G_6) = \{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ ou } j = k\}$$

Ambiguidade

Exemplo 6:

$$G_6 = (\{S, A, B, C, D\}, \{a, b, c\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow aBbC \mid AbDc \mid \mathcal{E} \\ & B \rightarrow aBb \mid \mathcal{E} \\ & C \rightarrow cC \mid \mathcal{E} \\ & A \rightarrow aA \mid \mathcal{E} \\ & D \rightarrow bDc \mid \mathcal{E} \end{aligned}$$

Cadeias geradas:

$$\begin{aligned} & S \Rightarrow^* aaabbbc \\ & S \Rightarrow^* abbbbcccc \\ & S \Rightarrow^* aabbcc \\ & \ldots \end{aligned}$$

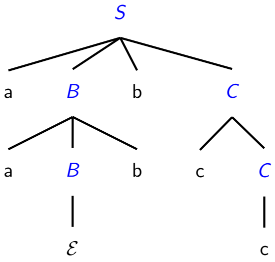
$$L(G_6) = \{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ ou } j = k\}$$

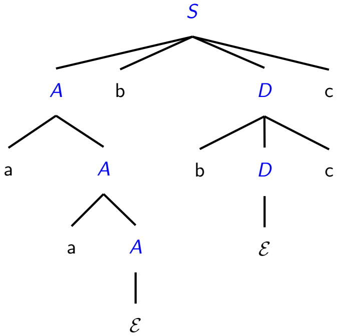
Ambiguidade

Exemplo 6:

- Derivações: *aabbcc*

1. $S \underset{e}{\Rightarrow} aBbC \underset{e}{\Rightarrow} aaBbbC \underset{e}{\Rightarrow} aa\mathcal{E}bbC \underset{e}{\Rightarrow} aa\mathcal{E}bbcC \underset{e}{\Rightarrow} aa\mathcal{E}bbcc$
2. $S \underset{e}{\Rightarrow} AbDc \underset{e}{\Rightarrow} aAbDc \underset{e}{\Rightarrow} aaAbDc \underset{e}{\Rightarrow} aa\mathcal{E}bDc \underset{e}{\Rightarrow} aa\mathcal{E}bbDcc \underset{e}{\Rightarrow} aa\mathcal{E}bb\mathcal{E}cc$





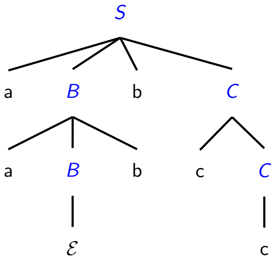
Veja a prova no Livro (Hopcroft, pg. 227).

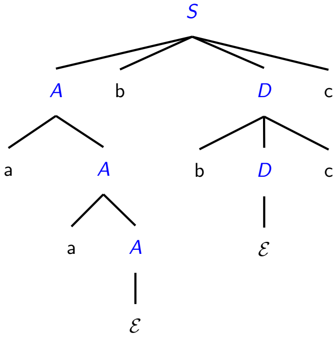
Ambiguidade

Exemplo 6:

- Derivações: *aabbcc*

1. $S \underset{e}{\Rightarrow} aBbC \underset{e}{\Rightarrow} aaBbbC \underset{e}{\Rightarrow} aa\mathcal{E}bbC \underset{e}{\Rightarrow} aa\mathcal{E}bbcC \underset{e}{\Rightarrow} aa\mathcal{E}bbcc$
2. $S \underset{e}{\Rightarrow} AbDc \underset{e}{\Rightarrow} aAbDc \underset{e}{\Rightarrow} aaAbDc \underset{e}{\Rightarrow} aa\mathcal{E}bDc \underset{e}{\Rightarrow} aa\mathcal{E}bbDcc \underset{e}{\Rightarrow}$
   $aa\mathcal{E}bb\mathcal{E}cc$





Veja a prova no Livro (Hopcroft, pg. 227).

Roteiro

Simplificações e Formas Normais

Em algumas situações é conveniente obter uma forma simplificada de uma **GLC**:

- Isso significa modificar (simplificar) algumas produções, sem modificar a linguagem gerada.
- Simplificações são importantes na construção e otimização de algoritmos e demonstrações de teoremas.

Simplificações e Formas Normais

Em algumas situações é conveniente obter uma forma simplificada de uma **GLC**:

- Isso significa modificar (simplificar) algumas produções, sem modificar a linguagem gerada.
- Simplificações são importantes na construção e otimização de algoritmos e demonstrações de teoremas.

Simplificações e Formas Normais

Formas normais estabelecem restrições no formato das regras de produção de uma **GLC**:

1. Forma Normal de Chomsky (FNC).
2. Forma Normal de Greigbach (FNG).

As restrições não modificam a linguagem gerada.

Roteiro

Simplificações de GLCs

1. Símbolos inúteis: excluímos **variáveis** ou **terminais** não-usados.
   - Dizemos que um símbolo X é útil se existe alguma derivação $S \Rightarrow^* \alpha X \beta \Rightarrow^* w$, com $w \in \Sigma^*$, caso contrário, X é inútil.
   - Evidentemente, remover símbolos inúteis não altera $L(G)$.

- Exemplo:

$$G_7 = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow \mathbf{a}A\mathbf{a} \mid \mathbf{b}B\mathbf{b} \\ & A \rightarrow \mathbf{a} \mid S \\ & C \rightarrow \mathbf{c} \end{aligned}$$

- Símbolos inúteis: **c**, C, B, **b**
  - Gramáticas Simplificada:

$$G_7' = (\{S, A\}, \{a\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow \mathbf{a}A\mathbf{a} \\ & A \rightarrow \mathbf{a} \mid S \end{aligned}$$

Simplificações de GLCs

1. Símbolos inúteis: excluímos **variáveis** ou **terminais** não-usados.
   - Dizemos que um símbolo X é útil se existe alguma derivação $S \Rightarrow^* \alpha X \beta \Rightarrow^* w$, com $w \in \Sigma^*$, caso contrário, X é inútil.
   - Evidentemente, remover símbolos inúteis não altera $L(G)$.

- Exemplo:

$$G_7 = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow \mathbf{a}A\mathbf{a} \mid \mathbf{b}B\mathbf{b} \\ & A \rightarrow \mathbf{a} \mid S \\ & C \rightarrow \mathbf{c} \end{aligned}$$

- Símbolos inúteis: **c**, C, B, **b**
   - Gramáticas Simplificada:

$$G_7' = (\{S, A\}, \{a\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow \mathbf{a}A\mathbf{a} \\ & A \rightarrow \mathbf{a} \mid S \end{aligned}$$

Simplificações de GLCs

1. Símbolos inúteis: excluímos **variáveis** ou **terminais** não-usados.
   - Dizemos que um símbolo X é útil se existe alguma derivação $S \Rightarrow^* \alpha X \beta \Rightarrow^* w$, com $w \in \Sigma^*$, caso contrário, X é inútil.
   - Evidentemente, remover símbolos inúteis não altera $L(G)$.

- Exemplo:

$$G_7 = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow \mathbf{a}A\mathbf{a} \mid \mathbf{b}B\mathbf{b} \\ & A \rightarrow \mathbf{a} \mid S \\ & C \rightarrow \mathbf{c} \end{aligned}$$

- Símbolos inúteis: **c**, C, B, **b**
  - Gramáticas Simplificada:

$$G_7' = (\{S, A\}, \{a\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow \mathbf{a}A\mathbf{a} \\ & A \rightarrow \mathbf{a} \mid S \end{aligned}$$

Simplificações de GLCs

1. Símbolos inúteis: excluímos **variáveis** ou **terminais** não-usados.
   - Dizemos que um símbolo X é útil se existe alguma derivação $S \Rightarrow^* \alpha X \beta \Rightarrow^* w$, com $w \in \Sigma^*$, caso contrário, X é inútil.
   - Evidentemente, remover símbolos inúteis não altera $L(G)$.

- Exemplo:

$$G_7 = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \to \mathbf{a}A\mathbf{a} \mid \mathbf{b}B\mathbf{b} \\ & A \to \mathbf{a} \mid S \\ & C \to \mathbf{c} \end{aligned}$$

- Símbolos inúteis: **c**, C, B, **b**
  - Gramáticas Simplificada:

$$G_7' = (\{S, A\}, \{a\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \to \mathbf{a}A\mathbf{a} \\ & A \to \mathbf{a} \mid S \end{aligned}$$

Simplificações de GLCs

1. Símbolos inúteis: excluímos **variáveis** ou **terminais** não-usados.
   - Dizemos que um símbolo X é útil se existe alguma derivação $S \Rightarrow^* \alpha X \beta \Rightarrow^* w$, com $w \in \Sigma^*$, caso contrário, X é inútil.
   - Evidentemente, remover símbolos inúteis não altera $L(G)$.

- Exemplo:

$$G_7 = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow \mathbf{a}A\mathbf{a} \mid \mathbf{b}B\mathbf{b} \\ & A \rightarrow \mathbf{a} \mid S \\ & C \rightarrow \mathbf{c} \end{aligned}$$

- Símbolos inúteis: **c**, C, B, **b**
   - Gramáticas Simplificada:

$$G_7' = (\{S, A\}, \{a\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow \mathbf{a}A\mathbf{a} \\ & A \rightarrow \mathbf{a} \mid S \end{aligned}$$

Simplificações de GLCs

1. Símbolos inúteis: excluímos **variáveis** ou **terminais** não-usados.
   - Dizemos que um símbolo X é útil se existe alguma derivação $S \Rightarrow^* \alpha X \beta \Rightarrow^* w$, com $w \in \Sigma^*$, caso contrário, X é inútil.
   - Evidentemente, remover símbolos inúteis não altera $L(G)$.

- Exemplo:

$$G_7 = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad S &\rightarrow \mathbf{a}A\mathbf{a} \mid \mathbf{b}B\mathbf{b} \\ A &\rightarrow \mathbf{a} \mid S \\ C &\rightarrow \mathbf{c} \end{aligned}$$

- Símbolos inúteis: **c**, C, B, **b**
  - Gramáticas Simplificada:

$$G_7' = (\{S, A\}, \{a\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad S &\rightarrow \mathbf{a}A\mathbf{a} \\ A &\rightarrow \mathbf{a} \mid S \end{aligned}$$

Simplificações de GLCs

1. Símbolos inúteis: excluímos **variáveis** ou **terminais** não-usados.
   - Dizemos que um símbolo X é útil se existe alguma derivação $S \Rightarrow^* \alpha X \beta \Rightarrow^* w$, com $w \in \Sigma^*$, caso contrário, X é inútil.
   - Evidentemente, remover símbolos inúteis não altera $L(G)$.

- Exemplo:

$$G_7 = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow \mathbf{a}A\mathbf{a} \mid \mathbf{b}B\mathbf{b} \\ & A \rightarrow \mathbf{a} \mid S \\ & C \rightarrow \mathbf{c} \end{aligned}$$

- Símbolos inúteis: **c**, C, B, **b**
  - Gramáticas Simplificada:

$$G_7' = (\{S, A\}, \{a\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow \mathbf{a}A\mathbf{a} \\ & A \rightarrow \mathbf{a} \mid S \end{aligned}$$

Simplificações de GLCs

1. Símbolos inúteis: excluímos **variáveis** ou **terminais** não-usados.
   - Dizemos que um símbolo X é útil se existe alguma derivação $S \Rightarrow^* \alpha X \beta \Rightarrow^* w$, com $w \in \Sigma^*$, caso contrário, X é inútil.
   - Evidentemente, remover símbolos inúteis não altera $L(G)$.

- Exemplo:

$$G_7 = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow \mathbf{a}A\mathbf{a} \mid \mathbf{b}B\mathbf{b} \\ & A \rightarrow \mathbf{a} \mid S \\ & C \rightarrow \mathbf{c} \end{aligned}$$

- Símbolos inúteis: **c**, C, B, **b**
   - Gramáticas Simplificada:

$$G_7' = (\{S, A\}, \{a\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow \mathbf{a}A\mathbf{a} \\ & A \rightarrow \mathbf{a} \mid S \end{aligned}$$

Simplificações de GLCs

1. Símbolos inúteis: excluímos **variáveis** ou **terminais** não-usados.
   - Dizemos que um símbolo X é útil se existe alguma derivação $S \Rightarrow^* \alpha X \beta \Rightarrow^* w$, com $w \in \Sigma^*$, caso contrário, X é inútil.
   - Evidentemente, remover símbolos inúteis não altera $L(G)$.

- Exemplo:

$$G_7 = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow \mathbf{a}A\mathbf{a} \mid \mathbf{b}B\mathbf{b} \\ & A \rightarrow \mathbf{a} \mid S \\ & C \rightarrow \mathbf{c} \end{aligned}$$

- Símbolos inúteis: **c**, C, B, **b**
   - Gramáticas Simplificada:

$$G_7' = (\{S, A\}, \{a\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow \mathbf{a}A\mathbf{a} \\ & A \rightarrow \mathbf{a} \mid S \end{aligned}$$

Simplificações de GLCs

2. Produções vazias: excluímos produções do tipo $A \to \mathcal{E}$:
   - se $X \to \alpha A \beta$, adicionamos $X \to \alpha\beta$
   - se $X \to A$, removemos essa produção e adicionamos $X \to \mathcal{E}$

- Exemplo:

$$G_8 = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \to \mathbf{a}A\mathbf{a} \mid \mathbf{b}A\mathbf{b} \\ & A \to \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \mid B \\ & B \to \mathcal{E} \end{aligned}$$

- Produções vazias: $B \to \mathcal{E}$, $A \to \mathcal{E}$
  - Gramáticas Simplificada:

$$G_8' = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \to \mathbf{a}A\mathbf{a} \mid \mathbf{b}A\mathbf{b} \mid \mathbf{aa} \mid \mathbf{bb} \\ & A \to \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \end{aligned}$$

Quando $\mathcal{E} \in L(G)$ devemos incluir um novo símbolo inicial S_0 e $S_0 \to S \mid \mathcal{E}$.

Simplificações de GLCs

2. Produções vazias: excluímos produções do tipo $A \to \mathcal{E}$:
   - se $X \to \alpha A \beta$, adicionamos $X \to \alpha\beta$
   - se $X \to A$, removemos essa produção e adicionamos $X \to \mathcal{E}$

- Exemplo:

$$G_8 = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \to \mathbf{a}A\mathbf{a} \mid \mathbf{b}A\mathbf{b} \\ & A \to \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \mid B \\ & B \to \mathcal{E} \end{aligned}$$

- Produções vazias: $B \to \mathcal{E}$, $A \to \mathcal{E}$
  - Gramáticas Simplificada:

$$G_8' = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \to \mathbf{a}A\mathbf{a} \mid \mathbf{b}A\mathbf{b} \mid \mathbf{aa} \mid \mathbf{bb} \\ & A \to \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \end{aligned}$$

Quando $\mathcal{E} \in L(G)$ devemos incluir um novo símbolo inicial S_0 e $S_0 \to S \mid \mathcal{E}$.

Simplificações de GLCs

2. Produções vazias: excluímos produções do tipo $A \to \mathcal{E}$:
   - se $X \to \alpha A \beta$, adicionamos $X \to \alpha\beta$
   - se $X \to A$, removemos essa produção e adicionamos $X \to \mathcal{E}$

- Exemplo:

$$G_8 = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \to \mathbf{a}A\mathbf{a} \mid \mathbf{b}A\mathbf{b} \\ & A \to \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \mid B \\ & B \to \mathcal{E} \end{aligned}$$

- Produções vazias: $B \to \mathcal{E}$, $A \to \mathcal{E}$
  - Gramáticas Simplificada:

$$G_8' = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \to \mathbf{a}A\mathbf{a} \mid \mathbf{b}A\mathbf{b} \mid \mathbf{aa} \mid \mathbf{bb} \\ & A \to \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \end{aligned}$$

Quando $\mathcal{E} \in L(G)$ devemos incluir um novo símbolo inicial S_0 e $S_0 \to S \mid \mathcal{E}$.

Simplificações de GLCs

2. Produções vazias: excluímos produções do tipo $A \to \mathcal{E}$:
   - se $X \to \alpha A \beta$, adicionamos $X \to \alpha\beta$
   - se $X \to A$, removemos essa produção e adicionamos $X \to \mathcal{E}$

- Exemplo:

$$G_8 = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P: \quad \begin{aligned} S &\to \mathbf{a}A\mathbf{a} \mid \mathbf{b}A\mathbf{b} \\ A &\to \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \mid B \\ B &\to \mathcal{E} \end{aligned}$$

- Produções vazias: $B \to \mathcal{E}$, $A \to \mathcal{E}$
  - Gramáticas Simplificada:

$$G_8' = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P: \quad \begin{aligned} S &\to \mathbf{a}A\mathbf{a} \mid \mathbf{b}A\mathbf{b} \mid \mathbf{aa} \mid \mathbf{bb} \\ A &\to \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \end{aligned}$$

Quando $\mathcal{E} \in L(G)$ devemos incluir um novo símbolo inicial S_0 e $S_0 \to S \mid \mathcal{E}$.

Simplificações de GLCs

2. Produções vazias: excluímos produções do tipo $A \rightarrow \mathcal{E}$:
   - se $X \rightarrow \alpha A \beta$, adicionamos $X \rightarrow \alpha\beta$
   - se $X \rightarrow A$, removemos essa produção e adicionamos $X \rightarrow \mathcal{E}$

- Exemplo:

$$G_8 = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow \mathbf{a}A\mathbf{a} \mid \mathbf{b}A\mathbf{b} \\ & A \rightarrow \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \mid B \\ & B \rightarrow \mathcal{E} \end{aligned}$$

- Produções vazias: $B \rightarrow \mathcal{E}$, $A \rightarrow \mathcal{E}$
  - Gramáticas Simplificada:

$$G'_8 = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow \mathbf{a}A\mathbf{a} \mid \mathbf{b}A\mathbf{b} \mid \mathbf{aa} \mid \mathbf{bb} \\ & A \rightarrow \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \end{aligned}$$

Quando $\mathcal{E} \in L(G)$ devemos incluir um novo símbolo inicial S_0 e $S_0 \rightarrow S \mid \mathcal{E}$.

Simplificações de GLCs

2. Produções vazias: excluímos produções do tipo $A \to \mathcal{E}$:
   - se $X \to \alpha A \beta$, adicionamos $X \to \alpha\beta$
   - se $X \to A$, removemos essa produção e adicionamos $X \to \mathcal{E}$

- Exemplo:

$$G_8 = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \to \mathbf{a}A\mathbf{a} \mid \mathbf{b}A\mathbf{b} \\ & A \to \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \mid B \\ & B \to \mathcal{E} \end{aligned}$$

- Produções vazias: $B \to \mathcal{E}$, $A \to \mathcal{E}$
  - Gramáticas Simplificada:

$$G_8' = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \to \mathbf{a}A\mathbf{a} \mid \mathbf{b}A\mathbf{b} \mid \mathbf{aa} \mid \mathbf{bb} \\ & A \to \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \end{aligned}$$

Quando $\mathcal{E} \in L(G)$ devemos incluir um novo símbolo inicial S_0 e $S_0 \to S \mid \mathcal{E}$.

Simplificações de GLCs

2. Produções vazias: excluímos produções do tipo $A \rightarrow \mathcal{E}$:
   - se $X \rightarrow \alpha A \beta$, adicionamos $X \rightarrow \alpha\beta$
   - se $X \rightarrow A$, removemos essa produção e adicionamos $X \rightarrow \mathcal{E}$

- Exemplo:

$$G_8 = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow \mathbf{a}A\mathbf{a} \mid \mathbf{b}A\mathbf{b} \\ & A \rightarrow \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \mid B \\ & B \rightarrow \mathcal{E} \end{aligned}$$

- Produções vazias: $B \rightarrow \mathcal{E}$, $A \rightarrow \mathcal{E}$
   - Gramáticas Simplificada:

$$G_8' = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow \mathbf{a}A\mathbf{a} \mid \mathbf{b}A\mathbf{b} \mid \mathbf{aa} \mid \mathbf{bb} \\ & A \rightarrow \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \end{aligned}$$

Quando $\mathcal{E} \in L(G)$ devemos incluir um novo símbolo inicial S_0 e $S_0 \rightarrow S \mid \mathcal{E}$.

Simplificações de GLCs

2. Produções vazias: excluímos produções do tipo $A \to \mathcal{E}$:
   - se $X \to \alpha A \beta$, adicionamos $X \to \alpha\beta$
   - se $X \to A$, removemos essa produção e adicionamos $X \to \mathcal{E}$

- Exemplo:

$$G_8 = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P:\quad & S \to \mathbf{a}A\mathbf{a} \mid \mathbf{b}A\mathbf{b} \\ & A \to \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \mid B \\ & B \to \mathcal{E} \end{aligned}$$

- Produções vazias: $B \to \mathcal{E}$, $A \to \mathcal{E}$
  - Gramáticas Simplificada:

$$G_8' = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P:\quad & S \to \mathbf{a}A\mathbf{a} \mid \mathbf{b}A\mathbf{b} \mid \mathbf{aa} \mid \mathbf{bb} \\ & A \to \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \end{aligned}$$

Quando $\mathcal{E} \in L(G)$ devemos incluir um novo símbolo inicial S_0 e $S_0 \to S \mid \mathcal{E}$.

Simplificações de GLCs

2. Produções vazias: excluímos produções do tipo $A \rightarrow \mathcal{E}$:
   - se $X \rightarrow \alpha A \beta$, adicionamos $X \rightarrow \alpha\beta$
   - se $X \rightarrow A$, removemos essa produção e adicionamos $X \rightarrow \mathcal{E}$

- Exemplo:

$$G_8 = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow \mathbf{a}A\mathbf{a} \mid \mathbf{b}A\mathbf{b} \\ & A \rightarrow \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \mid B \\ & B \rightarrow \mathcal{E} \end{aligned}$$

- Produções vazias: $B \rightarrow \mathcal{E}$, $A \rightarrow \mathcal{E}$
  - Gramáticas Simplificada:

$$G_8' = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow \mathbf{a}A\mathbf{a} \mid \mathbf{b}A\mathbf{b} \mid \mathbf{aa} \mid \mathbf{bb} \\ & A \rightarrow \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \end{aligned}$$

Quando $\mathcal{E} \in L(G)$ devemos incluir um novo símbolo inicial S_0 e $S_0 \rightarrow S \mid \mathcal{E}$.

Simplificações de GLCs

3. Produções unitárias: substituímos produções do tipo $A \rightarrow B$
   - Esse tipo de produção não adiciona informação em termos de geração de palavras.
   - Sempre que $B \rightarrow \alpha$, podemos substituir $A \rightarrow B$ por $A \rightarrow \alpha$

- Exemplo:

$$G_9 = (\{S, A, B, C\}, \{a\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow \mathbf{a}A\mathbf{a} \\ & A \rightarrow \mathbf{a} \mid S \end{aligned}$$

- Produções unitárias: $A \rightarrow \mathbf{a}$, $A \rightarrow S$
   - Gramáticas Simplificada:

$$G_9' = (\{S\}, \{a\}, P, S)$$

$$P: \quad S \rightarrow \mathbf{aaa} \mid \mathbf{a}S\mathbf{a}$$

Simplificações de GLCs

3. Produções unitárias: substituímos produções do tipo $A \to B$
   - Esse tipo de produção não adiciona informação em termos de geração de palavras.
   - Sempre que $B \to \alpha$, podemos substituir $A \to B$ por $A \to \alpha$

- Exemplo:

$$G_9 = (\{S, A, B, C\}, \{a\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \to \mathbf{a}A\mathbf{a} \\ & A \to \mathbf{a} \mid S \end{aligned}$$

- Produções unitárias: $A \to \mathbf{a}$, $A \to S$
  - Gramáticas Simplificada:

$$G_9' = (\{S\}, \{a\}, P, S)$$

$$P: \quad S \to \mathbf{aaa} \mid \mathbf{a}S\mathbf{a}$$

Simplificações de GLCs

3. Produções unitárias: substituímos produções do tipo $A \rightarrow B$
   - Esse tipo de produção não adiciona informação em termos de geração de palavras.
   - Sempre que $B \rightarrow \alpha$, podemos substituir $A \rightarrow B$ por $A \rightarrow \alpha$

- Exemplo:

$$G_9 = (\{S, A, B, C\}, \{a\}, P, S)$$

$$P: \quad S \rightarrow \mathbf{a}A\mathbf{a}$$
$$A \rightarrow \mathbf{a} \mid S$$

- Produções unitárias: $A \rightarrow \mathbf{a}$, $A \rightarrow S$
  - Gramáticas Simplificada:

$$G_9' = (\{S\}, \{a\}, P, S)$$

$$P: \quad S \rightarrow \mathbf{aaa} \mid \mathbf{a}S\mathbf{a}$$

Simplificações de GLCs

3. Produções unitárias: substituímos produções do tipo $A \rightarrow B$
   - Esse tipo de produção não adiciona informação em termos de geração de palavras.
   - Sempre que $B \rightarrow \alpha$, podemos substituir $A \rightarrow B$ por $A \rightarrow \alpha$

- Exemplo:

$$G_9 = (\{S, A, B, C\}, \{a\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow \mathbf{a}A\mathbf{a} \\ & A \rightarrow \mathbf{a} \mid S \end{aligned}$$

- Produções unitárias: $A \rightarrow \mathbf{a}$, $A \rightarrow S$
   - Gramáticas Simplificada:

$$G_9' = (\{S\}, \{a\}, P, S)$$

$$P: \quad S \rightarrow \mathbf{aaa} \mid \mathbf{a}S\mathbf{a}$$

Simplificações de GLCs

3. Produções unitárias: substituímos produções do tipo $A \rightarrow B$
   - Esse tipo de produção não adiciona informação em termos de geração de palavras.
   - Sempre que $B \rightarrow \alpha$, podemos substituir $A \rightarrow B$ por $A \rightarrow \alpha$

- Exemplo:

$$G_9 = (\{S, A, B, C\}, \{a\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow \mathbf{a}A\mathbf{a} \\ & A \rightarrow \mathbf{a} \mid S \end{aligned}$$

- Produções unitárias: $A \rightarrow \mathbf{a}$, $A \rightarrow S$
  - Gramáticas Simplificada:

$$G_9' = (\{S\}, \{a\}, P, S)$$

$$P: \quad S \rightarrow \mathbf{aaa} \mid \mathbf{a}S\mathbf{a}$$

3. Produções unitárias: substituímos produções do tipo $A \rightarrow B$
   - Esse tipo de produção não adiciona informação em termos de geração de palavras.
   - Sempre que $B \rightarrow \alpha$, podemos substituir $A \rightarrow B$ por $A \rightarrow \alpha$

- Exemplo:

$$G_9 = (\{S, A, B, C\}, \{a\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow \mathbf{a}A\mathbf{a} \\ & A \rightarrow \mathbf{a} \mid S \end{aligned}$$

- Produções unitárias: $A \rightarrow \mathbf{a}$, $A \rightarrow S$
  - Gramáticas Simplificada:

$$G_9' = (\{S\}, \{a\}, P, S)$$

$$P: \quad S \rightarrow \mathbf{aaa} \mid \mathbf{a}S\mathbf{a}$$

Simplificações de GLCs

3. Produções unitárias: substituímos produções do tipo $A \rightarrow B$
   - Esse tipo de produção não adiciona informação em termos de geração de palavras.
   - Sempre que $B \rightarrow \alpha$, podemos substituir $A \rightarrow B$ por $A \rightarrow \alpha$

- Exemplo:

$$G_9 = (\{S, A, B, C\}, \{a\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow \mathbf{a}A\mathbf{a} \\ & A \rightarrow \mathbf{a} \mid S \end{aligned}$$

- Produções unitárias: $A \rightarrow \mathbf{a}$, $A \rightarrow S$
  - Gramáticas Simplificada:

$$G_9' = (\{S\}, \{a\}, P, S)$$

$$P: \quad S \rightarrow \mathbf{aaa} \mid \mathbf{a}S\mathbf{a}$$

Simplificações de GLCs

3. Produções unitárias: substituímos produções do tipo $A \rightarrow B$
   - Esse tipo de produção não adiciona informação em termos de geração de palavras.
   - Sempre que $B \rightarrow \alpha$, podemos substituir $A \rightarrow B$ por $A \rightarrow \alpha$

- Exemplo:

$$G_9 = (\{S, A, B, C\}, \{a\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow \mathbf{a}A\mathbf{a} \\ & A \rightarrow \mathbf{a} \mid S \end{aligned}$$

- Produções unitárias: $A \rightarrow \mathbf{a}$, $A \rightarrow S$
  - Gramáticas Simplificada:

$$G_9' = (\{S\}, \{a\}, P, S)$$

$$P: \quad S \rightarrow \mathbf{aaa} \mid \mathbf{a}S\mathbf{a}$$

Roteiro

FNC

Definição

Uma **GLC** $G = (V, \Sigma, P, S)$ é dita na Forma Normal de Chomsky (FNC) se todas as regras de produção são da forma:

$$A \rightarrow BC \quad \text{ou} \quad A \rightarrow a$$

para $A, B, C \in V$, $a \in \Sigma$

Caso particular:

- Quando $\mathcal{E} \in L(G)$ permite-se $S \rightarrow \mathcal{E}$, e $B, C \in (V \setminus \{S\})$

FNC

Teorema

Qualquer **LLC** pode ser gerada por uma **GLC** na Forma Normal de Chomsky (FNC).

Existe um algoritmo para converter uma **GLC** para a FNC:

- Regras que violam as condições são substituídas por regras equivalentes.

Não vamos ver a prova.

FNC

Teorema

Qualquer **LLC** pode ser gerada por uma **GLC** na Forma Normal de Chomsky (FNC).

Existe um algoritmo para converter uma **GLC** para a FNC:

- Regras que violam as condições são substituídas por regras equivalentes.

Não vamos ver a prova.

FNC

Exemplo: $L(G_2) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

$$G_2 = (\{S, S_1, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \to S_1 \mid \mathcal{E} \\ & S_1 \to AC \mid AB \\ & A \to \mathbf{a} \\ & B \to \mathbf{b} \\ & C \to S_1 B \end{aligned}$$

Derivações: $aabb$

$$S \Rightarrow S_1 \Rightarrow AC \Rightarrow aC \Rightarrow aS_1B \Rightarrow aABB \Rightarrow aaBB \Rightarrow aabB \Rightarrow aabb$$

FNC: $A \to BC$ ou $A \to a$ com $A, B, C \in V$, $a \in \Sigma$

FNC

Exemplo: $L(G_2) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

$$G_2 = (\{S, S_1, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \to S_1 \mid \mathcal{E} \\ & S_1 \to AC \mid AB \\ & A \to \mathbf{a} \\ & B \to \mathbf{b} \\ & C \to S_1 B \end{aligned}$$

Derivações: *aabb*

$$S \Rightarrow S_1 \Rightarrow AC \Rightarrow aC \Rightarrow aS_1B \Rightarrow aABB \Rightarrow aaBB \Rightarrow aabB \Rightarrow aabb$$

FNC: $A \to BC$ ou $A \to a$ com $A, B, C \in V$, $a \in \Sigma$

FNC

Exemplo: $L(G_2) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

$$G_2 = (\{S, S_1, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow S_1 \mid \mathcal{E} \\ & S_1 \rightarrow AC \mid AB \\ & A \rightarrow \mathbf{a} \\ & B \rightarrow \mathbf{b} \\ & C \rightarrow S_1 B \end{aligned}$$

Derivações: *aabb*

$$S \Rightarrow S_1 \Rightarrow AC \Rightarrow aC \Rightarrow aS_1B \Rightarrow aABB \Rightarrow aaBB \Rightarrow aabB \Rightarrow aabb$$

FNC: $A \rightarrow BC$ ou $A \rightarrow a$ com $A, B, C \in V$, $a \in \Sigma$

FNC

Exemplo: $L(G_2) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

$$G_2 = (\{S, S_1, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow S_1 \mid \mathcal{E} \\ & S_1 \rightarrow AC \mid AB \\ & A \rightarrow \mathbf{a} \\ & B \rightarrow \mathbf{b} \\ & C \rightarrow S_1 B \end{aligned}$$

Derivações: *aabb*

$$S \Rightarrow S_1 \Rightarrow AC \Rightarrow aC \Rightarrow aS_1B \Rightarrow aABB \Rightarrow aaBB \Rightarrow aabB \Rightarrow aabb$$

FNC: $A \rightarrow BC$ ou $A \rightarrow a$ com $A, B, C \in V$, $a \in \Sigma$

FNC

Exemplo: $L(G_2) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

$$G_2 = (\{S, S_1, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow S_1 \mid \mathcal{E} \\ & S_1 \rightarrow AC \mid AB \\ & A \rightarrow \mathbf{a} \\ & B \rightarrow \mathbf{b} \\ & C \rightarrow S_1 B \end{aligned}$$

Derivações: $aabb$

$$S \Rightarrow S_1 \Rightarrow AC \Rightarrow aC \Rightarrow aS_1B \Rightarrow aABB \Rightarrow aaBB \Rightarrow aabB \Rightarrow aabb$$

FNC: $A \rightarrow BC$ ou $A \rightarrow a$ com $A, B, C \in V$, $a \in \Sigma$

FNC

Exemplo: $L(G_2) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

$$G_2 = (\{S, S_1, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \to S_1 \mid \mathcal{E} \\ & S_1 \to AC \mid AB \\ & A \to \mathbf{a} \\ & B \to \mathbf{b} \\ & C \to S_1 B \end{aligned}$$

Derivações: *aabb*

$$S \Rightarrow S_1 \Rightarrow AC \Rightarrow aC \Rightarrow aS_1B \Rightarrow aABB \Rightarrow aaBB \Rightarrow aabB \Rightarrow aabb$$

FNC: $A \to BC$ ou $A \to a$ com $A, B, C \in V$, $a \in \Sigma$

FNC

Exemplo: $L(G_2) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

$$G_2 = (\{S, S_1, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \to S_1 \mid \mathcal{E} \\ & S_1 \to AC \mid AB \\ & A \to \mathbf{a} \\ & B \to \mathbf{b} \\ & C \to S_1 B \end{aligned}$$

Derivações: *aabb*

$$S \Rightarrow S_1 \Rightarrow AC \Rightarrow aC \Rightarrow aS_1B \Rightarrow aABB \Rightarrow aaBB \Rightarrow aabB \Rightarrow aabb$$

FNC: $A \to BC$ ou $A \to a$ com $A, B, C \in V$, $a \in \Sigma$

FNC

Exemplo: $L(G_2) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

$$G_2 = (\{S, S_1, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow S_1 \mid \mathcal{E} \\ & S_1 \rightarrow AC \mid AB \\ & A \rightarrow \mathbf{a} \\ & B \rightarrow \mathbf{b} \\ & C \rightarrow S_1 B \end{aligned}$$

Derivações: *aabb*

$$S \Rightarrow S_1 \Rightarrow AC \Rightarrow aC \Rightarrow aS_1B \Rightarrow aABB \Rightarrow aaBB \Rightarrow aabB \Rightarrow aabb$$

FNC: $A \rightarrow BC$ ou $A \rightarrow a$ com $A, B, C \in V$, $a \in \Sigma$

FNC

Exemplo: $L(G_2) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

$$G_2 = (\{S, S_1, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow S_1 \mid \mathcal{E} \\ & S_1 \rightarrow AC \mid AB \\ & A \rightarrow \mathbf{a} \\ & B \rightarrow \mathbf{b} \\ & C \rightarrow S_1 B \end{aligned}$$

Derivações: *aabb*

$$S \Rightarrow S_1 \Rightarrow AC \Rightarrow aC \Rightarrow aS_1B \Rightarrow aABB \Rightarrow aaBB \Rightarrow aabB \Rightarrow aabb$$

FNC: $A \rightarrow BC$ ou $A \rightarrow a$ com $A, B, C \in V$, $a \in \Sigma$

FNC

Exemplo: $L(G_2) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

$$G_2 = (\{S, S_1, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow S_1 \mid \mathcal{E} \\ & S_1 \rightarrow AC \mid AB \\ & A \rightarrow \mathbf{a} \\ & B \rightarrow \mathbf{b} \\ & C \rightarrow S_1 B \end{aligned}$$

Derivações: *aabb*

$$S \Rightarrow S_1 \Rightarrow AC \Rightarrow aC \Rightarrow aS_1B \Rightarrow aABB \Rightarrow aaBB \Rightarrow aabB \Rightarrow aabb$$

FNC: $A \rightarrow BC$ ou $A \rightarrow a$ com $A, B, C \in V$, $a \in \Sigma$

FNC

Exemplo: $L(G_2) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

$$G_2 = (\{S, S_1, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \to S_1 \mid \mathcal{E} \\ & S_1 \to AC \mid AB \\ & A \to \mathbf{a} \\ & B \to \mathbf{b} \\ & C \to S_1 B \end{aligned}$$

Derivações: *aabb*

$$S \Rightarrow S_1 \Rightarrow AC \Rightarrow aC \Rightarrow aS_1B \Rightarrow aABB \Rightarrow aaBB \Rightarrow aabB \Rightarrow aabb$$

FNC: $A \to BC$ ou $A \to a$ com $A, B, C \in V$, $a \in \Sigma$

FNC

Noam Chomsky propôs as **GLC** como (potenciais) modelos para linguagens naturais.

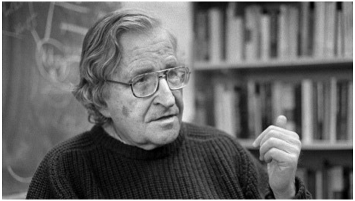


Figura: Noam Chomsky

- A FNC não parece ter usos importantes em linguística natural, contudo, desempenha um papel fundamental nas linguagens artificiais.

https://en.wikipedia.org/wiki/Noam_Chomsky

Roteiro

1. Linguagens Livres de Contexto
   - Gramáticas Livres de Contexto
   - Árvore de Derivação
   - Ambiguidade
2. Simplificações e Formas Normais
   - Simplificações de GLCs
   - Forma Normal de Chomsky
   - Forma Normal de Greibach
3. Referências

FNG

Definição

Uma **GLC** $G = (V, \Sigma, P, S)$ é dita na Forma Normal de Greibach (FNG) se todas as regras de produção são da forma:

$$A \to a\alpha$$

para $A \in V$, $a \in \Sigma$ e $\alpha \in V^*$

Caso particular:

- Quando $\mathcal{E} \in L(G)$ permite-se $S \to \mathcal{E}$, e $S \notin \alpha$

FNG

Teorema

Qualquer **LLC** pode ser gerada por uma **GLC** na Forma Normal de Greibach (FNG).

Também existe um algoritmo para converter uma **GLC** para a FNG:

- Pode ser uma tarefa complexa
- FNC $\to$ FNG.

Não vamos ver a prova.

FNG

Teorema

Qualquer **LLC** pode ser gerada por uma **GLC** na Forma Normal de Greibach (FNG).

Também existe um algoritmo para converter uma **GLC** para a FNG:

- Pode ser uma tarefa complexa.
- FNC $\rightarrow$ FNG:

Não vamos ver a prova.

FNG

Teorema

Qualquer **LLC** pode ser gerada por uma **GLC** na Forma Normal de Greibach (FNG).

Também existe um algoritmo para converter uma **GLC** para a FNG:

- Pode ser uma tarefa complexa.
- FNC $\rightarrow$ FNG:
  - Podemos expandir as regras $A \rightarrow BC$ até obter $B \rightarrow b$ (um terminal).
  - O problema é que podem existir ciclos, do tipo $A \rightarrow BC$, $B \rightarrow AA$.

Não vamos ver a prova.

FNG

Teorema

Qualquer **LLC** pode ser gerada por uma **GLC** na Forma Normal de Greibach (FNG).

Também existe um algoritmo para converter uma **GLC** para a FNG:

- Pode ser uma tarefa complexa.
- FNC $\rightarrow$ FNG:
  - Podemos expandir as regras $A \rightarrow BC$ até obter $B \rightarrow b$ (um terminal).
  - O problema é que podem existir ciclos, do tipo $A \rightarrow BC$, $B \rightarrow AA$.

Não vamos ver a prova.

FNG

Teorema

Qualquer **LLC** pode ser gerada por uma **GLC** na Forma Normal de Greibach (FNG).

Também existe um algoritmo para converter uma **GLC** para a FNG:

- Pode ser uma tarefa complexa.
- FNC $\rightarrow$ FNG:
  - Podemos expandir as regras $A \rightarrow BC$ até obter $B \rightarrow b$ (um terminal).
  - O problema é que podem existir ciclos, do tipo $A \rightarrow BC$, $B \rightarrow AA$.

Não vamos ver a prova.

FNG

Exemplo: $L(G_2) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

$$G_2 = (\{S, S_1, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow S_1 \mid \mathcal{E} \\ & S_1 \rightarrow \mathbf{a} S_1 B \mid \mathbf{a} B \\ & B \rightarrow \mathbf{b} \end{aligned}$$

Derivações: $aabb$

$$S \Rightarrow S_1 \Rightarrow aS_1B \Rightarrow aaBB \Rightarrow aabB \Rightarrow aabb$$

FNG: $A \rightarrow a\alpha$ com $A \in V$, $a \in \Sigma$ e $\alpha \in V^*$

FNG

Exemplo: $L(G_2) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

$$G_2 = (\{S, S_1, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \to S_1 \mid \mathcal{E} \\ & S_1 \to \mathbf{a} S_1 B \mid \mathbf{a} B \\ & B \to \mathbf{b} \end{aligned}$$

Derivações: *aabb*

$$S \Rightarrow S_1 \Rightarrow aS_1B \Rightarrow aaBB \Rightarrow aabB \Rightarrow aabb$$

FNG: $A \to a\alpha$ com $A \in V$, $a \in \Sigma$ e $\alpha \in V^*$

FNG

Exemplo: $L(G_2) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

$$G_2 = (\{S, S_1, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \to S_1 \mid \mathcal{E} \\ & S_1 \to \mathbf{a}S_1B \mid \mathbf{a}B \\ & B \to \mathbf{b} \end{aligned}$$

Derivações: *aabb*

$$S \Rightarrow S_1 \Rightarrow aS_1B \Rightarrow aaBB \Rightarrow aabB \Rightarrow aabb$$

FNG: $A \to a\alpha$ com $A \in V$, $a \in \Sigma$ e $\alpha \in V^*$

FNG

Exemplo: $L(G_2) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

$$G_2 = (\{S, S_1, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow S_1 \mid \mathcal{E} \\ & S_1 \rightarrow \mathbf{a} S_1 B \mid \mathbf{a} B \\ & B \rightarrow \mathbf{b} \end{aligned}$$

Derivações: *aabb*

$$S \Rightarrow S_1 \Rightarrow aS_1B \Rightarrow aaBB \Rightarrow aabB \Rightarrow aabb$$

FNG: $A \rightarrow a\alpha$ com $A \in V$, $a \in \Sigma$ e $\alpha \in V^*$

FNG

Exemplo: $L(G_2) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

$$G_2 = (\{S, S_1, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow S_1 \mid \mathcal{E} \\ & S_1 \rightarrow \mathbf{a} S_1 B \mid \mathbf{a} B \\ & B \rightarrow \mathbf{b} \end{aligned}$$

Derivações: *aabb*

$$S \Rightarrow S_1 \Rightarrow aS_1B \Rightarrow aaBB \Rightarrow aabB \Rightarrow aabb$$

FNG: $A \rightarrow a\alpha$ com $A \in V$, $a \in \Sigma$ e $\alpha \in V^*$

FNG

Exemplo: $L(G_2) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

$$G_2 = (\{S, S_1, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \to S_1 \mid \mathcal{E} \\ & S_1 \to \mathbf{a} S_1 B \mid \mathbf{a} B \\ & B \to \mathbf{b} \end{aligned}$$

Derivações: *aabb*

$$S \Rightarrow S_1 \Rightarrow aS_1B \Rightarrow aaBB \Rightarrow aabB \Rightarrow aabb$$

FNG: $A \to a\alpha$ com $A \in V$, $a \in \Sigma$ e $\alpha \in V^*$

FNG

Exemplo: $L(G_2) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

$$G_2 = (\{S, S_1, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \to S_1 \mid \mathcal{E} \\ & S_1 \to \mathbf{a}S_1B \mid \mathbf{a}B \\ & B \to \mathbf{b} \end{aligned}$$

Derivações: *aabb*

$$S \Rightarrow S_1 \Rightarrow aS_1B \Rightarrow aaBB \Rightarrow aabB \Rightarrow aabb$$

FNG: $A \to a\alpha$ com $A \in V$, $a \in \Sigma$ e $\alpha \in V^*$

FNG

Exemplo: $L(G_2) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

$$G_2 = (\{S, S_1, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \to S_1 \mid \mathcal{E} \\ & S_1 \to \mathbf{a} S_1 B \mid \mathbf{a} B \\ & B \to \mathbf{b} \end{aligned}$$

Derivações: *aabb*

$$S \Rightarrow S_1 \Rightarrow aS_1B \Rightarrow aaBB \Rightarrow aabB \Rightarrow aabb$$

FNG: $A \to a\alpha$ com $A \in V$, $a \in \Sigma$ e $\alpha \in V^*$

FNG

Introduzida por Sheila Greibach:

Figura: Sheila Greibach

- A FNG tem várias consequências interessantes.

https://en.wikipedia.org/wiki/Sheila_Greibach

FNG

Número de produções:

- Uma característica interessante da FNG é que cada produção introduz exatamente um símbolo terminal por vez[1]
  - No exemplo anterior:

$$S \Rightarrow S_1 \Rightarrow aS_1B \Rightarrow aaBB \Rightarrow aabB \Rightarrow aabb$$

- Como consequência, o número de derivações de uma cadeia w, com $|w| = n$, é exatamente n.

[1] Com exceção da primeira quando $\mathcal{E} \in L(G)$.

FNG

Número de produções:

- Uma característica interessante da FNG é que cada produção introduz exatamente um símbolo terminal por vez[1]
  - No exemplo anterior:

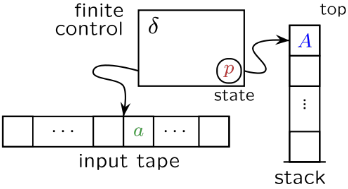
$$S \Rightarrow S_1 \Rightarrow aS_1B \Rightarrow aaBB \Rightarrow aabB \Rightarrow aabb$$

- Como consequência, o número de derivações de uma cadeia w, com $|w| = n$, é exatamente n.

[1] Com exceção da primeira quando $\mathcal{E} \in L(G)$.

Automatos de Pilha:

- Além disso, a FNG será útil para estabelecer a equivalência entre as **GLC** e os Autômatos de Pilha.



Vamos ver Autômatos de Pilha nas próximas aulas . . . .

Fim

Dúvidas?

Roteiro

Referências

Referências:

1. *"Introdução à Teoria da Computação"* de M. Sipser, 2007.
2. *"Linguagens formais e autômatos"* de Paulo F. B. Menezes, 2002.
3. Materiais adaptados dos slides do Prof. Evandro E. S. Ruiz, da USP.