10 pratybos

2020-04-17

---

19. Ištirkite teigiamų skaitinių eilučių konvergavimą naudodami dalines sumas arba būtinąją konvergavimo sąlygą:

Skaičių eilutė $S=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yra begalinė sekos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ narių suma. Ji apibrėžiama kaip dalinių sumų $S_k=\sum_{n=1}^{k} a_n$ sekos riba $S=\lim_{k\to\infty} S_n$. Jei ši riba baigtinė, sakoma, kad eilutė konverguoja, priešingu atveju (riba begalybė arba neegzistuoja) – diverguoja.

Būtina eilutės konvergavimo sąlyga (pirmiausias dalykas, ką reiktų patikrinti):
jei eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguoja, tai $a_n \to 0$, kai $n\to\infty$ (bet ne atvirkščiai!).

$S_k=b_1+b_1 q+\ldots b_1 q^{k-1}=\begin{cases} b_1\dfrac{1-q^k}{1-q}, q\neq 1 \\ b_1 k, q=1\end{cases}$ - baigtinės (k dėmenų) geometrinės progresijos suma. $S=b_1+b_1 q+\ldots+b_1 q^{k-1}+\ldots=\dfrac{b_1}{1-q}, |q|<1$ - nykstamos ($q^k\to 0, k\to\infty$) geometrinės progresijos suma.

Plačiau žr. prof. G. Stepanausko konspektą (Skaičių eilutės).
http://klevas.mif.vu.lt/~stepanauskas/MPS/Eilut%c4%97s.pdf)

---

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{100}$

Kadangi $a_n=\dfrac{n}{100}\to+\infty$, tai nepatenkinta būtinoji konvergavimo sąlyga ir eilutė diverguoja.

---

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

Nors būtinoji konvergavimo sąlyga $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$ ir patenkinta, bet ji nėra pakankama (eilutė gali tiek konverguoti, tiek diverguoti), todėl turime tirti toliau.

Rasime dalinių sumų sekos ribą. Pasinaudojus baigtinės geometrinės progresijos formule gauname, kad dalinės sumos $S_k=\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^k}\rightarrow 1=S, k\rightarrow\infty$ - dalinių sumų sekos riba (eilutės suma) yra baigtinė, todėl eilutė konverguoja.

---

c1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

Kadangi $a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n+1-n}=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\rightarrow+\infty, n\rightarrow\infty,$ tai nepatenkinta būtinoji konvergavimo sąlyga ir eilutė diverguoja.

---

c2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

Kadangi $a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\rightarrow 0, n\rightarrow\infty,$ tai būtinoji konvergavimo sąlyga patenkina ir reikia tirti toliau.

Rasime dalinių sumų sekos ribą. Pirmiausia, analogiškai kaip c1) atveju, galime užrašyti:
$a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1-n}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}.$ Todėl
$S_k=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{k-1}+a_k=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\ldots+(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})+(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=$
$=-\sqrt{1}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{4}-\ldots-\sqrt{k-1}+\sqrt{k}-\sqrt{k}+\sqrt{k+1}=\sqrt{k+1}-1\rightarrow+\infty, k\rightarrow\infty.$
Tai vienas iš nedaugelio atvejų (progresijos, $a_n=f(n)-f(n+1)$ ir pan.), kai galima nesunkiai rasti dalinių sumų seką). Kadangi dalinių sumų sekos riba (eilutės suma) begalinė, tai eilutė diverguoja.

---

20. Ištirkite teigiamų skaitinių eilučių konvergavimą naudodami palyginimo požymius:

Teigiamoms eilutėms $a_n\geqslant 0$ (praktiškai $a_n>0$, nes narius, lygius 0, galima išmesti). Todėl:
1) dalinių sumų seka $S_n=S_{n-1}+a_n$ yra didėjanti, todėl jos riba visada egzistuoja (arba baigtinė, arba begalinė). Neteigiamoms eilutėms dalinių sumų sekos riba gali ir neegzistuoti;
2) galima naudoti teigiamoms eilutėms tinkamus požymius (Palyginimo, žr. prof. Stepanausko konspekto 10 psl., Koši ir Dalambero (14-16 psl.) bei kt.).

---

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

Būtina sąlyga akivaizdžiai patenkinta, tiriame toliau.

1) būdas. Pirmiausia įrodysime reikalingą pagalbinę nelygybę $x>\ln(1+x), x>0$. Pažymėkime $f(x)=x-\ln(1+x)$. Tada $f'(x)>0, x>0$ (parodykite, užduotis **ND**), todėl funkcija yra didėjanti ir $f(x)>f(0), x>0 \Rightarrow x-\ln(1+x)>0, x>0$. Pasinaudoję nelygybe gauname:
$a_n=\frac{1}{n}>\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n=b_n$. ”Mažesnė” eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguoja, nes diverguoja jos dalinių sumų seka
$S_k=b_1+\ldots+b_k=\ln 2-\ln 1+\ln 3-\ln 2+\ldots+\ln k-\ln(k-1)+\ln(k+1)-\ln k=$
$=\ln(k+1)-\ln 1=\ln(k+1)\to+\infty, k\to\infty$. Todėl pagal eilučių palyginimo požymį diverguoja ir “didesnė” eilutė.

2) būdas. Pirmiausia įvertinsime dalinių sumų seką $S_k=a_1+\ldots+a_k$ iš apačios:

jei $n=2^1+1,\ldots,2^2 (n=3,4)$: $\frac{1}{n}\geqslant\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$;

jei $n=2^2+1,\ldots,2^3 (n=5,6,7,8)$: $\frac{1}{n}\geqslant\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$;

jei $n=2^3+1,\ldots,2^4 (n=9,\ldots,16)$: $\frac{1}{n}\geqslant\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$;

…

jei $n=2^{m-1}+1,\ldots,2^m$: $\frac{1}{n}\geqslant\frac{1}{2^m}$. Todėl

$$S_{2^m}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^m}\right)$$

$$\Rightarrow S_{2^m}\geqslant 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^m}+\ldots+\frac{1}{2^m}\right)$$

$$\Rightarrow S_{2^m}\geqslant 1+\frac{1}{2}+2\frac{1}{4}+4\frac{1}{8}+8\frac{1}{16}+\ldots+2^{m-1}\frac{1}{2^m}=1+\frac{m}{2}.$$

Naudodami sekų palyginimo požymį, gauname, kad dalinių sumų sekos S_k posekis $S_{2^m}\to+\infty, m\to\infty$. Todėl ir visos dalinių sumų sekos S_k riba negali būti baigtinė. Kadangi teigiamoms eilutėms galimi tik du atvejai: S_k riba yra arba baigtinė, arba begalinė, gauname, kad ir $S_k\to+\infty, k\to\infty$, todėl mūsų eilutė $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverguoja.

---

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$

Kai $\alpha<0, a_n=\frac{1}{n^{\alpha}}=n^{-\alpha}\to+\infty, n\to\infty$ ir, kai $\alpha=0, a_n=\frac{1}{n^{\alpha}}=1$ - abiem atvejais nepatenkinta būtina konvergavimo sąlyga ir todėl mūsų eilutė diverguoja, kai $\alpha\leqslant 0$.

Kai $0<\alpha\leqslant 1$, tai $a_n=\frac{1}{n^{\alpha}}\geqslant\frac{1}{n}$ ir, kadangi diverguoja “mažesnė” eilutė $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, tai pagal eilučių palyginimo požymį diverguoja ir mūsų “didesnė” eilutė.

Sudėtingiausias atvejis yra $\alpha>1$. Parodysime, kad tokiu atveju mūsų eilutė konverguoja. Tam įvertinsime dalinių sumų seką S_k iš viršaus. Paprastumo dėlei tarkime, kad $k=2^m-1$ (jei $k<2^m-1$, tai $S_k<S_{2^m-1}$ - tiesiog dešinėje pusėje pridedame papildomų narių).

Jei $n=2^1,\ldots,2^2-1(n=2,3):\frac{1}{n^\alpha}\leqslant\frac{1}{2^\alpha}$;

jei $n=2^2,\ldots,2^3-1(n=4,5,6,7):\frac{1}{n^\alpha}\leqslant\frac{1}{2^{2\alpha}}$;

…

jei $n=2^{m-1},\ldots,2^m-1:\frac{1}{n^\alpha}\leqslant\frac{1}{2^{m\alpha}}$. Todėl

$$S_k=S_{2^m}=1+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{6^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{8^\alpha}+\ldots+\frac{1}{15^\alpha}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{(2^{m-1})^\alpha}+\ldots+\frac{1}{(2^m-1)^\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow S_k\leqslant 1+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{8^\alpha}+\ldots+\frac{1}{8^\alpha}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{(2^{m-1})^\alpha}+\ldots+\frac{1}{(2^{m-1})^\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow S_k\leqslant 1+2\frac{1}{2^\alpha}+4\frac{1}{2^{2\alpha}}+8\frac{1}{2^{3\alpha}}+\ldots+2^{m-1}\frac{1}{2^{(m-1)\alpha}}$$

$$\Rightarrow S_k\leqslant 1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\frac{1}{2^{2\alpha-2}}+\frac{1}{2^{3\alpha-3}}+\ldots+\frac{1}{2^{(m-1)\alpha-(m-1)}}=1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{m-1}$$

Dešinė nelygybės pusė yra geometrinės progresijos dalinė suma. Kadangi progresija konverguoja (yra konverguojanti eilutė), kai progresijos vardiklis $\frac{1}{2^{\alpha-1}}<1$ (o taip ir bus, kai $\alpha>1$), tai progresijos dalinių sumų seka (nelygybės dešinė pusė) yra aprėžta. Todėl ir mūsų eilutės dalinių sumų seka S_k yra aprėžta bei mūsų eilutė konverguoja (kai $\alpha>1$).

---

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$

Būtina konvergavimo sąlyga patenkinta.

Kadangi $a_n=\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$ ir “mažesnė” eilutė $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverguoja, tai pagal eilučių palyginimo požymį diverguoja ir mūsų eilutė.

---

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$

Būtina konvergavimo sąlyga patenkinta.

Kadangi $a_n=\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2^n}$ ir “didesnė” eilutė (nykstama geometrinė progresija) konverguoja, tai pagal eilučių palyginimo požymį konverguoja ir mūsų eilutė.

---

21. Ištirkite teigiamų skaitinių eilučių konvergavimą naudodami Dalambero ir Koši požymius:

---

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$

Būtina konvergavimo sąlyga patenkinta.

Kadangi $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n+1}{2^{n+1}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2^n}}{2+\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1$ - remiantis Dalambero požymiu eilutė konverguoja. Papildomai ištirsime eilutės konvergavimą naudodami Koši požymį:

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2^n\left(1+\frac{1}{2^n}\right)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2} < 1$ - taip pat gauname, kad konverguoja.

---

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

Būtina konvergavimo sąlyga patenkinta: $a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\dots\frac{n-1}{n}\right)\frac{n}{n} \leqslant \frac{1}{n} \to 0, n\to\infty.$

Kadangi $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\,n^n}{(n+1)^{n+1}n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1$ - remiantis Dalambero požymiu eilutė konverguoja. Papildomai ištirsime eilutės konvergavimą naudodami Koši požymį (ir pasinaudosime Stirlingo formule $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$):

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}\frac{n}{\mathrm{e}}}{n} = \lim_{n\to\infty} (2\pi)^{\frac{1}{2n}}\left(\sqrt[n]{n}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\mathrm{e}} = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1$ - taip pat gauname, kad konverguoja.