ЗМІСТ

3. ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ ПЛАНУВАННЯ ОПЕРАЦІЇ..4

4 ЕЛЕКТРОННА ТАБЛИЦЯ MICROSOFT EXCEL 18

5 РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ЗАСОБАМИ MICROSOFT EXCEL...21

5.1 ЗМІСТОВНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ...21

5.2. МАТЕМАТИЧНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ...21

5.3. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЗАСОБАМИ MICROSOFT EXCEL.......................................22

5.4. ЗНАХОДЖЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ 24

ЗА ДОПОМОГОЮ ПРОЦЕДУРИ ПОШУКУ РОЗВ'ЯЗКУ 24

5.5. ПІДСУМКОВІ ПОВІДОМЛЕННЯ ПРОЦЕДУРИ ПОШУКУ РОЗВ'ЯЗКУ 26

6. ПОСТОПТИМАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ....................27

6.1. ЗМІСТОВНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ...27

6.2. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ 28

6.3. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАСОБАМИ MICROSOFT EXCEL 28

6.4. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ 31

6.5. ВИЗНАЧЕННЯ ЦІННОСТІ РЕСУРСІВ...34

6.6. ДІАПАЗОНИ СТІЙКОСТІ 36

6.6.1. Зміна компонентів вектора обмежень.. 36

6.6.2. Зміна коефіцієнтів цільової функції 41

6.6.3. Результати розв'язання і постоптимального аналізу задачі 44

6.6.4. Деякі особливості проведення постоптимального аналізу задач засобами MICROSOFT EXCEL.. 46

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ...55

***ДОДАТОК*. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ТЕОРІЇ ДВОЇСТОСТІ..56**

3. ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ ПЛАНУВАННЯ ОПЕРАЦІЇ

Номер Вашого завдання (з планування операцій) відповідає Вашому порядковому номеру у списку групи. У кожному завданні варіанти значень величин α і α вибираються так:

Варіанти

1. α = , β = . для гр. ІС-31
2. α = , β = . для гр. ІС-32
3. α = , β = . для гр. ІС-33

1. Вироби трьох типів послідовно обробляють на двох верстатах. Час обробки одного виробу кожного типу на кожному з верстатів наведено в табл. 3.1. Витрати на виробництво одного виробу кожного типу визначають як величини, прямо пропорційні часу використання верстатів (у машино-год). Вартість машино-години складає 10 ум.од. для верстата 1 і 15 ум.од. для верстата 2. Припустимий час використання верстатів для обробки виробів усіх типів обмежено такими значеннями: 500 машино-год для верстата 1 і 380 машино-год для верстата 2. Мінімальна добова норма випуску виробів 2 і 3 складає α і β штук відповідно. Ціни на вироби типів 1,2 і 3 дорівнюють 85, 70 і 45 ум.од. відповідно.

Сформулюйте для наведених умов задачу максимізації сумарного чистого прибутку.

Таблиця 3.1

Верстат	*Час обробки одного виробу, хв*		
	Тип 1	Тип 2	Тип 3
1	2	3	4
2	3	2	1

Варіанти:

1. α = 50 шт., β = 70 шт.
2. α = 9000 шт., β = 70 шт.
3. α = 50 шт., β = 80 шт.
4. α = 9000 шт., β = 80 шт.

2. Підприємство випускає радіоприймачі моделей *A*, *B*, *C*, причому кожну модель виробляють на окремій технологічній лінії. Відомо, що добовий обсяг виробництва першої лінії — 60 виробів, третьої лінії — 75 виробів, на добовий обсяг виробництва другої лінії обмежень немає. Мінімальна добова норма випуску радіоприймачів моделі *A* складає 25 шт., моделі *B* — 40 шт. На радіоприймач моделі *A* витрачають 10 однотипних елементів, моделі *B* — 8 таких елементів, моделі *C* — 6 елементів. Максимальний добовий запас елементів — β штук. Прибуток від реалізації моделі *A* — α одиниць вартості, моделі *B* — 20 од. вартості, моделі *C* —10 од. вартості.

Визначте оптимальні добові обсяги виробництва всіх моделей.

Варіанти:

1. α = 30 од. вартості, β = 800 шт.

2. α = 30 од. вартості, β = 1000 шт.

3. α = 24 од. вартості, β = 850 шт.

4. α = 24 од. вартості, β = 1050 шт.

3. Транспортна компанія для перевезення інжиру з Багдада в Мекку використовує мулів, а також одногорбих і двогорбих верблюдів. Двогорбий верблюд може перевезти 1000 фунтів, одногорбий — 500 фунтів, а мул — 300 фунтів. За один перехід двогорбий верблюд споживає 3 купи сіна і 40 галонів води, одногорбий верблюд — 2 купи сіна і 30 галонів води, мул —1 купу сіна і 10 галонів води. Пункти постачання компанії, розташовані в різних оазисах уздовж шляху, можуть видати не більш 900 галонів води і 35 куп сіна. Верблюдів і мулів орендують у пастуха біля Багдада, орендна плата дорівнює α піастрам за двогорбого верблюда, 5 піастрам за одногорбого і 4 піастрам за мула.

Визначте, скільки треба використати верблюдів і мулів для мінімізації орендної плати пастуху, якщо компанія повинна перевезти β фунтів інжиру з Багдада в Мекку?

Варіанти:

1. α = 8 піастрів, β = 10000 фунтів.

2. α = 12 піастрів, β = 10000 фунтів.

3. α = 8 піастрів, β = 8000 фунтів.

4. α = 12 піастрів, β = 8000 фунтів.

4. Фірма займається продажем деякої продукції. В бюджеті витрати на рекламу обмежено величиною β умовних одиниць на місяць. Кожна хвилина радіореклами коштує 10 ум.од., телереклами — 100 ум.од., реклами по мережі мовлення метрополітену — 5 ум.од. Фірма хотіла б використовувати радіомережу вдвічі частіше, ніж мережу телебачення. Досвід показав, що обсяг збуту, який забезпечує кожна хвилина телереклами, у α разів більше від обсягу збуту, що забезпечує 1 хв реклами в метро, а обсяг збуту, що забезпечує кожна хвилина радіореклами, вп'ятеро більше від обсягу збуту, що забезпечує 1 хв реклами в метро. Також для того, щоб на рекламований товар звернули увагу, необхідно, щоб час реклами в сумі складав не менше 50 хв.

Визначте оптимальний розподіл коштів, які відпускають щомісяця на радіо-, телерекламу і на рекламу в метрополітені.

Варіанти:

1. α = 25, β = 5000 од. вартості.

2. α = 12, β = 5000 од. вартості.

3. α = 25, β = 1600 од. вартості.

4. α = 12, β = 1600 од. вартості.

5. Процес виготовлення трьох видів промислових виробів складається з послідовної обробки кожного з них на двох верстатах. Час використання кожного з верстатів — не більше 10 год на добу. Мінімальна добова норма випуску виробів першого виду — 1 шт., виробів третього виду — 2 шт. Час обробки й прибуток від продажу одного виробу наведено в табл. 3.2.

Знайдіть оптимальні обсяги виробництва виробів кожного виду.

Таблиця 3.2

Виріб	*Час обробки одного виробу, хв*		*Питомий прибуток,ум.од.*
	Верстат 1	*Верстат 2*	
1	10	6	β
2	6	20	α
3	10	10	5

Варіанти:

1. α = 3 од. вартості, β = 2 од. вартості.
2. α = 4 од. вартості, β = 2 од. вартості.
3. α = 3 од. вартості, β = 6 од. вартості.
4. α = 4 од. вартості, β = 6 од. вартості.

6. На взуттєвій фабриці можна робити три види взуття: чоловіче, жіноче і дитяче. На кожну пару чоловічого, жіночого і дитячого взуття потрібно відповідно клею 20, 15, і 10 г, шкіри — 4, 2 і 1 дм^2. Вартість чоловічого, жіночого і дитячого взуття з урахуванням усіх робіт відповідно дорівнює 200, α і 100 од. вартості. Запаси клею складають 3 т, шкіри — β м^2. Досвід показав, що сумарний обсяг виробництва чоловічого і дитячого взуття, не перевищує обсягу випуску жіночого взуття.

Визначте, яку кількість чоловічого, жіночого і дитячого взуття потрібно випускати, щоб вартість випущеної продукції була максимальна.

Примітка: усі наявні ресурси необхідно використати повністю.

Варіанти:

1. α = 3 од. вартості, β = 2 од. вартості.
2. α = 4 од. вартості, β = 2 од. вартості.
3. α = 3 од. вартості, β = 6 од. вартості.
4. α = 4 од. вартості, β = 6 од. вартості.

7. Кондитерська фабрика імені 100-річчя НТУУ “КПІ” випускає цукерки трьох видів: “ММДО”, “ТАМОПЗ” і “ЕСКС”, причому у виготовленні кожного виду зайнято два види устаткування — М1 та М2. На кожну коробку цукерок “ММДО” іде 3 хв роботи устаткування М1 і 2 хв роботи М2. На кожну коробку цукерок “ТАМОПЗ” іде 2 хв роботи М1 і 3 хв роботи М2. На кожну коробку цукерок “ЕСКС” необхідно 1 хв роботи М1 і 2 хв роботи М2. Мінімальна добова норма випуску цукерок “ТАМОПЗ” — 80 коробок, “ЕСКС” — β коробок. Устаткування М1 можна використовувати тільки 8 год на добу, а М2 — 7 год. Прибуток від реалізації цукерок “ММДО” складає 20 ум.од., “ТАМОПЗ” — α умовних одиниць, а цукерок “ЕСКС” — 10 ум.од.

Визначте, яку кількість цукерок кожного виду потрібно випускати, щоб прибуток від їхньої реалізації був максимальним.

Варіанти:

1. α = 20 ум.од., β = 70 коробок.
2. α = 20 ум.од., β = 80 коробок.
3. α = 40 ум.од., β = 87 коробок.
4. α = 50 ум.од., β = 60 коробок.

8. На фермі заготовляють сіно, пшеницю й сою. Сіно дає α умовних одиниць прибутку на тонну, пшениця приносить 180 ум.од. прибутку на 100 бушелів, а одна тонна сої — 300 ум.од. прибутку. Для одержання 1 т сіна потрібно 1 акр землі, витрати 1 людино-год праці і не потрібно добрив. Для одержання 10 бушелів пшениці необхідно 8 акрів землі, 3

людино-год праці і 1 мішок добрив. Для одержання однієї тонни сої треба 9 акрів землі, 4 людино-год праці і 1 мішок добрив. Ферма має β акрів землі, 150 людино-год праці і 4 мішки добрив. Мінімальний добовий обсяг виробництва сіна складає 20 т, а пшениці — 40 бушелів.

Визначте, скільки сіна, пшениці й сої потрібно заготовити, щоб отриманий прибуток був максимальним?

Варіанти:

1. α = 60 ум.од., β = 400 акрів.
2. α = 60 ум.од., β = 300 акрів.
3. α = 80 ум.од., β = 400 акрів.
4. α = 90 ум.од., β = 300 акрів.

9. Авіакомпанія за замовленням армії на деякій ділянці повинна перевезти α осіб і β тонн багажу. У розпорядженні авіакомпанії знаходиться три типи літаків, які можна використовувати для перевезення. Літак першого типу перевозить 30 пасажирів, 2 т багажу і має екіпаж з 3 осіб. Літак другого типу перевозить 65 пасажирів, 4 т багажу і має екіпаж з 5 осіб. Літак третього типу перевозить 60 пасажирів, 3 т багажу і має екіпаж з 4 осіб. Для експлуатації одного літака першого типу необхідно 5000 ум.од., другого типу — 9000 ум.од., третього типу — 8000 ум.од. Дослідження, проведені авіакомпанією, показали, що для виконання замовлення необхідна така умова: на кожен рейс літака першого типу повинні приходитися два рейси літака другого типу.

Визначте, скільки треба використовувати літаків кожного типу, якщо для формування екіпажів літаків є не більше 60 осіб?

Варіанти:

1. α = 700 осіб, β = 20 т.
2. α = 700 осіб, β = 40 т.
3. α = 300 осіб, β = 20 т.
4. α = 350 осіб β = 20 т.

10. Невелика фірма з пошиття жіночого одягу спеціалізується на двох видах виробів (планове завдання з випуску виробів наведено в табл. 3.3.). У виготовленні кожного виду виробу використовують два типи швейних машинок.

Розподіл виготовлення виробів на різних швейних машинках так, щоб мінімізувати сумарні витрати при виконанні планового завдання.

Таблиця 3.3

Виріб	*Планове завдання з випуску виробів, шт.*
1	1000
2	2000

У табл. 3.4. наведено:

- витрати в одиницях вартості (витрати на одиницю k-го виробу (k = 1,2) при пошитті його на i-й швейній машинці (i = 1,2));
- ресурси (потужності) швейних машинок у машино-годинах;
- продуктивність (од/год) i-ї швейної машинки (i = 1,2) при виробництві k-го (k = 1,2) виду виробу;

Таблиця 3.4

Швейна машинка	*Ресурс (потужність), год*	*Видатки на одиницю виробу,ум.од.*		*Продуктивність, од / год*	
		Виріб 1	*Виріб 2*	*Виріб 1*	*Виріб 2*
1	700	α	7	2	4
2	β	5	5	1	2

Вказівка: як змінну візьміть час виготовлення кожного *k*-го виду виробу (k = 1,2) на i-й швейній машинці (i = 1,2).

Варіанти:

1. α = 10 од. вартості, β = 800 год.
2. α = 7 од. вартості, β = 800 год.
3. α = 10 од. вартості, β =1100 год.
4. α = 7 од. вартості, β = 1100 год. .

11. Бригаді виділили під засіви культур К1 і К2 дві ділянки землі площею 8 і 9 га відповідно. Ділянки відрізняються характером ґрунту. Середня врожайність із першої ділянки культури К1 дорівнює 16 ц/га, культури К2 — 32 ц/га. Середня врожайність із другої ділянки культури К1 дорівнює α ц/га, культури К2 — 30 ц/га. Реалізація одного центнера К1 приносить прибуток 25 ум.од., одного центнера К2 — 30 ум.од.

Визначте, скільки гектарів і на яких посівних площах потрібно відвести під кожну культуру, щоб прибуток від реалізації був максимальним, якщо обсяг збуту складає не більше β центнерів культури К1 і не менше 200 ц культури К2?

Варіанти:

1. α = 40 ц/га, β = 300 ц.
2. α = 25 ц/га, β = 150 ц.
3. α = 40 ц/га, β = 150 ц.
4. α = 25 ц/га, β = 300 ц.

12. Фірма, що випускає для армії шкіряні вироби, виготовляє продукцію типів *A*, *B* і *C* у комплекті 1:2:4. Кожен тип продукції повинен пройти принаймні дві з трьох виробничих ділянок, що називаються дубильною, розкрійною і завершальною. Робочий час кожної з цих ділянок протягом місяця має такі обмеження: дубильна ділянка — 320 год на місяць, розкрійна — 400 год на місяць , завершальна — β годин на місяць.

На виготовлення одиниці продукції типу *A* потрібно 0,2 год роботи дубильної ділянки, 0,6 год роботи розкрійної ділянки і 0 год завершальної ділянки. На виготовлення одиниці продукції типу *B* потрібно відповідно 0,3, 0,5 і 0 год. На виготовлення одиниці продукції типу *C* потрібно відповідно 0,4, 0,4 і 0,8 год. З урахуванням накладних витрат прибуток від кожної одиниці продукції складе α одиниць вартості для продукції типу *A*, 70 од. вартості для типу *B* і 100 од. вартості для типу *C*.

Визначте, за якої кількості виробів, що випускають, сумарний прибуток фірми буде максимальний.

Варіанти:

1. α = 60 од. вартості, β = 160 год.
2. α = 60 од. вартості, β = 80 год.
3. α = 70 од. вартості, β = 128 год.
4. α = 55 од. вартості, β = 256 год.

13. Фірма випускає ковбойські капелюхи трьох фасонів. Трудомісткість виготовлення капелюха першого фасону удвічі вище трудомісткості виготовлення капелюха другого фасону, а трудомісткість виготовлення капелюха третього фасону втричі вище трудомісткості виготовлення капелюха другого фасону. Якби фірма випускала тільки капелюхи першого фасону, добовий обсяг виробництва міг би скласти 500 капелюхів. Добовий обсяг збуту капелюхів усіх фасонів не перевищує β штук. Мінімальна добова норма випуску капелюхів першого фасону складає 30 шт., капелюхів другого фасону — 40 шт. Прибуток від продажу капелюха першого фасону складає α умовних одиниць, другого фасону — 5 ум.од, третього фасону — 10 ум.од.

Визначте, яку кількість капелюхів кожного фасону варто виготовляти, щоб максимізувати прибуток.

Варіанти:

1. α = 8 ум.од., β = 800 шт.
2. α = 12 ум.од., β = 800 шт.
3. α = 8 ум.од., β = 200 шт.
4. α = 12 ум.од., β = 200 шт.

14. Підприємство збирається випускати сплав, що містить 30 % міді, 30 % алюмінію. Можна купити вихідні сплави (руди) *A*, *B*, *C*, *D* склади й ціни яких наведено в табл. 3.5. Фірма, що продає сплави *A*, *B*, *C*, *D* ставить таку умову: сплаву *B* необхідно купити не менше сплаву *A*.

Визначте такий набір вихідних сплавів, за якого виходить необхідний сплав мінімальної вартості.

Таблиця 3.5

Метал	*A*	*B*	*C*	*D*	*Необхідний сплав*
Мідь	0,1	0,1	0,4	0,6	0,3
Алюміній	β	0,3	0,5	0,3	0,3
Вартість 1 кг	4,1	α	5,8	6,0	—

Примітка: у разі змішування інгредієнтів властивості сплаву є опуклими лінійними комбінаціями властивостей компонентів.

Варіанти:

1. α = 4,3 од. вартості, β = 0,3.
2. α = 4,3 од. вартості, β = 0,1.
3. α = 4,0 од. вартості, β = 0,1.
4. α = 4,3 од. вартості, β = 0,5.

15. Виробнича компанія випускає деякий продукт, що є сумішшю трьох інгредієнтів. Цей продукт повинен мати такі властивості:

- питома вага ≤ 1,00;
- зміст кислот ≥ α відсотків від об'єму;
- зміст абразивних матеріалів ≤ 10 відсотків від об'єму.

Ці три інгредієнти можна охарактеризувати в такий спосіб (табл. 3.6.):

Таблиця 3.6

Властивість	Інгредієнт 1	Інгредієнт 2	Інгредієнт 3
Питома вага	0,6	1,2	0,40
Частина кислот в об'ємі	0,4	0,2	0,80
Частина абразивних матеріалів в об'ємі	0,8	0,2	0,05

Визначте, яка повинна бути суміш, якщо вартість інгредієнтів дорівнює відповідно 2, β і 3 ум.од. за галон?

Примітка: у разі змішування інгредієнтів властивості суміші є опуклими лінійними комбінаціями властивостей компонентів.

Вказівка: як змінні узяти долі інгредієнтів у суміші (кількість інгредієнта *i* в одному галоні суміші).

Варіанти:

1. α = 4, β = 1 ум.од.
2. α = 4, β = 3 ум.од.
3. α = 70, β = 1 ум.од.
4. α = 70, β = 2 ум.од.

16. Підприємство може працювати за трьома технологічними процесами — Т1, Т2, Т3, причому кількість продукції, що випускається, за різними технологічними процесами за одиницю часу дорівнює 300, α і 200 шт. відповідно. У процесі виробництва враховують такі виробничі фактори: сировина 1, сировина 2 і електроенергія. Кількість продукції, що випускається за технологічним процесом Т1 повинна дорівнювати сумі обсягів продукції, що випускається за технологічними процесами Т2 і Т3. У зв'язку з обмеженими обсягами складських площ, сировини 1 повинно бути використано не менше 500 од. Витрати відповідних факторів при роботі за різними технологічними процесами протягом однієї одиниці часу наведено в табл.3.7.

Таблиця 3.7

Виробничий фактор	*Витрати за різних технологій, грн.*			*Ліміт*
	Т1	Т2	Т3	
Сировина 1	15	20	10	2000
Сировина 2	4	5	3	1000
Електроенергія	2	3	2	β

Знайдіть програму максимального випуску продукції.

Варіанти:

1. α = 260 шт., β = 300 од.
2. α = 300 шт., β = 400 од.
3. α = 300 шт., β = 250 од.
4. α = 300 шт., β = 200 од.

17. У механічному цеху є металорізальні верстати М1 і М2, на яких можна виготовити два типи деталей Д1 і Д2. Час виготовлення деталей кожним із верстатів у годинах, ресурси часу верстатів і планових завдань наведено в табл. 3.8.

Таблиця 3.8

Верстат	*Час виготовлення деталі, год*		*Ресурс часу,год*
	Д1	Д2	
М1	1	α	β
М2	2	4	2500
Необхідна кількість деталей, шт.	100	500	—

Розподіліть завдання між верстатами так, щоб загальний час роботи усіх верстатів був мінімальним.

Варіанти:

1. α = 3 год, β = 3000 год.
2. α = 3 год, β = 1000 год.
3. α = 2 год, β = 1600 год.
4. α = 2 год, β = 1300 год.

18. Завод випускає вироби трьох моделей — М1, М2, М3. Для їхнього виготовлення використовують два види ресурсів — *А* і *В*, запаси яких складають 4000 і 6000 од. відповідно. Витрати ресурсів на один виріб кожної моделі наведено у табл. 3.9.

Таблиця 3.9

Ресурс	*Витрата ресурсу на один виріб даної моделі*		
	М1	М2	М3
А	2	4	5
В	4	2	7

Аналіз умов збуту показує, що мінімальний попит на продукцію заводу складає 200, β і 150 виробів кожної моделі відповідно. Питомі прибутки від реалізації виробів моделей М1, М2 і М3 складають 30, α і 50 дол. відповідно.

Визначте обсяги випуску виробів кожної моделі, за яких прибуток буде максимальним.

Варіанти:

1. α = 10 ум.од., β = 300 виробів.
2. α = 20 ум.од., β = 600 виробів.
3. α = 20 ум.од., β = 300 виробів.
4. α = 10 ум.од., β = 400 виробів.

19. Механізми М1 і М2 можуть виконувати два види земельних робіт — *А* і *В*. У табл. 3.10 наведено ресурси робочого часу кожного механізму, продуктивність механізмів у разі виконання різних робіт і вартість однієї години роботи механізму.

Визначте завантаження устаткування, що забезпечує максимальний обсяг робіт за дотримання умови *А*:*В* = 1:2 і за виконання не менше β м^3 обсягу робіт *А*.

Таблиця 3.10

Механізм	*Продуктивність, м^3/год*		*Ресурс часу,год*
	А	*В*	
М1	α	20	200
М2	60	30	400

Варіанти:

1. α = 30 м^3/год, β = 6000 м^3.
2. α = 50 м^3/год, β = 6000 м^3.

3. α = 60 $м^3$/год, β = 6100 $м^3$.

4. α = 70 $м^3$/год, β = 6200 $м^3$.

20. Підприємство збирається випускати сплав, що містить 50 % бронзи, 50 % срібла. Можна купити вихідні сплави (руди) *A*, *B*, *C*, *D*, склади й ціни яких наведено в табл. 3.11. Фірма, що продає сплави *A*, *B*, *C*, *D* ставить таку умову: сплавів *B* і *C* (у сумі) повинно бути куплено не менше сплаву *A*.

Визначте такий набір вихідних сплавів, за якого виходить необхідний сплав мінімальної вартості.

Таблиця 3.11

Метал	*A*	*B*	*C*	*D*	*Необхідний сплав*
Бронза	β	0,7	0,4	0,7	0,5
Срібло	1-β	0,3	0,6	0,3	0,5
Вартість 1 кг	4,1	α	5,8	6,0	—

Примітка: у разі змішування інгредієнтів властивості сплаву є опуклими лінійними комбінаціями властивостей компонентів.

Варіанти:

1. α = 3,4 од. вартості, β = 0,2.
2. α = 3,4 од. вартості, β = 0,4.
3. α = 6,4 од. вартості, β = 0,2.
4. α = 6,4 од. вартості, β = 0,3.

21. Фірма має два підприємства, які виробляють однакову продукцію. Витрати виробництва й вартість сировини для всіх підприємств різні. Є два оптові склади, де споживачі купують продукцію фірми, причому ціна на неї на кожнім складі різна.

Знайдіть оптимальний план виробництва і розподілу продукції, виходячи з даних, наведених у табл. 3.12, 3.13.

Таблиця 3.12

Склад	*Ціна продажу*	*Мінімальні потреби*
1	34	β
2	32	α

Таблиця 3.13

Підпри-ємство	*Виробничі потужності*	*Витрати виробництва (без врахування сировини) на одиницю продукції*	*Вартість сировини на одиницю продукції*	*Транспортні витрати з перевезення одиниці продукції на:*	
				склад 1	*склад 2*
1	150	15	10	3	1
2	200	18	9	9	7

Варіанти:

1. α = 240 од., β = 110 од.
2. α = 180 од., β = 110 од.
3. α = 140 од., β = 210 од.
4. α = 150 од., β = 200 од.

22. У ткацької фабрики 20 верстатів типу 1 і 30 верстатів типу 2. Верстати можуть робити тканини видів Т1, Т2. Продуктивність верстатів на місяць наведено у табл. 3.14.

Таблиця 3.14

Тип верстата	*Продуктивність верстата*	
	Т1	Т2
1	50	30
2	α	40

Кожен метр тканини Т1 приносить фабриці прибуток 5 ум.од., тканини Т2 — 10 ум.од. Фабриці запропоновано план, відповідно до якого вона повинна зробити за місяць:

- не менше β метрів тканини Т1;
- не менше 50 м тканини Т2.

Визначте, як потрібно завантажити верстати виробництвом тканин різного виду, щоб план було виконано, і при цьому місячний прибуток був максимальним.

Варіанти:

1. α = 40 м, β = 100 м.
2. α = 40 м, β = 1200 м.
3. α = 60 м, β = 1100 м.
4. α = 60 м, β = 1300 м.

23. Студентська дієта складається з білків і вуглеводів. Є три види продуктів: хліб, картопля й шоколад. Дані, що характеризують вміст білків і вуглеводів у продуктах і вартість продуктів, наведено у табл. 3.15.

Таблиця 3.15

Продукт	*Вміст поживних речовин продукту, %/кг*		*Вартість, ум.од./кг*
	Білки	*Вуглеводи*	
Хліб	10	55	1,5
Картопля	2	17	1
Шоколад	5	50	α

Споживана їжа повинна містити:

- не менше 6 % білків;
- не менше β %, але не більше 40 % вуглеводів;

Визначте, який склад має дієта, яка потребує мінімальних витрат?

Варіанти:

1. α = 13 ум.од./кг, β = 22 %.
2. α = 13 ум.од./кг, β = 37 %.
3. α = 1 ум.од./кг, β = 22 %.
4. α = 1 ум.од./кг, β = 37 %.

24. Механізми М1 і М2 можуть виконувати два види земляних робіт — *A* і *B* . У табл. 3.16. наведено ресурси робочого часу кожного механізму, продуктивність механізмів під час виконання різних робіт і вартість однієї години роботи механізму.

Знайдіть оптимальне завантаження устаткування, що мінімізує сумарні витрати, за таких обсягів робіт: *A* = α м^3, *B* = β м^3.

Таблиця 3.16

Механізм	*Продуктивність, м³/год*		*Питома вартість, од. вартості/год*		*Ресурс часу, год*
	A	*B*	*A*	*B*	
М1	30	20	2	4	400
М2	60	30	3	2	300

Варіанти:

1. α = 6000 м^3, β = 5000 м^3.
2. α = 3000 м^3, β = 5000 м^3.
3. α = 6000 м^3, β = 2000 м^3.
4. α = 3000 м^3, β = 2000 м^3.

25. Завод випускає вироби моделей *A*, *B*, *C*. Для їхнього виготовлення використовують два види ресурсів, запаси яких складають α і β одиниць. Витрати ресурсів на один виріб кожної моделі наведено у табл. 3.17.

Таблиця 3.17

Ресурс	*Витрата ресурсу на один виріб даної моделі*		
	A	*B*	*C*
1	3	3	5
2	5	2	7

Аналіз умов збуту показує, що співвідношення випуску виробів повинне дорівнювати 3:2:5 відповідно. Питомі прибутки від реалізації виробів моделей *A*, В і С складають 30, 20 і 50 ум.од. відповідно.

Визначте обсяги випуску виробів кожної моделі, за яких прибуток буде максимальним.

Варіанти:

1. α = 5000 од., β = 7000 од.
2. α = 3000 од., β = 7000 од.
3. α = 5000 од., β = 2700 од.
4. α = 1000 од., β = 2700 од.

26. Фірма, що займається випуском будівельних матеріалів, виготовляє продукцію типів 1, 2, 3, 4. Кожний тип продукції повинен пройти, принаймні, три з чотирьох ділянок (ділянка 1 — ділянка 4). Робочий час кожної з цих ділянок протягом двох місяців має такі обмеження: ділянка 1 - α годин, ділянка 2 — 480 год, ділянка 3 — 5300 год, ділянка 4 — 200 год.

Час обробки виробів на ділянках наведено у табл. 3.18.

Таблиця 3.18

Тип продукції	Час обробки, год			
	Ділянка 1	Ділянка 2	Ділянка 3	Ділянка 4
1	15	30	0	60
2	17	0	31	45
3	0	40	30	15
4	20	25	45	10

Прибуток від продажу кожної одиниці продукції типу 1 — 50 ум.од., типу 2 — 70 ум.од., типу 3 — 90 ум.од., типу 4 — 60 ум.од.

Визначте, за якої кількості виробів, що випускаються, сумарний прибуток фірми буде максимальний, якщо відомо, що сумарний обсяг випуску виробів типу 2 і типу 4 повинен бути не менше β штук.

Варіанти:

1. α = 600 год, β = 90 шт.
2. α = 300 год, β = 60 шт.
3. α = 700 год, β = 120 шт.
4. α = 550 год, β = 150 шт.

27. У цеху заводу "Атек" є верстати В1 і В2 з нарізки різьби. Кожен верстат нарізає по два види різьби Р1 і Р2. Час нарізки однієї різьби кожним з верстатів, ресурси часу верстатів і планові завдання наведено у табл. 3.19.

Таблиця 3.19

Верстат	*Час обробки деталі, год*		*Ресурс часу,год*
	Р1	Р2	
В1	2	3	1000
В2	А	4	1700
Необхідна кількість деталей	90	β	—

Розподіліть завдання між верстатами так, щоб загальний час роботи усіх верстатів під час виконання планового завдання був мінімальним.

Варіанти:

1. α = 1 год, β = 450 шт.
2. α = 3 год, β = 300 шт.
3. α = 5 год, β = 600 шт.
4. α = 2 год, β = 500 шт.

28. У стайні вирощують коней-бігунів. Коней годують сумішшю з чотирьох кормів. Для досягнення ліпших результатів на змаганнях додержуються деякої дієти, що складається із застосування домішок 1, 2, 3. Дані, що характеризують вміст домішок у кормах, наведено у табл. 3.20.

Таблиця 3.20

Корм	Вміст домішок у кормах, %			Вартість 1 кг корму, ум.од.
	Домішка 1	Домішка 2	Домішка 3	
1	5	10	5	1,5
2	35	25	5	α
3	15	15	8	1
4	15	23	12	4

Суміш повинна містити :

- не менше 10 % домішки 1;
- не більше 80 % домішки 2;
- не менше β % домішки 3.

Визначте, який склад має дієта, яка потребує мінімальних витрат.

Варіанти:

1. α = 12 ум.од, β = 10 %
2. α = 8 ум.од, β = 11 %
3. α = 10 ум.од, β = 9 %
4. α = 14 ум.од, β = 12 %

29. У цеху по складанню виробів *A*, *B*, *C*, *D* працюють чотири лінії. Під час складання виробу *A* лінію 1 не використовують, а під час складанні виробу *D* використовують тільки лінії 1 та 3.

Ці технологічні лінії мають обмежений час роботи на добу: лінія 1 — 1000 хв, лінія 2 — 600 хв, лінія 3 — 780 хв, лінія 4 — 800 хв.

У табл. 3.21. наведено тривалості технологічних операцій на лініях під час складання виробів кожного виду .

Таблиця 3.21

Виріб	Тривалість технологічної операції, хв/вир.			
	Лінія 1	Лінія 2	Лінія 3	Лінія 4
A	—	1	3	1
B	2	5	1	10
C	3	4	10	20
D	50	—	12	—

Прибуток від продажу виробів: *A* — 6 ум.од., *B* — 5 ум.од., *C* — 6 ум.од., *D* — α умовних одиниць.

Визначте найбільш вигідний добовий обсяг випуску виробів кожного виду, якщо відомо, що кількість виробів *A* повинна бути не менше за β штук.

Варіанти:

1. α = 5 ум.од., β = 50 шт.
2. α = 10 ум.од., β = 20 шт.
3. α = 15 ум.од., β = 30 шт.
4. α = 20 ум.од., β = 40 шт.

30. Фірма виготовляє облицьовувальну плитку П1 та П2. За планом виробництва фірма повинна виготовити плитки П1 не менше 1200 шт. і П2 не менше 2200 шт. Під час виготовлення кожного виду плитки використовують один з двох верстатів.

Розподіліть виготовлення плитки по різних верстатах так, щоб максимізувати прибуток під час виконання планового завдання.

У табл. 3.22. наведено:

- продуктивність *i*-го верстата (*i* = 1,2) під час виготовлення плитки *k*-го типу (k = 1,2);
- ресурси часу (фонд робочого часу) верстатів;
- витрати виробництва (витрати під час виготовлення *k*-го виду плитки (*k* = 1,2) на *i*-му верстаті (*i* = 1,2)).

Таблиця 3.22

Верстат	Витрати виробництва на одну плитку, од. вартості		Продуктивність, шт./хв		Ресурс часу, хв
	П1	П2	П1	П2	
1	10	8	4	8	β
2	20	α	2	4	800

Прибуток від продажу плитки П1 і П2 наведено у табл. 3.23.

Таблиця 3.23

Плитка	Дохід від однієї плитки, од. вартості
П1	40
П2	20

Варіанти:

1. α = 6 од. вартості, β = 1000 хв.
2. α = 19 од. вартості, β = 550 хв.
3. α = 1 од. вартості, β = 750 хв.
4. α = 10 од. вартості, β = 600 хв.

31. Фірма виготовляє вироби моделей М1, М2, М3. Для їх виготовлення використовують елементи Е1 і Е2, запаси яких складають відповідно 10000 і 5000 од. Щодня потрібно випускати не менше α, 250, 100 виробів моделей М1, М2, М3 відповідно. Прибуток від реалізації виробів, витрати елементів на один виріб кожної моделі наведено у табл. 3.24, 3.25.

Таблиця 3.24

Елемент	Витрати елементів на один виріб, шт.		
	М1	М2	М3
Е1	4	3	4
Е2	2	2	5

Таблиця 3.25

Модель	Прибуток, од.вартості
М1	60
М2	150
М3	β

Визначте, яку кількість виробів кожного типу варто виготовляти, щоб максимізувати прибуток.

Варіанти:

1. α = 200 шт., β = 120 од. вартості.
2. α = 150 шт., β = 100 од. вартості.
3. α = 250 шт., β = 60 од. вартості.
4. α = 300 шт., β = 50 од. вартості.

32. Приватне підприємство випускає моделі М1, М2, М3, М4 одного виробу на двох лініях. На першій лінії випускають моделі М1 та М4, на другій лінії — моделі М2 та М3. Максимальні добові обсяги виробництва ліній такі:

- перша лінія — 140 виробів;
- друга лінія — 110 виробів.

У склад кожної моделі входить дефіцитна деталь Д, загальна наявність якої складає β одиниць. Кількість деталей Д, яка потрібна для випуску кожної моделі виробу, наведено у табл. 3.26.

Таблиця 3.26

	Модель			
	М1	М2	М3	М4
Прибуток від продажу моделі, од. вартості	20	30	25	30
Кількість деталей Д на одну модель, шт.	20	30	8	5

Визначте оптимальні добові обсяги виробництва моделей М1, М2, М3, М4 для максимізації прибутку, якщо відомо, що моделей М2 і М4 повинно бути зібрано мінімум 25 і 30 шт. відповідно.

Варіанти:

1. α = 80 шт., β = 2000 шт.
2. α = 63 шт., β = 1500 шт.
3. α = 75 шт., β = 1750 шт.
4. α = 75 шт., β = 2000 шт.

4 ЕЛЕКТРОННА ТАБЛИЦЯ MICROSOFT EXCEL

Цей розділ присвячено застосуванню електронної таблиці MICROSOFT EXCEL для розв′язання задач математичного програмування.

Формула — основний засіб опису залежностей в математичних моделях.

Формули можуть містити числа, знаки математичних операцій, функції та посилання на інші комірки того ж робочого листа чи листів інших робочих книг. Щоб ввести формулу в комірку робочого листа, наберіть необхідну комбінацію цих елементів у рядку формул. Формула повинна починатися зі знака рівності “=”.

Формули можуть бути дуже простими (= 1+1), складними (= B2+(СУММ(A1;A5)*B2)).

Щоб ввести формулу, вкажіть комірку, в яку необхідно ввести формулу.

Потім наберіть формулу, почавши набір зі знака рівності “=”. Якщо почати формулу, вставивши ім'я функції, знак рівності перед нею буде поміщено автоматично.

Примітка: Під час введення формули можна використовувати ***Майстер функцій***.

Функція — скорочений запис формули, вбудованої в MICROSOFT EXCEL. Функції являють собою визначені формули, що виконують обчислення, використовуючи визначені значення — *аргументи*, у визначеному порядку — *синтаксису*. MICROSOFT EXCEL підтримує сотні вбудованих функцій.

Майстер функцій допомагає швидко знайти функцію, яку слід вставити у формулу і задати її аргументи.

Для його виклику необхідно використовувати команду ***Функция*** в меню ***Вставка.***

Перший крок після виклику ***Майстра функцій*** — вибір функції (рис. 4.1).

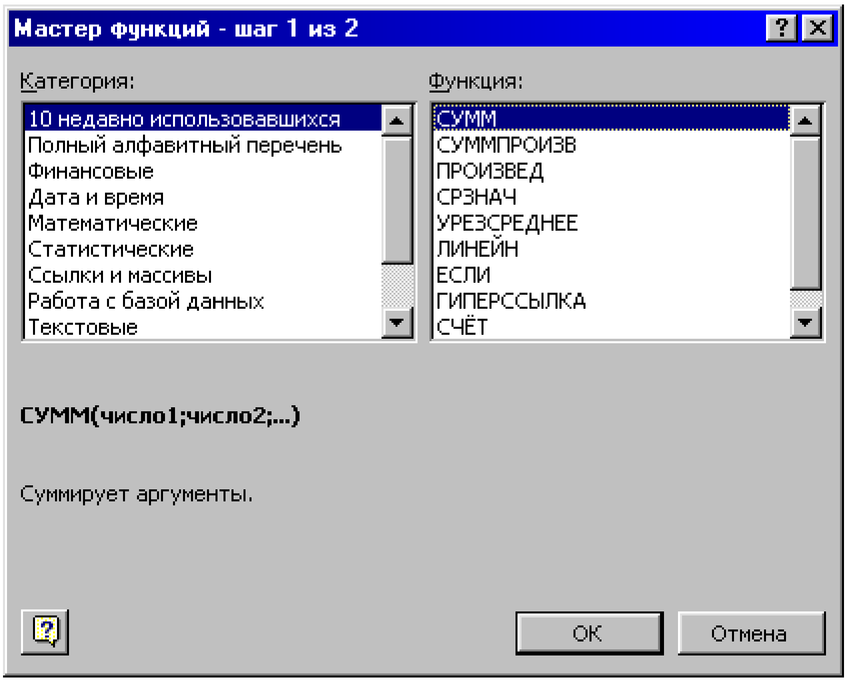


Рис. 4.1

Другий крок — задання аргументів функції (рис. 4.2).

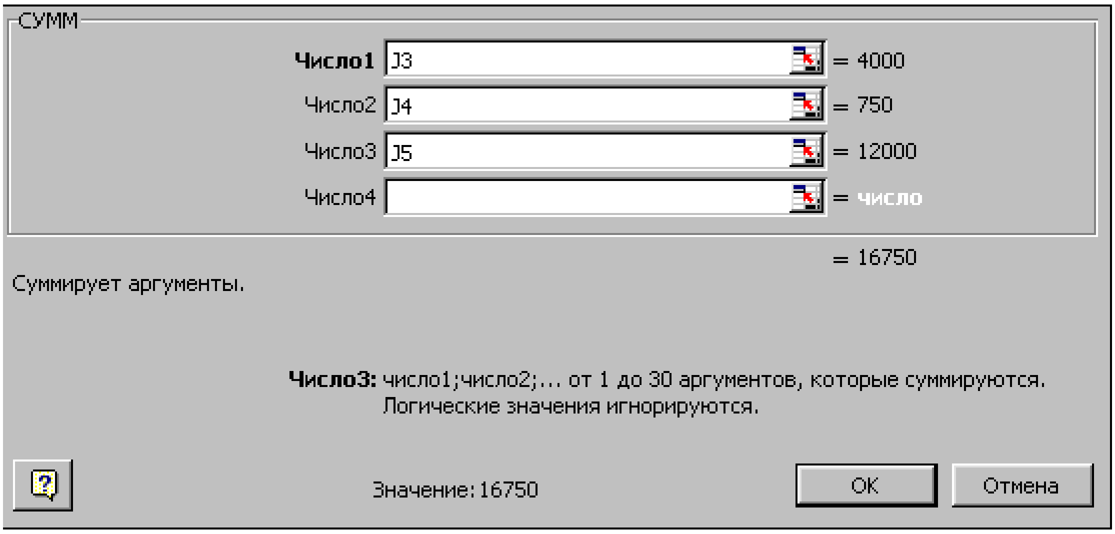


Рис. 4.2

Для переключення режимів перегляду формул і перегляду значень формул, натисніть CTRL+ (*ліві лапки*).

Розв’язуючи задачі, найчастіше використовують функції СУММ і СУММПРОИЗВ.

Функція СУММ підсумовує два і більше чисел (приклад задання аргументів функції СУММ дивись вище)

Функція СУММПРОИЗВ підсумовує добутки відповідних елементів двох і більше масивів (вектор-стовпців, вектор-рядків чи матриць) однакової розмірності.

Приклад задання аргументів функції СУММПРОИЗВ зображено на рис. 4.3.

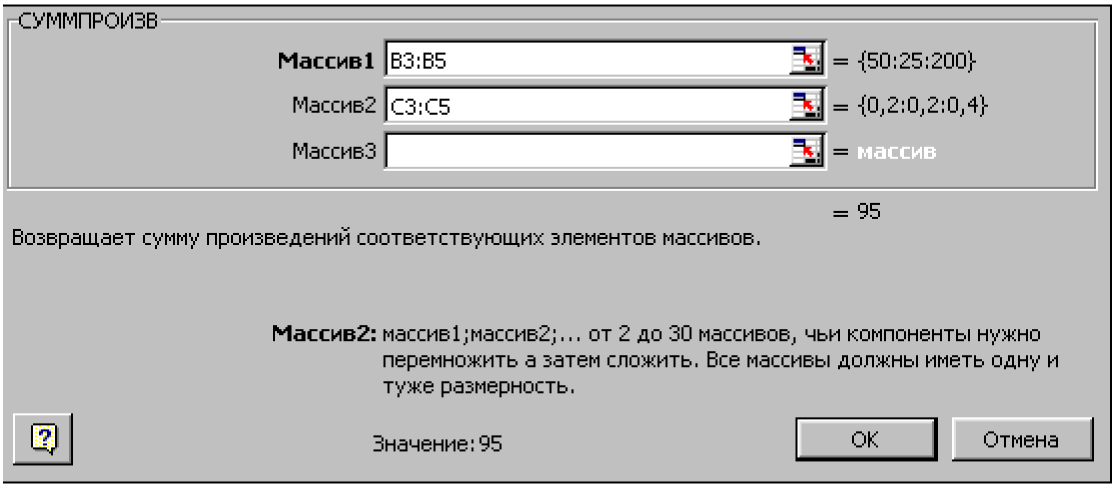


Рис. 4.3

Проілюструємо використання цих функцій (рис. 4.4, 4.5).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		Кол-во изделий	Время, затраченое на изделие			Часть каждого вида изделий в общем объеме выпуска			Прибыль		
2			Станок 1	Станок 2	Станок 3				за одно изделие	за все изделия	
3	*Продукт 1*	50	0,2	0,5	0	2			80	4000	
4	*Продукт 2*	25	0,2	0,6	0	1			30	750	
5	*Продукт 3*	200	0,4	0,4	0,8	8			60	12000	
6					Суммарная прибыль за месяц					СУММ(J3;J4;J5)	
7											
8		Время работы на станке в месяц									
9											
10		*фактич.*	*макс.*								
11	Станок 1	СУММПРОИЗВ(B3:B5;C3:C5)									
12	Станок 2	СУММПРОИЗВ(B3:B5;D3:D5)									
13	Станок 3	СУММПРОИЗВ(B3:B5;E3:E5)									

Рис. 4.4

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		Кол-во изделий	Время, затраченое на изделие			Часть каждого вида изделий в общем объеме выпуска			Прибыль	
2			Станок 1	Станок 2	Станок 3				за одно изделие	за все изделия
3	*Продукт 1*	50	0,2	0,5	0	2			80	4000
4	*Продукт 2*	25	0,2	0,6	0	1			30	750
5	*Продукт 3*	200	0,4	0,4	0,8	8			60	12000
6					Суммарная прибыль за месяц					**16750**
7										
8		Время работы на станке в месяц								
9										
10		*фактич.*	*макс.*							
11	Станок 1	95	100							
12	Станок 2	120	130							
13	Станок 3	160	160							

Рис. 4.5

5 РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ЗАСОБАМИ MICROSOFT EXCEL

Використання MICROSOFT EXCEL для розв'язання задач математичного програмування розглянемо на прикладі задачі визначення оптимального асортименту продукції.

5.1 Змістовне формулювання задачі

Фірма випускає три види виробів. У процесі виробництва використовують три технологічні операції. На рис. 5.1 показано технологічну схему виробництва виробів видів 1, 2 і 3. Під час виготовлення виробу 2 технологічна операція 2 не виконується, а під час виготовлення виробу 3 використовують тільки технологічні операції 1 і 2. У прямокутниках зазначено тривалість технологічних операцій під час виготовлення одного виробу кожного виду.

Оскільки ці технологічні операції фірма використовує і для інших виробничих цілей, фонд робочого часу, протягом якого операції 1, 2 і 3 можуть застосувати для виробництва розглянутих виробів, обмежено такими граничними значеннями (на добу): для першої операції — 430 хв, для другої — 460 хв, для третьої — 420 хв.

Вивчення ринку попиту показало, що очікуваний прибуток від продажу одного виробу видів 1, 2 і 3 складає 3, 2 і 5 од. вартості відповідно.

Визначте, який найбільш вигідний добовий обсяг виробництва кожного виду продукції?

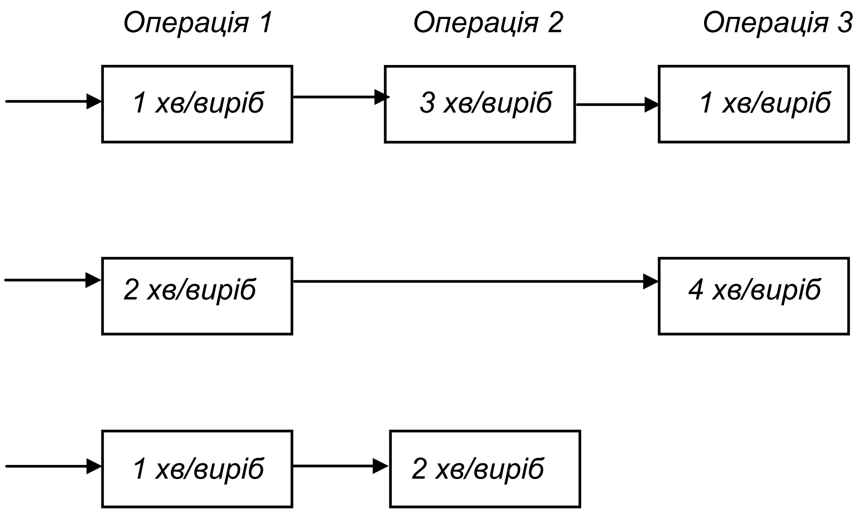


Рис. 5.1

5.2. Математичне формулювання задачі

Згідно зі змістовною постановкою задачі, потрібно визначити добові обсяги виробництва виробів кожного виду (змінні моделі), за яких максимізується загальний прибуток (цільова функція), за умови, що час використання кожної технологічної операції протягом доби не перевищує відповідного граничного значення (обмеження).

Змінні:

x_1 —добовий обсяг виробництва виробів виду 1, шт.;

x_2 —добовий обсяг виробництва виробів виду 2, шт.;

x_3 — добовий обсяг виробництва виробів виду 3, шт.

Цільова функція — сумарний добовий прибуток від реалізації усіх виробів:

$$\max z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

Для кожної технологічної операції повинно виконуватися таке обмеження:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Сумарний час}\\ \text{використання операції}\\ \text{протягом доби для обробки}\\ \text{усіх виробів}\end{array}\right\} \le \left\{\begin{array}{l}\text{Граничний час}\\ \text{використання операції}\\ \text{протягом доби}\end{array}\right\}$$

Ці обмеження мають такий вигляд:

для операції 1: $1\,x_1 + 2\,x_2 + 1\,x_3 \le 430;$

для операції 2: $3\,x_1 + 0\,x_2 + 2\,x_3 \le 460;$

для операції 3: $1\,x_1 + 4\,x_2 + 0\,x_3 \le 420.$

Умова невід'ємності змінних: $x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$

Умова цілочисловості змінних: $x_j\ (j = 1, 2, 3)$ — цілі.

Ця задача належить до класу задач лінійного цілочислового програмування, тому що цільова функція і всі обмеження задачі лінійні, а на змінні накладено умови цілочисловості.

5.3. Розв'язання задачі засобами MICROSOFT EXCEL

Для розв'язання цієї задачі заповніть лист MICROSOFT EXCEL (рис. 5.2).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		Количество		Прибыль от				Время обработки изделия		
2		изделий		продажи				вида 1	вида 2	вида 3
3	Вида 1			2		На операции 1		1	2	1
4	Вида 2			3		На операции 2		3	0	2
5	Вида 3			5		На операции 3		1	4	0
6										
7	Суммарная прибыль:			0						
8										
9		Реальное		Предельное						
10		время		время ис-						
11		использо-		пользования						
12		вания		(в теч.суток)						
13	Операции 1	0	<=	430						
14	Операции 2	0	<=	460						
15	Операции 3	0	<=	420						
16										

Рис. 5.2

Вміст комірок таблиці: змінні (табл. 5.1), вихідні дані (табл. 5.2), формули (табл. 5.3)

Таблиця 5.1

Комірка	*Зміст*
B3	Кількість виробів виду 1 (x_1)
B4	Кількість виробів виду 2 (x_2)
B5	Кількість виробів виду 3 (x_3)

Таблиця 5.2

Комірка	*Зміст*
D3	Прибуток від продажу одного виробу виду 1
D4	Прибуток від продажу одного виробу виду 2
D5	Прибуток від продажу одного виробу виду 3
D13	Граничний час використання операції 1 протягом доби
D14	Граничний час використання операції 2 протягом доби
D15	Граничний час використання операції 3 протягом доби
H3:J5	Тривалості операцій обробки виробів

Таблиця 5.3

Комірка	*Зміст*	*Формула*
D7	Значення цільової функції — величина прибутку за добу	=B3*I11 + B4*I12 + B5*I13 (можна використати функцію СУММПРОИЗВ(B3:B5; I11: I13))
B13	Фактичний час використання операції 1 протягом доби	=B$3*H3+B$4*I3+B$5*J3
B14	Фактичний час використання операції 2 протягом доби	=B$3*H4+B$4*I4+B$5*J4
B15	Фактичний час використання операції 3 протягом доби	B$3*H5+B$4*I5+B$5*J5

Для того, щоб виводити в комірках формули замість їхніх значень, в меню ***Сервис*** виберіть команду ***Параметры***, а потім у діалоговому вікні ***Параметры*** в групі перемикачів ***Параметры окна*** встановіть прапорець ***формулы***. Цей лист буде мати такий вигляд (рис.5.3).

5	Вида 3	[redacted]		5	На операции 3	1
6						
7	Суммарная прибыль:			=B3*D3+B4*D4+B5*D5		
8						
9						
10						
11						
12		Реальное время использо-вания		Предельное время ис-пользования (в теч.суток)		
13	Операции 1	=B$3*H3+B$4*I3+B$5*J3	<=	430		
14	Операции 2	=B$3*H4+B$4*I4+B$5*J4	<=	460		
15	Операции 3	=B$3*H5+B$4*I5+B$5*J5	<=	420		
16						

Рис. 5.3

5.4. Знаходження оптимального розв’язку за допомогою процедури пошуку розв’язку

1. У меню ***Сервис*** виберіть команду ***Поиск решения***. Якщо ця команда відсутня в меню, встановіть відповідну надбудову під час інсталяції.
2. У полі ***Установить целевую ячейку*** введіть адресу чи ім'я комірки, в якій знаходиться формула цільової функції моделі. Цю комірку можна виділити безпосередньо на робочому листі мишкою.
3. Щоб максимізувати значення цільової комірки, встановіть перемикач у положення ***максимальному значению***. Щоб мінімізувати значення цільової комірки — у положення ***минимальному значению***.
   Якщо ви хочете встановити значення цільової комірки рівним деякому числу, змінюючи значення комірок, встановіть перемикач у положення ***значению*** і введіть у відповідне поле необхідне число.
4. У полі ***Изменяя ячейки*** введіть імена чи адреси змінюваних комірок, розділяючи їх крапкою з комою, чи виділіть необхідний діапазон комірок безпосередньо на листі.
5. Для автоматичного пошуку всіх комірок, що впливають на цільову функцію моделі, натисніть кнопку ***Предположить***.
6. У список ***Ограничения*** введіть всі обмеження, що накладаються на розв’язок.
7. Натисніть кнопку ***Выполнить***.

А тепер повернемося до нашої задачі визначення асортименту випуску продукції. На рис. 5.4 зображено діалогове вікно ***Поиск решения***.

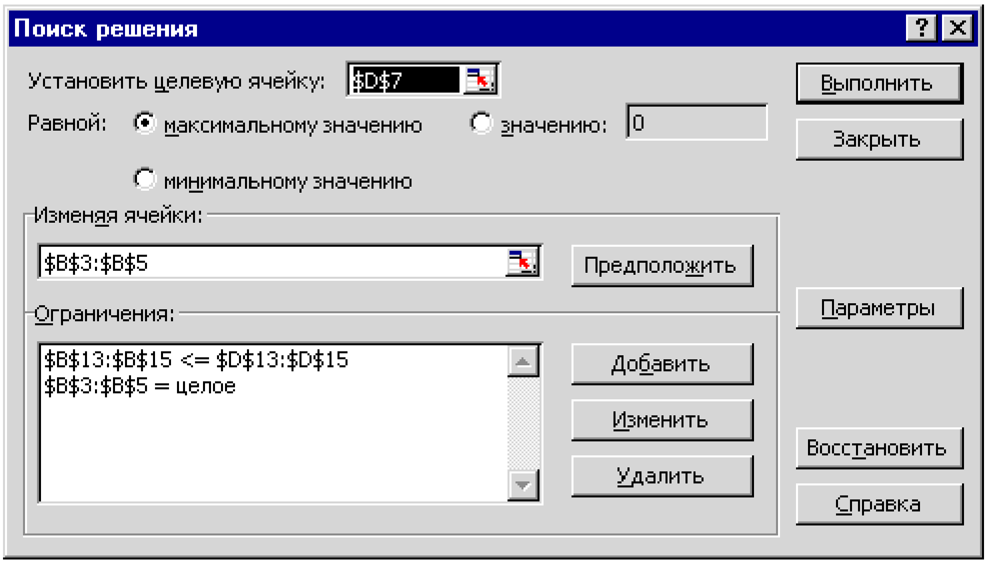


Рис. 5.4

Обмеження $B$13 <= $D$13, $B$14 <= $D$14, $B$15 <= $D$15 задають обмеження на час використання операцій протягом доби. Обмеження $B$3:$B$5 = ***целое*** пов'язані з умовами, за яких кількість виробів має бути цілим числом.

Після натискання кнопки ***Параметры*** в діалоговому вікні ***Параметры поиска решения*** додатково вкажіть деякі параметри процесу розв’язання: максимальний час пошуку розв’язку, обмежувальна кількість ітерацій, відносна похибка, допустиме відхилення, чи лінійна модель, чи накладаються на змінні умови невід’ємності, чи показувати результати ітерацій, метод розв’язання, тип похідних, оцінка, а також завантажити або зберегти модель (рис. 5.5).

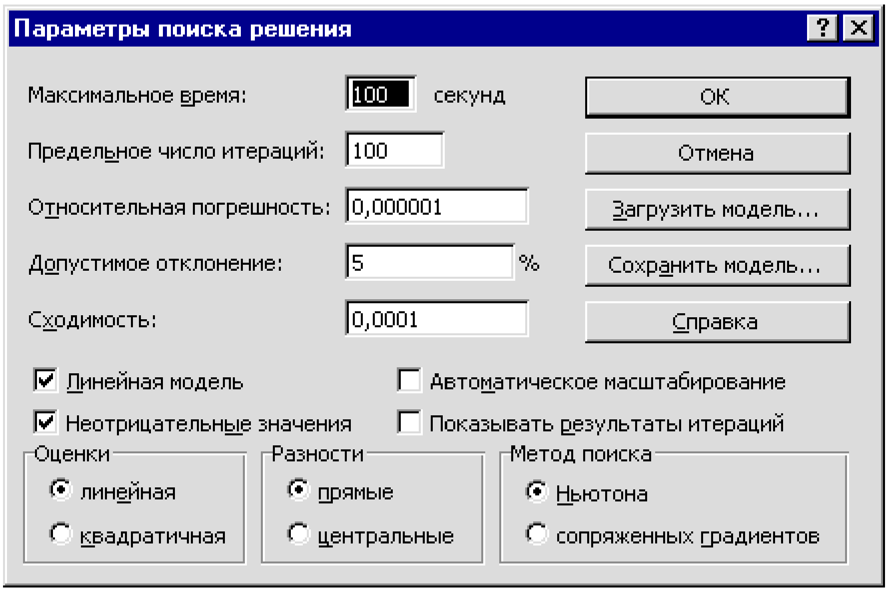


Рис. 5.5

Після того, як усі параметри й обмеження встановлено, натисніть кнопку ***Выполнить*** діалогового вікна ***Поиск решения.***

5.5. Підсумкові повідомлення процедури пошуку розв’язку

Якщо пошук розв’язку успішно закінчено, у діалоговому вікні ***Результаты поиска решения*** виводиться таке повідомлення:

- *Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены* (рис. 5.6).

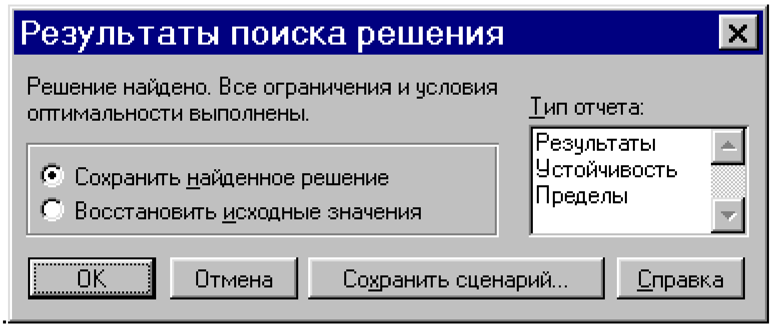


Рис. 5.6

Усі обмеження дотримано з установленою точністю і знайдено значення цільової комірки.

У разі відновлення вихідного розв’язку таблиця не змінюється, а у разі збереження знайденого розв'язку результати вносяться в комірки таблиці (рис. 5.7).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		Количество		Прибыль от				Время обработки изделия		
2		изделий		продажи				вида 1	вида 2	вида 3
3	Вида 1	0		2		На операции 1		1	2	1
4	Вида 2	100		3		На операции 2		3	0	2
5	Вида 3	230		5		На операции 3		1	4	0
6										
7	Суммарная прибыль:			1450						
8										
9		Реальное		Предельное						
10		время		время ис-						
11		использо-		пользования						
12		вания		(в теч.суток)						
13	Операции 1	430	<=	430						
14	Операции 2	460	<=	460						
15	Операции 3	400	<=	420						
16										

Рис. 5.7

За результатами пошуку розв’язку можна одержати різні звіти. Правда, у цьому випадку (у разі розв’язання задачі визначення асортименту випуску продукції) ми можемо одержати тільки один тип звіту — *звіт за результатами*, тому що задачу розв’язують у цілих числах. Для цього необхідно клікнути мишкою на рядок ***Результаты*** в групі ***Тип отчета*** і натиснути на кнопку ***ОК***, після чого MICROSOFT EXCEL створить новий лист — *Звіт за результатами 1* (рис. 5.8).

Microsoft Excel 8.0 Отчет по результатам
Рабочий лист: [Example_of_part5.xls]Лист1
Отчет создан: 07.08.2000 22:40:25

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходно	Результат
$D$7	Суммарная прибыль:	0	1450

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходно	Результат
$B$3	Вида 1 Количество изделий	0	0
$B$4	Вида 2 Количество изделий	0	100
$B$5	Вида 3 Количество изделий	0	230

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	формула	Статус	Разница
$B$13	Операции 1 Реальное время использован	430	$B$13<=$D$13	связанное	0
$B$14	Операции 2 Реальное время использован	460	$B$14<=$D$14	связанное	0
$B$15	Операции 3 Реальное время использован	400	$B$15<=$D$15	не связан.	20
$B$3	Вида 1 Количество изделий	0	$B$3=целое	связанное	0
$B$4	Вида 2 Количество изделий	100	$B$4=целое	связанное	0
$B$5	Вида 3 Количество изделий	230	$B$5=целое	связанное	0

Рис. 5.8

У ньому приводяться оптимальні значення змінних (змінюваних значень) і цільової функції. Установлюється статус обмежень (зв’язуючі, незв’язуючі), по не зв’язуючих обмеженнях типу "≤" установлюється значення залишку, по не зв’язуючих обмеженнях типу "≥" — значення надлишку.

6. ПОСТОПТИМАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Основи постоптимального аналізу ЗЛП розглянемо на прикладі задачі визначення оптимального асортименту продукції кондитерського цеху.

6.1. Змістовна постановка задачі

Кондитерський цех випускає чотири види виробів: ватрушки, сушки, пиріжки з повидлом, здобні булочки (одиниця випуску — контейнер). У виробництві продукції використовують три види ресурсів: пшеничне борошно, цукор, дріжджі. Добові обсяги використання борошна і цукру обмежено: цукор — 70 мішків, борошно — 80 мішків. Умови постачання й особливості збереження дріжджів визначають обсяг їх використання — не менше 25 кг у день. Витрати вихідних продуктів відповідно до рецептури їх виготовлення наведено у табл. 6.1.

Таблиця 6.1

Назва виробу	*Витрати вихідних продуктів*		
	цукор (мішок/контейнер)	*борошно (мішок/контейнер)*	*дріжджі (кг/контейнер)*
Ватрушка	1	3	2
Сушка	4	2	3
Пиріжок з повидлом	1	3	0
Здобна булочка	5	5	4

Цех має ряд постійних клієнтів (кафе, кіоски). Відповідно до договорів з ними добові постачання ватрушок, пиріжків з повидлом і здобних булочок складають не менше 10 контейнерів у день. При цьому обсяг випуску сушок повинен дорівнювати сумі обсягу випуску пиріжків і подвоєному обсягу випуску ватрушок. Прибуток за один контейнер ватрушок, сушок, пиріжків з повидлом і здобних булочок складає 15, 10, 8 і 2 од. вартості відповідно.

Знайдіть добові обсяги випуску продукції кожного виду для одержання максимального прибутку.

6.2. Математична модель

Змінні: x_i — добовий обсяг випуску продукції *і*-го виду у контейнерах (*і* = 1, 2, 3, 4 — ватрушки, сушки, пиріжки з повидлом і здобні булочки відповідно).

Цільова функція — сумарний добовий прибуток від реалізації усіх кондитерських виробів:

$$\max z = 15\,x_1 + 10\,x_2 + 8\,x_3 + 2\,x_4.$$

Обмеження:

Сумарний добовий обсяг використаного цукру не може перевищувати його максимального добового запасу у 70 мішків:

$$x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 \le 70.$$

Сумарний добовий обсяг використаного борошна не може перевищувати його максимального добового запасу у 80 мішків:

$$3\,x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 + 5\,x_4 \le 80.$$

Сумарний добовий обсяг використання дріжджів не може бути менше ніж 25 кг:

$$2\,x_1 + 3\,x_2 + 4\,x_4 \ge 25.$$

Сумарний обсяг випуску ватрушок, пиріжків і здобних булочок не може бути менше 10 контейнерів у день:

$$x_1 + x_3 + x_4 \ge 10.$$

Співвідношення обсягів випуску ватрушок, сушок і пиріжків у контейнерах (обмеження, що враховують комплектність випуску продукції):

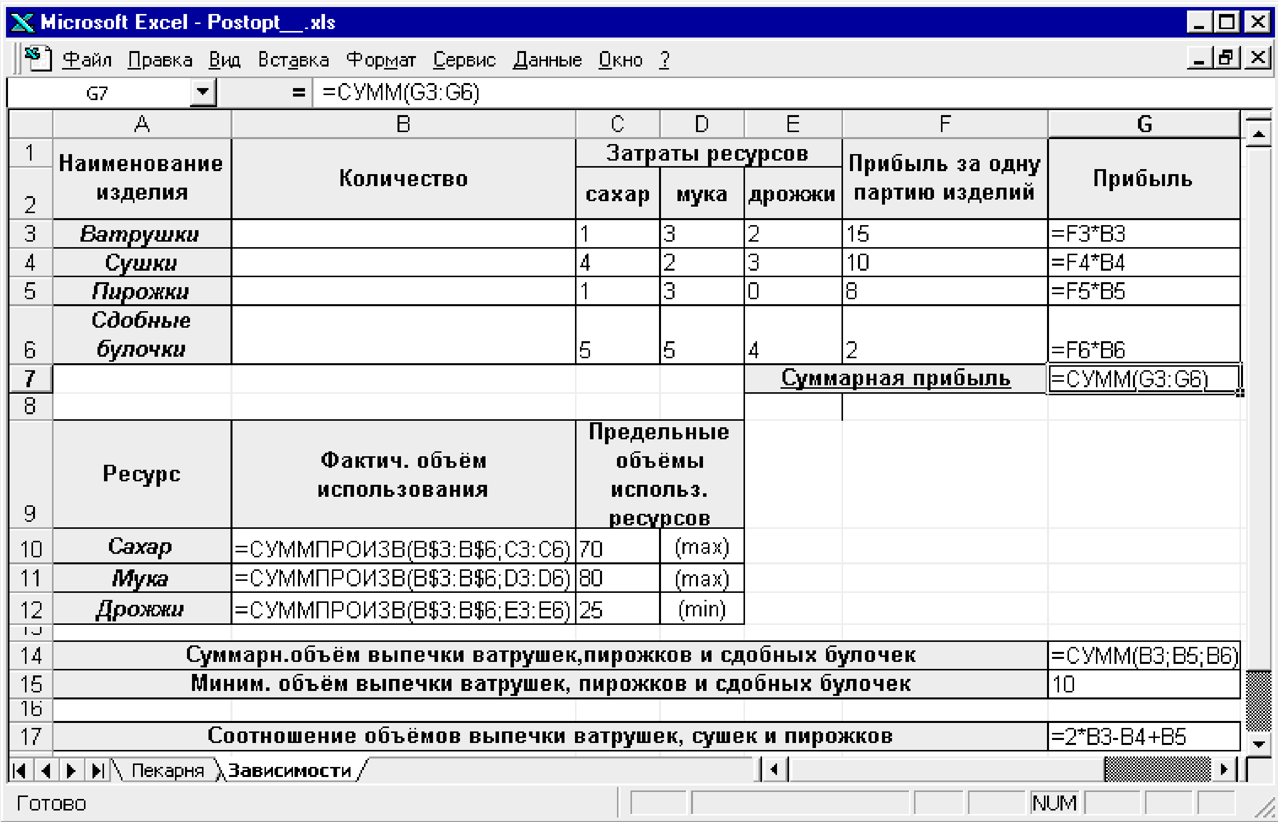
$$2\,x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

Всі змінні повинні бути невід’ємні:

$$x_i \ge 0,\ i = 1, ..., 4.$$

6.3. Розв’язання засобами MICROSOFT EXCEL

Заповніть лист MICROSOFT EXCEL відповідними даними і введіть формули так, як це показано на рис. 6.1.



	A	B	C	D	E	F	G
1	Наименование изделия	Количество	Затраты ресурсов			Прибыль за одну партию изделий	Прибыль
2			сахар	мука	дрожжи		
3	*Ватрушки*		1	3	2	15	=F3*B3
4	*Сушки*		4	2	3	10	=F4*B4
5	*Пирожки*		1	3	0	8	=F5*B5
6	*Сдобные булочки*		5	5	4	2	=F6*B6
7					Суммарная прибыль		=СУММ(G3:G6)
8							
9	Ресурс	Фактич. объём использования	Предельные объёмы использ. ресурсов				
10	*Сахар*	=СУММПРОИЗВ(B$3:B$6;C3:C6)	70	(max)			
11	*Мука*	=СУММПРОИЗВ(B$3:B$6;D3:D6)	80	(max)			
12	*Дрожжи*	=СУММПРОИЗВ(B$3:B$6;E3:E6)	25	(min)			
14	Суммарн.объём выпечки ватрушек,пирожков и сдобных булочек						=СУММ(B3;B5;B6)
15	Миним. объём выпечки ватрушек, пирожков и сдобных булочек						10
16							
17	Соотношение объёмов выпечки ватрушек, сушек и пирожков						=2*B3-B4+B5

Рис. 6.1

Особливості введення в таблицю обмежень типу $x_j > h_j$; $x_j < h_j$ наведено у п.6.6.4.

У діалоговому вікні ***Поиск решения*** заповніть всі необхідні поля (вкажіть комірку цільової функції, напрям оптимізації, діапазон комірок-змінних і використовувані обмеження) (рис. 6.2).

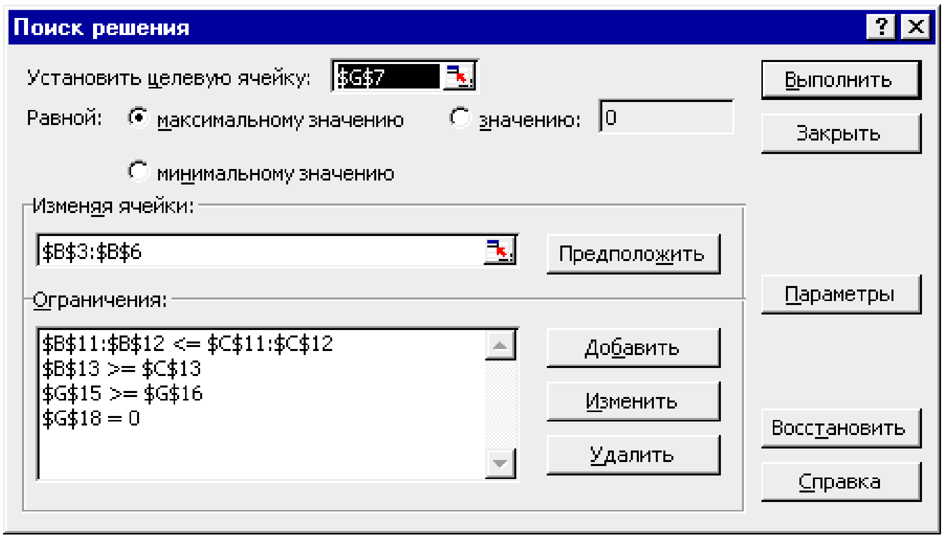


Рис. 6.2

Результати пошуку розв'язку показано на рис. 6.3.

Наименование изделия	Количество	Затраты ресурсов			Прибыль за одну партию изделий	Прибыль
		сахар	мука	дрожжи		
Ватрушки	5	1	3	2	15	75
Сушки	15	4	2	3	10	150
Пирожки	5	1	3	0	8	40
Сдобные булочки	0	5	5	4	2	0
					Суммарная	265

Ресурс	Фактич. объём использования	Ограничения на объёмы использования ресурсов
Сахар	70	70
Мука	60	80
Дрожжи	55	25

Суммарн.объём выпечки ватрушек,пирожков и сдобных булочек	10
Миним. объём выпечки ватрушек, пирожков и сдобных булочек	10
Соотношение объёмов выпечки ватрушек, сушек и пирожков	0

Рис. 6.3

Засобами MICROSOFT EXCEL можна провести аналіз на чутливість до зміни параметрів моделі. Повний постоптимальний аналіз моделі можна виконати засобами MICROSOFT EXCEL для задач лінійного програмування. Для цього у діалоговому вікні ***Результаты поиска решения*** необхідно вибрати ***Тип отчета: Устойчивость***. Після цього MICROSOFT EXCEL створить новий лист — *Звіт про стійкість* 1.

Звіт за результатами показано на рис. 6.4, звіт про стійкість — рис. 6.5, звіт про межі — рис. 6.6.

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходно	Результат
$G$7	Суммарная прибыль Прибыль	35	265

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходно	Результат
$B$3	Ватрушки Количество	0	5
$B$4	Сушки Количество	0	15
$B$5	Пирожки Количество	0	5
$B$6	Сдобные булочки Количество	0	0

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	формула	Статус	Разница
$B$13	Дрожжи Фактич. объём использования	55	$B$13>=$C$13	не связ	30
$B$11	Сахар Фактич. объём использования	70	$B$11<=$C$11	связанн	0
$B$12	Мука Фактич. объём использования	60	$B$12<=$C$12	не связ	20
$G$15	Суммарн.объём выпечки ватрушек,пирожков и сдс	10	$G$15>=$G$16	связанн	0
$G$18	Соотношение объёмов выпечки ватрушек, сушек и	0	$G$18=0	связанн	0

Рис. 6.4

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$3	Ватрушки Количество	5	0	15	1E+30	2,6
$B$4	Сушки Количество	15	0	10	1E+30	13
$B$5	Пирожки Количество	5	0	8	1,44444	16
$B$6	Сдобные булочки Количество	0	-16	2	16	1E+30

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$13	Дрожжи Фактич. объём использования	55	0	25	30	1E+30
$B$11	Сахар Фактич. объём использования	70	4,25	70	20	20
$B$12	Мука Фактич. объём использования	60	0	80	1E+30	20
$G$15	Суммарн.объём выпечки ватрушек,пиро	10	-3,25	10	4	2,222222
$G$18	Соотношение объёмов выпечки ватруше	0	7	0	5	5

Рис. 6.5

Ячейка	Имя	Целевое значение
$G$7	Суммарная пр	265

Ячейка	Имя	Изменяемое значение	Нижний предел	Целевое результат	Верхний предел	Целевое результат
$B$3	Ватрушки Колі	5	5	265	5	265
$B$4	Сушки Количе	15	15	265	15	265
$B$5	Пирожки Колич	5	5	265	5	265
$B$6	Сдобные були	0	0	265	0	265

Рис. 6.6

6.4. Розв'язання задачі симплекс-методом

Зведемо задачу до канонічної форми:

$$
\begin{array}{llllllllll}
\max z = & 15x_1 & +10x_2 & +8x_3 & +2x_4 & +0s_1 & +0s_2 & +0s_3 & +0s_4 & \\
 & x_1 & +4x_2 & +x_3 & +5x_4 & +s_1 & & & & =70 \\
 & 3x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +5x_4 & & +s_2 & & & =80 \\
 & 2x_1 & +3x_2 & & +4x_4 & & & -s_3 & & =25 \\
 & x_1 & & +x_3 & +x_4 & & & & -s_4 & =10 \\
 & 2x_1 & -x_2 & +x_3 & & & & & & =0 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & s_1, & s_2, & s_3, & s_4 & \geq 0
\end{array}
$$

Результати ітерацій розв'язання задачі табличним двоетапним симплекс-методом наведено у табл. 6.2 — 6.9. Результати реалізації етапу І представлено у табл. 6.2 — 6.7, етапу ІІ — у табл. 6.8 — 6.9.

Таблиця 6.2

БЗ[1]	x_1	x_2	x_3	x_4	s_3	s_4	s_1	s_2	R_1	R_2	R_3	P
r (min)	5	2	2	5	-1	-1	0	0	0	0	0	35
z (max)	-15	-10	-8	-2	0	0	0	0	0	0	0	0
s_1	1	4	1	5	0	0	1	0	0	0	0	70
s_2	3	2	3	5	0	0	0	1	0	0	0	80
R_1	2	3	0	4	-1	0	0	0	1	0	0	25
R_2	1	0	1	1	0	-1	0	0	0	1	0	10
R_3	**2**	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0

Таблиця 6.3

БЗ	x_2	x_3	x_4	s_3	s_4	R_3	s_1	s_2	R_1	R_2	x_1	P
r (min)	9/2	-1/2	5	-1	-1	-5/2	0	0	0	0	0	35
z (max)	-35/2	-1/2	-2	0	0	15/2	0	0	0	0	0	0
s_1	9/2	1/2	5	0	0	-1/2	1	0	0	0	0	70
s_2	7/2	3/2	5	0	0	-3/2	0	1	0	0	0	80
R_1	4	1	**4**	1	0	1	0	0	1	0	0	25
R_2	1/2	1/2	1	0	-1	-1/2	0	0	0	1	0	10
x_1	-1/2	1/2	0	0	0	1/2	0	0	0	0	1	0

Таблиця 6.4

БЗ	x_2	x_3	s_3	s_4	R_1	R_3	s_1	s_2	x_4	R_2	x_1	P
r (min)	-1/2	3/4	1/4	-1	-5/4	-5/4	0	0	0	0	0	15/4
z (max)	-31/2	-1	-1/2	0	1/2	7	0	0	0	0	0	25/2
s_1	-1/2	7/4	5/4	0	-5/4	3/4	1	0	0	0	0	155/4
s_2	-3/2	11/4	5/4	0	-5/4	-1/4	0	1	0	0	0	195/4
x_4	1	-1/4	-1/4	0	1/4	-1/4	0	0	1	0	0	25/4
R_2	-1/2	3/4	1/4	-1	-1/4	-1/4	0	0	0	1	0	15/4
x_1	-1/2	**1/2**	0	0	0	1/2	0	0	0	0	1	0

[1] Тут і далі БЗ — базисні змінні, Р — розв’язок.

Таблиця 6.5

БЗ	x_1	x_2	s_3	s_4	R_1	R_3	s_1	s_2	x_4	R_2	x_3	P
r (min)	-3/2	1/4	1/4	-1	-5/4	-2	0	0	0	0	0	15/4
z (max)	2	-33/2	-1/2	0	1/2	8	0	0	0	0	0	25/2
s_1	-7/2	5/4	5/4	0	-5/4	-1	1	0	0	0	0	155/4
s_2	-11/2	5/4	5/4	0	-5/4	-3	0	1	0	0	0	195/4
x_4	1/2	**3/4**	-1/4	0	1/4	0	0	0	1	0	0	25/4
R_2	-3/2	1/4	1/4	-1	-1/4	-1	0	0	0	1	0	15/4
x_3	2	-1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0

Таблиця 6.6

БЗ	x_1	x_4	s_3	s_4	R_1	R_3	s_1	s_2	x_2	R_2	x_3	P
r (min)	-5/3	-1/3	1/3	-1	-4/3	-2	0	0	0	0	0	5/3
z (max)	13	22	-6	0	6	8	0	0	0	0	0	150
s_1	-13/3	-5/3	5/3	0	-5/3	-1	1	0	0	0	0	85/3
s_2	-19/3	-5/3	5/3	0	-5/3	-3	0	1	0	0	0	115/3
x_2	2/3	4/3	-1/3	0	1/3	0	0	0	1	0	0	25/3
R_2	-5/3	-1/3	**1/3**	-1	-1/3	-1	0	0	0	1	0	5/3
x_3	8/3	4/3	-1/3	0	1/3	1	0	0	0	0	1	25/3

Таблиця 6.7

БЗ	x_1	x_4	s_4	R_1	R_2	R_3	s_1	s_2	x_2	s_3	x_3	P
r (min)	**0**	**0**	**0**	**-1**	**-1**	**-1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
z (max)	-17	16	-18	0	18	-10	0	0	0	0	0	180
s_1	4	0	**5**	0	-5	4	1	0	0	0	0	20
s_2	2	0	5	0	-5	2	0	1	0	0	0	30
x_2	-1	1	-1	0	1	-1	0	0	1	0	0	10
s_3	-5	-1	-3	-1	3	-3	0	0	0	1	0	5
x_3	1	1	-1	0	1	0	0	0	0	0	1	10

Штучні змінні, що вийшли з базису, із моделі вилучати не треба — надалі для проведення постоптимального аналізу моделі нам знадобляться всі стовпці оптимальної симплекс-таблиці. У таблицях наступних ітерацій коефіцієнти *z*-рядка за штучних змінних не рахуємо, оскільки у разі використання двоетапного методу (на відміну від М-метода) на другому етапі ці коефіцієнти не мають змісту.

Таблиця 6.8

БЗ	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	s_4	R_1	R_2	R_3	*P*
z (max)	-13/5	0	0	16	18/5	0	0	0				252
s_4	**4/5**	0	0	0	1/5	0	0	1	0	-1	4/5	4
s_2	-2	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	-2	10
x_2	-1/5	1	0	1	1/5	0	0	0	0	0	-1/5	14
s_3	-13/5	0	0	-1	3/5	0	1	0	-1	0	-3/5	17
x_3	9/5	0	1	1	1/5	0	0	0	0	0	4/5	14

Таблиця 6.9

БЗ	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	s_4	R_1	R_2	R_3	*P*
z (max)	0	0	0	16	17/4	0	0	13/4				**265**
x_1	1	0	0	0	1/4	0	0	5/4	0	-5/4	1	**5**
s_2	0	0	0	0	-1/2	1	0	5/2	0	-5/2	0	**20**
x_2	0	1	0	1	1/4	0	0	1/4	0	-1/4	0	**15**
s_3	0	0	0	-1	5/4	0	1	13/4	-1	-13/4	2	**30**
x_3	0	0	1	1	-1/4	0	0	-9/4	0	9/4	-1	**5**

Отже: $z = 265$, $x_1 = 5$, $x_2 = 15$, $x_3 = 5$, $x_4 = 0$.

6.5. Визначення цінності ресурсів

Одне з основних положень теорії двоїстості: цінність ресурсу збігається зі значенням відповідної двоїстої змінної. Основні відомості про двоїстість у лінійному програмуванні подано в додатку.

Побудуємо задачу, двоїсту до розглянутої.

Пряма задача:

											(двоїсті змінні)
$z =$	$15\,x_1$	$+10\,x_2$	$+8\,x_3$	$+2\,x_4$	$+0\,s_1$	$+0\,s_2$	$+0\,s_3$	$+0\,s_4$			
	x_1	$+\,4\,x_2$	$+\,x_3$	$+5\,x_4$	$+\,s_1$					$= 70$	(y_1)
	$3\,x_1$	$+\,2\,x_2$	$+3\,x_3$	$+5\,x_4$		$+\,s_2$				$= 80$	(y_2)
	$2\,x_1$	$+\,3\,x_2$		$+4\,x_4$			$-\,s_3$			$= 25$	(y_3)
	x_1		$+\,x_3$	$+\,x_4$				$-\,s_4$		$= 10$	(y_4)
	$2\,x_1$	$-\,x_2$	$+\,x_3$							$= 0$	(y_5)

$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad s_1, \quad s_2, \quad s_3, \quad s_4 \quad \geq 0$

Двоїста задача має такий вигляд:

$$\min \omega = 70y_1 + 80y_2 + 25y_3 + 10y_4 + 0\,y_5$$

$$\begin{array}{lll}
y_1 + 3y_2 + 2y_3 + y_4 + 2y_5 & \geq 15 & (x_1) \\
4y_1 + 2y_2 + 3y_3 - y_5 & \geq 10 & (x_2) \\
y_1 + 3y_2 + y_4 + y_5 & \geq 8 & (x_3) \\
5y_1 + 5y_2 + 4y_3 + y_4 & \geq 2 & (x_4) \\
y_1 & \geq 0 & (s_1) \\
y_2 & \geq 0 & (s_2) \\
-y_3 & \geq 0 & (s_3) \\
-y_4 & \geq 0 & (s_4)
\end{array}$$

В оптимальній таблиці прямої задачі (див. табл. 6.9) базисними є змінні x_1, x_2, x_3, s_2, s_3. Згідно з співвідношеннями доповнювальної нежорсткості відповідні цим змінним обмеження-нерівності двоїстої задачі в точці оптимуму виконуються як рівності (приклади застосування співвідношень доповнювальної нежорсткості для отримання розв'язку двоїстої задачі наведено у додатку). Таким чином, одержимо таку систему лінійних рівнянь:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ s_2 \\ s_3 \end{array}\right\} \text{базисні} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + 3y_2 + 2y_3 + y_4 + 2y_5 = 15 \\ 4y_1 + 2y_2 + 3y_3 - y_5 = 10 \\ y_1 + 3y_2 + y_4 + y_5 = 8 \\ y_2 = 0 \\ -y_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + y_4 + 2y_5 = 15 \\ 4y_1 - y_5 = 10 \\ y_1 + y_4 + y_5 = 8 \end{cases}$$

Розв'язок отриманої системи лінійних рівнянь:

$$y_1 = \frac{17}{4} = 4{,}25; \quad y_2 = 0; \quad y_3 = 0; \quad y_4 = -\frac{13}{4} = -3{,}25; \quad y_5 = 7.$$

Основна теорема двоїстості: якщо пряма і двоїста задача мають розв'язки, то їх значення співпадають. Переконаємося в цьому:

$\omega = 70y_1 + 80y_2 + 25y_3 + 10y_4 = 70 \cdot 4{,}25 + 10 \cdot (-3{,}25) = 297{,}5 - 2{,}5 = 265 \Rightarrow \omega \equiv z.$

Згідно з теорією двоїстості двоїста змінна y_i $(i = 1,...,m)$ визначає цінність i-го ресурсу (оцінку ресурсу, shadow price, тіньову ціну) — значення, на яке зміниться цільова функція у разі збільшення на одиницю рівня запасу відповідного ресурсу (відносну цінність одиниці додаткового ресурсу).

Отже, статус і цінність ресурсів наведено в табл. 6.10.

Таблиця 6.10

Номер ресурсу	*Найменування ресурсу*	*Статус*	*Цінність*
1	Цукор	Дефіцитний	4,25
2	Борошно	Недефіцитний	0
3	Дріжджі	Недефіцитний	0

4	Вимога виконання обов'язкових постачань	Дефіцитний	-3,25
5	Співвідношення об'ємів випічки ватрушок, сушок і пиріжків	Дефіцитний	7

Таким чином, у разі зміни в деяких межах рівнів запасів ресурсів, маємо:

- кожний додатковий мішок цукру (перший ресурс) дозволить збільшити сумарний прибуток пекарні на 4,25 од. вартості;
- зміна рівнів запасів борошна і цукру (другий і третій ресурси) не приведуть до зміни сумарного прибутку;
- кожна додаткова партія обов'язкових постачань ватрушок, пиріжків і здобних булочок відповідно до договорів із постійними клієнтами (четвертий ресурс) зменшить сумарний прибуток пекарні на 3,25 од. вартості;
- збільшення різниці обсягів випуску ватрушок, сушок і пиріжків $2x_1 - x_2 + x_3$ (п'ятий ресурс) на одну партію приведе до збільшення сумарного прибутку пекарні на 7 од. вартості.

Відзначимо, що отримані аналітичним шляхом значення цінності ресурсів повністю збігаються з результатами MICROSOFT EXCEL (див. рис. 6.5 — стовпець *Тіньова ціна*).

6.6. Діапазони стійкості

Визначимо допустимі діапазони, в яких можуть змінюватись рівні запасів ресурсів і ціни продукції. При цьому отриманий розв’язок повинен залишатись оптимальним.

6.6.1. Зміна компонентів вектора обмежень

Недефіцитні ресурси

Теоретичні відомості. Якщо в оптимальному розв’язку додаткова змінна s i-го обмеження *базисна*, то це обмеження *незв’язуюче* (не активне у точці оптимуму), а ресурс — *недефіцитний*. У цьому випадку значення додаткової базисної змінної дає діапазон зміни, у якому відповідна компонента b_i може: зменшуватись (у випадку знака обмеження “≤”); збільшуватись (у випадку знака обмеження “≥”).

Нехай s^0— відповідна додаткова змінна у точці оптимуму. Тоді розв’язок залишається допустимим і оптимальним у діапазоні $b_i + \Delta$,

де $-s^0 \le \Delta < \infty$ для обмеження типу “≤”;

$-\infty < \Delta \le s^0$ для обмеження типу “≥”.

У нашій задачі змінна $s_2 > 0$ (базисна, дорівнює 20), отже, другий ресурс недефіцитний. Відповідне обмеження має знак "≤", значить діапазон зміни правої частини (b_2) другого обмеження такий:

$$-20 \le \Delta_2 < \infty;$$

$$80 - 20 \le b_2 < \infty;$$

$$60 \le b_2 < \infty .$$

Змінна $s_3 > 0$ (базисна, дорівнює 30), отже, третій ресурс недефіцитний. Відповідне обмеження має знак "≥", тоді маємо такий діапазон зміни правої частини (b_3) третього обмеження:

$$-\infty \le \Delta_3 < 30;$$
$$-\infty < b_3 \le 25 + 30;$$
$$-\infty < b_3 \le 55 .$$

Фрагмент звіту про стійкість показано на рис. 6.7. З нього видно, що вище отримані результати збігаються з результатами MICROSOFT EXCEL.

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$13	Дрожжи Фактич. объём использования	55	0	25	**30**	**1E+30**
$B$11	Сахар Фактич. объём использования	70	4,25	70	20	20
$B$12	Мука Фактич. объём использования	60	0	80	**1E+30**	**20**
$G$15	Суммарн.объём выпечки ватрушек,пиро	10	-3,25	10	4	222222
$G$18	Соотношение объёмов выпечки ватруше	0	7	0	5	5

$-\infty \le \Delta_3 < 30$

$-20 \le \Delta_2 < \infty$

Рис. 6.7

Дефіцитні ресурси

Теоретичні відомості. Якщо в оптимальному розв’язку деяка додаткова змінна *небазисна*, то відповідне їй обмеження *зв'язуюче* (активне у точці оптимуму), а ресурс — *дефіцитний*.

У разі зміни компонент вектора b змінюється вектор базисних змінних $x_B = B^{-1}b$ і значення цільової функції $z = c_B^T x_B$. При цьому існує діапазон змін b, у якому компоненти вектора x_B залишаються невід’ємними. Таким чином, для дефіцитних ресурсів задача постоптимального аналізу ставиться так: знайти такий діапазон змін рівня запасів, у якому **поточний оптимальний розв'язок залишається незмінним, тобто його базис не змінюється.**

Розглянемо *обмеження типу “≤”.* Після зведення ЗЛП до канонічної форми вона прийме вигляд

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_s = b_i ,$$

де x_s — залишкова змінна.

Нехай тепер права частина буде $b_i + \Delta$:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_s = b_i + \Delta .$$

Це рівняння можна переписати у вигляді:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + (x_s - \Delta) = b_i .$$

Отже, якщо в оптимальному розв'язку змінна x_s небазисна, то її зміна приведе до такої зміни вектора x_B:

$$x_B = \beta - \alpha_{*s}(x_s - \Delta) = \beta - \alpha_{*s}(-\Delta),$$

де α_{*s} — стовпчик оптимальної симплекс-таблиці, що відповідає змінній x_s (за визначенням $\alpha_{*s} = B^{-1}a_{*s}$).

З того, що вектор x_B повинен бути невід'ємним, випливає співвідношення

$$\beta - \alpha_{*s}(-\Delta) \geq 0;$$

$$\beta \geq -\alpha_{*s}\Delta.$$

Таким чином, одержали систему з *m* нерівностей

$$\beta_i \geq -\alpha_{is}\Delta, i = \overline{1,m}.$$

Якщо $\alpha_{is} > 0$, то відповідна нерівність прийме вигляд: $\dfrac{\beta_i}{-\alpha_{is}} \leq \Delta$.

Якщо $\alpha_{is} < 0$, то $\Delta \leq \dfrac{\beta_i}{-\alpha_{is}}$.

Отже, допустимий діапазон змін Δ

$$\max_{i/\alpha_{is} > 0}\left\{\frac{\beta_i}{-\alpha_{is}}\right\} \leq \Delta \leq \min_{i/\alpha_{is} < 0}\left\{\frac{\beta_i}{-\alpha_{is}}\right\}. \qquad (1)$$

Якщо немає жодного $\alpha_{is} > 0$, то $\Delta > -\infty$. Якщо немає жодного $\alpha_{is} < 0$, то $\Delta < \infty$.

У нашій задачі змінна s_1 — небазисна, отже, перший ресурс — дефіцитний. Вихідне обмеження має знак "≤". У оптимальній симплекс-таблиці (рис. 6.8) виділено стовпець α_{is_1}, що відповідає небазисній змінній s_1.

Тоді допустимий діапазон змін Δ_1 такий:

$$\max\left\{\frac{5}{-1/4};\frac{15}{-1/4};\frac{30}{-5/4}\right\} \le \Delta_1 \le \min\left\{\frac{20}{1/2};\frac{5}{1/4}\right\};$$

$$\max\{-20;-60;-24\} \le \Delta_1 \le \min\{40;20\};$$

$$-20 \le \Delta_1 \le 20\,.$$

БЗ	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	s_4	R_1	R_2	R_3	*P*
z (max)	0	0	0	16	17/4	0	0	13/4				265
x_1	1	0	0	0	**1/4**	0	0	**5/4**	0	-5/4	**1**	**5**
s_2	0	0	0	0	**-1/2**	1	0	**5/2**	0	-5/2	**0**	**20**
x_2	0	1	0	1	**1/4**	0	0	**1/4**	0	-1/4	**0**	**15**
s_3	0	0	0	-1	**5/4**	0	1	**13/4**	-1	-13/4	**2**	**30**
x_3	0	[illegible]	1	1	**-1/4**	0	0	**-9/4**	0	9/4	**-1**	**5**

$\alpha_{is_1} > 0, i = 1,2,3.$

$\alpha_{is_1} < 0$

Рис. 6.8

Отримані результати збіглися з результатами MICROSOFT EXCEL (рис. 6.9 — рядок *Сахар Фактич. объём использования*, стовпці "*Допустимое Увеличение*" і "*Допустимое Уменьшение* ").

Абсолютний діапазон зміни рівня запасу ресурсу такий:

$$70 - 20 \le b_1 \le 70 + 20;$$

$$50 \le b_1 \le 90.$$

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограни-чение Правая часть	Допус-тимое Увели-чение	Допусти-мое Умень-шение
$B$13	Дрожжи Фактич. объём использования	55	0	25	30	1E+30
$B$11	Сахар Фактич. объём использования	70	4,25	70	**20**	**20**
$B$12	Мука Фактич. объём использования	60	0	80	1E+30	20
$G$15	Суммарн.объём выпечки ватрушек,пир	10	-3,25	10	**4**	**2,222222**
$G$18	Соотношение объёмов выпечки ватруш	0	7	0	5	5

$-20 \le \Delta_1 \le 20$

$-{}^{20}/_{9} \le \Delta_4 < 4$

$-5 \le \Delta_5 < 5$

Рис. 6.9.

Теоретичні відомості. Тепер розглянемо *обмеження типу "≥".* У задачі лінійного програмування у канонічній формі воно виглядає так:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - x_s = b_i ,$$

де x_s — надлишкова змінна.

Нехай тепер права частина буде $b_i + \Delta$:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - x_s = b_i + \Delta .$$

Це рівняння можна переписати у вигляді

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - (x_s + \Delta) = b_i .$$

Отже, якщо в оптимальному розв'язку змінна x_s небазисна, то її зміна вплине на вектор базисних змінних так:

$$x_B = \beta - \alpha_{*s}(x_s + \Delta) = \beta - \alpha_{*s}\Delta .$$

Із врахуванням того, що вектор x_B невід'ємний, повинно виконуватися співвідношення

$$\beta - \alpha_{*s}\Delta \ge 0 ;$$

$$\beta \ge \alpha_{*s}\Delta .$$

Таким чином, одержали систему з m нерівностей:

$$\beta_i \ge \alpha_{is}\Delta, \quad i = \overline{1, m} .$$

Якщо $\alpha_{is} > 0$, то відповідна нерівність така: $\Delta \le \dfrac{\beta_i}{\alpha_{is}}$.

Якщо $\alpha_{is} < 0$, то $\dfrac{\beta_i}{\alpha_{is}} \le \Delta$.

Таким чином, допустимий діапазон зміни Δ

$$\max_{i/\alpha_{is} < 0} \left\{ \frac{\beta_i}{\alpha_{is}} \right\} \le \Delta \le \min_{i/\alpha_{is} > 0} \left\{ \frac{\beta_i}{\alpha_{is}} \right\} .$$

Якщо немає жодного $\alpha_{is} > 0$, то $\Delta < \infty$, якщо немає жодного $\alpha_{is} < 0$, то $\Delta > -\infty$.

У нашій задачі змінна s_4 — небазисна, отже, четвертий ресурс — дефіцитний. Вихідне обмеження має знак "≥", тоді діапазон зміни Δ_4 такий (знаменники дробів узято зі стовпчика s_4 оптимальної симплекс-таблиці, див. рис. 6. 8):

$$\max\left\{ \frac{5}{-9/4} \right\} \le \Delta_4 \le \min\left\{ \frac{5}{5/4}; \frac{20}{5/2}; \frac{15}{1/4}; \frac{30}{13/4} \right\};$$

$$\max\left\{ -\frac{20}{9} \right\} \le \Delta_4 \le \min\left\{ 4; 8; 60; \frac{120}{13} \right\};$$

$$-\frac{20}{9} \le \Delta_4 \le 4.$$

Маємо збіг із результатами MICROSOFT EXCEL (див. рис. 6.9).

Абсолютний діапазон зміни правої частини обмеження:

$$10 - \frac{20}{9} \le b_4 \le 10 + 4, \text{ або } 7{,}7(7) \le b_4 \le 14.$$

Проаналізуємо наслідки зміни правої частини останнього обмеження моделі $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$ (співвідношення обсягів випуску ватрушок, сушок і пиріжків).

Обмеження такого роду звичайно є обмеженнями на комплектність випуску продукції. У цьому випадку права частина обмеження, по суті, не може бути відмінною від нуля. Якщо допустити можливість зміни значення правої частини, то у разі аналізу цього ресурсу питання можна було б поставити так: на яку величину сума подвоєного обсягу випуску ватрушок і пиріжків може перевищувати (або бути менше) обсяг випуску сушок. У такому контексті обмеження перестає бути обмеженням — вимогою комплектності продукції.

У початковому допустимому базисному розв'язку це обмеження містило штучну базисну змінну R_3 (цю змінну можна розглядати як невід'ємну залишкову, тому для визначення діапазону змін b_5 слід використовувати співвідношення (1)).

$$\max\left\{\frac{5}{-1}; \frac{30}{-2}\right\} \le \Delta_5 \le \min\left\{\frac{5}{-(-1)}\right\};$$

$$-5 \le \Delta_5 \le 5;$$

$$0 - 5 \le b_5 \le 0 + 5 \quad \text{або} \quad -5 \le b_5 \le 5 .$$

6.6.2. Зміна коефіцієнтів цільової функції

Існує діапазон зміни коефіцієнтів цільової функції змінних, у якому отриманий розв'язок залишається оптимальним. Зміна коефіцієнта базисної змінної в межах цього діапазону приводить до зміни значення цільової функції, тому що $z = c_B^T\beta$ і одна з компонент вектора c_B змінюється. Зміна коефіцієнта небазисної змінної не впливає на значення задачі.

Небазисні змінні

Теоретичні відомості. Зміна коефіцієнта цільової функції небазисної змінної x_j впливає на відносну оцінку тільки цієї змінної.

Нехай нове значення коефіцієнта цільової функції дорівнює $\overline{c_j} = c_j + \Delta$. Відносну оцінку небазисної змінної обчисліть за формулою

$$d_j = \pi^T a_{*j} - c_j .$$

Із врахуванням зміни коефіцієнта цільової функції нове значення відносної оцінки змінної таке:

$$\overline{d_j} = \pi^T a_{*j} - \overline{c_j} = \pi^T a_{*j} - (c_j + \Delta) = d_j - \Delta .$$

Отже, для небазисної змінної діапазон стійкості, у якому c_j може змінюватися, задайте формулою

$$c_j + \Delta,$$

де $-\infty < \Delta < d_j^{\,o}$; $d_j^{\,o}$ — відносна оцінка змінної x_j, що відповідає оптимальному розв'язку.

В задачі на мінімум величина Δ задовольняє нерівності: $d_j^{\,o} < \Delta < +\infty$.

У нашій задачі (див. оптимальну симплекс-таблицю на рис. 6.10), змінна x_4 є небазисною, тому для неї $-\infty < \Delta_4 < 16$, що збігається з результатами MICROSOFT EXCEL (відповідний фрагмент звіту про стійкість зображено на рис. 6.11). Тоді із врахуванням початкових значень діапазон зміни коефіцієнта цільової функції при даній змінній

$$-\infty < c_4 < 2 + 16 \qquad \text{або} \qquad -\infty < c_4 < 18.$$

$\Delta_4 = d_4$

Базисна змінна	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	s_4	R_1	R_2	R_3	*Розв'язок*
z (max)	0	0	0	**16**	**17/4**	0	0	**13/4**				265
x_1	1	0	0	**0**	**1/4**	0	0	**5/4**	0	-5/4	1	5
s_2	0	0	0	0	-1/2	1	0	5/2	0	-5/2	0	20
x_2	0	1	0	**1**	**1/4**	0	0	**1/4**	0	-1/4	0	15
s_3	0	0	0	-1	5/4	0	1	13/4	-1	13/4	2	30
x_3	0	0	1	**1**	**-1/4**	0	0	**-9/4**	0	9/4	-1	5

Дані для розрахунку Δ_1

Дані для розрахунку Δ_2

Дані для розрахунку Δ_3

Рис. 6.10

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$3	Ватрушки Количество	5	0	15	1E+30	2,6
$B$4	Сушки Количество	15	0	10	1E+30	13
$B$5	Пирожки Количество	5	0	8	1,44444	16
$B$6	Сдобные булочки Количество	0	-16	2	16	1E+30

Δ_1 Δ_2 Δ_3 Δ_4

Рис. 6.11

Базисні змінні

Теоретичні відомості. Зміна коефіцієнта базисної змінної впливає на відносні оцінки небазисних змінних.

Визначимо наслідки зміни коефіцієнта цільової функції i-ї базисної змінної (нехай він змінився на Δ). У цьому випадку вектор коефіцієнтів цільової функції зміниться так: $\overline{c_B} = c_B + \Delta e_i$. Тоді відносна оцінка j-ї небазисної змінної дорівнюватиме

$$\overline{d_j} = (c_B + \Delta e_i)^T \alpha_{*j} - c_j = (c_B^T \alpha_{*j} - c_j) + \Delta e_i^T \alpha_{*j} = d_j^0 + \Delta\alpha_{ij},$$

де $\alpha_{ij} = (B^{-1} a_{*j})_i$, d_j^0 — відносна оцінка змінної x_j у поточному оптимальному розв'язку.

Для того, щоб розв'язок залишався оптимальним, повинна виконуватись умова (у випадку задачі на максимум) $\overline{d_j} \geq 0, \quad \forall j$, тобто $d_j^0 + \Delta\alpha_{ij} \geq 0, \quad \forall j$.

Таким чином, для базисної змінної діапазон стійкості, у якому може змінюватися коефіцієнт c_i, залишаючи поточний розв'язок оптимальним, задається виразом:

$$c_i + \Delta,$$

де

$$\max_{j/\alpha_{ij} > 0} \left\{ \frac{d_j^0}{-\alpha_{ij}} \right\} \leq \Delta \leq \min_{j/\alpha_{ij} < 0} \left\{ \frac{d_j^0}{-\alpha_{ij}} \right\}.$$

Якщо немає $\alpha_{ij} < 0$ і $\alpha_{ij} > 0$, то $\Delta < \infty$ і $\Delta > -\infty$ відповідно.

Для задачі на мінімум діапазон стійкості коефіцієнта цільової функції задається виразом:

$$\max_{j/\alpha_{ij} < 0} \left\{ \frac{d_j^0}{-\alpha_{ij}} \right\} \leq \Delta \leq \min_{j/\alpha_{ij} > 0} \left\{ \frac{d_j^0}{-\alpha_{ij}} \right\}.$$

У нашій задачі. Змінна x_1 — базисна (дані узято з оптимальної симплекс-таблиці, див. рис. 6.10). Тоді

$$\max\left\{ \frac{17/4}{-1/4}; \frac{13/4}{-5/4} \right\} \leq \Delta_1 < \infty;$$

$$\max\{-17; -2{,}6\} \leq \Delta_1 < \infty;$$

$$-2{,}6 \leq \Delta_1 < \infty.$$

Із урахуванням початкових значень абсолютний діапазон зміни коефіцієнта цільової функції даної змінної $15 - 2{,}6 \leq c_1 < \infty; \quad 12{,}4 \leq c_1 < \infty$.

Змінна x_2 — базисна (див. рис. 6.10), тоді

$$\max\left\{ \frac{16}{-1}; \frac{17/4}{-1/4}; \frac{13/4}{-1/4} \right\} \leq \Delta_2 < \infty;$$

$$\max\{-16; -17; -13\} \leq \Delta_2 < \infty;$$

$$-13 \leq \Delta_2 < \infty.$$

Абсолютний діапазон зміни коефіцієнта цільової функції для цієї змінної:

$$10 - 13 \le c_2 < \infty;$$

$$-3 \le c_2 < \infty.$$

Змінна x_3 — базисна:

$$\max\left\{\frac{16}{-1}\right\} \le \Delta_3 < \min\left\{\frac{17/4}{-(-1/4)}; \frac{13/4}{-(-9/4)}\right\};$$

$$-16 \le \Delta_3 < \min\{17; 13/9\};$$

$$-16 \le \Delta_3 < 13/9.$$

Абсолютний діапазон зміни коефіцієнта цільової функції для цієї змінної:

$$8 - 16 \le c_3 < 8 + \frac{13}{9}; \quad -8 \le c_3 < 9{,}4(4).$$

Всі результати збігаються з результатами MICROSOFT EXCEL EXCEL (див. рис. 6.11). Для залишкових і надлишкових змінних (у нас — s_2 і s_3) такий аналіз не проводять.

6.6.3. Результати розв’язання і постоптимального аналізу задачі

Оптимальний розв’язок задачі

При вихідних даних оптимальні обсяги випуску продукції такі:

- ватрушки — 5 контейнерів;
- сушки —15 контейнерів;
- пиріжки з повидлом — 5 контейнерів;
- здобні булочки — 0 контейнерів.

При цьому прибуток становитиме 265 од. вартості.

У результаті виконання постоптимального аналізу було отримано декілька діапазонів стійкості та цінності ресурсів.

Діапазони зміни рівня запасів ресурсів.

Відносні діапазони зміни рівнів запасів ресурсів (на скільки можуть зменшитися або збільшитися рівні запасів, не впливаючи на розв’язок) (Δ_i):

- добові запаси цукру $-20 \le \Delta_1 \le 20;$
- добові запаси борошна $-20 \le \Delta_2 < \infty;$
- добові запаси дріжджів $0 < \Delta_3 \le 30;$ (запаси дріжджів не можуть бути від’ємними)
- обсяги обов'язкових постачань $\frac{20}{9} = -2{,}2(2) \le \Delta_4 \le 4;$
- перевищення суми обсягу випуску пиріжків і подвоєного обсягу випуску ватрушок над обсягом випуску сушок $-5 \le \Delta_5 \le 5.$

Абсолютні діапазони зміни рівнів запасів ресурсів (до яких меж можна зменшувати або збільшувати рівні запасів) (b_i):

- добові запаси цукру $50 \le b_1 \le 90;$
- добові запаси борошна $60 \le b_2 < \infty;$
- добові запаси дріжджів $0 < b_3 \le 55;$ (запаси дріжджів не можуть бути від'ємними)
- обсяги обов'язкових постачань $\frac{70}{9} = 7{,}7(7) \le b_4 \le 14;$
- перевищення суми обсягу випуску пиріжків і подвоєного обсягу випуску ватрушок над обсягом випуску сушок $-5 \le b_5 \le 5.$

Цінність ресурсів.

У разі зміни рівнів запасів ресурсів у знайдених діапазонах, маємо:

- кожний додатковий мішок цукру (перший ресурс) дозволить збільшити сумарний прибуток на 4,25 од. вартості (відповідно, нестача одного мішка цукру приведе до зменшення сумарного прибутку пекарні на 4,25 од. вартості);
- зміна рівнів запасів борошна і дріжджів (другий і третій ресурси) не приведуть до зміни сумарного прибутку;
- кожний додатковий контейнер обов'язкових кондитерських виробів відповідно до договорів із постійними клієнтами (четвертий ресурс) зменшить сумарний прибуток на 3,25 од. вартості (зменшення на один контейнер обсягу обов'язкових постачань приведе до збільшення сумарного прибутку на 3,25 од. вартості);
- збільшення (зменшення) різниці обсягів випуску ватрушок, пиріжків і сушок $2x_1 - x_2 + x_3$ (п'ятий ресурс) на один контейнер приведе до збільшення (зменшення) сумарного прибутку на 7 од. вартості.

Діапазони зміни цін продукції.

Допустимі відносні діапазони зміни цін продукції, за яких оптимальний розв'язок не зміниться:

- ватрушки $-2{,}6 \le \Delta_1 < \infty;$
- сушки $-13 \le \Delta_2 < \infty;$
- пиріжки $-16 \le \Delta_3 \le 1{,}4(4) = \frac{13}{9};$
- булочки $-\infty \le \Delta_4 \le 16.$

Допустимі абсолютні діапазони зміни цін продукції, за яких оптимальний розв'язок не зміниться:

- ватрушки $12{,}4 \le c_1 < \infty;.$
- сушки $-3 \le c_2 < \infty;$
- пиріжки $-8 \le c_3 \le 9{,}4(4) = \frac{85}{9};$
- булочки $-\infty \le c_4 \le 18.$

6.6.4. Деякі особливості проведення постоптимального аналізу задач засобами MICROSOFT EXCEL

Наявність обмежень типу $x_j \geq h_j$ або $x_j \leq h_j$.

Якщо в задачі є обмеження $x_j \geq h_j$ або $x_j \leq h_j$, то для визначення діапазонів стійкості до зміни правих частин таких обмежень засобами MICROSOFT EXCEL необхідно вжити такі заходи:

Нехай маємо таку задачу лінійного програмування:

цільова функція

$$\max z = 30x_1 + 20x_2.$$

обмеження

$$10x_1 + 5x_2 \leq 500 \quad \text{(ресурс 1);}$$

$$x_1 \geq 20 \quad \text{(ресурс 2);}$$

$$x_2 \leq 40 \quad \text{(ресурс 3);}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Заповніть лист MICROSOFT EXCEL (рис. 6.12).

	A	B	C	D	Строка формул		G
1							
2		x 1	x 2	ЦФ			
3				*0*			
4	c_j	30	20				
5	Ограничения на объём выпуска:						
6	Нижняя граница	20					
7	Верхняя граница		40				
8							
9				Факт		Лимит	
10	Ресурс 1	10	5	0	<=	500	
11							

Рис. 6.12

Залежності (формули) зображено на рис. 6.13.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		x 1	x 2	ЦФ			
3				*=СУММПРОИЗВ(B4:C4,B3:C3)*			
4	c_j	30	20				
5	Ограничения на объём выпуска:						
6	Нижняя граница	20					
7	граница		40				
8							
9				Факт		Лимит	
10	Ресурс 1	10	5	=СУММПРОИЗВ(B10:C10,B3:C3)	<=	500	
11							

Рис. 6.13

Знайдіть розв'язок, заповнивши діалогове вікно надбудови ***Поиск решения*** (рис.6.14).

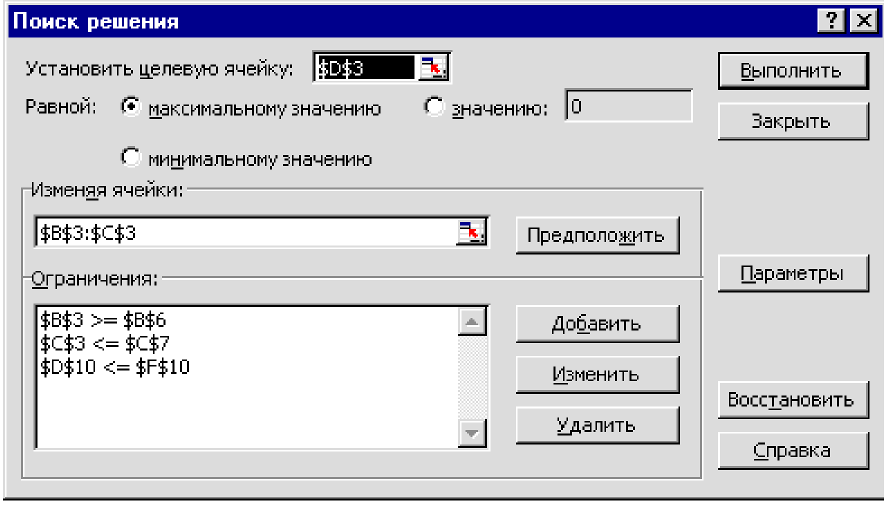


Рис. 6.14

Оптимальний розв'язок розглянутої задачі: $x_1 = 30,\ x_2 = 40,\ z = 1700.$

Звіт з стійкості, згенерований в MICROSOFT EXCEL, показано на рис. 6.15.

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$3	x1	30	0	30	10	30
$C$3	x2	40	5	20	1E+30	5

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$D$10	Ресурс 1 Факт	500	3	500	1E+30	100

Рис. 6.15

Як видно з рис. 6.15, постоптимальний аналіз обмежень, які визначають нижню і верхню межі змінних x_1 і x_2, не виконано. Це пояснюється тим, що в MICROSOFT EXCEL аналізуються лише ті обмеження, в яких ліва частина є виразом від змінних (змінюваних комірок)[1] задачі (нехай навіть ці вирази тривіальні).

Щоб одержати у звіті інформацію про діапазони стійкості всіх елементів вектора обмежень, введіть додаткові комірки, які посилаються на комірки, що містять змінні (у даному випадку потрібно додати дві додаткові комірки, що містять формули =B3 і =C3 відповідно). У діалоговому вікні ***Поиск решения*** ліві частини обмежень повинні посилатися на ці нові комірки, а не на змінювані комірки (змінні).

У нашому випадку це має такий вигляд (рис. 6.16, 6.17).

[1] Тут і далі терміни "змінювана комірка" і "змінна" є синонімами.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		x1	x2	ЦФ			
3				=СУММПРОИЗВ(B4:C4,B3:C3)			
4	c j	30	20				
5							
6		Ограничения:					
7				Факт		Предельное значение	
8	Ресурс 1	10	5	=СУММПРОИЗВ(B8:C8,B3:C3)	<=	500	
9				Ограничения на объём выпуска:			
10	Ресурс 2 (огр. снизу на x1)			=B3	>=	20	
11	Ресурс 3 (огр. сверху на x2)			=C3	<=	40	
12							

Рис. 6.16

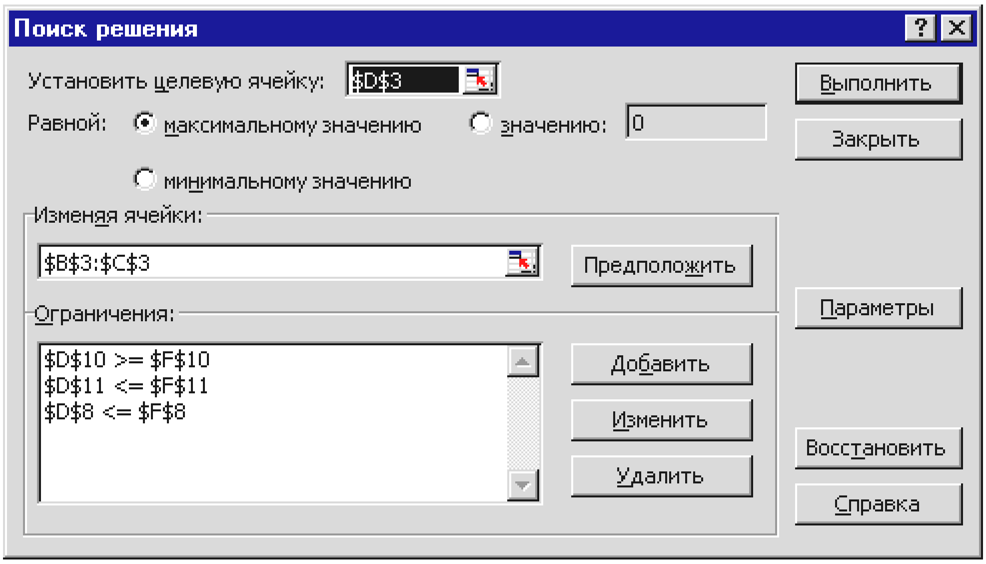


Рис. 6.17

Тоді, розв'язавши задачу, одержите повний звіт з стійкості (рис. 6.18).

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$3	x1	30	0	30	10	30
$C$3	x2	40	0	20	1E+30	5

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$D$11	Рес.3 (огр. сверху на x2) Факт	40	5	40	20	40
$D$8	Ресурс 1 Факт	500	3	500	1E+30	100
$D$10	Рес.2 (огр. снизу на x1) Факт	30	0	20	10	1E+30

Рис. 6.18

Наявність альтернативних оптимумів

Методи одержання альтернативних оптимумів[1] ЗЛП розглянемо на прикладі такої задачі:

$$\max z = 6x_1 + 4x_2$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 12$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 12$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Графік цієї задачі подано на рис. 6.19. Як видно з графіка, нормаль цільової функції $z = 6x_1 + 4x_2$ перпендикулярна обмеженню $3x_1 + 2x_2 \le 12$. Задача має альтернативні оптимуми, на графіку — це точки відрізку АС.

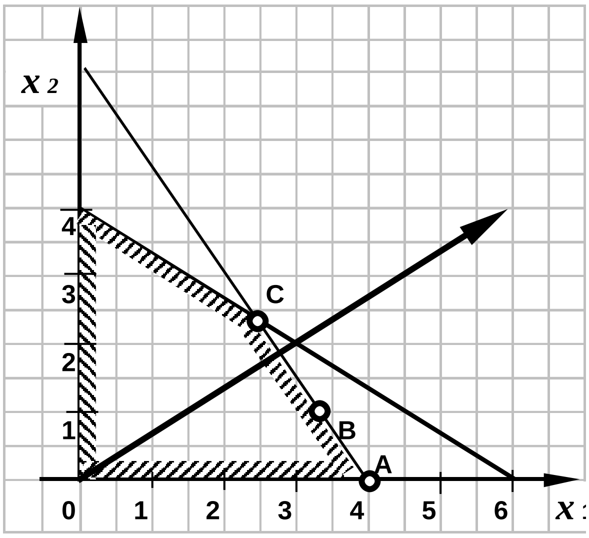


Рис. 6.19

Щоб одержати вершини множини альтернативних оптимумів ЗЛП засобами MICROSOFT EXCEL, виконайте такі дії:

- введіть у таблицю додаткові комірки, що посилаються на змінювані комірки (змінні) (як і в попередньому підрозділі, в обмеженнях не повинно бути прямих посилань на змінювані комірки);
- обмеження невід'ємності змінних в явному вигляді задайте в полі ***Ограничения*** діалогового вікна ***Поиск решения***, а не в діалоговому вікні ***Параметры поиска решения***, як це рекомендувалося робити раніше***.*** У лівій частині цих обмежень повинні стояти посилання на додаткові комірки, у правій — 0.

Відповідно до зазначених рекомендацій лист вищенаведеної задачі повинен мати приблизно такий вигляд, як це показано на рис. 6.20. Використовувані залежності (формули) показано на рис. 6.21. Діалогове вікно ***Поиск решения*** і ***Параметры поиска решения*** зображено на рис. 6.22.

---

[1] У розробці даного питання брав участь Бочаров О. (ІС-81).

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	Переменная		Коэффициенты			Вспомога-тельные ячейки	
3			ограничений		ЦФ		
4			первого	второго		Значение	
5	*x*1		3	2	6	0	
6	*x*2		2	3	4	0	
7							
8	Значение ЦФ		0				
9							
10		Ограничения	Значения				
11			Факт	Предельное			
12		первое	0	<=	12		
13		второе	0	<=	12		
14							

Рис. 6.20

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	Переменная		Коэффициенты			Вспомога-тельные ячейки	
3			ограничений		ЦФ		
4			первого	второго		Значение	
5	*x*1		3	2	6	=B5	
6	*x*2		2	3	4	=B6	
7							
8	Значение ЦФ		=СУММПРОИЗВ(E5:E6,B5:B6)				
9							
10		Ограничения	Значения				
11			Факт	Предельное			
12		первое	=СУММПРОИЗВ(C5:C6,B5:B6)	<=	12		
13		второе	=СУММПРОИЗВ(D5:D6,B5:B6)	<=	12		
14							

Рис. 6.21

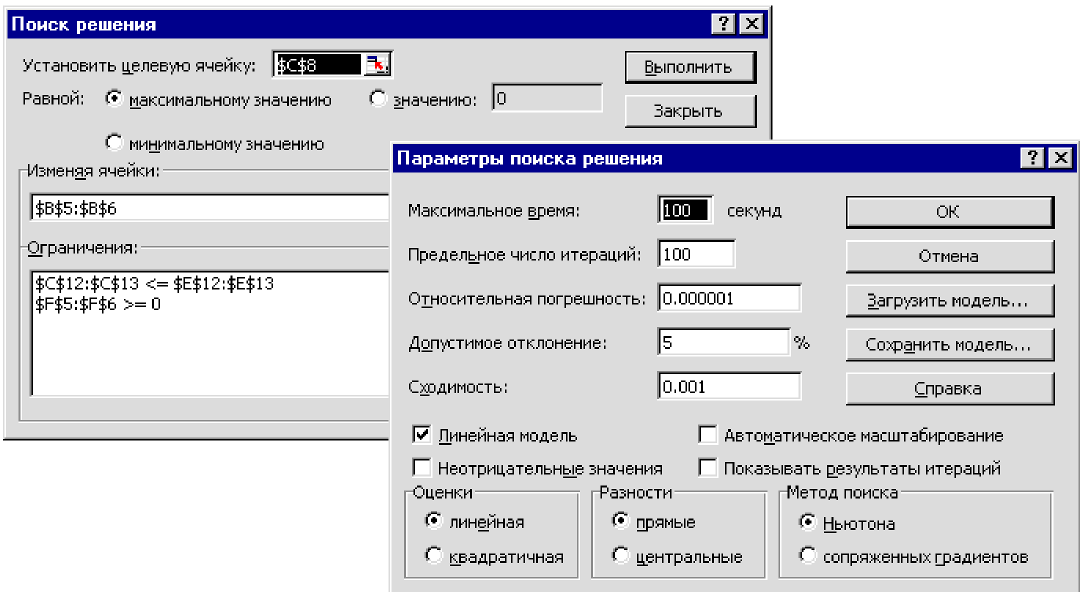


Рис. 6.22

У результаті отримано оптимальний розв'язок розглянутої задачі (рис. 6.23): $x_1 = 4,\ x_2 = 0,\ z = 24$ (на рис. 6.19 йому відповідає точка А).

Переменная		Коэффициенты			Вспомогательные ячейки
		ограничений		ЦФ	
		первого	второго		Значение
$x1$	4	3	2	6	4
$x2$	0	2	3	4	0

Значение ЦФ	24

Ограничения	Значения		
	Факт	Предельное	
первое	12	<=	12
второе	8	<=	12

Рис. 6.23

Звіт за результатами зображено на рис. 6.24, звіт з стійкості — на рис. 6.25; обидва згенеровані в MICROSOFT EXCEL

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходно	Результат
$C$8	Значение ЦФ	0	24

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходно	Результат
$B$5	x1	0	4
$B$6	x2	0	0

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$C$12	первое Факт	12	$C$12<=$E$12	**связанное**	0
$C$13	второе Факт	8	$C$13<=$E$13	не связан.	4
$F$5	x1 Значение	4	$F$5>=0	не связан.	4
$F$6	x2 Значение	0	$F$6>=0	**связанное**	0

Рис. 6.24

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой коэффициент	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
$B$5	x1	4	0	6	1E+30	**0**
$B$6	x2	0	0	4	**0**	1E+30

Ознака наявності альтернативних оптимумів

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$C$12	первое Факт	12	2	12	6	12
$C$13	второе Факт	8	0	12	1E+30	4
$F$5	x1 Значение	4	0	0	4	1E+30
$F$6	x2 Значение	0	0	0	2.4	1E+30

Рис. 6.25

Ознака наявності альтернативних оптимумів: у розділі *Изменяемые ячейки* звіту з стійкості хоча б одна змінна поля *Допустимое Увеличение* або *Допустимое Уменьшение* дорівнює нулю (див. рис. 6.25).

Зі звіту за результатами (див. рис. 6.24) бачимо, що оптимум є вершиною, оскільки кількість зв'язуючих обмежень у ньому дорівнює двом (кількості змінних вихідної задачі).

Схема переходу до інших альтернативних розв'язків:

A. визначіть множину *P* змінних (змінюваних комірок), значення яких потрібно змінити, щоб перейти до наступного оптимального розв'язку;

B. виберіть змінну з множини *P*;

C. визначіть напрям зміни обраної змінної (зменшення або збільшення);

D. визначіть нове значення змінної;

E. задайте це значення і виконайте команду ***Поиск решения***;

F. якщо отримано нову вершину, то **СТОП**, інакше - перейдіть на п. **D**.

G. Пункти **B — F** виконують доти, доки не буде визначено усі вершини множини оптимальних розв'язків.

Тепер дамо деякі рекомендації з виконання вищеперерахованих пунктів.

A. У множину змінних, значення яких потрібно змінити, щоб перейти до наступного оптимального розв'язку, входять такі значення комірок, які у полі *Допустимое Увеличение* або *Допустимое Уменьшение* дорівнюють нулю. У нашому прикладі це змінні x_1 і x_2 (див. рис. 6.25).

B. З отриманої множини виберіть комірку, що має найменший по модулю коефіцієнт цільової функції (поле *Целевой коэффициент).* У нашому випадку це змінювана комірка x_2.

C. Тепер визначіть, як треба змінювати обрану комірку. У цьому випадку рекомендується робити так:

- для задачі на максимум

- якщо у стовпчику *Допустимое Увеличение* значення обраної комірки дорівнює нулю, то потрібно збільшувати це значення;
- якщо у стовпчику *Допустимое Уменьшение* значення обраної комірки дорівнює нулю, то потрібно зменшувати це значення.

- для задачі на мінімум

- якщо у стовпчику *Допустимое Увеличение* значення обраної комірки дорівнює нулю, то потрібно зменшувати це значення;
- якщо у стовпчику *Допустимое Уменьшение* значення обраної комірки дорівнює нулю, то потрібно збільшувати це значення.

D. Визначіть, до яких меж потрібно змінити значення змінної, щоб перейти до іншої оптимальної вершини.

У поточному оптимальному розв'язку друге обмеження незв'язуюче (відповідний ресурс — недефіцитний). Якщо ми почнемо збільшувати змінну, то залишок цього ресурсу буде зменшуватися.

D. 1. Присвойте змінній x_2 значення 1, зберігши значення змінної $x_1 = 4$ (рис. 6.26). За таких значень цих змінних другий ресурс, як і раніше, недефіцитний.

Переменная		Коэффициенты			Вспомогательные ячейки
		ограничений		ЦФ	
		первого	второго		Значение
*x*1	4	3	2	6	4
*x*2	1	2	3	4	1

Значение ЦФ	28

Ограничения	Значения		
	Факт	Предельное	
первое	14	<=	12
второе	11	<=	12

Рис. 6.26

Виконайте команду ***Поиск решения***. У результаті одержите такий оптимальний розв'язок: $x_1 = 3\frac{1}{3}$, $x_2 = 1$, $z = 20$ (на рис. 6.19 це точка В, що лежить усередині відрізка АС).

Відповідний звіт за результатами зображено на рис. 6.27. Він підтверджує, що отриманий розв'язок не є вершиною, оскільки в ньому зв'язуючим є одне, а не два обмеження.

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходно	Результат
\$C\$8	Значение ЦФ	28	24

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходно	Результат
\$B\$5	x1	4	3.333333333
\$B\$6	x2	1	1

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	формула	Статус	Разница
\$C\$12	первое Факт	12	\$C\$12<=\$E\$12	**связанное**	0
\$C\$13	второе Факт	9.666666667	\$C\$13<=\$E\$13	не связан.	2.333333333
\$F\$5	x1 Значение	3.333333333	\$F\$5>=0	не связан.	3.333333333
\$F\$6	x2 Значение	1	\$F\$6>=0	не связан.	1

Рис. 6.27

D. 2. Змініть значення змінної x_2, щоб порушилося друге обмеження.

Присвойте змінній x_2 значення 2, зберігши значення змінної $x_1 = 4$ (рис. 6.28). За таких значень цих змінних другий ресурс також стає дефіцитним.

	A	B	C	D	E	F
2	*Переменная*		*Коэффициенты*			*Вспомога-тельные ячейки*
3			*ограничений*		*ЦФ*	
4			*первого*	*второго*		*Значение*
5	**x**1	4	3	2	6	4
6	**x**2	2	2	3	4	2
7						
8	*Значение ЦФ*		32			
9						
10		*Ограничения*	*Значения*			
11			*Факт*	*Предельное*		
12		первое	16	<=	12	
13		второе	14	<=	12	

Рис. 6.28

Виконайте команду ***Поиск решения***. У результаті одержите такий розв’язок: $x_1 = 2{,}4$, $x_2 = 2{,}4$, $z = 20$ (на рис. 6.19 це вершина С).

Відповідний звіт за результатами зображено на рис. 6.29. Він підтверджує, що отриманий розв’язок є вершиною, оскільки в ньому зв'язуючими є два обмеження.

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходно	Результат
$C$8	Значение ЦФ первого	32	24

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходно	Результат
$B$5	x1	4	2.4
$B$6	x2	2	2.4

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	формула	Статус	Разница
$C$12	первое Факт	12	$C$12<=$E$12	**связанное**	0
$C$13	второе Факт	12	$C$13<=$E$13	**связанное**	0
$F$5	x1 Значение	2.4	$F$5>=0	не связан.	2.4
$F$6	x2 Значение	2.4	$F$6>=0	не связан.	2.4

Рис. 6.29

Отже, засобами MICROSOFT EXCEL ми одержали обидві вершини множини альтернативних оптимумів. Таким чином, розв’язок задачі такий:

$$x^{\text{opt}} = \lambda\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} + (1-\lambda)\begin{pmatrix}2{,}4\\2{,}4\end{pmatrix}, \quad 0 \le \lambda \le 1; \quad z^{\text{opt}} = 20.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Исследование операций*. В 2 т. Методологические основы и математические методы /Под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. – М.: Мир, 1981. — Т. 1. – 712 с.
2. *Муртаф Б*. Современное линейное программирование Теория и практика: в 2 т. — М.: Мир, 1984. — Т.1. – 224 с.
3. *Таха Х*. Введение в исследование операций: В 2 т. — М.: Мир, 1985. — Т. 1. – 325 с.
4. *Калихман И. Л*. Линейная алгебра и программирование. — М. Высш. шк. 1967. — 428 с.

ДОДАТОК. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ТЕОРІЇ ДВОЇСТОСТІ

Побудова двоїстих задач

Двоїста задача — це задача лінійного програмування, що формулюється за допомогою визначених правил безпосередньо з умов прямої задачі [3].

Розглянемо узагальнене формулювання двоїстої ЗЛП, яку можна застосувати до будь-якої форми вихідної задачі. В основу такого формулювання покладено той принцип, що використання симплекс-методу вимагає приведення будь-якої ЗЛП до канонічної форми.

Нехай маємо пряму ЗЛП у канонічній формі

$$\max(\min)z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

за таких обмежень:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = \overline{1,m};$$

$$x_j \geq 0,\ \ j = \overline{1,n}.$$

Зауважимо, що до складу n змінних x_j включаються і надлишкові, і залишкові змінні.

Двоїста задача утворюється шляхом структурного перетворення умов прямої задачі відповідно до таких правил (рис. 1):

- кожному *обмеженню* прямої задачі відповідає *змінна* двоїстої задачі;
- кожній *змінній* прямої задачі відповідає *обмеження* двоїстої задачі;
- коефіцієнти при деякій змінній прямої задачі (*стовпчик*) стають коефіцієнтами лівої частини відповідного обмеження двоїстої задачі (*рядком*) ;
- *коефіцієнт* при змінній у виразі для *цільової функції* прямої задачі стає *коефіцієнтом правої частини* відповідного обмеження двоїстої задачі;
- напрям оптимізації, обмеження і знаки двоїстих змінних формуються відповідно до табл. 1.

Таблиця 1

Напрям оптимізації цільової функції прямої задачі (у канонічній формі)	*Двоїста задача*		
	цільова функція	*обмеження*	*змінні*
Максимізація	Мінімізація	$\geq$	Не обмежені у знаці
Мінімізація	Максимізація	$\leq$	

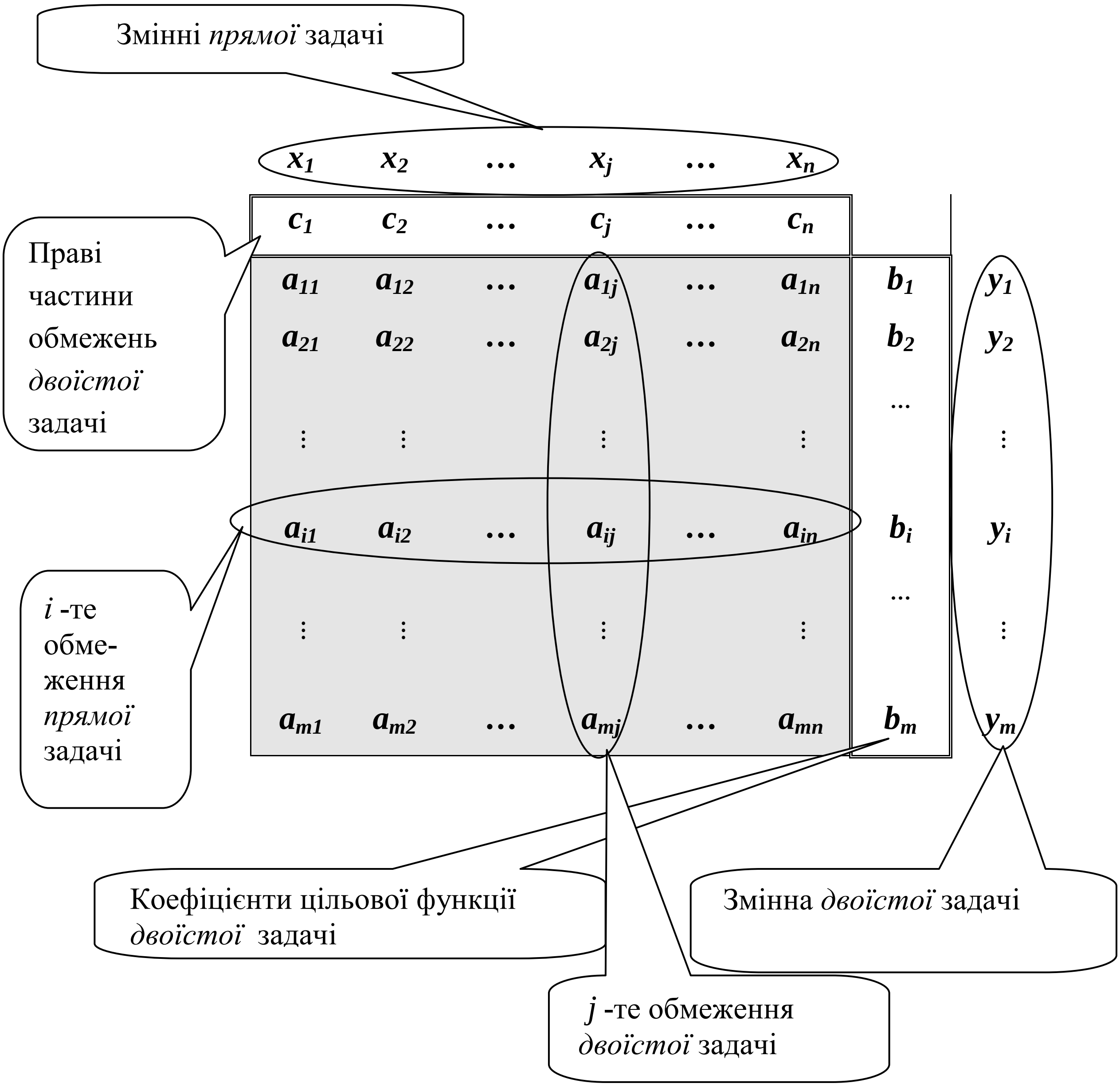


Рис. 1

Таким чином, двоїста задача має m змінних $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ і n обмежень.

Якщо двоїсту задачу розглядати як вихідну, то відповідна їй двоїста задача співпаде з прямою. Таким чином, пряма і двоїста задачі є взаємно-двоїстими, тому про них говорять як *про пару двоїстих задач*. Особливо важливими є дві пари двоїстих задач[1] — *симетричні* і *несиметричні.*

[1] Далі прямою задачею будемо називати задачу на максимум, двоїстою — задачу на мінімум.

Пара симетричних двоїстих задач.

Пряма задача:
$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j;$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1,m}$$
$$x_j \ge 0, \quad i = \overline{1,m}$$

Двоїста задача:
$$\min \omega = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i;$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad j = \overline{1,n}$$
$$y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m}$$

Пара несиметричних двоїстих задач.

Пряма задача:
$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j;$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m};$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Двоїста задача:
$$\min \omega = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i;$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad j = \overline{1,n};$$
$$y_i <=> 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

Основні теореми двоїстості

1. ТЕОРЕМА 1 (СПІВВІДНОШЕННЯ ДВОЇСТОСТІ)

Нехай пряма і двоїста задача мають припустимі розв'язки і X і Y — це припустимі розв'язки прямої і двоїстої задач відповідно. Тоді справедлива нерівність

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i, \tag{1}$$

причому для досягнення рівності в (1) необхідно і достатньо виконання таких умов:

$$\left(\sum_{j} a_{ij} x_j - b_i \right) y_i = 0, \quad i = \overline{1,m}; \tag{2}$$

$$\left(\sum_i a_{ij} y_i - c_j\right) x_j = 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Співвідношення (2) і (3) називають співвідношеннями доповнюючої нежорсткості.

ПЕРШИЙ НАСЛІДОК ТЕОРЕМИ 1

Нехай x^0, y^0 — допустимі розв'язки прямої і двоїстої задач, для яких виконується

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0 = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^0 .$$

Тоді x^0, y^0 є розв'язками прямої і двоїстої задач відповідно.

ДРУГИЙ НАСЛІДОК ТЕОРЕМИ 1

Якщо цільова функція прямої задачі не обмежена зверху, то двоїста задача не має допустимих розв'язків.

2. ТЕОРЕМА 2 (ПРО РІВНІСТЬ ЗНАЧЕНЬ ПАРИ ДВОЇСТИХ ЗАДАЧ)

Нехай пряма і двоїста задачі мають розв'язок x^0 і y^0 відповідно. Тоді виконується рівність $\sum_j c_j x_j^0 = \sum_i b_i y_i^0$.

У разі розв'язання прямої задачі можлива тільки одна з таких взаємовиключних ситуацій:

– пряма задача має розв'язок (I);

– цільова функція необмежена зверху на множині допустимих розв'язків (II);

– пряма задача не має допустимих розв'язків (III).

Аналогічно, у разі розв'язання двоїстої задачі можлива тільки одна з наступних взаємовиключних ситуацій:

– двоїста задача має розв'язок (I');

– цільова функція двоїстої задачі не обмежена знизу на множині допустимих розв'язків (II');

– двоїста задача не має допустимих розв'язків (III').

Комбінуючи попарно ситуації I, II, III з I', II', III' одержуємо дев'ять принципово можливих пар (табл.2).

Таблиця 2

	I	*II*	*III*
I'	**1)**	**2)**	**3)**
II'	**4)**	**5)**	**6)**
III'	**7)**	**8)**	**9)**

Відповідно до третьої теореми, ніякі пари, крім 1), 6), 8), 9) не можливі взагалі.

3. ТЕОРЕМА 3 (ДВОЇСТОСТІ)

Для пари взаємо-двоїстих задач має місце один із таких взаємовиключних випадків:

1. Пряма і двоїста задача мають розв'язки, причому значення задач збігаються.
2. Пряма задача має непорожню множину допустимих розв'язків, її цільова функція не обмежена зверху; двоїста задача не має допустимих розв'язків.
3. Двоїста задача має непорожню множину допустимих розв'язків, її цільова функція не обмежена знизу; пряма задача не має допустимих розв'язків.
4. Пряма і двоїста задача не мають допустимих розв'язків.

Одержання розв'язку задачі за розв'язком двоїстої задачі

Використовуємо другу теорему і співвідношення доповнюючої нежорсткості для знаходження розв'язку прямої задачі із розв'язку двоїстої їй задачі. Таку процедуру називають *алгоритмом двоїстості.*

АЛГОРИТМ ДВОЇСТОСТІ

Крок 1. Побудувати і розв'язати двоїсту задачу $\min\omega$, одержати $\omega_{\min}$ і y^{opt}.

Крок 2. Визначити $z_{\max} = \omega_{\min}$.

Крок 3. Визначити значення базисних змінних у розв'язку x^{opt}. Для цього необхідно скористатися співвідношеннями доповнюючої нежорсткості: якщо змінна y_i в оптимальному розв'язку базисна, то відповідна їй i-та нерівність прямої задачі замінюється рівнянням-рівністю.

Крок 4. Після того, як частина рівнянь-нерівностей вихідної системи прямої задачі заміниться рівняннями-рівностями, розв'язати цю систему рівнянь і знайти таким способом шукані значення базисних змінних прямої задачі.

У наведеному варіанті алгоритму двоїстості знаходиться розв'язок прямої задачі (максимізації функції z) за розв'язком їй двоїстої задачі (мінімізації функції ω). Його, звичайно, можна використати і в зворотньому напрямі — для пошуку розв'язку задачі мінімізації функції ω за розв'язком задачі максимізації функції z.

Оптимальний розв'язок двоїстої задачі можна також знайти із співвідношення

$$y^0 = c_B^T B^{-1},$$

де B — базисна матриця, що відповідає базису β розв'язку x^0 прямої задачі; c_B — підвектор коефіцієнтів цільової функції, що відповідають базисним змінним оптимального розв'язку x^0.

Наведемо приклади побудови та знаходження розв'язку двоїстої задачі.

Приклад 1

Пряма задача

$\max z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4;$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 10;$
$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 40;$
$x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 \geq 10;$
$3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 \geq 5;$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$

Пряма задача у канонічній формі:

$\max z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - s_1 = 10 \quad : y_1$
$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 + s_2 = 40 \quad : y_2$
$x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 - s_3 = 10 \quad : y_3$
$3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 - s_4 = 5 \quad : y_4$
$x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0.$

Побудуємо двоїсту задачу:

$\min \omega = 10y_1 + 40y_2 - 10y_3 + 5y_4$
$y_1 + 2y_2 + y_3 + 3y_4 \geq 1 \quad : x_1$
$y_1 + 3y_2 + y_3 + y_4 \geq 2 \quad : x_2$
$y_1 + y_2 - 3y_3 + 4y_4 \geq -3 \quad : x_3$
$y_1 + 4y_2 - y_3 + 2y_4 \geq 1 \quad : x_4$
$-y_1 \geq 0 \quad (y_1 \leq 0) \quad : s_1$
$y_2 \geq 0 \quad : s_2$
$-y_3 \geq 0 \quad (y_3 \geq 0) \quad : s_3$
$-y_4 \geq 0 \quad (y_4 \geq 0) \quad : s_4$

Знайдемо розв'язок двоїстої задачі. Початкова симплекс-таблиця прямої задачі:

Таблиця 3

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	s_4	R_1	R_2	R_3	P
$r(min)$	5	3	2	2	-1	0	-1	-1	0	0	0	25
$z(max)$	-1	-2	3	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
R_1	1	1	1	1	-1	0	0	0	**1**	0	0	10
s_2	2	3	1	4	0	**1**	0	0	0	0	0	40
R_2	1	1	-3	-1	0	0	-1	0	0	**1**	0	10
R_3	3	1	4	2	0	0	0	-1	0	0	**1**	5

Таблиця 4 відповідає оптимальному розв’язку задачі.

Таблиця 4

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	s_4	R_1	R_2	R_3	P
z	1/3	0	11/3	5/3	0	2/3	0	0				80/3
s_4	-7/3	0	-11/3	-2/3	0	1/3	0	1	-1	0	0	25/3
s_3	-1/3	0	10/3	7/3	0	1/3	1	0	0	0	0	10/3
s_1	-1/3	0	-2/3	1/3	1	1/3	0	0	0	-1	0	10/3
x_2	2/3	1	1/3	4/3	0	1/3	0	0	0	0	-1	40/3

Спосіб 1. В оптимальній таблиці прямої задачі (див. табл. 4) базисними є змінні x_2, s_1, s_3, s_4. Отже, за співвідношеннями доповнюючої нежорсткості відповідні цим змінним

обмеження-нерівності двоїстої задачі в точці оптимуму виконуються як рівності. Тобто, одержимо таку систему лінійних рівнянь.

$$\left.\begin{array}{l} x_2 \\ s_1 \\ s_3 \\ s_4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y_1 + 3y_2 + y_3 + y_4 = 2 \\ y_1 = 0 \\ y_3 = 0 \\ y_4 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = 2/3 \\ y_3 = 0 \\ y_4 = 0 \end{array}\right.$$

Згідно основної теореми двоїстості розв'язки прямої і двоїстої задач (якщо вони існують) співпадають. Перевіримо:

$$\omega^{opt} = 10y_1 + 40y_2 - 10y_3 + 5y_4 = 40 \cdot 2/3 = 80/3 \ \Rightarrow \ \omega^{opt} = z^{opt}.$$

Спосіб 2. Оптимальний розв'язок двоїстої задачі можна також знайти із співвідношення

$$y^0 = c_B^T B^{-1}, \tag{4}$$

де B — базисна матриця, що відповідає базису β розв'язку x^0 прямої задачі;
c_B — підвектор коефіцієнтів цільової функції, що відповідають базисним змінним оптимального розв'язку x^0.

Перепишемо початкову та оптимальну таблиці прямої задачі таким чином (табл. 5, 6):

Таблиця 5

	x_1	x_3	x_4	x_2	s_1	s_3	s_4	R_1	s_2	R_2	R_3	P
r	5	2	2	3	-1	-1	-1	0	0	0	0	25
z	-1	3	-1	-2	0	0	0	0	0	0	0	0
R_1	1	1	1	1	-1	0	0	**1**	0	0	0	10
s_2	2	1	4	3	0	0	0	0	**1**	0	0	40
R_2	1	-3	-1	1	0	-1	0	0	0	**1**	0	10
R_3	3	4	2	1	0	0	-1	0	0	0	**1**	5

Таблиця 6

	x_1	x_3	x_4	x_2	s_1	s_3	s_4	R_1	s_2	R_2	R_3	P
z	1/3	11/3	5/3	0	0	0	0		2/3			80/3
x_2	2/3	1/3	4/3	1	0	0	0	-1	1/3	0	0	40/3
s_1	-1/3	-2/3	1/3	0	1	0	0	0	1/3	0	0	10/3
s_3	-1/3	10/3	7/3	0	0	1	0	0	1/3	-1	0	10/3
s_4	-7/3	-11/3	-2/3	0	0	0	1	0	1/3	0	-1	25/3

З оптимальної симплекс-таблиці виділяємо обернену базисну матрицю, що відповідає оптимуму:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

При знаходженні матриці B^{-1} було використано факт, що перетворення матриці $(A|I)$ до вигляду $(I|C)$ дозволяє одержати матрицю $C=A^{-1}$, де I – одинична матриця. З урахуванням того, що маємо c_B^T = (2, 0, 0, 0)

$$y^0 = c_B^T B^{-1} = (2,\ 0,\ 0,\ 0)\cdot \begin{pmatrix} -1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (0,\ 2/3,\ 0,\ 0)$$

Приклад 2

Пряма задача:

$min\ z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 50$
$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \le 4$
$2x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 \ge 5$
$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 15$
$x_1,\ x_2, x_3, x_4 \ge 0$

Пряма задача у канонічній формі:

$min\ z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + s_1 = 50$ $\quad : y_1$
$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + s_2 = 4$ $\quad : y_2$
$2x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 - s_3 = 5$ $\quad : y_3$
$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 15$ $\quad : y_4$
$x_1,\ x_2, x_3, x_4, s_1, s_2, s_3 \ge 0$

Побудуємо двоїсту задачу:

$max\ \omega = 50y_1 + 4y_2 + 5y_3 + 15y_4$
$y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 \le 2$ $\quad : x_1$
$y_1 - y_2 + 5y_3 + y_4 \le 4$ $\quad : x_2$
$y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \le 1$ $\quad : x_3$
$y_1 - y_2 - y_3 - y_4 \le 3$ $\quad : x_4$
$y_1 \le 0$ $\quad : s_1$
$y_2 \le 0$ $\quad : s_2$
$-y_3 \le 0$ $\quad (y_3 \le 0)$ $\quad : s_3$

Знайдемо розв'язок двоїстої задачі. Початкова симплекс-таблиця прямої задачі:

Таблиця 7

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_3	s_1	s_2	R_1	R_2	P
$r(min)$	3	6	0	-2	-1	0	0	0	0	20
$z(min)$	-2	-4	-1	-3	0	0	0	0	0	0
s_1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	50
s_2	1	-1	1	-1	0	0	1	0	0	4
R_1	2	5	1	-1	-1	0	0	1	0	5
R_2	1	1	-1	-1	0	0	0	0	1	15

Оптимальна симплекс-таблиця прямої задачі:

Таблиця 8

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_3	s_1	s_2	R_1	R_2	P
z	0	0	-5	-5	0	0	-1	0	3	41
s_1	0	0	2	2	0	1	0	0	-1	35
s_3	0	0	-6	-1	1	0	-3/2	-1	7/2	83/2
x_1	1	0	0	-1	0	0	1/2	0	1/2	19/2
x_2	0	1	-1	0	0	0	-1/2	0	1/2	11/2

Спосіб 1. Оскільки змінні x_1, x_2, s_1, s_3 є базисними в оптимальній таблиці прямої задачі (див. табл. 8), то за співвідношеннями доповнюючої нежорсткості відповідні їм обмеження-нерівності двоїстої задачі в точці оптимуму виконуються як рівності. Отже, знайдемо оптимальний розв'язок двоїстої задачі з такої системи лінійних рівнянь:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_3 \end{array}\right\} \text{базисні} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 = 2 \\ y_1 - y_2 + 5y_3 + y_4 = 4 \\ y_1 = 0 \\ y_3 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = -1 \\ y_3 = 0 \\ y_4 = 3 \end{array}\right.$$

Впевнимось, що розв’язки прямої і двоїстої задач співпадають:

$$\omega^{opt} = 50y_1 + 4y_2 + 5y_3 + 15y_4 = 4\cdot(-1) + 15\cdot 3 = 41 \Rightarrow \omega^{opt} = z^{opt}.$$

Спосіб 2. Знайдемо оптимальний розв’язок двоїстої задачі із співвідношення (4).

Як бачимо (табл. 7), стовпці, що відповідають змінним s_1, s_2, R_1, R_2 , в оптимальній таблиці міститимуть матрицю B^{-1}. Отже, з табл. 8 знаходимо:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3/2 & -1 & 7/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Отже

$$y^0 = c_B^T B^{-1} = (2, 4, 0, 0)\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3/2 & -1 & 7/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = (0, -1, 0, 3)$$