Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

Высшего образования

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа №3 по Вычислительной Математике

Численное интегрирование

Вариант №5

Группа: P3214

Выполнил:

Минкова Алина Андреевна

Проверил:

Малышева Татьяна Алексеевна

Г. Санкт-Петербург

2024

Оглавление

Цель работы

Найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами.

Порядок выполнения работы

1. Обязательное задание:

Исходные данные:

1. Пользователь выбирает функцию, интеграл которой требуется вычислить (3-5 функций), из тех, которые предлагает программа.
2. Пределы интегрирования задаются пользователем.
3. Точность вычисления задается пользователем.
4. Начальное значение числа разбиения интервала интегрирования: n=4.
5. Ввод исходных данных осуществляется с клавиатуры.

Программная реализация задачи:

1. Реализовать в программе методы по выбору пользователя:

- Метод прямоугольников (3 модификации: левые, правые, средние)
- Метод трапеций
- Метод Симпсона

2. Методы должны быть оформлены в виде отдельной(ого) функции/класса.
3. Вычисление значений функции оформить в виде отдельной(ого) функции/класса.
4. Для оценки погрешности и завершения вычислительного процесса использовать правило Рунге.
5. Предусмотреть вывод результатов: значение интеграла, число разбиения интервала интегрирования для достижения требуемой точности.

Вычислительная реализация задачи:

1. Вычислить интеграл точно.
2. Вычислить интеграл по формуле Ньютона – Котеса при $n = 6$.
3. Вычислить интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона при $n = 10$.
4. Сравнить результаты с точным значением интеграла.
5. Определить относительную погрешность вычислений для каждого метода.

2. Необязательное задание:

1. Установить сходимость рассматриваемых несобственных интегралов 2 рода (2-3 функции). Если интеграл - расходящийся, выводить сообщение: «Интеграл не существует».
2. Если интеграл сходящийся, реализовать в программе вычисление несобственных интегралов 2 рода (заданными численными методами).
3. Рассмотреть случаи, когда подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв: 1) в точке a, 2) в точке b, 3) на отрезке интегрирования.

Рабочие формулы используемых методов

Метод прямоугольников

$\int_a^b f(x)dx \approx h_1y_0 + h_2y_1 + \dots + h_ny_{n-1} = \sum_{i=1}^n h_i\, y_{i-1}$ - левые прямоугольники

$\int_a^b f(x)dx \approx h_1y_1 + h_2y_2 + \dots + h_ny_n = \sum_{i=1}^n h_iy_i$ - правые прямоугольники

При $h_i = h = \frac{b-a}{n} = const$:

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^n y_{i-1}$$

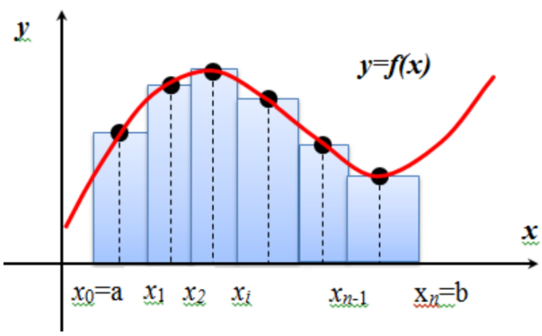
$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^n y_i$$

Метод прямоугольников. Метод средних

Для аналитически заданных функций более точным является использование значений в средних точках элементарных отрезков (полуцелых узлах):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n h_i\, f(x_{i-1/2})$$

$$x_{i-1/2} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = x_{i-1} + \frac{h_i}{2}, i = 1, 2, \dots n$$



При $h_i = h = \frac{b-a}{n} = const$:

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^n f(x_{i-1/2})$$

Метод трапеций

Подынтегральную функцию на каждом отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ заменяют интерполяционным многочленом первой степени:

$$f(x) \approx \varphi_i(x) = a_i x + b$$

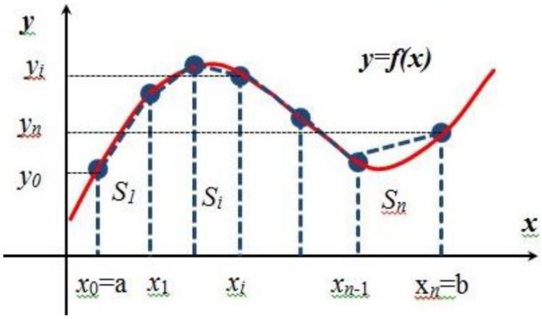
Используют линейную интерполяцию, т.е. график функции $y = f(x)$ представляется в виде ломаной, соединяющий точки (x_i, y_i) . Площадь всей фигуры (криволинейной трапеции):

$$S_{\text{общ}} = S_1 + S_2 + \cdots + S_n = \frac{y_0 + y_1}{2} h_1 + \frac{y_1 + y_2}{2} h_2 + \cdots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} h_n$$

$$y_0 = f(a), \quad y_n = f(b), \quad y_i = f(x_i), \quad h_i = x_i - x_{i-1}$$

Складывая все эти равенства, получаем формулу трапеций для численного интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} h_i (y_{i-1} + y_i)$$



При $h_i = h = \frac{b-a}{n} = const$ формула трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

или $$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \cdot \left(y_0 + y_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

Формула Симпсона

$$\int_a^b f(x) = \frac{h}{3} [(y_0 + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}) + y_n)]$$

Формула Ньютона-Котеса порядка n:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) c_n^i$$

Коэффициенты Котеса для равноотстоящих узлов

n	Коэффициенты Котеса c_i^n			
1	$c_1^0 = c_1^1 = \frac{b-a}{2}$			
2	$c_2^0 = c_2^2 = \frac{b-a}{6}$	$c_2^1 = \frac{4(b-a)}{6}$		
3	$c_3^0 = c_3^3 = \frac{b-a}{8}$	$c_3^1 = c_3^2 = \frac{3(b-a)}{8}$		
4	$c_4^0 = c_4^4 = \frac{7(b-a)}{90}$	$c_4^1 = c_4^3 = \frac{32(b-a)}{90}$	$c_4^2 = \frac{12(b-a)}{90}$	
5	$c_5^0 = c_5^5 = \frac{19(b-a)}{288}$	$c_5^1 = c_5^4 = \frac{75(b-a)}{288}$	$c_5^2 = c_5^3 = \frac{50(b-a)}{288}$	
6	$c_6^0 = c_6^6 = \frac{41(b-a)}{840}$	$c_6^1 = c_6^5 = \frac{216(b-a)}{840}$	$c_6^2 = c_6^4 = \frac{27(b-a)}{840}$	$c_6^3 = \frac{272(b-a)}{840}$

Вычисление заданного интеграла

$$\int_2^4 (-2x^3 - 3x^2 + x + 5)dx$$

Вычислим интеграл точно:

$$\int_2^4 (-2x^3 - 3x^2 + x + 5)dx = \left(-2 \cdot \frac{x^4}{4} - 3 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 5x\right)\Big|_2^4 = -160$$

Вычислим интеграл по формуле Ньютона – Котеса при $n = 6$:

$$n = 6 \to h = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\int_2^4 (-2x^3 - 3x^2 + x + 5)dx =$$

$$= f(2) \cdot c_6^0 + f\left(\frac{7}{3}\right) \cdot c_6^1 + f\left(\frac{8}{3}\right) \cdot c_6^2 + f\left(\frac{9}{3}\right) \cdot c_6^3 + f\left(\frac{10}{3}\right) \cdot c_6^4 + f\left(\frac{11}{3}\right) \cdot c_6^5 + f\left(\frac{12}{3}\right) \cdot c_6^6 = -160\frac{41}{70}$$

Погрешность вычислений: $\frac{41}{70}$

Относительная погрешность: 0,366%

Вычислим интеграл по формуле средних прямоугольников при $n = 10$:

$$n = 10 \to h = \frac{4-2}{10} = 0{,}2$$

$$\int_2^4 (-2x^3 - 3x^2 + x + 5)dx =$$

$$= 0{,}2\,\big(f(2{,}1) + f(2{,}3) + f(2{,}5) + f(2{,}7) + f(2{,}9) + f(3{,}1) + f(3{,}3) + f(3{,}5) + f(3{,}7) + f(3{,}9)\big)$$

$$= 0{,}2(-24{,}652 - 32{,}904 - 42{,}5 - 53{,}536 - 66{,}108 - 80{,}312 - 96{,}244 - 114 - 133{,}676 - 155{,}368 = -159{,}86$$

Погрешность вычислений: 0,14

Относительная погрешность: 0,0875%

Вычислим интеграл по формуле трапеций при $n = 10$:

$$n = 10 \to h = \frac{4-2}{10} = 0{,}2$$

$$\int_2^4 (-2x^3 - 3x^2 + x + 5)dx =$$

$$= 0{,}1\Big(f(2) + f(4) + 2\big(f(2{,}2) + f(2{,}4) + f(2{,}6) + f(2{,}8) + f(3) + f(3{,}2) + f(3{,}4) + f(3{,}6) + f(3{,}8)\big)\Big)$$

$$= 0{,}1\big(-21 - 167 + 2(-28{,}616 - 37{,}528 - 47{,}832 - 59{,}624 - 73 - 88{,}056 - 104{,}888 - 123{,}592 - 144{,}262)\big) = -160{,}2796$$

Погрешность вычислений: 0,2796
Относительная погрешность: 0,17475%

Вычислим интеграл по формуле Симпсона при $n = 10$:

$$n = 10 \rightarrow h = \frac{4-2}{10} = 0{,}2$$

$$\int_2^4 (-2x^3 - 3x^2 + x + 5)dx =$$

$$= \frac{1}{15}\Big(f(2) + f(4) + 4\big(f(2{,}2) + f(2{,}6) + f(3) + f(3{,}4) + f(3{,}8)\big) + 2\big(f(2{,}4) + f(2{,}8) + f(3{,}2) + f(3{,}6)\big)\Big)$$

$$= \frac{1}{15}\big(-21 - 167 + 4(-28{,}616 - 47{,}832 - 73 - 104{,}888 - 144{,}262) + 2(-37{,}528 - 59{,}624 - 88{,}056 - 123{,}592)\big) = -159{,}997(3)$$

Погрешность вычислений: 0,002(6)
Относительная погрешность: 0,0016%

Листинг программы

```
def left_rectangles(func, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    x = a
    integral = 0
    for i in range(n):
        integral += func(x)
        x += h
    return integral * h
```

```
def right_rectangles(func, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    x = a + h
    integral = 0
    for i in range(n):
        integral += func(x)
        x += h
    return integral * h
```

```
def mid_rectangles(func, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    x = a + h / 2
    integral = 0
    for i in range(n):
        integral += func(x)
        x += h
    return integral * h
```

```
def trapezoids(func, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    x = a
    integral = 0
    integral += func(x) / 2
```

```python
    x += h
    for i in range(n - 1):
        integral += func(x)
        x += h
    # print(x)
    integral += func(x) / 2
    return integral * h
```

```python
def simpson(func, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    x = a
    integral = 0
    integral += func(x)
    x += h
    for i in range(1, n, 2):
        integral += 4 * func(x)
        x += 2 * h
    x = a + 2 * h
    for i in range(2, n - 1, 2):
        integral += 2 * func(x)
        x += 2 * h
    integral += func(b)
    return integral * h / 3
```

```python
def calculate_integral(method, func, a, b, eps, k):
    n = 4
    I1 = method(func, a, b, n)
    n *= 2
    I2 = method(func, a, b, n)
    print(n, I2, abs(I1 - I2) / (2 ** k - 1))
    if abs(I1 - I2) / (2 ** k - 1) < eps:
        return I1, n
    while abs(I1 - I2) / (2 ** k - 1) >= eps:
        n *= 2
        I1 = I2
        I2 = method(func, a, b, n)
        print(n, I2, abs(I1 - I2) / (2 ** k - 1))
    # exact_integral = spi.quad(func, a, b)[0]
    # absolute_error = abs(exact_integral - I2)
    # relative_error = absolute_error / abs(exact_integral) * 100
    return I2, n #, exact_integral, absolute_error, relative_error
```

Полный код: https://github.com/aulouu/comp_math_labs/tree/main/lab3

Результат выполнения программы

```
Выберите функцию:
1. cos(x)
2. e^x
3. x^2
4. -2x^3 - 3x^2 + x + 5
4
Введите левый предел интегрирования: 0
Введите правый предел интегрирования: 2
Введите требуемую точность: 0.01
Выберите метод:
1. Метод прямоугольников (левые)
2. Метод прямоугольников (правые)
3. Метод прямоугольников (средние)
4. Метод трапеций
5. Метод Симпсона
2
8 -7.4375 3.8125
16 -5.671875 1.765625
32 -4.82421875 0.84765625
64 -4.4091796875 0.4150390625
128 -4.203857421875 0.205322265625
256 -4.10174560546875 0.10211181640625
512 -4.0508270263671875 0.0509185791015625
1024 -4.025402069091797 0.025424957275390625
2048 -4.012698173522949 0.012703895568847656
4096 -4.006348371505737 0.006349802017211914
Значение интеграла: -4.006348371505737
Число разбиений интервала интегрирования: 4096
```

```
Выберите функцию:
1. cos(x)
2. e^x
3. x^2
4. -2x^3 - 3x^2 + x + 5
4
Введите левый предел интегрирования: 0
Введите правый предел интегрирования: 2
Введите требуемую точность: 0.01
Выберите метод:
1. Метод прямоугольников (левые)
2. Метод прямоугольников (правые)
3. Метод прямоугольников (средние)
4. Метод трапеций
5. Метод Симпсона
3
8 -3.90625 0.09375
16 -3.9765625 0.0234375
32 -3.994140625 0.005859375
Значение интеграла: -3.994140625
Число разбиений интервала интегрирования: 32
```

```
Выберите функцию:
1. cos(x)
2. e^x
3. x^2
4. -2x^3 - 3x^2 + x + 5
4
Введите левый предел интегрирования: 0
Введите правый предел интегрирования: 2
Введите требуемую точность: 0.01
Выберите метод:
1. Метод прямоугольников (левые)
2. Метод прямоугольников (правые)
3. Метод прямоугольников (средние)
4. Метод трапеций
5. Метод Симпсона
4
8 -4.1875 0.1875
16 -4.046875 0.046875
32 -4.01171875 0.01171875
64 -4.0029296875 0.0029296875
Значение интеграла: -4.0029296875
Число разбиений интервала интегрирования: 64
```

```
Выберите функцию:
1. cos(x)
2. e^x
3. x^2
4. -2x^3 - 3x^2 + x + 5
4
Введите левый предел интегрирования: 0
Введите правый предел интегрирования: 2
Введите требуемую точность: 0.01
Выберите метод:
1. Метод прямоугольников (левые)
2. Метод прямоугольников (правые)
3. Метод прямоугольников (средние)
4. Метод трапеций
5. Метод Симпсона
5
8 -4.0 0.0
Значение интеграла: -4.0
Число разбиений интервала интегрирования: 8
```

Вывод

В ходе данной лабораторной работы были изучены несколько методов для численного интегрирования. Все методы просты в программной реализации и быстро вычисляют интегралы с хорошей точностью.