Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

Высшего образования

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа №5 по Вычислительной Математике

Интерполяция функции

Вариант №5

Группа: P3214

Выполнил:

Минкова Алина Андреевна

Проверил:

Малышева Татьяна Алексеевна

Г. Санкт-Петербург

2024

Оглавление

Цель работы

Решить задачу интерполяции, найти значения функции при заданных значениях аргумента, отличных от узловых точек.

Порядок выполнения работы

1. Обязательное задание:

Вычислительная реализация задачи:

1. Выбрать заданную по варианту таблицу $y = f(x)$;
2. Построить таблицу конечных разностей для заданной таблицы. Таблицу отразить в отчете;
3. Вычислить значения функции для аргумента $X1$, используя первую или вторую интерполяционную формулу Ньютона. Обратить внимание какой конкретно формулой необходимо воспользоваться;
4. Вычислить значения функции для аргумента $X2$, используя первую или вторую интерполяционную формулу Гаусса. Обратить внимание какой конкретно формулой необходимо воспользоваться.

Программная реализация задачи:

1. Исходные данные задаются тремя способами:

   a) в виде набора данных (таблицы x,y), пользователь вводит значения с клавиатуры;
   b) в виде сформированных в файле данных (подготовить не менее трех тестовых вариантов);
   c) на основе выбранной функции, из тех, которые предлагает программа, например, $\sin x$. Пользователь выбирает уравнение, исследуемый интервал и количество точек на интервале (не менее двух функций).

2. Сформировать и вывести таблицу конечных разностей;
3. Вычислить приближенное значение функции для заданного значения аргумента, введенного с клавиатуры, указанными методами. Сравнить полученные значения;
4. Построить графики заданной функции с отмеченными узлами интерполяции и интерполяционного многочлена Ньютона/Гаусса (разными цветами);
5. Программа должна быть протестирована на различных наборах данных, в том числе и некорректных.
6. Проанализировать результаты работы программы.

2. Необязательное задание:

1. Реализовать в программе вычисление значения функции для заданного значения аргумента, введенного с клавиатуры, используя схемы Стирлинга;
2. Реализовать в программе вычисление значения функции для заданного значения аргумента, введенного с клавиатуры, используя схемы Бесселя.

Рабочие формулы

Многочлен Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i\, l_i(x)$$

$$Ln(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad (8)$$

Полином Лагранжа имеет малую погрешность при небольших значениях n ($n < 20$).

К недостаткам можно отнести то, что с изменением числа узлов приходится все ***вычисления проводить заново***.

Многочлен Ньютона

Разделенные разности k-го порядка определяются через разделенные разности порядка $k-1$:

$$f(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}) = \frac{f(\, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}) - f(x_i, x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i}$$

Они определяются рекуррентно, начиная с первого порядка.

Используя понятие разделенной разности интерполяционный многочлен Ньютона можно записать в следующем виде:

$$N_n(x) = f(x_0) + f(x_0,\ x_1)\cdot(x-x_0) + f(x_0,\ x_1, x_2)\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1) + \cdots + f(x_0,\ x_1, \ldots, x_n\,)\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

$$\boldsymbol{N_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f(x_0, x_1, \ldots, x_k\,) \prod_{j=0}^{k-1}(x - x_j)} \qquad \mathbf{(9)}$$

Отметим, что при добавлении новых узлов первые члены многочлена Ньютона остаются неизменными.

Для повышения точности интерполяции в сумму могут быть добавлены новые члены, что требует подключения дополнительных интерполяционных узлов. При этом безразлично, в каком порядке подключаются новые узлы. Этим формула Ньютона выгодно отличается от формулы Лагранжа.

Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Введем обозначение: $t = (x - x_0)/h$. Тогда получим формулу Ньютона, которая называется **первой интерполяционной формулой Ньютона для интерполирования вперед:**

$$N_n(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

Полученное выражение может аппроксимировать функцию на всем отрезке изменения аргумента $[x_0, x_n]$. Однако более целесообразно (с точки зрения повышения точности расчетов) использовать эту формулу для $x_0 \le x \le x_1$. При этом за x_0 может приниматься любой узел интерполяции x_k. Например, для $x_1 \le x \le x_2$, вместо x_0 надо взять значение x_1. Тогда интерполяционный многочлен Ньютона:

$$N_n(x) = y_i + t\Delta y_i + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_i + \cdots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_i \quad (*)$$

Интерполяционную формулу (*) обычно используют для вычислений значений функции в точках левой половины отрезка.

Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Для правой половины отрезка разности вычисляют справа налево: $t = (x - x_n)/h$. Тогда получим формулу Ньютона, которая называется **второй интерполяционной формулой Ньютона для интерполирования назад:**

$$N_n(x) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \cdots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$

Интерполяционные многочлены Гаусса, Стирлинга, Бесселя

Первая интерполяционная формула Гаусса $(x > a)$

$$P_n(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)(t-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} \ldots + \frac{(t+n-1)\ldots(t-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} + \frac{(t+n-1)\ldots(t-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}$$

Интерполяционные многочлены Гаусса

Вторая интерполяционная формула Гаусса $(x < a)$

$$P_n(x) = y_0 + t\Delta y_{-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} + \frac{(t+2)(t+1)t(t-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \cdots + \frac{(t+n-1)\ldots(t-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n} + \frac{(\boldsymbol{t}+\boldsymbol{n})(t+n-1)\ldots(t-n+\mathbf{1})}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}$$

Оценка погрешности:

$$R_n(x) \approx \frac{\Delta^{2n+1} y_0}{(n+1)!} t(t-1)\ldots(t-n)$$

Вычислительная часть

X	Y
2,10	3,7587
2,15	4,1861
2,20	4,9218
2,25	5,3487
2,30	5,9275
2,35	6,4193
2,40	7,0839

X1	X2
2,112	2,205

Вычисление таблицы конечных разностей:

Конечные разности первого порядка: $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$

Конечные разности k-го порядка: $\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$

$\Delta y_1 = 4{,}1861 - 3{,}7587 = 0{,}4274$
$\Delta y_2 = 4{,}9218 - 4{,}1861 = 0{,}7357$
$\Delta y_3 = 5{,}3487 - 4{,}9218 = 0{,}4269$

И так далее согласно формуле…

№	$\boldsymbol{x_i}$	$\boldsymbol{y_i}$	$\boldsymbol{\Delta y_i}$	$\boldsymbol{\Delta^2 y_i}$	$\boldsymbol{\Delta^3 y_i}$	$\boldsymbol{\Delta^4 y_i}$	$\boldsymbol{\Delta^5 y_i}$	$\boldsymbol{\Delta^6 y_i}$
0	2,10	3,7587	0,4274	0,3083	-0,6171	1,0778	-1,7774	2,9757
1	2,15	4,1861	0,7357	-0,3088	0,4607	-0,6996	1,1983	-
2	2,20	4,9218	0,4269	0,1519	-0,2389	0,4987	-	-
3	2,25	5,3487	0,5788	-0,0870	0,2598	-	-	-
4	2,30	5,9275	0,4918	0,1728	-	-	-	-
5	2,35	6,4193	0,6646	-	-	-	-	-
6	2,40	7,0839	-	-	-	-	-	-

Вычислим значение функции для аргумента X1 = 2,112, используя формулу Ньютона для интерполирования вперед, так как X1 лежит в левой половине отрезка.

$$t = \frac{x - x_0}{h} = \frac{2{,}112 - 2{,}10}{0{,}05} = 0{,}24$$

$$N_6(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)}{5!}\Delta^5 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-6)}{6!}\Delta^6 y_0$$

$$y(2{,}112) = 3{,}7587 + 0{,}24 \cdot 0{,}4274 + \frac{0{,}24(0{,}24-1)}{2!} \cdot 0{,}3083 + \frac{0{,}24(0{,}24-1)(0{,}24-2)}{3!} \cdot (-0{,}6171) + \frac{0{,}24(0{,}24-1)(0{,}24-2)(0{,}24-3)}{4!} \cdot 1{,}0778 + \frac{0{,}24(0{,}24-1)(0{,}24-2)(0{,}24-3)(0{,}24-4)}{5!} \cdot (-1{,}7774) + \frac{0{,}24(0{,}24-1)(0{,}24-2)(0{,}24-3)(0{,}24-4)(0{,}24-5)}{6!} \cdot 2{,}9757 = 3{,}6455$$

Вычислим значение функции для аргумента X2 = 2,205, используя вторую формулу Гаусса, так как X2 лежит в левой половине отрезка. (выделено зеленым)

$$t = \frac{x-a}{h} = \frac{2{,}205 - 2{,}25}{0{,}05} = -0{,}9$$

$$P_3(x) = y_3 + t\Delta y_2 + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_2 + \frac{t(t+1)(t-1)}{3!}\Delta^3 y_1 + \frac{t(t+1)(t-1)(t+2)}{4!}\Delta^4 y_1 + \frac{t(t+1)(t-1)(t+2)(t-2)}{5!}\Delta^5 y_0 + \frac{t(t+1)(t-1)(t+2)(t-2)(t+3)}{6!}\Delta^6 y_0$$

$$y(2{,}205) = 5{,}3487 + (-0{,}9)\cdot 0{,}4269 + \frac{-0{,}9(-0{,}9+1)}{2!}\cdot 0{,}1519 + \frac{-0{,}9(-0{,}9+1)(-0{,}9-1)}{3!}\cdot 0{,}4607 + \frac{-0{,}9(-0{,}9+1)(-0{,}9-1)(-0{,}9+2)}{4!}\cdot(-0{,}6996) + \frac{-0{,}9(-0{,}9+1)(-0{,}9-1)(-0{,}9+2)(-0{,}9-2)}{5!}\cdot(-1{,}7774) + \frac{-0{,}9(-0{,}9+1)(-0{,}9-1)(-0{,}9+2)(-0{,}9-2)(-0{,}9+3)}{6!}\cdot 2{,}9757 = 4{,}9687$$

Листинг программы

```
def lagrang_interpolation(x, y, xi):
    result = 0
    for i in range(len(y)):
        li = 1
        for j in range(len(x)):
            li *= (xi - x[j]) / (x[i] - x[j]) if i != j else 1
        result += y[i] * li
    return result
```

```
def newton_interpolation(x, y, xi):
    a = divided_differences(x, y)[0]
    result = a[0]
    for i in range(1, len(x)):
        term = a[i]
        for j in range(i):
            term *= (xi - x[j])
        result += term
    return result
```

```
def gauss_t(t, n):
    tmp = t
    for i in range(1, n):
        tmp *= t + ((-1) ** i) * ((i + 1) // 2)
    return tmp

def gauss_tt(t, n):
    tmp = t
    for i in range(1, n):
        tmp *= t - ((-1) ** i) * ((i + 1) // 2)
    return tmp

def gauss_interpolation(x, y, xi):
    n = len(x)
    y = differences(x, y)
    mid = n // 2
    h = x[1] - x[0]
    if xi >= x[mid]:
        t = (xi - x[mid]) / h
        result = y[mid][0]
        for i in range(1, n):
            index = mid - i // 2
            if index < 0:
                break
            result += gauss_t(t, i) * y[index][i] / factorial(i)
    else:
        t = (xi - x[mid]) / h
        result = y[mid][0]
        for i in range(1, n):
            if i % 2 == 1:
                index = mid - (i // 2)
            else:
                index = mid - (i // 2) + 1
            if index < 0:
                break
            result += gauss_tt(t, i) * y[index - 1][i] / factorial(i)
    return result
```

Полный код: https://github.com/aulouu/comp_math_labs/tree/main/lab5

Результат выполнения программы

```
Выберите способ ввода данных:
1. Ввод с клавиатуры
2. Ввод из файла
3. На основе выбранной функции
2
Введите имя файла: inp.txt
+-----------------+
| Исходные данные |
+--------+--------+
|   x    |   y    |
+--------+--------+
| 0.1000 | 1.2500 |
| 0.2000 | 2.3800 |
| 0.3000 | 3.7900 |
| 0.4000 | 5.4400 |
| 0.5000 | 7.1400 |
+--------+--------+
Введите значение аргумента для интерполяции: 0.32
```

```
+-----------------------------------------------------------+
|               Таблица конечных разностей                  |
+--------+--------+--------+--------+---------+---------+
|   x    |  d^0y  |  d^1y  |  d^2y  |   d^3y  |   d^4y  |
+--------+--------+--------+--------+---------+---------+
| 0.1000 | 1.2500 | 1.1300 | 0.2800 | -0.0400 | -0.1500 |
| 0.2000 | 2.3800 | 1.4100 | 0.2400 | -0.1900 |    -    |
| 0.3000 | 3.7900 | 1.6500 | 0.0500 |    -    |    -    |
| 0.4000 | 5.4400 | 1.7000 |   -    |    -    |    -    |
| 0.5000 | 7.1400 |   -    |   -    |    -    |    -    |
+--------+--------+--------+--------+---------+---------+
Приближенное значение функции по многочлену Лагранжа: 4.1047
Узлы являются равноотстоящими, метод Ньютона с разделенными разностями не применим.
Приближенное значение функции по многочлену Гаусса: 4.1047
```

```
Выберите способ ввода данных:
1. Ввод с клавиатуры
2. Ввод из файла
3. На основе выбранной функции
2
Введите имя файла: inp2.txt
+-----------------+
| Исходные данные |
+--------+--------+
|   x    |   y    |
+--------+--------+
| 0.1500 | 1.2500 |
| 0.2000 | 2.3800 |
| 0.3300 | 3.7900 |
| 0.4700 | 5.4400 |
+--------+--------+
Введите значение аргумента для интерполяции: 0.22
Приближенное значение функции по многочлену Лагранжа: 2.7075
Приближенное значение функции по многочлену Ньютона с разделенными разностями: 2.7075
Узлы не являются равноотстоящими, метод Гаусса не применим.
```

Вывод

В ходе данной лабораторной работы я познакомилась с методами интерполяции функции и реализовала методы с использованием многочлена Лагранжа, многочлена Ньютона с разделенными разностями и многочлена Гаусса на языке программирования Python.