Jacobian Matrix ဆိုတာက point of interest(Example-> end-effector) ရဲ့ velocities (linear + angular) ကို Joint variable တွေရဲ့ velocities(linear + angular) တွေကတဆင့် တွက်ချက်တာဖြစ်တယ်။

Jocobian Matrix က အောက်ပါအတိုင်း ဖြစ်သည်။

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

n=the total number of joints in the manipulator

Matrix မှာပါတဲ့ အရာတွေကို တစ်ခုချင်းစီ ပြန်ရှင်းပြပါမယ် ။

Equation ရဲ့ ဘယ်ဘက်အခြမ်းကို အရင်ရှင်းပါမယ် ။

"How fast the end-effector is moving in the X direction"

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

"How fast the end-effector is moving in the Y direction"

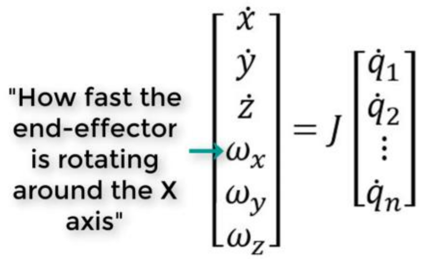
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

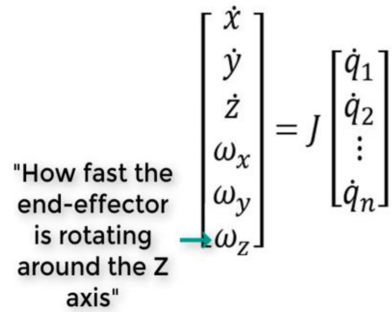
"How fast the end-effector is moving in the Z direction"

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

x-dot , y-dot ,z-dot တို့သည် Linear velocity နဲ့သက်ဆိုင်တယ် - ဆိုလိုချင်တာက x-dot သည် x-direction အလိုက် Linear အတိုင်း ဘယ်လောက်မြန်မြန် moving ဖြစ်နေလဲဆိုတာကို ဖော်ပြတယ် ။

y-dot သည် y-direction အလိုက် Linear အတိုင်း ဘယ်လောက်မြန်မြန် moving ဖြစ်နေလဲဆိုတာကို ဖော်ပြတယ် ။ z-dot သည် z-direction အလိုက် Linear အတိုင်း ဘယ်လောက်မြန်မြန် moving ဖြစ်နေလဲဆိုတာကို ဖော်ပြတယ် ။





wx (omega-x) , wy (omega-y) , wz (omega-z) တို့သည် angular(rotational) velocity နဲ့သက်ဆိုင်တယ် - ဆိုလိုချင်တာက x-dot သည် x-direction အလိုက် ဘယ်လောက်မြန်မြန် rotate ဖြစ်နေလဲဆိုတာကို ဖော်ပြတယ် ။ y-dot သည် y-direction အလိုက် ဘယ်လောက်မြန်မြန် rotate ဖြစ်နေလဲဆိုတာကို ဖော်ပြတယ် ။ z-dot သည် z-direction အလိုက် ဘယ်လောက်မြန်မြန် rotate ဖြစ်နေလဲဆိုတာကို ဖော်ပြတယ် ။

Equation ရဲ့ညာဘက်အခြမ်းကို စရှင်းပါမယ် ။

J သည် Jacobian Matrix ဖြစ်ပါတယ် ။ **J Matrix ရဲ့Column တစ်ခုချင်းစီက Joint တစ်ခုချင်းစီကို ရည်ညွှန်းတယ်ဆိုတာ သိထားရပါမယ်** ။

J Matrix နဲ့ မြှောက်ထားတဲ့ q-dot matrix သည် differential motion of joints ဖြစ်ပါတယ် ။ ဆိုလိုချင်တာက Jacobian Matrix ရဲ့Row တစ်ခုချင်းစီကို q-dot matrix ရဲ့ joint တစ်ခုချင်းစီ Differentiate လုပ်ထားတာပါ - အောက်မှာပါတဲ့ Calculation ကို ကြည့်ရင် ပိုရှင်းသွားပါလိမ့်မယ် ။

အိုကေ - Jacobian Matrix ကို တွက်ကြတာပေါ့

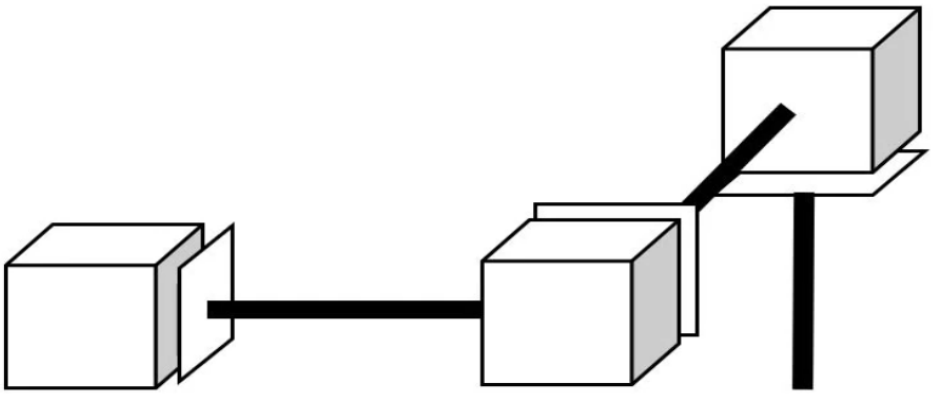
J Matrix ကို တွက်မယ်ဆို အောက်က Table မှာပါတဲ့အတိုင်း တွက်ရပါတယ်။

	Prismatic	Revolute
Linear	$R_{i-1}^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$R_{i-1}^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \left(d_n^0 - d_{i-1}^0\right)$
Rotational	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$R_{i-1}^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

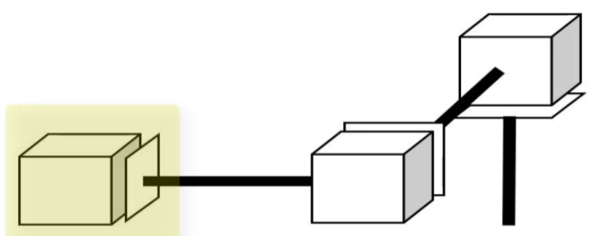
Table မှာပါတဲ့ မသိကိန်းတွေကိုရှင်းပါမယ်။

- **i** သည် Joint Number ဖြစ်ပါတယ်၊ ဆိုလိုတာက First Joint အတွက်ဆို **i = 1** ၊ Second Joint အတွက်ဆို **i = 2** ဖြစ်တယ်။
- **n** သည် Joint အရေအတွက် စုစုပေါင်းဖြစ်ပါတယ်။
- **R** သည် Rotational Matrix ဖြစ်ပြီး **d** သည် Displacement Vector ဖြစ်ကြောင်းကို ကြိုတင်နားလည်ထားသည်ဟု ယူဆပါတယ်။

Example တစ်ခုနဲ့ ရှင်းပြပါမယ် ။ Prismatic Joint သုံးခုပါတဲ့ Example လေးနဲ့ စပါမယ် ။



First Joint ကို စတွက်မယ် - အပေါ်မှာ ပြောခဲ့သလိုပဲ J Matrix ရဲ့ First Column သည် First Joint ဖြစ်တယ်ဆိုတာကို သိထားရပါမယ်၊ အဖြေကို ပုံမှာကြည့်ပါ ။



	Prismatic	Revolute
Linear	$R^0_{i-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$	$R^0_{i-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\times(d^0_n - d^0_{i-1})$
Rotational	$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$	$R^0_{i-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\\\dot{z}\\\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^0_0\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} & \begin{matrix}\square\\\square\\\square\end{matrix} & \begin{matrix}\square\\\square\\\square\end{matrix} \\ \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} & \begin{matrix}\square\\\square\\\square\end{matrix} & \begin{matrix}\square\\\square\\\square\end{matrix}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{d}_1\\\dot{d}_2\\\dot{d}_3\end{bmatrix}$$

Figure – (1.1)

Figure(1.1) J Matrix ရဲ့ First Column အဖြေကိုရှင်းပါမယ် ။ ပုစ္ဆာမှာပါတဲ့ First Joint သည် Prismatic Joint ဖြစ်တဲ့အတွက်ကြောင့် Table မှာ Highlight ပြထားတဲ့အတိုင်း J Matrix မှာ ယူပါတယ် ။

Second Joint ကို စတွက်မယ် - J Matrix ရဲ့ Second Column သည် Second Joint ဖြစ်တယ်ဆိုတာကို သိထားရပါမယ်၊ အဖြေကို ပုံမှာကြည့်ပါ။

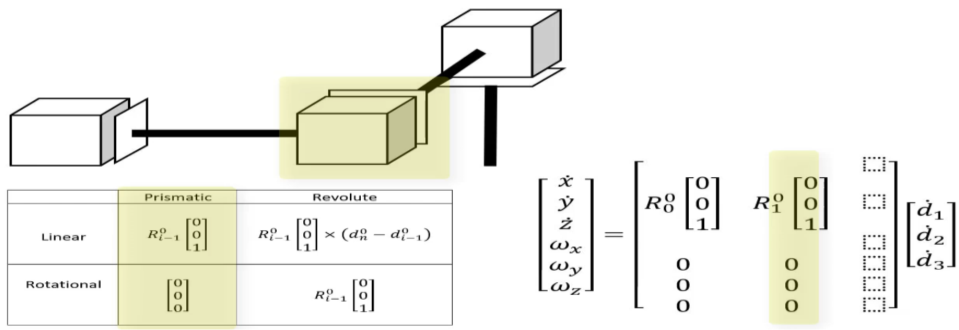


Figure – (1.2)

Figure - (1.2) J Matrix ရဲ့ Second Column အဖြေကိုရှင်းပါမယ်။ ပုစ္ဆာမှာပါတဲ့ Second Joint သည် Prismatic Joint ဖြစ်တဲ့အတွက်ကြောင့် Table မှာ Highlight ပြထားတဲ့အတိုင်း ယူပါတယ်။

Third Joint ကို စတွက်မယ် - J Matrix ရဲ့ Third Column သည် Third Joint ဖြစ်တယ်ဆိုတာကို သိထားရပါမယ်၊ အဖြေကို ပုံမှာကြည့်ပါ။

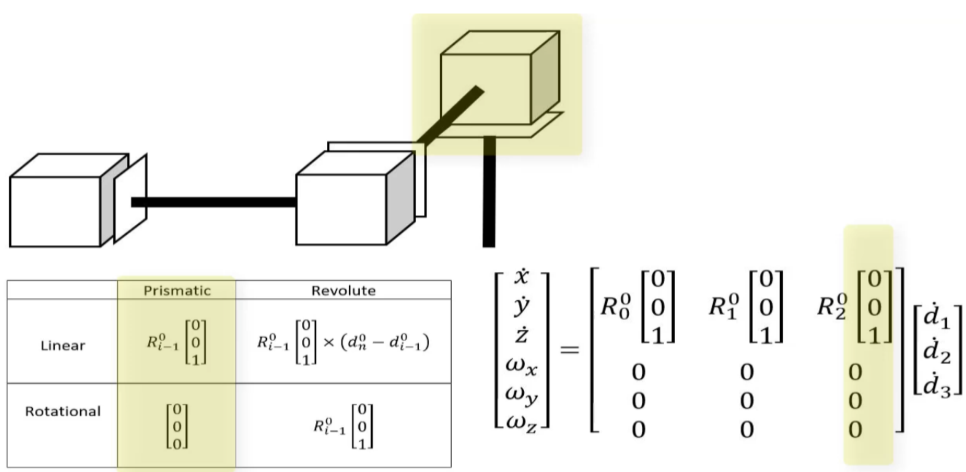
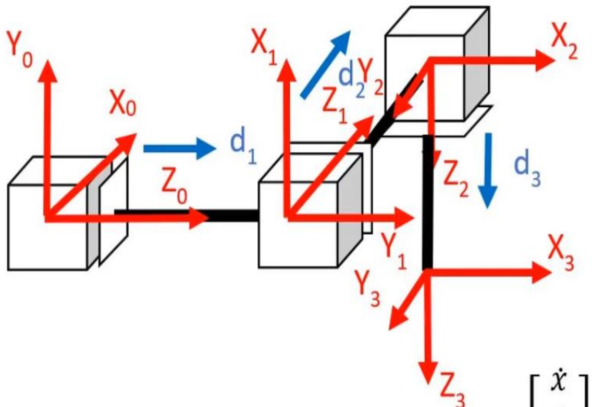


Figure – (1.3)

Figure - (1.3) J Matrix ရဲ့ Third Column အဖြေကိုရှင်းပါမယ်။ ပုစ္ဆာမှာပါတဲ့ Third Joint သည် Prismatic Joint ဖြစ်တဲ့အတွက်ကြောင့် Table မှာ Highlight ပြထားတဲ့အတိုင်း ယူပါတယ်။

Jacobian Matrix အထိ လေ့လာခဲ့ပြီးမှတော့ Joint တွေရဲ့ Rotational Matrix ကို သိပြီးပြီလို့ ယူဆတဲ့အတွက် R(0-0) ၊ R(0-1) နဲ့ R(0-2) တို့ကို အထူးတလည် မတွက်ပြတော့ပါဘူး ။

First Joint အတွက် Rotational Matrix ကို Figure - (1.4) မှာ ကြည့်ပါ ။

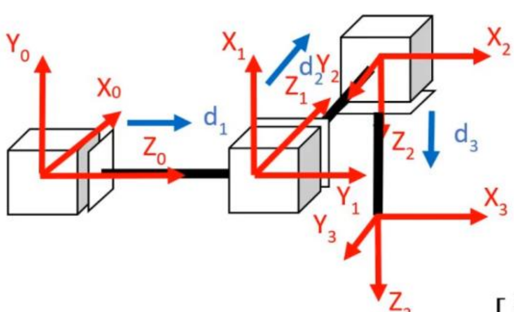


$$R_0^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & R_1^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & R_2^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix}$$

Figure – (1.4)

Second Joint အတွက် Rotational Matrix ကို Figure - (1.5) မှာ ကြည့်ပါ ။

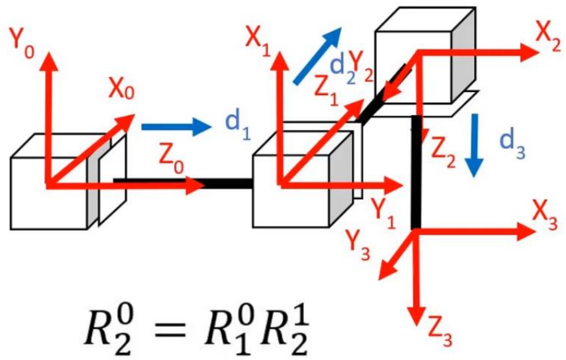


$$R_1^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} & R_1^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & R_2^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix}$$

Figure – (1.5)

Third Joint အတွက် Rotational Matrix ကို Figure - (1.6) မှာ ကြည့်ပါ ။



$$R_2^0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

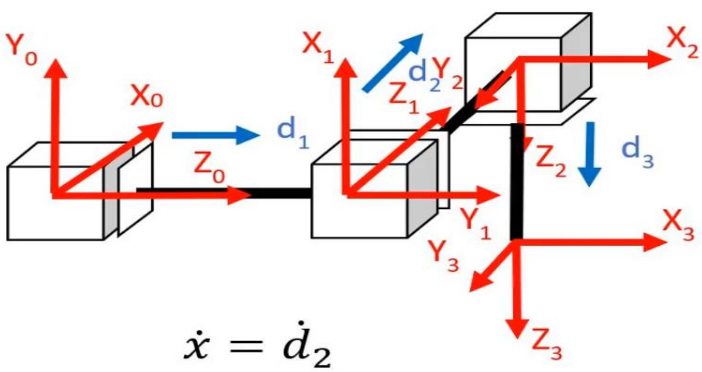
$$R_2^0 = R_1^0 R_2^1$$

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad R_2^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ 0 & 0 & R_2^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix}$$

Figure – (1.6)

Jacobain matrix ထဲမှာ Matrix တွေမြှောက်ပြီးရလာတဲ့ New Jacobian Matrix ကို သူညာဘက်က q-dot matrix နဲ့ မြှောက်လိုက်ပါက အောက်ပါပုံအတိုင်းရပါမယ် ။



$$\omega_x = 0$$

$$\omega_y = 0$$

$$\omega_z = 0$$

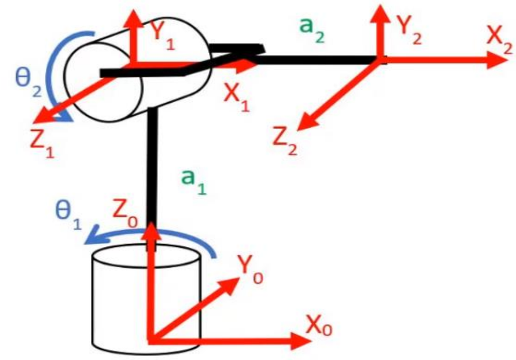
$$\dot{x} = \dot{d}_2$$

$$\dot{y} = -\dot{d}_3$$

$$\dot{z} = \dot{d}_1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix}$$

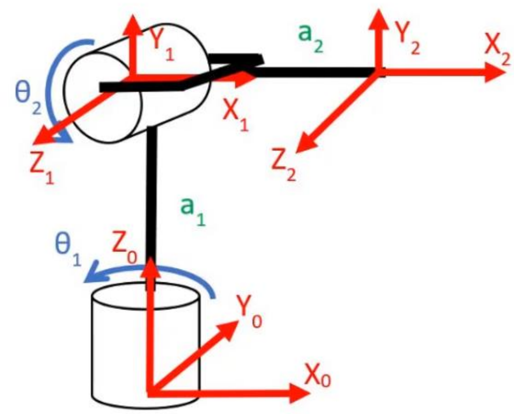
နောက်ထပ် Revolute Joint နှစ်ခုပါတဲ့ Example လေးကိုထပ်ကြည့်ရင် ပိုရှင်းသွားပါလိမ့်မယ် - အောက်က ပုံမှာကြည့်ပါ ။



	Prismatic	Revolute
Linear	$R^0_{i-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$	$R^0_{i-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \times \left(d^0_n - d^0_{i-1}\right)$
Rotational	$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$	$R^0_{i-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\\\dot{z}\\\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\square & \square\\\square & \square\\\square & \square\\\square & \square\\\square & \square\\\square & \square\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\\dot{\theta}_2\end{bmatrix}$$

အရမ်းများသွားမှာစိုးတဲ့အတွက် တွက်မပြတော့ပါဘူး ။ပထမ Example မှာပြထားသလိုပဲ တစ်ဆင့်ချင်း တွက်သွားရင် နောက်ဆုံး အဖြေရပါလိမ့်မယ် ၊ အောက်က ပုံမှာကြည့်ပါ - ပြီးပါပြီ ။



$$\dot{x} = -a_2 S\theta_1 C\theta_2 \dot{\theta}_1 - a_2 C\theta_1 S\theta_2 \dot{\theta}_2$$

$$\dot{y} = a_2 C\theta_1 C\theta_2 \dot{\theta}_1 - a_2 S\theta_1 S\theta_2 \dot{\theta}_2$$

$$\dot{z} = a_2 C\theta_2 \dot{\theta}_2$$

$$\omega_x = S\theta_1 \dot{\theta}_2$$

$$\omega_y = -C\theta_1 \dot{\theta}_2$$

$$\omega_z = \dot{\theta}_1$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\\\dot{z}\\\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-a_2 S\theta_1 C\theta_2 & -a_2 C\theta_1 S\theta_2\\ a_2 C\theta_1 C\theta_2 & -a_2 S\theta_1 S\theta_2\\ 0 & 2a_2 C\theta_2\\ 0 & S\theta_1\\ 0 & -C\theta_1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\\dot{\theta}_2\end{bmatrix}$$