E-mail:sbecerra@creasys.cl

Cubic Spline Interpolation

Anexo Técnico

María Solange Becerra

E-mail:sbecerra@creasys.cl

08 de Noviembre de 2011

Contenidos

Introducción

En esta sección, revisaremos un método de interpolación polinómica a trozos. Supongamos que tenemos un conjunto de $n+1$ puntos $P_0, P_1, ...P_n$, de la forma (x_k, y_k) a los cuales deseamos ajustar una curva. El objetivo es encontrar polinomios cúbicos $q_k(x)$ que interpolen cada segmento $[x_k, x_{k+1}]$,con $k = 0,\ 1, ...,\ n-1$.

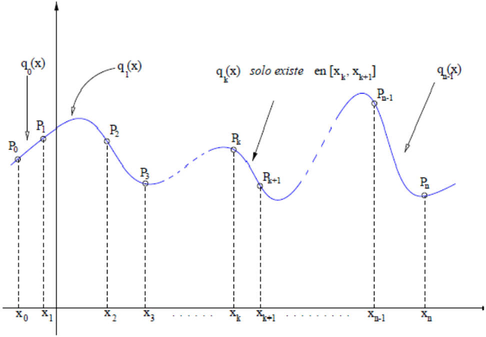

Figura 1: Interpolación polinómica a trozos.

Definición

Dado un conjunto de puntos $P_0, P_1, ...P_n$ *con* $P_k = (x_k, y_k)$, $k = 0,\ 1, ...,\ n.$. *Un* ***spline cúbico****, es una función* $S(x)$ *que cumple con las siguientes condiciones:*

- $S(x)$ *es un polinomio cúbico, denotado por* $q_k(x)$, *en el subintervalo* $[x_k, x_{k+1}]$, *para cada* $k = 0,\ 1, ...,\ n-1.$
- *Condiciones de Frontera*
  - $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ *Frontera libre o Natural Spline;*
  - $S'(x_0) = f'(x_0)$ *y* $S'(x_n) = F'(x_n)$ *(Clamped Spline);*

Definición

Dado un conjunto de puntos $P_0, P_1, ...P_n$ *con* $P_k = (x_k, y_k)$, $k = 0,\ 1, ...,\ n.$. *Un* ***spline cúbico****, es una función* $S(x)$ *que cumple con las siguientes condiciones:*

- $S(x)$ *es un polinomio cúbico, denotado por* $q_k(x)$*, en el subintervalo* $[x_k, x_{k+1}]$*, para cada* $k = 0,\ 1, ...,\ n-1$.
- $q_k(x_k) = y_k$ *para cada* $k = 0,\ 1, ...,\ n$.
- *Condiciones de Frontera*
  - $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ *Frontera libre o Natural Spline;*
  - $S'(x_0) = f'(x_0)$ *y* $S'(x_n) = F'(x_n)$ *(Clamped Spline);*

Definición

Dado un conjunto de puntos $P_0, P_1, ...P_n$ *con* $P_k = (x_k, y_k)$, $k = 0,\ 1, ...,\ n.$. *Un* *spline cúbico*, *es una función* $S(x)$ *que cumple con las siguientes condiciones:*

- $S(x)$ *es un polinomio cúbico, denotado por* $q_k(x)$, *en el subintervalo* $[x_k, x_{k+1}]$, *para cada* $k = 0,\ 1, ...,\ n-1$.
- $q_k(x_k) = y_k$ *para cada* $k = 0,\ 1, ...,\ n$.
- $q_k(x_{k+1}) = y_{k+1}$ *para cada* $k = 0,\ 1, ...,\ n-1$.

- *Condiciones de Frontera*
  - $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ *Frontera libre o Natural Spline;*
  - $S'(x_0) = f'(x_0)$ *y* $S'(x_n) = F'(x_n)$ *(Clamped Spline);*

Definición

Dado un conjunto de puntos $P_0, P_1, ...P_n$ *con* $P_k = (x_k, y_k)$, $k = 0,\ 1, ...,\ n.$*. Un spline cúbico, es una función* $S(x)$ *que cumple con las siguientes condiciones:*

- $S(x)$ *es un polinomio cúbico, denotado por* $q_k(x)$*, en el subintervalo* $[x_k, x_{k+1}]$*, para cada* $k = 0,\ 1, ...,\ n-1.$
- $q_k(x_k) = y_k$ *para cada* $k = 0,\ 1, ...,\ n.$
- $q_k(x_{k+1}) = y_{k+1}$ *para cada* $k = 0,\ 1, ...,\ n-1.$
- $q'_{k-1}(x_k) = q'_k(x_k)$ *para cada* $k = 1,\ 2, ...,\ n-1.$

- *Condiciones de Frontera*
  - $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ *Frontera libre o Natural Spline;*
  - $S'(x_0) = f'(x_0)$ *y* $S'(x_n) = F'(x_n)$ *(Clamped Spline);*

Definición

Dado un conjunto de puntos $P_0, P_1, ...P_n$ *con* $P_k = (x_k, y_k)$, $k = 0,\ 1, ...,\ n.$. *Un spline cúbico, es una función* $S(x)$ *que cumple con las siguientes condiciones:*

- $S(x)$ *es un polinomio cúbico, denotado por* $q_k(x)$, *en el subintervalo* $[x_k, x_{k+1}]$, *para cada* $k = 0,\ 1, ...,\ n-1.$
- $q_k(x_k) = y_k$ *para cada* $k = 0,\ 1, ...,\ n.$
- $q_k(x_{k+1}) = y_{k+1}$ *para cada* $k = 0,\ 1, ...,\ n-1.$
- $q'_{k-1}(x_k) = q'_k(x_k)$ *para cada* $k = 1,\ 2, ...,\ n-1.$
- ${q_{k-1}}''(x_k) = {q''}_k(x_k)$ *para cada* $k = 1,\ 2, ...,\ n-1.$
- *Condiciones de Frontera*
  - $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ *Frontera libre o Natural Spline;*
  - $S'(x_0) = f'(x_0)$ *y* $S'(x_n) = F'(x_n)$ *(Clamped Spline);*

La definición anterior asegura que el procedimiento para determinar un spline cúbico es lo suficiente flexible para garantizar que el interpolante $S(X)$, sea continuo y además tenga una segunda derivada continua en $[x_0, x_n]$.

Asumimos que cada polinomio cúbico está representado por:

$$q_k(x) = A_k + B_k(x - x_k) + C_k(x - x_k)^2 + D_k(x - x_k)^3, \tag{1}$$

para cada $k = 0,\ 1, ...,\ n-1$. Por lo que:

$$q_k{}'(x) = B_k + 2C_k(x - x_k) + 3D_k(x - x_k)^2,$$
$$q_k{}''(x) = 2C_k + 6D_k(x - x_k)$$

Claramente, se tiene:

$$A_k = y_k, \quad k = 0,\ 1, ...,\ n-1. \tag{2}$$

Denotando por

$$h_k = x_{k+1} - x_k,\ \ k = 0,\ 1, ...,\ n-1.$$

y defieniendo:

$$A_n = y_n, \quad B_n = q'(x_n), \quad C_n = q''(x_n)/2 \tag{3}$$

Al aplicar la tercera condición se tiene,

$$A_{k+1} = A_k + B_k h_k + C_k {h_k}^2 + D_k {h_k}^3, \;\; k = 0,\ 1, ...,\ n-1. \tag{4}$$

De manera análoga, al aplicar la cuarta condición,

$$B_{k+1} = B_k + 2C_k h_k + 3D_k {h_k}^2, \;\; k = 0,\ 1, ...,\ n-1. \tag{5}$$

Y aplicando la última condición se obtiene otra relación entre los coeficientes de q_k

$$C_{k+1} = C_k + 3D_k h_k, \;\; k = 0,\ 1, ...,\ n-1. \tag{6}$$

Al despejar D_k de (6) y sustituir este valor en las ecuaciones (4) y (5) se obtienen

$$A_{k+1} = A_k + B_k h_k + \frac{{h_k}^2}{3}(2C_k + C_{k+1}), \tag{7}$$

$$B_{k+1} = B_k + (C_k + C_{k+1})h_k, \tag{8}$$

para cada $k = 1,\ 1, ...,\ n-1$.

Combinando estas dos últimas ecuaciones, se obtiene el sistema de ecuaciones lineales,

$$h_{k-1}C_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)C_k + h_k C_{k+1} = \frac{3}{h_k}(a_{k+1} - a_k) - \frac{3}{h_{k-1}}(a_k - a_{k-1})$$

para cada $k = 1,\ 1, ...,\ n-1$.

Una vez que se conocen los valores C_k, $k = 0,\ 1, ...,\ n$. es posible encontrar el resto de los coeficientes $B_k,\ D_k$ a partir de las ecuaciones (6) y (8).

Entonces, si se establecen las condiciones de frontera natural, se puede determinar valores únicos para $\{C_k\}_{k=0}^{n}$ por medio del sistema de ecuaciones lineales, $A\vec{x} = \vec{b}$, donde A es la matriz de $(n+1) \times (n+1)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y $\vec{b}$ y $\vec{x}$ son los vectores:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(A_2 - A_1) - \frac{3}{h_0}(A_1 - A_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(A_n - A_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(A_{n-1} - A_{n-2}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1

Interpolar por splines cúbicos la función $f(x) = 1/x$ en $x =$1.5 considerando los puntos (0.1, 10.0), (0.2, 5.0), (0.5, 2.0), (1.0, 1.0), (2.0, 0.5), (5.0,0.2), (10.0, 0.1).

Solución:

$$\begin{aligned} h_0 &= 0.1 & h_3 &= 1.0 \\ h_1 &= 0.3 & h_4 &= 3.0 \\ h_2 &= 0.5 & h_5 &= 5.0 \end{aligned}$$

El sistema resultante es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 1.6 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 120 \\ 24 \\ 4.5 \\ 1.2 \\ 0.24 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Los diferentes splines son:

$$q_0(x) = 10 - 55.1942331(x-0.1) + 0(x-0.1)^2 + 519,4233095(x-0.1)^3$$
$$q_1(x) = 5 - 39.61153381(x-0.2) + 155,8269929(x-0.2)^2 - 190,4062672(x-0.2)^3$$
$$q_2(x) = 2 + 2,474969764(x-0.5) - 15,53864761(x-0.5)^2 + 13,17741616(x-0.5)^3$$
$$q_3(x) = 1 + -3.180615723(x-1.0) + 4,227476636(x-1.0)^2 - 1,546860913(x-1.0)^3$$
$$q_4(x) = 0.5 + 0,63375481(x-2.0) - 0,413106102(x-2.0)^2 + 0,056173722(x-2.0)^3$$
$$q_5(x) = 0.2 - 0,328191314(x-5.0) + 0,092457394(x-5.0)^2 - 0,006163826(x-5.0)^3$$

$$S(x) = \begin{cases} q_0(x), & \text{si } x \in [0.1, 0.2] \\ q_1(x), & \text{si } x \in [0.2, 0.5] \\ q_2(x), & \text{si } x \in [0.5, 1.0] \\ q_3(x), & \text{si } x \in [1.0, 2.0] \\ q_4(x), & \text{si } x \in [2.0, 5.0] \\ q_5(x), & \text{si } x \in [5.0, 10.0] \end{cases}$$

Para $x = 1.5$ se elige $q_3(x)$

$$
\begin{aligned}
q_3(x) &= 1 + -3.180615723(1.5-1.0) + 4,227476636(1.5-1.0)^2 - 1,546860913(1.5-1.0)^3 \\
&= 0,273203683
\end{aligned}
$$

Este valor, junto con la estimación para el intervalo $[0.1, 2.3]$ se muestran en la Figura 2.

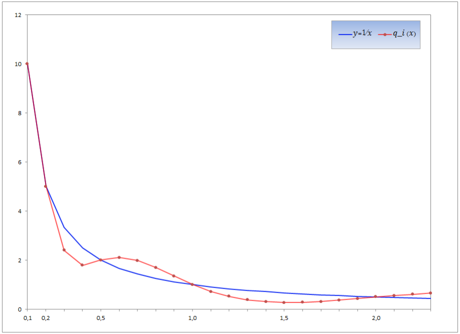

Figura 2: La función $1/x$ y $S(x)$ en el intervalo [0.1,2.3].

Ejemplo 2

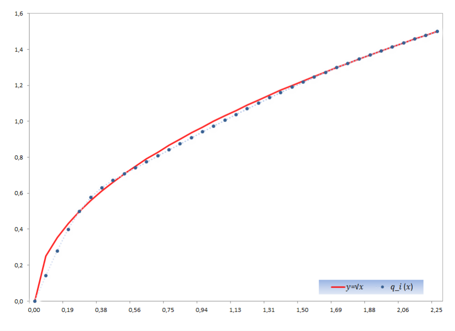

Figura 3: La función $\sqrt{x}$ y $S(x)$ en el intervalo $[0.0, 2.25]$.

Cuadro 1: Spline Cúbico para $y = \sqrt{x}$

$\mathbf{x}$	$\mathbf{y} = \sqrt{x}$	$\mathbf{S(x)}$	$\lvert\varepsilon_{\mathbf{i}}(\mathbf{x})\rvert$
0,000	0,000	0,000	0,00 %
0,063	0,250	0,142	10,78 %
0,125	0,354	0,277	7,61 %
0,250	0,500	0,500	0,00 %
0,313	0,559	0,576	1,68 %
0,375	0,612	0,631	1,86 %
0,500	0,707	0,707	0,00 %
0,563	0,750	0,741	0,93 %
0,625	0,791	0,774	1,62 %
1,750	1,323	1,323	0,00 %
1,813	1,346	1,347	0,05 %
1,875	1,369	1,370	0,05 %
2,000	1,414	1,414	0,00 %
2,063	1,436	1,436	0,02 %
2,125	1,458	1,457	0,04 %
2,250	1,500	1,500	0,00 %

Referencias

Richard L. Burden, J. Douglas Faires.
Numerical Analysis.
MA: Brooks/Cole, Boston, 6th edition, 1997.

Jesús García.
Interpolación: Splines Cúbicos Tutorial de Análisi Numérico.
Departamento de Informática y Sistemas, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, 35017 Campus de Tafira, España, 2 de Octubre de 2000.
v. 0.3.

Yves Nievergelt.
Splines in single and multivariable calculus.
Lexington, MA:COMAP, UMAP Unit 718, 1993.