ISTITUTO NAZIONALE DI ALTA MATEMATICA

SYMPOSIA MATHEMATICA

VOLUME V

(Estratto)

Roberto Magari

ALGEBRE A CONGRUENZE SPECIALI

"MONOGRAF"
BOLOGNA - 1970

ALGEBRE A CONGRUENZE SPECIALI (*) (**)

ROBERTO MAGARI

Premessa.

Questa relazione consiste di tre parti. Nella prima sono sunteggiati i risultati di due mie ricerche già pubblicate ([12], [13]), nella seconda e nella terza sono esposte distesamente due altre mie ricerche.

Tenterò di chiarire in questa premessa quale sia il motivo ispiratore comune di queste ricerche. Sia $(A_i)_{i\in I}$ una famiglia di algebre simili e $A = \prod_{i\in I} A_i$.

È ben noto come ad ogni filtro F su I resti associata una congruenza φF di A definita da:

$$\langle x, y\rangle \in \varphi F \quad \text{se e solo se} \quad \Delta(x, y) \in F \qquad (x, y \in A)$$

(dove $\Delta(x, y)$ sta per $\{i\in I\colon x_i = y_i\}$).

In un senso che può esser chiarito *queste sono le sole congruenze di A ottenibili con esclusivo riferimento al fatto che A è prodotto diretto di una famiglia indiciata con I.*

La situazione naturalmente cambia se su $A = \prod_{i\in I} A_i$ si tengono presenti altre informazioni.

Nella ricerca esposta nella parte II si esamina il caso in cui i fattori A_i coincidono e nella parte III il caso in cui (essendo le A_i algebre simili) sono dati i reticoli delle congruenze delle A_i.

In ognuno dei due casi si studia un modo di costruire congruenze di A soddisfacenti ad una proposizione analoga a quella sopra enunciata.

(*) I risultati contenuti in questo lavoro sono stati esposti nella conferenza tenuta il 18 novembre 1969.

(**) Le ricerche dell'autore esposte in questa relazione sono state eseguite nell'ambito dell'attività del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R. (contratto 115218205174, anno 1969).

La parte I è dedicata a riassumere alcuni risultati su classi di algebre soddisfacenti condizioni circa le congruenze, legate al concetto di congruenza associata a un filtro.

Ulteriori chiarimenti sulle ricerche oggetto della parte II e della parte III saranno dati nelle rispettive premesse.

PARTE I

CLASSI FILTRALI E METAFILTRALI

1. Notazioni e definizioni.

Sia X una classe di algebre simili, allora indicherò con:

$\boldsymbol{S}X$ la classe delle algebre isomorfe a sottoalgebre di algebre di X

$\boldsymbol{H}X$ la classe delle immagini omomorfe di algebre di X

$\boldsymbol{P}X$ la classe delle algebre isomorfe a prodotti diretti di algebre di X

$\boldsymbol{R}X$ la classe delle algebre isomorfe a prodotti sottodiretti di algebre di X

$\boldsymbol{V}X$ la varietà generata da X

$\boldsymbol{\Sigma}X$ la classe delle algebre semplici di X.

Una varietà V di algebre si dirà:

semisemplice se ogni $A \in V$ è semisemplice (i.e. $V = \boldsymbol{R\Sigma}V$);
sottosemisemplice se $V = \boldsymbol{SP\Sigma}V$.

Un'algebra A si dirà:

regolare se per ogni $B \in \boldsymbol{S}\{A\}$ ogni congruenza R di B è estendibile ad una congruenza S di A ($S \cap B^2 = R$).

Sia $(A_i)_{i\in I}$ una famiglia di algebre simili e A un prodotto sottodiretto delle A_i. Si dirà che A è *a congruenze filtrali* se le sole congruenze di A sono quelle associate a filtri su I.

Una classe X di algebre simili si dirà:

categorica se $\boldsymbol{V}X = \boldsymbol{R}X$;
semicategorica se $\boldsymbol{V}X = \boldsymbol{SP}X$;
filtrale se ogni algebra di $\boldsymbol{R}X$ è a congruenze filtrali;
semifiltrale se ogni algebra di $\boldsymbol{P}X$ è a congruenze filtrali;
metafiltrale (*rispetto a* Y) se esiste una classe fil rale Y di algebre simili e un funtore dimenticante δ con $\delta(X) \subseteq \boldsymbol{SP}Y$.

2. Classi filtrali.

Valgono i seguenti risultati:

(A) Sia X *semifiltrale*, allora $\boldsymbol{\Sigma HP}X$ è *semifiltrale*.

(B) Sia X *filtrale*, allora:

(B1) $\boldsymbol{V}X$ è sottosemisemplice.

(B2) Ogni $A \in \boldsymbol{SP}X$ è a congruenze filtrali.

(B3) Ogni $A \in \boldsymbol{SP}X$ è regolare.

(B4) Se $X = \{W\}$ allora:

(B,41) Se W è finita è semicategorica.

(B,42) Se W è infinita esistono in $\boldsymbol{V}\{W\}$ algebre semplici non isomorfe a W e pertanto $\boldsymbol{V}\{W\} \nsubseteq \boldsymbol{SP}\{W\}$

(B5) Siano (a), (b), (c), e (d) le seguenti proprietà:

(a) $\boldsymbol{\Sigma V}X$ è filtrale;

(b) ogni $A \in \boldsymbol{V}X$ è regolare;

(c) $\boldsymbol{V}X$ è semisemplice;

(d) $\boldsymbol{V}X = \boldsymbol{SP}X$;

allora vale il seguente schema di implicazioni:

$$\begin{tikzcd} & (a) \arrow[dr] \arrow[dd, shift right] & \\ (d) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (c) \\ & (b) \arrow[ur] \arrow[uu, shift right] & \end{tikzcd}$$

3. Classi metafiltrali.

Sia X metafiltrale e $\boldsymbol{S}X$ costituito di algebre semplici, allora:

(A) Se A è sottoalgebra di $\prod_{i \in I} A_i$ con $A_i \in X$ e:

(i) il codominio della famiglia $(A_i)_{i \in I}$ è finito;

(ii) ogni elemento di A ha codominio finito (in particolare le (i), (ii) sono soddisfatte se I è finito);

allora A è *a congruenze filtrali*.

(B) Se X è costituita di algebre finite ed ammette un numero finito di tipi di isomorfismo allora è *filtrale*.

Sia X metafiltrale e X costituita di algebre semplici, allora:

(C) Se A è *prodotto sottodiretto* di una famiglia $(A_i)_{i \in I}$ con $A_i \in X$ e I finito allora A è *a congruenze filtrali*.

(D) Se X è costituita di algebre finite ed ammette un numero finito di tipi di isomorfismo allora è *semifiltrale*.

Un tipico corollario di (B) è il seguente:

Sia $\mathfrak{R} = \langle R, +, \cdot, f_i \rangle_{i \in I}$ *finita semplice e a sottoalgebre semplici con* $\langle R, +, \cdot \rangle$ *reticolo distributivo. Allora* $\mathfrak{R}$ *è filtrale* (*e perciò semicategorica*).

Lo studio di particolari classi di algebre mostra che questi risultati non ammettono rafforzamenti banali. Anzitutto è facile costruire un'algebra finita (addirittura di quattro elementi) metafiltrale, semplice ma con sottoalgebre non semplici e perciò non filtrale (beninteso semifiltrale a norma di D).

L'algebra avente come insieme di base ω e come operazioni tutte le operazioni reticolari collegate agli ordinamenti totali $<_a^b$ (con $a<b$) ammettenti a come primo elemento, b come ultimo e per il resto coincidente con $\leqslant$ è metafiltrale, semplice e a sottalgebre semplici ma non è neanche semifiltrale.

Sia poi α un qualunque cardinale e:

$\underline{\alpha}$ l'algebra avente α come insieme di base e come operazioni tutte le operazioni reticolari legate ai vari ordini totali su α.

$\underline{\underline{\alpha}}$ l'algebra c.s. e munita inoltre di tutte le operazioni zeroadiche.

Si dimostra che, mentre in base a (B) per α finito sia $\underline{\alpha}$ che $\underline{\underline{\alpha}}$ sono filtrali (del resto $\underline{\underline{\alpha}}$ risulta addirittura primale) per α infinito sia $\underline{\alpha}$ che $\underline{\underline{\alpha}}$ sono semifiltrali ma non filtrali.

Parte II

UN NUOVO ESEMPIO DI CONGRUENZE DI UNA POTENZA DIRETTA DETERMINATE CON RIFERIMENTO ALL'INSIEME DEGLI INDICI

(Potenze ridotte generalizzate *I*)

Premessa.

È ben nota l'importanza dei concetti di prodotto ridotto e di ultraprodotto in teoria dei modelli e in algebra universale (cfr. un qualunque trattato sull'argomento, ad esempio P. M. Cohn [1]). Questi concetti ammettono applicazioni particolarmente potenti, ormai classiche, nel caso di fattori tutti isomorfi (potenza ridotta, ultrapotenza).

Il punto di partenza è la costruzione di equivalenze di un prodotto cartesiano definite, per così dire, con riferimento esclusivo all'insieme degli indici (legate, come è ben noto, a filtri sull'insieme degli indici). Almeno nel caso di fattori isomorfi quello legato ai filtri non è tuttavia, come si vedrà, l'unico modo interessante di introdurre equivalenze. Si introdurranno in questa nota certe equivalenze di A^I legate, come si vedrà, a certi « filtri » di terne di relazioni binarie su I (da non confondere con i filtri su I).

In questa prima nota si esaminerà solo l'aspetto puramente algebrico della costruzione.

Si sa che se A è un'algebra (si intenda una coppia costituita da un insieme « di base » che, per comodità, si indicherà ancora con A e da una famiglia (finita o no) di operazioni finitarie su A) ogni sua potenza diretta ammette, fra le altre, tutte le congruenze « filtrali » (per i concetti qui usati oltre al citato trattato di P. M. Cohn si vedano anche [12], [13] di cui conserverò in gran parte linguaggio e notazioni). È noto anche che per ogni insieme A esistono strutture algebriche su A per cui, qualunque sia I, le congruenze di A^I (e anzi di ogni sua sottoalgebra) sono tutte filtrali (basta, per esempio, dotare A di tutte le operazioni binarie, cfr. [10] o anche [13] in cui si dànno esempi non riconducibili a questo).

In questa nota, dopo aver introdotto le equivalenze di cui parlavo si mostrerà che esse sono compatibili con ogni operazione di A^I indotta da una operazione unaria di A e che se A è dotata di tutte le operazioni unarie allora tali equivalenze sono le sole congruenze di A^I.

1. Terne determinanti.

Sia A un insieme di almeno due elementi e I un insieme non vuoto.

Per ogni $x \in A^I$ si ponga:

(1) $$\varrho x = \{\langle i, j\rangle \in I^2 \colon\ x_i = x_j\}\,,$$

(ovviamente ϱx è un'equivalenza) e per ogni coppia $\langle x, y\rangle$ di elementi di A^I:

(2) $$\delta(x, y) = \{\langle i, j\rangle \in I^2 \colon\ x_i = y_j\}$$

e ancora:

(3) $$\Delta(x, y) = \langle \varrho x, \varrho y, \delta(x, y)\rangle\,.$$

È ovvio che se $x, y \in A^I$ esiste una iniezione f da un certo sottoinsieme M di I/ϱ a I/σ per cui si ha:

$$\delta(x, y) = \bigcup_{X \in M} (X \times fX) . \tag{4}$$

Ciò suggerisce di privilegiare le terne soddisfacenti a questa condizione, ponendo:

Definizione 1: *Sia I un insieme, una terna $t = \langle \varrho, \sigma, R \rangle$ si dirà una* terna determinante (t.d.) *su I se e solo se:*

(i) ϱ, σ sono equivalenze su I;

(ii) esiste un $M \subseteq I/\varrho$ ed una iniezione f da M a I/σ per cui [1]:

$$R = \bigcup_{X \in M} (X \times fX) . \tag{4'}$$

Osservazione 1: Ovviamente se t, ϱ, σ, R, f hanno il significato ora detto f resta univocamente determinata da ϱ, σ, R e R da ϱ, σ, f. Per snellire le notazioni si scriverà anche $t = \langle \varrho, \sigma, R; f \rangle$, $t = \langle \varrho, \sigma; f \rangle$. Può essere anche utile, fissati due insiemi I_0, I_1 biiettivi a I e fra loro disgiunti e due biiezioni η_0, η_1 da I a I_0, I_1 rispettivamente, considerare la relazione binaria S definita in $I_0 \cup I_1$ da:

$$\langle i, j \rangle \in S \text{ se } \begin{cases} i, j \in I_0, & e \quad \langle \eta_0^{-1} i, \eta_0^{-1} j \rangle \in \varrho , \quad \text{oppure,} \\ i, j \in I_1, & e \quad \langle \eta_1^{-1} i, \eta_1^{-1} j \rangle \in \sigma , \quad \text{oppure,} \\ i \in I_0, \quad j \in I_1, & e \quad \langle \eta_0^{-1} i, \eta_1^{-1} j \rangle \in R , \quad \text{oppure,} \\ i \in I_1, \quad j \in I_0, & e \quad \langle \eta_0^{-1} j, \eta_1^{-1} i \rangle \in R . \end{cases}$$

È chiaro che se t è una t.d. S è un'equivalenza su $I_0 \cup I_1$ e che viceversa ogni equivalenza su $I_0 \cup I_1$ proviene da una e una sola t.d.

Chiaramente se $x, y \in A^I$ allora $\Delta(x, y)$ è una t.d. Come si vedrà, salvo limitazioni legate alla cardinalità di A, è vero anche l'inverso.

Detto T l'insieme delle t.d. si può in modo ovvio dare a T una struttura. Ci interesseranno in particolare:

[1] Questa condizione è equivalente alla seguente, più utile per le verifiche che occorreranno. Se nello schema

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, rightsquigarrow, "\varrho"] \arrow[d, rightsquigarrow, "R"'] & i' \arrow[d, rightsquigarrow, "R"] \\ j \arrow[r, rightsquigarrow, "\sigma"'] & j' \end{tikzcd}$$

sono validi 3 lati allora è valido anche il quarto.

(*a*) l'ordine parziale $\leqslant$ definito in T da:

(5) $\langle \varrho_1, \sigma_1, R_1\rangle \leqslant \langle \varrho_2, \varrho_2, R_2\rangle$ se e solo se $\varrho_1 \subseteq \varrho_2,\ \sigma_1 \subseteq \sigma_2,\ R_1 \subseteq R_2$ (²).

Chiaramente, rispetto a $\leqslant$, T costituisce un reticolo completo in cui l'elemento massimo è $\langle I^2, I^2, I^2\rangle$, l'elemento minimo (che si indicherà con 0) è $\langle d, d, \varnothing\rangle$ (d essendo la diagonale di I) e l'infimo di una famiglia $(\langle \varrho_j, \sigma_j, R_j\rangle)_{j\in J}$ è dato da:

(6) $$\bigwedge_{j\in J}\langle \varrho_j, \sigma_j, R_j\rangle = \langle \bigcap_{j\in J} \varrho_j, \bigcap_{j\in J} \sigma_j, \bigcap_{j\in J} R_j\rangle .$$

(*b*) Il « prodotto » di due t.d., definito solo per due t.d. $\langle \varrho_1, \sigma_1, R_1\rangle$, $\langle \varrho_2, \sigma_2, R_2\rangle$ con $\sigma_1 = \varrho_2$, dalla:

(7) $$\langle \varrho_2, \sigma_2, R_2\rangle \circ \langle \varrho_1, \sigma_1, R_1\rangle = \langle \varrho_1, \sigma_2, R_2 \circ R_1\rangle \text{ (³)}.$$

Chiaramente il prodotto di due t.d., quando sia definito, è una t.d. (per la verifica di questo fatto come pure della (6) cfr. nota (¹)).

(*c*) l'inversa $\langle \varrho, \sigma, R\rangle^{-1}$ di una t.d., definita da:

(8) $$\langle \varrho, \sigma, R\rangle^{-1} = \langle \sigma, \varrho, R^{-1}\rangle .$$

Ovviamente l'inversa di una t.d. è una t.d.

(*d*) Gli elementi privilegiati $0 = \langle d, d, \varnothing\rangle$, $1 = \langle d, d, d\rangle$, che sono chiaramente delle t.d.

Ci saranno utili in seguito alcune banalissime proprietà di cui tralascio l'ovvia dimostrazione:

(9) $$1 \odot t = t , \qquad t \odot 1 = t ,$$

(10) il prodotto $\odot$ è associativo e monotono crescente rispetto ad ambedue gli argomenti,

(²) Ossia, con ovvio simbolismo, nei termini dell'osservazione che segue la Definizione 1, $S_1 \subseteq S_2$.

(³) Si può facilmente estendere in modo ovvio quest'operazione al caso di due t.d. con $\sigma_1 \neq \varrho_2$. Si prendano tre copie disgiunte a due a due di I: I_0, I_1, I_2, si costruiscano nel solito modo S_1 su $I_0 \cup I_1$ e S_2 su $I_1 \cup I_2$ e poi la minima equivalenza $\bar{S}$ su $I_0 \cup I_1 \cup I_2$ contenente $S_2 \cup S_1$, infine si ponga $S = \bar{S} \cap (I_0 \cup I_2)^2$.

Per prodotto di t_1, t_2 si dovrà allora intendere la t.d. che relativamente ad I_0, I_2 dà luogo a S. In seguito salvo avvertenza contraria mi riferirò sempre al prodotto parziale, sarà sottintesa l'ipotesi che le terne in oggetto siano tali che il prodotto sia definito. Quando vorrò riferirmi al prodotto totalmente definito lo indicherò con $\odot$.

La costruzione mi sembra così chiara e la controparte rigorosa così inutilmente farraginosa che mi sembra inutile complicare una questione che è del resto molto semplice.

(11) $$1^{-1} = 1\,,$$

(12) $$\text{se} \quad t \geqslant s \quad \text{allora} \quad t^{-1} \geqslant s^{-1},$$

(13) $$(t \odot s)^{-1} = s^{-1} \odot t^{-1}.$$

Diamo ora la seguente:

Definizione 2: *Un sottoinsieme F di T si dirà un $\circ$-filtro se:*

(i) se $t \leqslant s$ e $t \in F$ allora $s \in F$ $(t, s \in T)$

(ii) se $t \in F$ allora $t^{-1} \in F$ $(t \in T)$

(iii) se $t, s \in F$ allora $t \circ s \in F$ $(t, s \in T)$

e si dirà un $\circ$-filtro unitario se inoltre:

(iv) $1 \in F$.

Osservazione 2: È immediato dalla definizione che ogni intersezione di $\circ$-filtri è un $\circ$-filtro e che ogni intersezione di $\circ$-filtri unitari è un $\circ$-filtro unitario, onde dato un sottoinsieme M di T si può parlare in un senso ovvio dell'$\circ$-filtro $\overline{M}$ « generato » da M e dell'$\circ$-filtro unitario $\overline{\overline{M}}$ « generato » da M. È ancora immediato che $\overline{}$ $\overline{\overline{}}$ risultano chiusure di Moore *algebriche*, il che permette di condurre in modo ovvio dimostrazioni per induzione.

Si ha inoltre:

Lemma 1: *Qualunque sia $M \subseteq T$ si ha:*

(14) $$\overline{\overline{M}} = \overline{1} \cup \overline{M}$$

e inoltre:

(15) $$\overline{\overline{1}} = \overline{1} = \{t \in T\colon\ t \geqslant 1\}\,.$$

Dimostrazione: È di immediata verifica che inversi e prodotti di elementi $\geqslant 1$ sono ancora $\geqslant 1$, da cui la (15).

Per la (14) tutto si riconduce a verificare che se $t \geqslant 1$ e $s \in \overline{M}$ è $s \circ t \in \overline{1} \cup \overline{M}$ (quando il prodotto sia definito). Ora, posto $t = \langle \varrho, \sigma, R\rangle$, $s = \langle \sigma, \tau, S\rangle$ da $t \geqslant 1$ segue subito $\varrho = \sigma$ e $t = \langle \sigma, \sigma;\ \mathrm{diag}\, I/\sigma\rangle$ e infine si ha:

$$s \circ t = \langle \sigma, \tau, S \rangle \circ \langle \sigma, \sigma, \operatorname{diag} I/\sigma \rangle = \langle \sigma, \tau, S \rangle , \quad \text{da cui} \quad s \circ t = s \in \overline{M} .$$

Sarà utile per il seguito il lemma seguente:

LEMMA 2: *Se* $t = \langle \varrho, \sigma, R \rangle \geqslant t_n \circ t_{n-1} \circ \ldots \circ t_1$ $(t_i = \langle \varrho_{i-1}, \varrho_i, R_i \rangle)$ *esistono certi* $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \ldots, \bar{t}_n$ $(t_i = \langle \bar{\varrho}_{i-1}, \bar{\varrho}_i, \bar{R}_i \rangle)$ *con* $\bar{t}_i \geqslant t_i$, $t \geqslant \bar{t}_n \circ \bar{t}_{n-1} \circ \ldots \circ \bar{t}_1$, $\bar{\varrho}_0 = \varrho$, $\bar{\varrho}_n = \sigma$.

DIMOSTRAZIONE: Sia $(\eta_i)_{i \in n}$ una famiglia di biiezioni da I a certi I_i a due a due disgiunti e poniamo:

$$\begin{aligned}
\hat{\varrho} &= \eta_0 \circ \varrho \circ \eta_0^{-1}, \\
\hat{\sigma} &= \eta_n \circ \sigma \circ \eta_n^{-1}, \\
\hat{\varrho}_i &= \eta_i \circ \varrho_i \circ \eta_i^{-1}, && (i \in n), \\
\hat{R} &= \eta_n \circ R \circ \eta_0^{-1}, \\
\hat{R}_i &= \eta_i \circ R_i \circ \eta_{i-1}^{-1} . && (i \in \{1, 2, \ldots, n\}).
\end{aligned}$$

Sia $\hat{S}$ la minima equivalenza su $J = \bigcup_{i \in n} I_i$ contenente l'unione delle relazioni ora definite e poniamo:

$$\begin{aligned}
\hat{\hat{\varrho}}_i &= \hat{S} \cap I_i^2 , \\
\hat{\hat{R}}_i &= \hat{S} \cap (I_{i-1} \times I_i) ,
\end{aligned}$$

e ancora:

$$\begin{aligned}
\bar{\varrho}_i &= \eta_i^{-1} \circ \hat{\hat{\varrho}}_i \circ \eta_i , \\
\bar{R}_i &= \eta_i^{-1} \circ \hat{\hat{R}}_i \circ \eta_{i-1} .
\end{aligned}$$

Posto $\bar{t}_i = \langle \bar{\varrho}_{i-1}, \bar{\varrho}_i, \bar{R}_i \rangle$ non è difficile verificare con qualche fastidioso ma banale passaggio che le richieste del lemma sono soddisfatte (la trasformazione mediante le η_i è ovviamente inessenziale alla dimostrazione ma rende più leggibili le verifiche che qui ho omesso e più trasparente la situazione).

Valgono i seguenti lemmi:

LEMMA 3: *Ogni* $\circ$*-filtro è chiuso rispetto al prodotto* $\odot$ *di cui nella nota* (3).

DIMOSTRAZIONE: Ovvia con tecniche analoghe a quelle del Lemma 2.

Lemma 4: *Qualunque sia $M \subseteq T$ si ha, detto M^{-1} l'insieme degli inversi degli elementi di M:*

$$\overline{M} = \{t \in T\colon \text{ esistono certi } t_1, t_2, \ldots, t_n \in M \cup M^{-1}$$

$$\text{con } t \geqslant t_1 \odot t_2 \odot \ldots \odot t_n\} = \{t \in T\colon \text{ esistono certi } t_1, t_2, \ldots, t_n \in M \cup M^{-1}$$
e certi $\bar{t}_1 \bar{t}_2, \ldots, \bar{t}_n$ con $\bar{t}_i \geqslant t_i$ e $t \geqslant \bar{t}_1 \circ \bar{t}_2 \circ \ldots \circ \bar{t}_n\}$.

Dimostrazione: Ovviamente il primo membro contiene il secondo. Che il secondo membro rispetti la (i) della Definizione 2 è ovvio, che rispetti la (ii) segue dalle (12), (13) e che rispetti la (iii) dalla (10).

L'uguaglianza fra il secondo e il terzo membro si dimostra con tecniche analoghe a quelle del Lemma 2.

2. α-$\circ$-**filtri.**

Si mostrerà nel paragrafo 3 che ad ogni filtro unitario su I è associata, qualunque sia A, un'equivalenza su A^I che è compatibile con ogni operazione unaria su A^I indotta da un'operazione unaria su A. Allo scopo di evitare fastidiose ripetizioni è opportuno introdurre ancora alcuni concetti preliminari.

Abbiano A, I, T ecc. il solito significato e sia $\alpha = \operatorname{Card} A$. Per ogni $t \in T$, $t = \langle \varrho, \sigma, R \rangle$ si ponga:

$$\alpha(t) = \operatorname{Card} I/\varrho + \operatorname{Card}(I/\sigma - f(M)) = \operatorname{Card}((I_0 \cup I_1)/S) \,, \tag{16}$$

(M, f avendo il significato della Definizione 1 ed S, I_0, I_1 il significato dell'Osservazione 1).

È facile vedere che:

$$\alpha(1) = \operatorname{Card} I \,, \tag{16,1}$$

$$\alpha(0) = 2 \operatorname{Card} I \,, \tag{16,2}$$

$$\alpha(t^{-1}) = \alpha(t) \,, \qquad (t \in T), \tag{16,3}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (16,4) & \alpha(s \circ t) \leqslant \alpha(s) + \alpha(t) \\ (16,5) & \text{se } \; t \leqslant s \; \text{ allora } \; \alpha(t) \geqslant \alpha(s) \\ (16,6) & \alpha(t \vee s) \leqslant \min(\alpha(t), \alpha(s)) \end{array}\right| \qquad (s, t \in T).$$

Si ponga $T^{(\alpha)} = \{t \in T\colon \alpha(t) \leqslant \alpha\}$.

Vale il seguente:

Lemma 5: $T^{(\alpha)} = \{\Delta(x, y)\colon x, y \in A^I\}$.

DIMOSTRAZIONE: Intanto si ha:

$$\alpha(\Delta(x, y)) = \mathrm{Card}\,(\mathrm{codom}\, x \cup \mathrm{codom}\, y)\,, \qquad (x, y \in A^I), \tag{17}$$

da cui

$$\Delta(x, y) \in T^{(\alpha)}. \qquad (x, y \in A^I).$$

Sia $t \in T^{(\alpha)}$, $t = \langle \varrho, \sigma, R; f \rangle$. Sia $M = \mathrm{dom}\, f$, $N = \mathrm{codom}\, f$ e si fissi una iniezione g da $I/\varrho \cup (\{0\} \times (I/\sigma - N))$ ad A. Si definiscano $x, y \in A^I$ ponendo:

$$x_i = g[i]_\varrho\,,$$

(dove $[i]_\varrho$ indica la classe di equivalenza di i rispetto a ϱ),

$$y_i = \begin{cases} g\langle 0, [i]_\sigma \rangle\,, & \text{se } [i]_\sigma \notin N, \\ gf^{-1}[i]_\sigma\,, & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

Chiaramente $\Delta(x, y) = t$ e il lemma è dimostrato. Sarà utile osservare anche che:

LEMMA 6: *Se α è infinito e J è un $\circ$-filtro allora $J \cap T^{(\alpha)}$ è ancora un $\circ$-filtro.*

DIMOSTRAZIONE: Immediata dalle (16,3), (16,4), (16,5).

LEMMA 7: *Se $\alpha \geqslant 2\,\mathrm{Card}\, I$ allora $T^{(\alpha)} = T$.*

DIMOSTRAZIONE: Ovvia dalle (16,2), (16,5).

3. Equivalenze associate ad un filtro unitario.

Abbiano A, I, T il solito significato e sia $M \subseteq \mathfrak{I}(T)$. Si indicherà con R_M la relazione binaria in A^I definita da:

$$x R_M y \quad \text{se e solo se} \quad \Delta(x, y) \in M\,, \qquad (x, y \in A^I).$$

Vale il seguente:

TEOREMA 1: *Se M è un $\circ$-filtro unitario su T, R_M è un'equivalenza di A^I compatibile con ogni operazione unaria $\hat{f}$ su A^I che sia indotta da un'operazione unaria f su A.*

DIMOSTRAZIONE: Si ha:

$$(18,1)\quad \delta(x, x) \supseteq d\,,$$

da cui:

$$(18,2)\quad \Delta(x, x) \geqslant 1\,,$$

$$(19)\quad \Delta(x, y) = (\Delta(y, x))^{-1},$$

$$(20,1)\quad \delta(x, z) = \{\langle i, k\rangle : x_i = z_k\} \supseteq$$
$$\supseteq \{\langle i, k\rangle : \text{esiste un } j \in I \text{ con } x_i = y_j = z_k\} = \delta(y, z) \circ \delta(x, y)\,,$$

da cui:

$$(20,2)\quad \Delta(x, z) \geqslant \Delta(y, z) \circ \Delta(x, y)\,,$$

$$(21,1)\quad \delta(\hat{f}x, \hat{f}y) \supseteq \delta(x, y)\,,$$

$$(21,2)\quad \varrho\hat{f}x \supseteq \varrho x\,,$$

$$(21,3)\quad \varrho\hat{f}y \supseteq \varrho y\,,$$

da cui:

$$(21,4)\quad \Delta(\hat{f}x, \hat{f}y) \geqslant \Delta(x, y)\,,$$

le (18,2), (19), (20,2) mostrano che la R è di equivalenza e la (21,4) che è compatibile con $\hat{f}$. Tenuto conto del lemma 5 si ha subito:

COROLLARIO 1: *Se M è la traccia su $T^{(\alpha)}$ di un $\circ$-filtro unitario F di T allora $R_M = R_F$ onde per tali tracce (che d'ora in poi saranno dette α-$\circ$-filtri) vale ancora il risultato del Teorema 1.*

L'importanza di restringerci a $T^{(\alpha)}$ sta nel fatto che mentre l'applicazione ϑ: $F \to R_F$ dall'insieme dei filtri unitari di T all'insieme delle equivalenze di A^I non è in generale iniettiva, detta ζ l'analoga applicazione dalle tracce dei filtri unitari alle congruenze si ha ovviamente:

TEOREMA 2: *ζ è iniettiva (e come si è già visto $\operatorname{codom}\zeta = \operatorname{codom}\vartheta$).*

DIMOSTRAZIONE: Siano J_1, J_2 due $\circ$-filtri unitari e sia $R_{J_1} = R_{J_2}$. Sia $t = \langle \varrho, \sigma, R\rangle \in J_1 \cap T^{(\alpha)}$.

Poichè $\alpha(t) < \alpha$ esiste una coppia $\langle x, y\rangle$ con $\Delta(x, y) = t$ e quindi $xR_{J_1}y$. Si ha $xR_{J_2}y$ da cui $t \in J_2 \cap T^{(\alpha)}$. Perciò $J_1 \cap T^{(\alpha)} \subseteq J_2 \cap T^{(\alpha)}$.

Analogamente si dimostra l'inclusione inversa e con essa il teorema.

4. Suriettività di ϑ (e di ζ) quando A sia munita di tutte le operazioni unarie.

Dal Teorema 1 segue che se A è munita solo di operazioni unarie o esprimibili da unarie ogni $\circ$-filtro unitario di T dà luogo a una congruenza di A^I. Mostriamo ora che:

Teorema 3: *Se A è munita di tutte le operazioni unarie (o comunque il clono generato dalle sue operazioni coincide con quello generato dalle operazioni unarie) si ottengono in tal modo tutte le congruenze di A^I.*

Dimostrazione: Sia R una congruenza di A^I e sia F lo $\circ$-filtro unitario generato dall'insieme $M = \{\Delta(x, y) \colon xRy\}$. Basterà mostrare che $R_F = R$.

Ovviamente $R_F \supseteq R$ e tutto si riduce a mostrare che $R_F \subseteq R$.

Sia $t = \langle \varrho, \sigma, S \rangle = \Delta(x, y) \in F$. Si tratta di mostrare che è xRy.

(i) Se $t \geqslant 1$ la cosa è ovvia.

(ii) Sia $t \geqslant \bar{t}$ per un $\bar{t} \in M$.

Sia $\bar{t} = \Delta(u, v)$ e sia $f \colon A \to A$ con:

$$fa = \begin{cases} x_i & \text{se} \quad u_i = a\,, \\ y_i & \text{se} \quad v_i = a\,, \\ \text{un valore qualunque altrimenti.} \end{cases}$$

È facile vedere che le clausole sono compatibili e che $\hat{f}u = x$, $\hat{f}v = y$, da cui xRy.

Si osservi anche che se $\bar{t} \in M$ e $t \geqslant \bar{t}$ si ha $\alpha \geqslant \alpha(\bar{t}) \geqslant \alpha(t)$ onde esistono coppie x, y con $\Delta(x, y) = t$ e si ha:

$$\text{se} \quad \bar{t} \in M \quad \text{e} \quad \bar{t} < t \quad \text{allora} \quad t \in M\,. \tag{22}$$

(iii) Se non è $t \geqslant 1$, tenuto conto del fatto che M è chiuso rispetto all'inverso (per la (19)) si avrà, tenuto conto dei Lemmi 2, 4 e della (22)

$$t \geqslant t_n \circ t_{n-1} \circ \ldots \circ t_1 \text{ per certi } t_i \in M:$$

$$t = \langle \varrho_0, \varrho_n, S \rangle\,, \qquad t_i = \langle \varrho_{i-1}, \varrho_i, S_i \rangle\,.$$

Per comodità di discorso converrà « leggere » la situazione come nella dimostrazione del lemma 2, considerando certe copie a due a due disgiunte $I_0, I_1, \dots, I_n$ di I e supponendo $\varrho_i \subseteq I_i^2$, $S_i \subseteq I_{i-1} \times I_i$. Sarà dimostrato che xRy se si costruirà una $(n+1)$-upla $x^0, x^1, \dots, x^n$ con $x^0 = x$, $x^n = y$, $\Delta(x^{i-1}, x^i) \geqslant t_i$. (Conviene « leggere » $x^i \in A^{I_i}$).

Per ogni i distinguiamo quattro tipi di indici $j \in I_i$:

(*a*) indici per cui esiste un cammino $j_0, j_1, \dots, j_n$ con $j_i = j$ e $j_{r-1} S_r j_r$;

(*b*) indici per cui esiste un cammino $j_0, j_1, \dots, j_m$ con $i \leqslant m$, $j_i = j$ e $j_{r-1} S_r j_r$ ma non un cammino del tipo (*a*);

(*c*) indici per cui esiste un cammino $j_m, j_{m+1}, \dots, j_n$ con $m \leqslant i$, $j_i = j$ e $j_{r-1} S_r j_r$ ma non un cammino del tipo (*b*) (nè perciò del tipo (*a*));

(*d*) indici per cui non valgono nè (*a*) nè (*b*) nè (*c*).

Definiamo ora gli x^i ponendo:

$$x_j^i = \begin{cases} x_{j_0} = (= y_{j_n}) & \text{se } j \text{ è nel caso } (a); \\ x_{j_0} & \text{se } j \text{ è nel caso } (b); \\ y_{j_n} & \text{se } j \text{ è nel caso } (c); \\ \text{un fissato valore assunto da } x \text{ se } j \text{ è nel caso } (d). \end{cases}$$

Non è difficile vedere che la $(n+1)$-upla costruita soddisfa i requisiti richiesti, onde xRy. Il teorema è così dimostrato.

Può essere interessante notare il seguente:

COROLLARIO 2: *Siano A, B due algebre munite di tutte le operazioni unarie e sia $A \subseteq B$. Qualunque sia I ogni congruenza di A^I (pensata come algebra simile ad A) è traccia in A^I di almeno una congruenza di B^I (pensata come algebra simile a B).*

DIMOSTRAZIONE: Sia R una congruenza di A^I, F un $\circ$-filtro unitario di T con $R_F = R$ ed S_F la congruenza di B^I determinata da F. Chiaramente è $R_F = S_F \cap (A^I)^2$.

PARTE III

CONGRUENZE DI UN PRODOTTO DIRETTO LEGATE ALLE CONGRUENZE DEI FATTORI

(Congruenze ideali I)

Premessa.

È ben noto (cfr. ad esempio [2]) che se $(A_i)_{i\in I}$ è una famiglia di algebre simili, A è un sottoalgebra di $\prod_{i\in I} A_i$, $\mathcal{F}$ è il reticolo dei filtri su I ed $\bar{L}$ il reticolo delle congruenze di A allora la φ definita da:

$$\langle x, y\rangle \in \varphi F \quad \text{se e solo se} \quad \{\imath \in I\colon x_i = y_i\} \in F\,, \qquad (x, y \in A;\ F \in \mathcal{F}),$$

è una applicazione da $\mathcal{F}$ ad $\bar{L}$.

Per così dire le congruenze di A in tal modo ottenute sono costruite senza tener conto della struttura delle A_i. In particolare se una almeno delle A_i non è semplice è sempre possibile costruire congruenze di $\prod_{i\in I} A_i$ che non sono «filtrali» non sono cioè immagini in φ di filtri su I.

Sorge quindi il problema di studiare, quando le A_i non sono semplici, quali siano le congruenze di A legate alle congruenze dei suoi fattori. Ovviamente se I è finito, detto L_i il reticolo delle congruenze di A_i, si costruisce immediatamente in modo ovvio una iniezione χ da $L = \prod_{i\in I} L_i$ ad $\bar{L}$ e poichè è facile costruire casi in cui χ è addirittura biiettiva la χ, se I è finito, deve essere assunta come l'unico ragionevole modo di associare congruenze di A alle congruenze dei suoi fattori. Un'interessante condizione per la suriettività di χ è stata data da Tah-Kai-Hu in [6]. È facile convincersi che nel caso di I infinito le cose vanno in modo diverso: in effetti il codominio della χ non contiene neanche il codominio della φ.

Il concetto da assumere è allora quello del n. 1 in cui è definita un'applicazione ϑ dal reticolo $\mathfrak{J}(L)$ degli ideali di L ad $\bar{L}$. In questo primo lavoro viene studiata l'applicazione ϑ: in successivi lavori si cercherà di generalizzare a concetti connessi con la ϑ i risultati, connessi con la φ, di cui in [12], [13], [14].

Per le notazioni e convenzioni rimando appunto a [12], [13] e [14].

1. Congruenze ideali.

Sia $(A_i)_{i\in I}$ una famiglia di algebre simili e A una sottoalgebra di $\prod_{i\in I} A_i$.

Per ogni $\iota\in I$ sia L_i un sottoreticolo completo del reticolo delle congruenze di A_i (notazioni: 0_i, 1_i, $\vee$, $\wedge$, $\leqslant$) e sia $L = \prod_{i\in I} L_i$ (notazioni: 0, 1, $\vee$, $\wedge$, $\leqslant$).

Per ogni coppia $\langle x, y\rangle \in A^2$ si indichi con $\Delta(x, y)$ l'elemento di L definito da:

$$(\Delta(x, y))_i = \overline{\{\langle x_i, y_i\rangle\}}\,, \tag{1}$$

(dove, se $M\subseteq A_i^2$, $\overline{M}$ indica la congruenza generata in L_i da M).

È facile vedere che:

Lemma 1: *Se J è un ideale di L allora la relazione binaria R_J definita in A da:*

$$xR_Jy \quad \text{se e solo se} \quad \Delta(x, y)\in J\,, \tag{2}$$

è una congruenza di A.

Dimostrazione: Ovviamente valgono le:

$$\Delta(x, x) = 0\,, \qquad (x\in A), \tag{3,1}$$

$$\Delta(x, y) = \Delta(y, x)\,, \qquad (x, y\in A), \tag{3,2}$$

$$\Delta(x, z) \leqslant \Delta(x, y)\bigvee\Delta(y, z)\,, \qquad (x, y, z\in A), \tag{3,3}$$

$$\Delta(fx, fy) \leqslant \bigvee_{j\in n}\Delta({}_jx, {}_jy)\,, \tag{3,4}$$

(dove f è un'operazione n-aria del tipo di algebre considerato, $x = \langle {}_jx\rangle_{j\in n}$ e $y = \langle {}_jy\rangle_{j\in n}$ sono n-uple di elementi di A).

Le (3,1), (3,2), (3,3) mostrano che la R_J è di equivalenza e la (3,4) che è compatibile con le operazioni. Considerando in luogo delle congruenze gli epimorfismi (presi a meno dell'equivalenza che associa due epimorfismi se e solo se esiste un isomorfismo fra le immagini che rende commutativo il diagramma ottenuto) il concetto e il lemma si trasportano senza difficoltà a strutture relazionali e anche a strutture più generali.

È opportuno osservare che il fatto che L_i non sia in generale il reticolo di *tutte* le congruenze di A_i, da una maggior generalità solo apparente, come mostrano le considerazioni seguenti.

Sia, per ogni A_i, L_i il reticolo di tutte le congruenze di A_i, sia $\hat{L}_i$ un suo sottoreticolo completo, $L = \prod_{i\in J} L_i$, $\hat{L} = \prod_{i\in I} \hat{L}_i$. Sia poi J un ideale di $\hat{L}$ e $\bar{J}$ l'ideale generato da J in L. Si ha:

LEMMA 2: $R_J = R_{\bar{J}}$.

DIMOSTRAZIONE: Siano infatti $x, y \in A$.

Poichè la definizione del simbolo $\Delta(x, y)$ dipende dai sottoreticoli scelti usiamo le ovvie notazioni $\hat{\Delta}(x, y)$ e $\Delta(x, y)$. Tutto si riduce a dimostrare che:

$$\hat{\Delta}(x, y) \in J \quad \text{se e solo se} \quad \Delta(x, y) \in \bar{J}\ .$$

Poichè ovviamente $\Delta(x, y) \leqslant \hat{\Delta}(x, y)$ e $J \subseteq \bar{J}$ la parte « solo se » è ovvia. Sia $\Delta(x, y) \in \bar{J}$, poichè $\bar{J}$ è generato in L da J sarà $\Delta(x, y) \leqslant \bigvee_{r\in n} {}_r l$ per certi ${}_r l$ in J. Ma allora $\langle x_i, y_i\rangle \in \bigvee_{r\in n} {}_r l_i$, onde $\hat{\Delta}(x, y) \leqslant \bigvee {}_r l$ e perciò $\hat{\Delta}(x, y) \in J$.

Ci limiteremo quindi d'ora in poi al caso che L_i sia il reticolo di tutte le congruenze di A_i.

2. **Congruenze ideali e congruenze filtrali. Non iniettività dell'applicazione ϑ.**

Come ho detto nella premessa il concetto di congruenza ideale introdotto in 1 è una generalizzazione del concetto di congruenza filtrale.

Sia F un filtro su I. È ben noto che si ottiene una congruenza R_F di A ponendo:

$$xR_F y \quad \text{se e solo se} \quad \delta(x, y) \in F\ , \qquad (x, y \in A),$$

dove $\delta(x, y)$ sta per $\{i \in I\colon\ x_i = y_i\}$.

Sia ora $J^{(F)}$ l'ideale di L definito da:

$$J^{(F)} = \{l \in L\colon\ \{i \in I\colon\ l_i = 0_i\} \in F\}\ ,$$

(che si tratti di un ideale è ovvio perchè, posto $\delta(l) = \{i \in I\colon\ l_i = 0_i\}$, si ha:

$$\delta(0) = I \in F\ ,$$

$$\delta(l \vee m) = \delta(l) \cap \delta(m)\ ,$$

$$\text{se} \quad l \leqslant m \quad \text{allora} \quad \delta(l) \supseteq \delta(m))\ .$$

È ora facile vedere che sono successivamente equivalenti le:

$$\Delta(x, y) \in J^{(F)},$$

$$\delta(\Delta(x, y)) \in F ,$$

$$\{i \in I: \overline{\{\langle x_i , y_i\rangle\}} = 0_i\} \in F ,$$

$$\{i \in I: x_i = y_i\} \in F ,$$

$$\delta(x, y) \in F$$

onde $R_J = R_F$.

Un'importante differenza fra le congruenze associate a filtri e le congruenze associate a ideali di L è la seguente.

Supponiamo $A = \prod_{i \in I} A_i$ e siano:

$\varphi: F \rightsquigarrow R$: (con F variabile nell'insieme dei filtri su I),

$\vartheta: J \rightsquigarrow R_J$ (con J variabile nell'insieme degli ideali di L).

La φ risulta iniettiva (cessa beninteso in generale di esserlo se A è una sottoalgebra propria di $\prod_{i \in I} A_i$) mentre la ϑ in generale non lo è.

Sorge allora il problema di caratterizzare $\operatorname{Ker} \vartheta$ e possibilmente di individuare un sistema di rappresentanti delle sue classi di equivalenza che sia di agevole uso. Vedremo più oltre che il problema è in un certo senso insolubile, precisamente non esiste una caratterizzazione di $\operatorname{Ker} \vartheta$ in termini della sola struttura degli L_i.

Come si vedrà la cosa dipende dal fatto, ben noto, che due algebre possono avere reticoli delle congruenze isomorfi senza che le *congruenze principali* (generabili cioè da una coppia di elementi dell'algebra) siano le stesse nei due casi. I numeri 3, 4, 5, 6 sono dedicati a chiarire la situazione relativamente a questo problema.

3. **Complezione locale di un ideale di** L.

Sia J un ideale di L e sia $M \subseteq J$ tale che per un opportuno sottoinsieme cofinito X di I si abbia:

$$l_i = m_i , \qquad (i \in X;\ l, m \in M),$$

M si dirà un insieme locale.

Definizione 1: *Si dirà che J è* localmente completo (*l.c.*) *se e solo se per ogni M nelle condizioni descritte è*: $\bigvee M \in J$.

Ovviamente gli ideali localmente completi costituiscono una famiglia di Moore e, detto $\boldsymbol{L}$ l'operatore di Moore ad essa associato si ha:

Lemma 3: *Se J è un ideale allora*:

$\boldsymbol{L}J = \{l \in L$: esiste un insieme locale contenuto in J di supremo $m \geqslant l\}$.

Dimostrazione: Posto $K = \{l \in L$: esiste un insieme locale $M \subseteq J$ con $l \subseteq \bigvee M\}$ si ha ovviamente $J \subseteq K \subseteq \boldsymbol{L}J$ e il lemma sarà dimostrato se si farà vedere che K è un ideale l.c.

Che K sia un ideale segue subito dal fatto che se M, N sono due insiemi locali contenuti in J anche $Q = \{h \vee k\colon h \in M,\ k \in N\}$ lo è e si ha $\bigvee Q = \big(\bigvee M\big) \vee \big(\bigvee N\big)$.

Sia $M \subseteq K$ locale relativo, diciamo, al cofinito X e sia $m = \bigvee M$. Per ogni $l \in M$ sarà $l \leqslant \bigvee M^l$ per un opportuno insieme locale $M^l \subseteq J$, relativo, diciamo, al cofinito X_l. Chiaramente per $i \in X$ è $l_i = m_i$.

Sia $N = \bigcup_{l \in M} M^l$, fissiamo un $p \in M$ e un $q \in M^p$. Poniamo $Q = \{q \vee n\colon n \in N\}$. Q risulta locale (relativamente al cofinito $X_p \cap X$) e ovviamente $Q \subseteq J$, $\bigvee Q = \bigvee M$. Ne segue il lemma.

Si ha ora:

Lemma 4: *Se J è un ideale allora $R_J = R_{\boldsymbol{L}J}$*.

Dimostrazione: Sia $\Delta(x, y) \in R_{\boldsymbol{L}J}$. Esisterà allora un insieme locale $M \subseteq J$ relativo, diciamo, a un certo cofinito X, con $\Delta(x, y) \leqslant \bigvee M$.

Sia $i \in X'$. Poichè $\overline{\{\langle x_i, y_i \rangle\}}$ è principale sarà certo compatta onde esiste un sottoinsieme finito $N^{(i)}$ di M con $\overline{\{\langle x_i, y_i \rangle\}} \leqslant (\bigvee N)_i$. Posto $N = \bigcup_{i \in X'} N^{(i)}$ anche N risulta finito e si ha $\Delta(x, y) \leqslant \bigvee N \in J$. Così $R_{\boldsymbol{L}J} \subseteq R_J$ e poichè l'inclusione inversa è ovvia il lemma è dimostrato.

Come corollario si ritrova il fatto, del resto ovvio, che se I è finito, allora la ϑ può essere in sostanza ricondotta alla χ di cui nella premessa. In tal caso infatti ogni ideale J determina la stessa congruenza dell'ideale principale da esso generato e si ha $\vartheta J = \chi \bigvee J$.

Come ho ricordato in 2., se $A = \prod_{i \in I} A_i$, l'applicazione dell'insieme dei filtri su I all'insieme delle congruenze di A che ad ogni filtro F su I associa la congruenza R_F da esso determinata mediante la:

$$x R_F y \quad \text{se e solo se} \quad \{i \in I\colon x_i = y_i\} \in F\,, \qquad (x, y \in A), \tag{4}$$

è iniettiva.

Il Lemma 4 mostra che non è invece iniettiva l'applicazione ϑ. Si potrebbe tuttavia pensare che fosse iniettiva la restrizione di ϑ all'insieme degli ideali localmente completi di L. Il seguente semplice esempio mostra che non sempre è così.

Esempio (α). Sia B un'algebra le cui congruenze proprie formino una catena avente per supremo la congruenza totale, $A_i = B$, $A = \prod_{i \in I} A_i$ con I infinito. Allora l'ideale J di L costituito da tutti e soli gli l di L le cui componenti, salvo al più su un numero finito di indici, sono proprie è ovviamente l.c. La congruenza R_J è tuttavia totale come la congruenza associata all'ideale totale (che è ovviamente l.c.).

La restrizione di ϑ all'insieme degli ideali l.c. di L non è perciò, in questo caso, iniettiva.

Come si vedrà più oltre non è possibile caratterizzare Ker ϑ in termini della pura struttura di L e perciò è impossibile definire in termini *puramente reticolari* una classe di ideali per cui da un lato valga un analogo del Lemma 4 (non si perdano cioè congruenze restringendo la ϑ a questa classe) e dall'altro la restrizione della ϑ sia iniettiva. Tuttavia si può cercare di stringere, per così dire, il più possibile da vicino la situazione, determinando da un lato classi di ideali il più possibile ristrette per cui valga ancora l'analogo del Lemma 3 e dall'altro classi di ideali il più possibile larghe la restrizione di ϑ alle quali sia iniettiva pur perdendosi, in certi casi, congruenze. È quanto si farà nei nn. 4, 5, 6. È facile vedere che Kerϑ è invece determinato dalla famiglia $\langle L_i, P_i \rangle_{i \in I}$ dove P_i è l'insieme degli elementi principali di L_i. Si ha infatti banalmente: abbiano i simboli il solito significato, sia ancora $A = \prod_{i \in I} A_i$ e, per ogni L_i, sia P_i l'insieme degli elementi principali di L_i e $P = \prod_{i \in I} P_i$. È ovvio che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè si abbia $R_J = R_M$ è che sia $J \cap P = M \cap P$.

Dimostrazione: Ovvia tenuto conto del fatto che $P = \{\Delta(p) \colon p \in A^2\}$.

4. Blocchi.

Definizione 2: *Si dirà blocco ogni $M \subseteq L$ per cui sia*:

(5) $$M = \prod_{i \in I} \varepsilon_i(M)\,.$$

Si ha ovviamente:

Lemma 5:

(i) *I blocchi costituiscono una famiglia di Moore.*

(ii) *Ogni ideale principale è un blocco.*

(iii) *Per l'operatore di Moore* $\boldsymbol{B}$ *che associa ad ogni* $M \subseteq L$ *il blocco* $\boldsymbol{B}M$ *da esso generato (l'intersezione dei blocchi contenenti* M*) si ha:*

$$\boldsymbol{B}M = \prod_{i\in I} \varepsilon_i(M)\,. \tag{6}$$

Dimostrazione: Ovvia.

Sarà utile per il seguito confrontare l'operatore $\boldsymbol{B}$ con l'operatore $\boldsymbol{J}$ di passaggio all'ideale generato. Con ovvio simbolismo la situazione degli operatori $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{B}$ è data dallo schema seguente:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \boldsymbol{BJ} = \boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{J} \arrow[d, dash] & \\ & \boldsymbol{JB} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \boldsymbol{J} & & \boldsymbol{B} \end{tikzcd}$$

(dove $\vee$ indica il supremo nel reticolo degli operatori di Moore su L).

(Naturalmente per particolari L la situazione può semplificarsi). Tutto si riduce a dimostrare che:

Lemma 6: *Per ogni* L *è* $\boldsymbol{JBJ} = \boldsymbol{BJ}$ *mentre si può trovare un* L *e un* $M \subseteq L$ *per cui si ha:* $\boldsymbol{J}M \nsubseteq \boldsymbol{B}M$, $\boldsymbol{B}M \nsubseteq \boldsymbol{J}M$, $\boldsymbol{J}M \subset \boldsymbol{JB}M$, $\boldsymbol{B}M \subset \boldsymbol{JB}M$, $\boldsymbol{JB}M \subset \boldsymbol{BJ}M$.

Dimostrazione: Per la prima eguaglianza. Sia $m \in \boldsymbol{JBJ}M$.

Allora $m \leqslant \bigvee_{i\in n} m^i$ per un opportuno $n \in \omega$ e opportuni $m^i \in \boldsymbol{BJ}M$. Per ciascuno degli m^i esisterà poi una famiglia $({}^j m^i)_{j\in I}$ con ${}^j m^i \in \boldsymbol{J}M$ e con ${}^j m^i_j = m^i_j$. Ma, essendo $\boldsymbol{J}M$ un ideale, è $\bigvee_{i\in n} {}^j m^i \in \boldsymbol{J}M$ e d'altronde si ha $m_j \leqslant \big(\bigvee_{i\in n} m^i\big)_j = \bigvee_{i\in n} m^i_j = \bigvee_{i\in n} {}^j m^i_j = \big(\bigvee_{i\in n} {}^j m^i\big)_j$ da cui $m \in \boldsymbol{BJ}M$. L'inclusione inversa è ovvia.

Scegliamo ora I numerabile, diciamo addirittura $I = \omega$ e ciascun L_i (isomorfo al) reticolo costituito dai sottoinsiemi finiti di ω e da ω stesso rispetto all'inclusione (quest'ipotesi è possibile perchè L_i è completo e compattamente generato, cfr. [8], p. 109).

Poniamo ora [1]:

$$\begin{aligned} M = \{l \in L\colon & \text{ per ogni } i \in \omega, \text{ esiste un } k \in i+1 \text{ con } l_i = \{k\} \text{ e,} \\ & \text{salvo per un numero finito di indici, } l_i = \{0\}\}\,. \end{aligned}$$

[1] Avverto che seguo la convenzione per la quale ogni ordinale coincide con l'insieme degli ordinali che lo precedono.

Si ha:

$\boldsymbol{BM} = \{l \in L$: per ogni $i \in \omega$ esiste un $k \in i+1$ con $l_i = \{k\}\}$,

$\boldsymbol{JM} = \{l \in L$: per ogni $i \in \omega$ $l_i \subseteq i+1$ e, salvo per un numero finito di indici, $l_i \subseteq \{0\}\}$,

$\boldsymbol{JBM} = \{l \in L$: per ogni $i \in \omega$ $l_i \subseteq i+1$ ed esiste un $k_l \in \omega$ tale che per ogni $i \in \omega$ è $\mathrm{Card}\, l_i \leqslant k_l\}$,

$\boldsymbol{BJM} = \{l \in L$: per ogni $i \in \omega$ $l_i \subseteq i+1\}$.

Le disuguaglianze dell'enunciato sono così tutte verificate e il lemma è dimostrato.

I chiusi nell'operatore di Moore $\boldsymbol{BJ}$ sono tutti e soli gli ideali che sono anche blocchi, essi si diranno per comodità *ideal-blocchi* (i.b.).

Dal lemma segue ovviamente che, mentre il blocco generato da un ideale è ancora un ideale, in generale l'ideale generato da un blocco non è un blocco.

Sarà utile nel seguito il:

LEMMA 7: *Se M è unione (insiemistica) di un numero finito di i.b. allora $\boldsymbol{JM}$ è un blocco.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $(M)_{i \in n}$ una famiglia finita di i.b. e sia $l \in \boldsymbol{BJ} \bigcup\limits_{i \in n} M^i$. Esisterà allora una famiglia $({}^j l)_{j \in I}$ con $l_j = {}^j l_j$ e ${}^j l \in \boldsymbol{J} \bigcup\limits_{i \in n} M^i$.

${}^j l$ sarà allora minore o uguale al supremo di una famiglia finita di elementi di $\bigcup\limits_{i \in n} M^i$, ma essendo gli M^i degli ideali sarà possibile trovare una famiglia $({}^j l^i)_{i \in n}$ con ${}^j l^i \in \boldsymbol{M}^i$, per cui ${}^j l \leqslant \bigvee\limits_{i \in n} {}^j l^i$. Poichè ciascun M^i è un blocco l'elemento l^i definito da: $l^i_j = {}^j l^i_j$ appartiene a M^i e ora si ha:

$$l_j = {}^j l_j \leqslant \bigvee_{i \in n} {}^j l^i_j = \bigvee_{i \in n} l^i_j ,$$

da cui:

$$l \leqslant \bigvee_{i \in n} l \qquad \text{e perciò} \qquad l \in \boldsymbol{J} \bigcup_{i \in n} M^{(i)} .$$

Il lemma è così dimostrato.

Poniamo ora:

DEFINIZIONE 3: *Un ideale J di L si dirà completo a ideal blocchi (i.b.c.) / a blocchi (b.c.) se per ogni ideal-blocco / blocco M contenuto in J è: $\bigvee M \in J$.*

Ovviamente gli ideali i.b.c. (b.c.) costituiscono una famiglia di Moore; si indicherà con $\boldsymbol{C}$ ($\overline{\boldsymbol{C}}$) il corrispondente operatore di Moore. Consideriamo ora l'operatore $\boldsymbol{D}$ definito da:

$$\boldsymbol{D}M = \{l \in L\colon \text{esiste un } n \in \omega \text{ e certi i.b. } (M^i)_{i\in n} \text{ contenuti in } M \text{ con } l \leqslant \bigvee_{i\in n} (\bigvee M^i)\}\,, \qquad (M \subseteq L). \tag{6}$$

Si ha:

Lemma 8: *Se J è un ideale allora:*

$$\boldsymbol{D}J = \{l \in L\colon \text{esiste un i.b. } M \subseteq J \text{ con } l \leqslant \bigvee M\}\,. \tag{7}$$

Dimostrazione: L'inclusione del secondo membro nel primo è ovvia. Sia $l \in \boldsymbol{D}J$, sarà $l \leqslant \bigvee_{i\in n} (\bigvee M^i)$ per opportuni i.b. M^i contenuti in in J. Ma si ha ovviamente:

$$\bigvee_{i\in n} (\bigvee M^i) = \bigvee \big(\bigcup_{i\in n} M^i\big)$$

e d'altronde:

$$\bigcup_{i\in n} M^i \subseteq \boldsymbol{J} \bigcup_{i\in n} M^i \subseteq \boldsymbol{J}J = J\,.$$

Per il Lemma 6, $N = \boldsymbol{J} \bigcup_{i\in n} M^i$ è un i.b. e, avendosi ora $l \leqslant \bigvee N$, l appartiene al secondo membro della 7. Il lemma è così dimostrato.

È facile vedere che si ha per un opportuno ordinale α, dipendente da M:

Lemma 9: $\boldsymbol{C}M = \bigcup_{i\in\alpha} \boldsymbol{D}^i M$ (dove $\boldsymbol{D}^0 M = M$, $\boldsymbol{D}^i M = \boldsymbol{D} \bigcup_{j\in i} \boldsymbol{D}^j M$).

Dimostrazione: Ovvia.

5. Ideali b.c. e i.b.c. e congruenze.

Vale il seguente:

Teorema 1 (²): *Sia J un ideale, allora $R_J = R_{\boldsymbol{C}J}$.*

Dimostrazione: Per il Lemma 9 tutto si riduce a dimostrare che, qualunque sia un ideale J, è $R_J = R_{\boldsymbol{D}J}$. Che sia $R_J \subseteq R_{\boldsymbol{D}J}$ è ovvio. Sia $\langle x, y\rangle \in R_{\boldsymbol{D}J}$ ossia $\Delta(x, y) \in \boldsymbol{D}J$.

Allora esiste un i.b. $M \subseteq I$ con $\Delta(x, y) \leqslant \bigvee M$.

Ma allora $\overline{\{\langle x_i, y_i\rangle\}} \leqslant \bigvee \varepsilon_i(M)$ e, essendo $\varepsilon_i(M)$ un ideale, per note proprietà delle congruenze è $\overline{\{\langle x_i, y_i\rangle\}} \in \varepsilon_i(M)$, diciamo $\overline{\{\langle x_i, y_i\rangle\}} = l_i$. Ma essendo M un blocco l'elemento l di componenti l_i appartiene ad M e si ha:

$$\Delta(x, y) \in M \subseteq J \quad \text{onde} \quad \langle x, y\rangle \in R_J .$$

Il teorema è così dimostrato.

Vale il seguente:

Lemma 10: *Sia* $A = \prod_{i \in I} A_i$, *sia* M *un ideale*, J *un ideale b.c. e* $R_M \subseteq R_J$. *Allora* $M \subseteq J$.

Dimostrazione: Sia $l \in M$. Sia M^i l'insieme delle congruenze generate dalle coppie appartenenti ad l_i (che è, ricordiamo, una congruenza di A_i). Ovviamente $l_i = \bigvee M^i$.

$N = \prod_{i \in I} M^i$ è ovviamente un blocco e poichè ciascun suo elemento è un $\Delta(x, y)$ per una coppia $\langle x, y\rangle$ appartenente a R_M, N è contenuto in J e perciò $l = \bigvee N \in J$.

Ne segue:

Teorema 2: *Se* M, J *sono due ideali b.c. con* $R_M = R_J$ *allora* $M = J$.

Dimostriamo ora che, come annunciato nel n. 2, Ker ϑ non è caratterizzabile in termini della pura struttura di L.

Esempio (β). Consideriamo l'algebra B, costruita come segue. L'insieme di base di B è $\omega + 1$ ed essa ha una sola operazione f che è binaria e definita dalla:

$$f(x, y) = \begin{cases} \omega & \text{se } x \neq y , \\ x & \text{altrimenti} . \end{cases}$$

Si ha:

Lemma 11: *Le congruenze di* B *sono tutte e sole le* R_X (*con* $X \subseteq \omega$) *così definite*:

$$[\omega]_{R_X} = \{\omega\} \cup X ,$$

$$[x] = \{x\} \quad \text{per ogni} \quad x \notin \{\omega\} \cup X .$$

([2]) Si tenga presente che ogni ideale i.b.c. è l.c. e perciò il Teorema 1 migliora il Lemma 4.

DIMOSTRAZIONE: Anzitutto ogni R_X è effettivamente una congruenza. È ovvio infatti che R_X è un'equivalenza, sia poi uR_Xu' e $v\in\omega+1$. Se $u=u'$ ovviamente

$$f(u, v) = f(u', v) \qquad \text{e} \qquad f(v, u) = f(v, u') .$$

Se $u\neq u'$ allora $u, u'\in\{\omega\}\cup X$ ed almeno uno dei due, diciamo u, è diverso da v, per cui si ha:

$$f(u, v) \ = \omega ,$$

$$f(u', v) \in \{\omega, u'\}; \quad \text{in ogni caso} \quad f(u, v)\, R_X\, f(u', v) ,$$

$$f(v, u) \ = \omega ,$$

$$f(v, u') = \begin{cases} \omega & \text{se } v\neq u', \\ u' & \text{se } v = u', \end{cases}$$

e in ogni caso $f(v, u)\, R_X\, f(v, u')$.

Sia R una congruenza di B e xRy con $x\neq y$. Allora

$$x = f(x, x) R f(x, y) = \omega$$

perciò $[\omega]\supseteq\{x, y\}$. Il lemma è così dimostrato.

Ovviamente l'applicazione φ: $X \rightsquigarrow R_X$ è un isomorfismo reticolare da $\mathfrak{I}(\omega)$ al reticolo delle congruenze di B.

Si osservi anche che gli elementi compatti del reticolo delle congruenze di B sono tutti e soli gli R_X con X finito.

A norma di risultati di Grätzer e Schmidt (cfr. [8] cap. 2, eserc. 30) esiste un'algebra $\bar{B}$ che ha reticolo delle congruenze isomorfo a quello di B ma in cui ogni congruenza compatta è principale (generata cioè da una coppia di elementi di $\bar{B}$).

Si prenda ora $A_i = B$, $\bar{A}_i = \bar{B}$, $A = \prod_{i\in I} A_i$, $\bar{A} = \prod_{i\in I} \bar{A}_i$.

Con ovvio simbolismo gli L_i e gli $\bar{L}_i$ sono tutti isomorfi al reticolo dei sottoinsiemi di ω e così L ed $\bar{L}$ sono isomorfi a $(\mathfrak{I}(\omega))^\omega$. Per comodità confondiamo L, $\bar{L}$ con $(\mathfrak{I}(\omega))^\omega$.

Consideriamo ora i due ideali di L:

$$M = \{l\in L\colon \text{per ogni } i\in\omega \ \ l_i\subseteq i+1\} ,$$

$$J \ = \{l\in L\colon \text{per ogni } i\in\omega \ \ l_i\subseteq i+1 \text{ ed esiste un } k_l\in\omega \text{ con } \operatorname{Card} l_i\leqslant k_l\}$$

M è ovviamente principale (generato dall'elemento m con $m_i=i+1$) ed è perciò b.c. e quindi i.b.c.;

J non è b.c.: consideriamo infatti l'insieme

$$N = \{l \in L: \text{ per ogni } i \in \omega \ \ l_i \subseteq i+1 \text{ e } \operatorname{Card} l_i < 1\}\,,$$

esso è ovviamente un blocco contenuto in J ma si ha $\bigvee N = m \notin J$.

J è invece i.b.c. Sia infatti $\bar{J}$ un i.b. contenuto in J, poniamo, per ciascun $l \in L$, $k_l = \max\limits_i \operatorname{Card} l_i$ e consideriamo l'insieme $K = \{k_l : l \in \bar{J}\}$

K ammette un massimo, k, altrimenti $\bar{J}$ non sarebbe un blocco.

Poniamo ora $\bigvee \bar{J} = l$. È chiaramente $l_i \subseteq i+1$ e perciò $\operatorname{Card} l_i < i+1$ onde l_i è finito. Per ogni i si può allora estrarre da $\bar{J}$ un sottoinsieme finito $\bar{J}^{(i)}$ con $l_i = \left(\bigvee \bar{J}^{(i)}\right)_i$. Ma, essendo $\bar{J}^{(i)}$ finito, $\bigvee \bar{J}^{(i)} \in \bar{J}$ onde $\operatorname{Card} l_i = \operatorname{Card} \left(\bigvee \bar{J}^{(i)}\right)_i < k$. Ma allora $l \in J$ e J è i.b.c.

Osserviamo che *i due ideali determinano la stessa congruenza in* A, *ma congruenze distinte in* $\bar{A}$. Siano infatti $x, y \in A$ e $\Delta(x, y) \in M$. Per ogni $i \in \omega$ è allora $x_i = y_i$ o $\{x_i, y_i\} \subseteq \omega \cup (i+1)$ ma anche $\operatorname{Card}(\Delta(x, y))_i < 2$ onde $\Delta(x, y) \in J$. Essendo d'altronde $J \subseteq M$ ne segue $R_J = R_M$ (per l'algebra A). Scegliamo invece per ogni i una coppia x_i, y_i di elementi di $\bar{B}$ che generi l'intera congruenza R_{i+1}. Chiaramente $\Delta(x, y) \in M$ e $\Delta(x, y) \notin J$.

Resta così dimostrato quanto annunciato nel n. 2. L'esame della situazione non può tuttavia considerarsi completo se non si dimostra che i Teoremi 1 e 2 sono in un certo senso i risultati più forti raggiungibili in termini della pura struttura di L. Questo discorso un po' vago vuole essere una parafrasi del seguente teorema.

Sia al solito $A = \prod A_i$ e sia H l'insieme degli ideali i.b.c. e Z l'insieme degli ideali b.c. Allora:

Teorema 3: *Esiste un sistema Θ di rappresentanti di $\operatorname{Ker} \vartheta$ con $Z \subseteq \Theta \subseteq H$ ed inoltre esistono casi in cui Z è un sistema di rappresentanti di $\operatorname{Ker} \vartheta$ e casi in cui H è un sistema di rappresentanti di $\operatorname{Ker} \vartheta$.*

Dimostrazione: La prima affermazione è conseguenza immediata dei Teoremi 1 e 2.

Per la seconda torniamo all'esempio (β); si verifica, con ovvio simbolismo, che Z è un sistema di rappresentanti di $\operatorname{Ker} \vartheta$ e H è un sistema di rappresentanti di $\operatorname{Ker} \bar{\vartheta}$. Tutto si riconduce a dimostrare con riferimento ad A e a ideali b.c. un analogo del Teorema 1 e con riferimento ad $\bar{A}$ e a ideali i.b.c. un analogo del Teorema 2. È quanto si farà nel n. 6 e ne segue, sempre con riferimento alle A, $\bar{A}$ dell'esempio β che $\operatorname{Ker} \vartheta$ è la relazione che lega due ideali se e solo se hanno la stessa b. complezione e $\operatorname{Ker} \bar{\vartheta}$ è la relazione che lega due ideali se e solo se hanno la stessa i.b. complezione.

6. Ker ϑ e Ker $\bar{\vartheta}$ per le algebre dell'esempio (β).

Anzitutto, con riferimento per ora ad $(A_i)_{i\in I}$ qualunque osserviamo che anche gli ideali b.c. costituiscono una famiglia di Moore e indichiamo con $\overline{C}$ il corrispondente operatore. Al solito consideriamo l'operatore $\overline{D}$ definito dalla:

$$(8)\qquad \overline{D}M = \{l \in L\colon \text{ esiste un } n \in \omega \text{ e certi blocchi } (M^i)_{i\in n} \text{ contenuti in } M \text{ con } l \leqslant \bigvee_{i\in n} (\bigvee M^i)\}\,.$$

Non vale un analogo del Lemma 8, ma vale ancora un analogo del Lemma 9, si ha cioè:

Lemma 12: $\overline{C}M = \bigcup_{i\in\alpha} \overline{D}^i M$ ($M \subseteq L$, α ordinale dipendente da M).

Siamo ora in grado di dimostrare con riferimento ad A, L dell'esempio β il seguente:

Teorema 4: *Sia J un ideale, allora $R_J = R_{\overline{C}J}$.*

Dimostrazione: Per il Lemma 12 tutto si riduce a dimostrare che, qualunque sia un ideale J, è $R_J = R_{\overline{D}J}$. Che sia $R_J \subseteq R_{\overline{D}J}$ è ovvio. Sia $\langle x, y\rangle \in R_{\overline{D}J}$ ossia $\Delta(x, y) \in \overline{D}J$.

Allora esistono certi blocchi $(M^i)_{i\in n}$ contenuti in J con $\Delta(x, y) \leqslant \bigvee_{i\in n} (\bigvee M^i)$. Ma allora $\overline{\{\langle x_j, y_j\rangle\}} \leqslant \bigvee_{i\in n} (\bigvee \varepsilon_j(M^i))$.

Ora si osservi che, data la particolare struttura di B, $\overline{\{\langle x_j, y_j\rangle\}}$ ha al più due elementi onde sarà anche $\overline{\{\langle x_j, y_j\rangle\}} \leqslant \bigvee_{i\in n} ({}^j l^i_j \vee {}^j m^i_j)$ con ${}^j l^i, {}^j m^i \in M^i$. Dato che ciascun M^i è un blocco gli elementi l^i, m^i definiti da:

$$l^i_j = {}^j l^i_j \quad \text{e} \quad m^i_j = {}^j m^i_j\,,$$

appartengono ancora a M^i e perciò a J.

Ora si ha $\Delta(x, y) \leqslant \bigvee_{i\in n} (l^i \vee m^i)$ e il teorema è dimostrato.

Riferiamoci ora all'algebra $\overline{A}$ e dimostriamo che:

Lemma 13: *Sia M un ideale, J un ideale i.b.c. e $R_M \subseteq R_J$. Allora $M \subseteq J$.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $l \in M$. Sia M^i l'insieme delle congruenze generate dalle coppie appartenenti a l_i: M^i è chiuso rispetto ai supremi finiti, perchè in $\bar{B}$ ogni congruenza compatta è principale. Al solito $N = \prod_{i \in I} M^i \subseteq J$. Poichè N è un blocco ed è a sua volta chiuso rispetto ai supremi finiti, l'ideale da esso generato è addirittura un i.b. contenuto in J e perciò $l \in J$.

Si ha ora ovviamente:

TEOREMA 5: *(Sempre con riferimento ad* $\bar{A}$*) se* M, J *sono due ideali i.b.c. con* $R_M = R_J$ *allora* $M = J$.

I Teoremi 4, 5 permettono di ultimare la dimostrazione del Teorema 3.

Testo pervenuto il 30 ottobre 1969.
Bozze licenziate il 13 luglio 1970.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. ASTROMOFF, *Some structure theorems for primal and categorical algebras*, Math. Zeitschr., 87 (1965), 365-377.

[2] P. M. COHN, *Universal Algebra*, London 1965.

[3] A. L. FOSTER, *Generalized « Boolean » theory of universal algebras. Part. I: Subdirect sums and normal representation theorem*, Math. Zeitschr. Bd., 58 (1953), 306-336.

[4] A. L. FOSTER, *Generalized « Boolean » theory of universal algebras. Part. II. Identities and subdirect sums of functionally complete algebras*, Math. Zeitschr. Bd., 59 (1953), 191-199.

[5] A. L. FOSTER e A. F. PIXLEY, *Semicategorical algebras. I Semiprimal algebras*, Math. Zeitschr., 85 (1964), 147-169.

[6] A. L. FOSTER e A. F. PIXLEY, *Semicategorical algebras. II*, Math. Zeitschr., 85 (1964), 169-184.

[7] R. FRANCI e L. TOTI-RIGATELLI, *Sulla varietà dei reticoli distributivi*, Ann. Univ. Ferrara, nuova serie, Sez. VII, vol. XIV n. 4 (1969), 23-27.

[8] G. GRATZER, *Universal Algebra*, Van Nostrand Company, Princeton 1968.

[9] R. MAGARI, *Su una classe equazionale di algebre*, Ann. di Mat. pura e appl., Serie IV, Tomo LXV (1967), 277-311.

[10] R. MAGARI, *Sulla varietà generata da un'algebra funzionalmente completa di cardinalità infinita*, Ann. di Mat. pura e appl., Serie IV, Tomo LXXVI (1967), 305-324.

[11] R. Magari, *Sulle varietà generate da un'algebra di due elementi*, Firenze, 1967.
[12] R. Magari, *Varietà a quozienti filtrali*, Ann. Univ. Ferrara (Nuova Serie), Sez. VII, Vol. XIV, no. 2 (1969) 5-20.
[13] R. Magari, *Costruzione di classi filtrali*. In corso di pubbl. negli Annali dell'Univ. di Ferrara.
[14] R. Magari, *Un'osservazione sulle classi metafiltrali*. In corso di pubbl. negli Annali dell'Univ. di Ferrara.
[15] Tah-Kai-Hu, *On equational classes of algebras in which congruences on finite direct products are induced by congruences on their factors*. (Il lavoro mi è stato gentilmente mandato dall'autore in copia ciclostilata).