

MAGARI, ROBERTO
1958
Boll. U. M. I.
(3), Vol. 13, pp. 128-140

Le configurazioni parziali chiuse contenute
nel piano, P , sul quasicorpo associativo
di ordine 9



NICOLA ZANICHELLI EDITORE

BOLOGNA

Sunto. - *Servendosi dei risultati di J. ANDRÈ [1] circa il gruppo delle collineazioni del piano, P, sul quasicorpo associativo di ordine 9 si trova la totalità dei sottopiani propri non degeneri di P suddividendoli in tre tipi proiettivamente distinti.*

Summary. - *Employing the results of ANDRÈ about the group of the collineations of plane P, on the near-field of order 9, we find the totality of non-degenerate subplanes of P subdividing them in three projectively distinguished types.*

Col presente lavoro mi propongo di contribuire allo studio delle configurazioni parziali, chiuse rispetto alle operazioni proiettive, contenute in un piano grafico, analizzando sotto questo punto di vista il piano grafico sul quasicorpo associativo F_9 , di ordine 9 (è questo il più basso ordine ⁽¹⁾ possibile per piani grafici non desarguesiani).

È noto che questo piano contiene quadrangoli (non degeneri) che danno luogo a configurazioni di FANO (isomorfe cioè al piano lineare sul corpo di GALOIS di ordine 2) e quadrangoli che non hanno questa proprietà (cfr. H. NEUMANN [4]; dimostrerò che P contiene esattamente $2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 = 51840$ configurazioni di FANO, tutte fra loro collineari e contenenti ciascuna un (solo) punto improprio e una (sola) retta passante per il suo coniugato (nella involuzione I studiata da J. ANDRÈ in [1], per la quale i punti impropri di P si dividono in 5 coppie suscettibili di essere portate, mediante un'opportuna collineazione, nei punti impropri degli assi), e $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 = 3240$ configurazioni di ordine 3 (isomorfe al piano lineare sul corpo di GALOIS di ordine 3) ciascuna delle quali contiene 4 punti impropri e che si possono suddividere in due insiemi in

⁽¹⁾ Ad ogni piano grafico Q non degenere è associato un numero intero, n , (ordine di Q), tale che:

a) Q contiene $n^2 + n + 1$ punti ed altrettante rette.

b) Ogni retta (punto) di Q contiene (appartiene a) $n + 1$ punti (rette).

(Vedi ad esempio G. ZAPPA [6] pag. 203-204). Inoltre l'ordine di un piano su un corpo (o anche su uno pseudocorpo) coincide con l'ordine del corpo (dello pseudocorpo).

modo che le configurazioni di un insieme risultino collineari a quelle dello stesso insieme ma non a quelle dell'altro. Le configurazioni di un insieme contengono 2 coppie di punti impropri coniugati per I mentre quelle dell'altro contengono quattro punti impropri appartenenti a 4 coppie distinte di I .

Come dimostrerò P non contiene alcun altro piano grafico come suo sottopiano proprio non degenere e lo sviluppo mediante operazioni proiettive di un suo quadrangolo non degenere può portare a configurazioni di ordine 2 o 3 oppure a tutto P .

L'analisi che segue può essere interpretata anche come una classificazione delle proposizioni configurazionali (L. LOMBARDI-RADICE [3]) valide in P , in questo senso dovrebbe essere però completata con la classificazione delle proposizioni configurazionali relative agli n -punto che generano proietivamente tutto P .

1) Il quasicorpo associativo, F_9 , il piano P .

Ricordo che F_9 è formato degli elementi del tipo $a + bj$ dove a, b appartengono a un sottocorpo K (centro) di F_9 , isomorfo al campo di GALOIS di ordine 3, inoltre $j^2 = -1$ e (mentre vale la legge distributiva a destra del prodotto rispetto alla somma) si ha:

$$(a + bj)j = -b + aj \quad \text{per } a = 0 \quad \text{o} \quad b = 0$$

$$(a + bj)j = b - aj \quad \text{per } a \neq 0 \quad \text{e} \quad b \neq 0$$

Le altre regole di composizione sono ovvie. Il gruppo Θ degli automorfismi di F_9 (corrispondenze biunivoche di F_9 in sè che conservano somme e prodotti) è isomorfo al gruppo delle sostituzioni su 3 oggetti; ogni automorfismo lascia inalterati gli elementi di K , mentre, dati due elementi non del centro, esiste uno e un solo automorfismo che porta il primo nel secondo.

Punti e rette di P sono le terne di elementi di F_9 dei tipi:

$$\begin{aligned} & (1, 0, 0) \\ & (x, 1, 0) \\ & (x, y, 1) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{punti impropri} \\ \text{punti propri} \end{array} \right.$$

Un punto (x, y, z) appartiene a una retta (u, v, w) se e solo se:

$$(1) \quad ux + vy + wz = 0.$$

Se $k \in K^\times$ e $c \in F_9^\times$ (K^\times e F_9^\times gruppi moltiplicativi di K e F_9) il punto (x, y, z) e la retta (u, v, w) possono anche essere indicati

con: (kx, ky, kz) e (cu, cv, cw) poiché la (1) equivale alla:

$$cukx + cvky + cwkz = 0.$$

In quanto segue utilizzerò principalmente i risultati ottenuti da J. ANDRÉ in [1] circa il gruppo, G , delle collineazioni di P .

2) Gli ordini consentiti per i piani grafici contenuti in P ; configurazioni contenenti un punto improprio.

Si può escludere che siano contenuti in P sottopiani propri non degeneri di ordine superiore a 3.

Sia infatti P' un tale piano, $n > 3$ il suo ordine ed r una sua retta; esiste certamente sulla r un punto, R , non appartenente a P' ; siano ρ_i ($i = 1, 2, \dots, 9$) le altre rette di P per R . I loro punti esauriscono P (insieme a quelli di r) e su ognuna di esse P' può contenere un punto al più (se ne contenesse 2 o più su una certa ρ_i , essa gli apparirebbe e con essa il punto $R = r_{\rho_i}$), ne segue che P' può contenere al più $n + 10$ punti mentre per ipotesi ne deve contenere $n^2 + n + 1$ (vedi nota a pag. 1), ed essendo $n > 3$ questo è assurdo. Ne segue che *ogni piano grafico non degenere, sottopiano proprio di P , ha ordine ≤ 3* .

Per ricercare e classificare i piani di ordine due e tre contenuti in P esaminerò in primo luogo quelli che possiedono un punto improprio (di P) (la retta impropria occupa in P una posizione particolare poiché è mutata in sè da ogni collineazione di G , mentre G è semplicemente transitivo nelle rette proprie di P (J. ANDRÉ [1])). Dimostrerò che questi sono i soli sottopiani non degeneri di P .

Sia dunque F un sottopiano proprio non degenere di P ed E_1 un suo punto improprio (parlando di punti impropri intendo ora e in seguito riferirmi ai punti impropri di P); per E_1 passeranno certamente due rette di F : r, r' e siano A, B due punti di F su r e C, D due punti di F su r' ; mediante operazioni proiettive il quadrangolo $ABCD$ genera per intero la F (essendo l'ordine di F primo) e quindi la determina univocamente. Poiché il gruppo G è doppiamente transitivo nei punti propri di P (J. ANDRÉ [1] esiste una $\sigma \in G$ tale che: $\sigma A = (0, 0, 1)$, $\sigma B = (0, 1, 1)$ e per conseguenza $\sigma E_1 = (0, 1, 0)$).

I trasformati di C e D avranno rispettivamente la forma $(a, \bar{y}, 1)$ e $(a, \bar{y}, 1)$ con $a \in F_9$, ed allora se τ è la collineazione definita da: $\tau(x, y, 1) = (a^{-1}x, y, 1)$ (con le notazioni di ANDRÉ

$\tau = a^{-1}$) si ha:

$$(2) \quad \begin{aligned} \tau\sigma A &= (0, 0, 1), \quad \tau\sigma B = (0, 1, 1), \quad \tau\sigma C = (1, \bar{y}, 1), \\ \tau\sigma D &= (1, \bar{y}, 1), \quad \tau\sigma E_1 = (0, 1, 0). \end{aligned}$$

L'analisi delle $F \subset P$ è così ricondotta a quella delle configurazioni generate da quadrangoli del tipo (2) (fig. 1).

3) L'insieme M delle configurazioni di Fano contenute in P.

Per semplicità indicherò ancora con F, A, B, C, D, E_1 , gli enti $\tau\sigma F, \tau\sigma A$ etc.

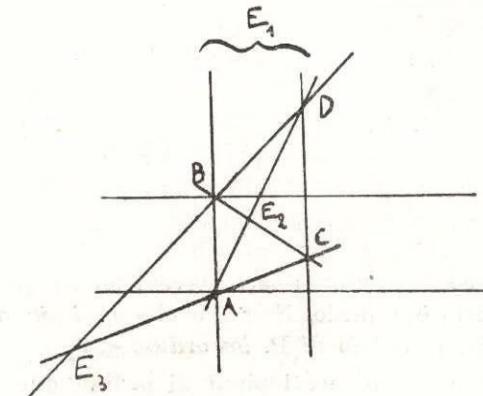


Fig. 1.

Se E_1, E_2, E_3 sono i punti diagonali di $ABCD$, $E_i = (x_i, y_i, z_i)$, condizione necessaria e sufficiente perché la F risulti di ordine 2 è la:

$$(3) \quad x_2 = x_3 \quad (= x \text{ Defin.}) \quad \text{che esprime l'allineamento } E_1 E_2 E_3.$$

Poichè le rette BC, AD hanno rispettivamente le coordinate $(\bar{y} - 1, -1, 1)$ e $(-\bar{y}, 1, 0)$, le coordinate di E_2 soddisfano al sistema:

$$(4) \quad \begin{cases} (\bar{y} - 1)x_2 - y_2 + z_2 = 0 \\ -\bar{y}x_2 + y_2 = 0 \end{cases} \quad \text{o anche} \quad \begin{cases} (\bar{y} - 1)x_2 - \bar{y}x_2 + z_2 = 0 \\ y_2 = \bar{y}x_2. \end{cases}$$

L'analogo sistema s(4) per E_3 si ottiene da (4) mediante la sostituzione $s = (x_2 \rightarrow x_3, y_2 \rightarrow y_3, \bar{y} \rightleftharpoons \bar{y})$.

E_2 non può essere improprio perché da $z_2 = 0$ (dovendo essere x_2, y_2 non entrambi nulli) segue:

$$(5) \quad \bar{y} - 1 = \bar{y}$$

e poichè se E_2 è improprio anche E_3 deve esserlo dovrebbe valere anche la:

$$(6) \quad \bar{y} - 1 = \bar{y}$$

il che è assurdo (non ci sono in F elementi di periodo 2 rispetto alla somma (escluso lo 0)); ne segue che ogni configurazione di FANO contiene al più un punto improprio (e come dimostrerò in seguito ne contiene certamente uno).

Da (4), s(4) ($z_2 = z_3 = 1, x_2 = x_3 = x$) si ha:

$$(6) \quad \begin{cases} (\bar{y} - 1) - \bar{y}x + 1 = 0 \\ (\bar{y} - 1) - \bar{y}x + 1 = 0. \end{cases}$$

Non si può avere $x = 0$ o $x = 1$ poichè si avrebbero 4 punti sulla CD o rispettivamente sulla AB , nè $x = -1$ poichè si dovrebbe avere $\bar{y} - \bar{y} = 1$ e $\bar{y} - \bar{y} = 1$.

Eliminando \bar{y} dalle (6) (dalla prima segue $\bar{y} = [(\bar{y} - 1)x + 1]x^{-1}$) si trova:

$$(7) \quad [(\bar{y} - 1)x + 1]x^{-1} - 1 \mid x - \bar{y}x + 1 = 0$$

(essendo $x \notin K$ al posto di x^{-1} si potrebbe anche scrivere $-x$).

Per $x = j$ l'espressione del primo membro prende in funzione di y i valori dati dalla seguente tabella (le operazioni che fanno passare da una colonna alla successiva sono indicate sopra alla linea di separazione, l'ultima colonna dà i valori di \bar{y} corrispondenti ai valori di \bar{y} per cui vale la (7)).

\bar{y}	-1	$\cdot j$	+1	$\cdot(-j)$	-1	$\cdot j$	$-\bar{y}j$	+1	\bar{y}
0	1	$-j$	$1-j$	$1+j$	j	-1	-1	0	$1+j$
1	0	0	1	$-j$	$-1-j$	$-1+j$	-1	0	-j
-1	-1	j	$1+j$	$-1+j$	$1+j$	$1-j$	1	-1	
j	$-1+j$	$1+j$	$-1+j$	$-1-j$	$1-j$	$-1-j$	-j	$1-j$	
$-j$	$-1-j$	$-1+j$	j	1	0	0	-1	0	1
$1+j$	j	-1	0	0	-1	-j	-1	0	0
$1-j$	-j	1	-1	j	$-1+j$	$1+j$	$-1-j$	-j	
$-1+j$	$1+j$	$1-j$	$-1+j$	$1-j$	-j	1	-j	$1-j$	
$-1-j$	$1-j$	$-1-j$	-j	-1	1	j	1	1	-1

Fig. 2.

Ad ogni valore di x corrispondono così 2 coppie \bar{y}, \bar{y} (d'ora innanzi indicherò con \bar{y} l'elemento che è in K) che danno luogo a due distinte configurazioni di FANO; queste coppie sono date dalla tavola 2 per $x = j$ e si ottengono mediante gli automorfismi

di F (al gruppo Θ corrisponde in modo ovvio un gruppo $G_0 \subset G$ di collineazioni, ad esso isomorfo) per gli altri valori di $x \notin K$.

Al variare di $\bar{x} \notin K$ in F_0 , i seguenti due insiemi di 7 punti (corrispondenti ai valori $\bar{y}=0, \bar{y}=1$ rispettivamente) descrivono un insieme M_0 formato da 12 configurazioni di FANO fra loro collineari (2) (Scritti i 7 punti per $x=j$ basta sostituire ad j \bar{x} in quanto le espressioni in j che compaiono sono invarianti per automorfismi).

$$(8) \quad (0, 1, 0) (0, 1, 1) (0, 0, 1) (1, 0, 1) (1, 1 + \bar{x}, 1) (\bar{x}, 0, 1) (\bar{x}, 1 - \bar{x}, 1)$$

$$(9) \quad * \quad * \quad * \quad (1, 1, 1) (1, -\bar{x}, 1) (\bar{x}, 1, 1) (\bar{x}, \bar{x}, 1).$$

Ognuna delle configurazioni trovate è mutata in sè dalle collineazioni di un certo sottogruppo $\bar{G} \subset G$ che mi propongo di costruire.

Ogni $g \in \bar{G}$ deve lasciar fermo il punto E_1 , che è l'unico punto improprio della configurazione (ogni collineazione muta in sè la retta impropria) e quindi determina una permutazione delle 3 rette per E_1 . Le $g \in \bar{G}$ hanno quindi la forma $\omega ah\sigma$ in cui $\sigma \in G_0$, h ed a sono determinate da:

$$h(x, y, 1) = (x + h, y, 1), \quad a(x, y, 1) = (ax, y, 1)$$

ed ω è una qualsiasi collineazione che muti tutti i punti in punti di eguale ascissa. (Vedi ANDRÉ [1]).

Considerando in particolare la configurazione F data dalla (8) con $\bar{x}=j$ si ottengono in corrispondenza ai 6 valori possibili per σ le collineazioni date dalla seguente tabella (h, a, ω restano univocamente determinate da σ e dalle condizioni imposte)

trasf. di j mediante σ	a	h	ω
j	1	0	$x' = x \quad y' = y \quad z' = z$
$-j$	j	0	$\gg \gg \gg$
$1+j$	$1-j$	j	$\gg y' = (-1+j)y \gg$
$1-j$	-1	1	$\gg y' = (-1-j)y \gg$
$-1+j$	$-j$	j	$\gg y' = (-1+j)y \gg$
$-1-j$	$-1+j$	1	$\gg y' = (-1-j)y \gg$

Fig. 3.

(2) Per le configurazioni corrispondenti ad uno stesso valore di \bar{y} basta considerare le collineazioni di G_0 , e la collineazione $x'=x, y'=-y+1, z'=z$ porta le configurazioni corrispondenti al valore 0 di \bar{y} in quelle corrispondenti al valore 1 e viceversa.

L'insieme M è dunque dato dalle σF , (ove σ percorre un sistema di rappresentanti dei laterali di \bar{G} in G) ed è dunque formato da $2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 = 51840$ configurazioni.

Fissato un punto improprio R esistono 5184 configurazioni di FANO che lo contengono; ciascuna di esse contiene una e una sola retta per il suo coniugato di R nell'involuzione I (la F verifica infatti questa proprietà e si tratta di una proprietà proiettiva).

Si può escludere che esistano in P configurazioni di FANO prive di punti impropri, nel modo seguente:

Sia F una tale configurazione, le 7 direzioni delle sue rette devono essere tutte distinte (altrimenti la configurazione conterrebbe un punto improprio almeno) e per conseguenza ve ne sono almeno 2 coniugate in I . La collineazione σ che porta un punto improprio p in $(1, 0, 0)$ porta il suo coniugato q in $(0, 1, 0)$ (che è il coniugato di $(1, 0, 0)$) e (dato che anche le traslazioni sono elementi di G) si può così mediante opportune collineazioni portare F a possedere gli assi. Mediante collineazioni del tipo $x'=ax$, $y'=by$, $z'=z$ è poi possibile fare in modo che F contenga i punti $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ (fig. 4).

Esisterà allora in F un (solo) punto $(\alpha, \beta, 1)$ non allineato con i punti fissati e tenendo conto della collineazione ε ($\varepsilon(x, y, 1) =$

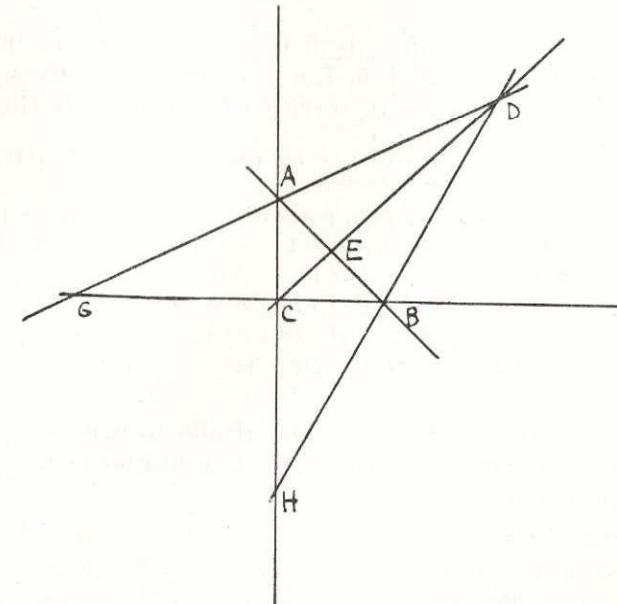


Fig. 4.

$=(y, x, 1)$) e delle collineazioni del gruppo G_0 si può supporre che esso sia uno dei seguenti 8 punti:

$$\begin{array}{cccccc} 1: (j, 1, 1) & 2: (j, -1, 1) & 3: (j, j, 1) & 4: (j, -j, 1) & 5: (j, 1+j, 1) \\ 6: (j, 1-j, 1) & 7: (j, -1+j, 1) & 8: (j, -1-j, 1). \end{array}$$

Il punto 1 può essere escluso perché darebbe luogo a un punto diagonale improprio e così il punto 6 che è allineato con $(0, 1, 1)$ e $(1, 0, 1)$. Con riferimento alla figura 6 si trovano per i punti e per le rette di F le coordinate ($D = (\alpha, \beta, 1) = 2, 3, 4, 5, 7, 8$):

$$\begin{aligned} AB &: (-1, -1, 1); \quad CD: (-\beta z^{-1}, 1, 0); \quad AD: ((\beta - 1)z^{-1}, -1, 1); \\ BD &: (-1, (\alpha - 1)\beta^{-1}, 1); \quad H: (0, -\beta(\alpha - 1)^{-1}, 1); \\ G &: (-\alpha(\beta - 1)^{-1}, 0, 1); \quad HG: ((\beta - 1)z^{-1}, (\alpha - 1)\beta^{-1}, 1). \end{aligned}$$

Le coordinate $x, y, 1$ di E devono soddisfare al sistema:

$$(10) \quad \begin{cases} -x - y + 1 = 0 \\ -\beta z^{-1}x + y = 0 \end{cases} \quad \text{da cui } \beta z^{-1}x + x = 1$$

ed inoltre E deve essere su HG , ossia (tenendo conto della (10)):

$$(\beta - 1)z^{-1}x + (\alpha - 1)z^{-1}x + 1 = 0.$$

Le espressioni βz^{-1} , $(\beta - 1)z^{-1}$, $(\alpha - 1)z^{-1}$ assumono in corrispondenza ai punti: 2, 3, 4, 5, 7, 8 i valori dati nella seguente tabella in cui sono riportate in corrispondenza anche le (10) e (11).

α	β	βz^{-1}	$(\beta - 1)z^{-1}$	$(\alpha - 1)z^{-1}$	eq. (10)	eq. (11)
j	-1	j	$-j$	$-1-j$	$zx+x=1$	$-zx-(1+j)x+1=0$
j	1	-1	$-1-j$	$-1-j$	$x=-1$	$+(1+j)x+1=0$
j	-	-1	$1-j$	$-1-j$	$0=1$	$(1-j)x-(1+j)x+1=0$
j	$1+j$	$-1+j$	1	$-1-j$	$(-1+j)x+x=1$	$x-(1+j)x+1=0$
j	$-1+j$	$-1-j$	$-1+j$	$-1-j$	$(-1-j)x+x=1$	$(-1+j)x-(1+j)x+1=0$
j	$-1-j$	$1-j$	$1+j$	$-1-j$	$(1-j)x+x=1$	$1=0$

Il sistema formato dalle (10) e (11) risulta in ogni caso impossibile e ne segue che non esistono in P configurazioni di FANO prive di punti impropri.

Resta così dimostrato che:

Esistono in P $2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 = 51840$ configurazioni di FANO tutte fra loro collineari, contenenti ciascuna un (solo) punto improprio e una (sola) retta per il suo coniugato in I.

4) Le configurazioni di ordine 3 contenute in P .

Dimostrerò in primo luogo che non esistono in P configurazioni di ordine 3 prive di punti impropri. Sia infatti F una tale configurazione ed r una sua retta. Per il punto improprio R di r passano, oltre alla retta r che contiene 4 punti di F) ed alla retta impropria r' (che non contiene punti di F) 8 rette, ρ_i ($i=1, 2, \dots, 8$) ed i punti delle rette per R esauriscono l'insieme dei punti di P ; d'altra parte ogni ρ_i contiene al più un punto di F (perchè in caso diverso ρ_i e quindi il punto $R=r\rho_i$ apparterrebbero ad F) e in questo modo F dovrebbe contenere al più 12 punti mentre ogni configurazione di ordine 3 contiene $3^2 + 3 + 1 = 13$ punti. Da quanto ho dimostrato in 1 e in 3 segue ora che non esistono in P sottopiani propri non degeneri privi di punti impropri.

Si può anche escludere che esistano in P configurazioni di ordine 3 contenenti un solo punto improprio. Sia infatti F una tale configurazione ed R il suo unico punto improprio: per R passano 4 rette di F (vedi nota 1 a pag. 1) e le residue 9 rette di F devono avere in P 9 punti impropri distinti (e diversi da R); per conseguenza le direzioni delle rette di F sono tutte quelle possibili in P . Poichè G è transitivo nei punti impropri di P si può supporre (a meno di collineazioni) che R sia il punto $(0, 1, 0)$ e poichè esiste in F una retta passante per il coniugato di R si può supporre che F contenga gli assi di P e quindi $(0, 0, 1)$. Mediante collineazioni del tipo $x'=ax$ $y'=by$ $z'=z$ si può fare in modo che F possieda i punti $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 1)$ e quindi la retta $x=1$. La F deve allora possedere due altri punti su questa retta: se uno di essi ha coordinate di K , F contiene un quadrilatero non degenere di punti con coordinate di K e quindi l'intera configurazione, P_0 , formata dai punti di P le cui coordinate sono in K ; F coincide così con P_0 che è appunto una configurazione di ordine 3 (essendo K isomorfo al campo di GALOIS di ordine 3) e possiede 4 punti impropri. In caso diverso F possiede sulla $x=1$ un punto del tipo $(1, y, 1)$ con $y \notin K$ e quindi contiene come suo sottopiano una configurazione di FANO⁽³⁾ il che è assurdo. (Nessun piano desarguesiano di ordine primo può possedere sottopiani propri non degeneri). Ogni configurazione di ordine 3 contenuta in P deve quindi contenere 4 punti impropri. (Dovendo contenere più di un punto improprio deve infatti contenere la retta impropria stessa).

Con riferimento a quanto ho detto in 2 desidero ora esaurire l'analisi delle configurazioni a cui danno luogo le coppie \bar{y}, \bar{y} e

⁽³⁾ (Una delle 12 dell'insieme M_0 esaminato in ³).

quindi per quanto ho mostrato finora l'analisi di tutti i sottopiani propri di P .

Dopo l'analisi svolta in 3 restano da determinare le configurazioni generate dalle coppie: $(0, 1)$ $(0, -1)$ $(1, -1)$ $(-1, a)$ (a, b) con $a, b \notin K$ (le altre coppie danno luogo a configurazioni di FANO). Il quadrangolo $ABCD$ relativo alle prime 3 coppie genera il sottopiano P_0 già menzionato, che possiede due coppie di punti impropri coniugati in I . Ogni altra configurazione di ordine 3 generata dalle coppie residue deve possedere 4 punti impropri ai cui mai due coniugati in I ; se infatti essa possedesse una coppia di I sarebbe collineare a P_0 ⁽⁴⁾ e quindi anche gli altri due punti impropri risulterebbero coniugati in I . Ma allora la configurazione conterrebbe il punto $(1, 0, 0)$ coniugato di $(0, 1, 0)$ e coinciderebbe addirittura con P_0 . Sia allora F una tale configurazione, essa conterrà sulla retta $x=1$ un punto della forma $(1, a, 1)$ con $a \notin K$ e con esso (oltre al punto $(0, 1, 0)$) i punti: $(1, 1+a, 1)$ $(1, -1+a, 1)$. Tirando infatti per il punto $(1, 0, 1)$ la parallela alla retta che congiunge l'origine e il punto $(1, a, 1)$ e intersecando con la $x=1$ si trova il punto $(1, 1+a, 1)$; congiungendo questo punto con l'origine e tirando per $(1, 0, 1)$ la parallela alla retta così ottenuta si ottiene per intersezione con la $x=0$ il punto $(0, -1, 1)$ e per conseguenza (con la costruzione usata in precedenza) il punto $(1, -1+a, 1)$ sulla $x=1$. Si verifica facilmente che in questo modo si costruisce effettivamente una configurazione di ordine 3.

Riassumendo le coppie \bar{y}, \bar{y} danno luogo alle configurazioni indicate dalla seguente tabella.

config. generate dai quadrangoli: $(0, 1, 1)(1, \bar{y}, 1)(1, \bar{y}, 1) \quad (\bar{y} \notin K)$	$\left\{ \begin{array}{l} \bar{y}=0 \\ \bar{y}=a \end{array} \right. \circ \left\{ \begin{array}{l} \bar{y}=1 \\ \bar{y}=a \end{array} \right. \text{conf. di FANO}$ $\left\{ \begin{array}{l} \bar{y}=0 \\ \bar{y}=1 \end{array} \right. \circ \left\{ \begin{array}{l} \bar{y}=0 \\ \bar{y}=-1 \end{array} \right. \circ \left\{ \begin{array}{l} \bar{y}=1 \\ \bar{y}=-1 \end{array} \right. \text{conf. } P_0 \text{ (di ordine 3 contenente due coppie di } I\text{)}$ $\left\{ \begin{array}{l} \bar{y}=1 \\ \bar{y}=a \end{array} \right. \text{tutto } P$ $\left\{ \begin{array}{l} \bar{y}=a \\ \bar{y}=-a \end{array} \right. \circ \left\{ \begin{array}{l} \bar{y}=a \\ \bar{y}=1-a \end{array} \right. \circ \left\{ \begin{array}{l} \bar{y}=a \\ \bar{y}=-1+a \end{array} \right. \text{tutto } P$ $\left\{ \begin{array}{l} \bar{y}=a \\ \bar{y}=1+a \end{array} \right. \circ \left\{ \begin{array}{l} \bar{y}=a \\ \bar{y}=-1+a \end{array} \right. \text{una stessa conf. di ordine 3 (contenente 4 punti impropri appartenenti a 4 coppie distinte di } I\text{).}$
---	---

Fig. 5.

⁽⁴⁾ Con un ragionamento analogo a quello svolto nel caso che la F non possedesse punti impropri si può infatti mostrare che esiste una collineazione che porta la F a possedere l'origine e i punti impropri e unitari degli assi e quindi a coincidere con P_0 .

Le configurazioni di ordine 3 contenute in P si possono così suddividere in 2 insiemi:

α) Le configurazioni collineari a P_0 (che quindi possiedono due coppie di punti impropri coniugati in I).

β) Le configurazioni collineari ad F (quinta alternativa nella tabella 5) (che possiedono 4 punti impropri appartenenti a 4 coppie distinte di I).

Il numero delle configurazioni del tipo α) può essere determinato con le seguenti considerazioni: il gruppo \bar{G} delle collineazioni che mutano P_0 in sè è formato dalle collineazioni dei tipi:

$$\bar{ab}\bar{\eta}\bar{b}\sigma\tau, \quad \bar{s}\bar{a}\bar{b}\sigma\tau, \quad \bar{a}\bar{b}\sigma\tau,$$

dove $a, b \in K^\times$ $\sigma \in G_0$, τ è una traslazione, $(\tau(x, y, 1) = (x + h, y + k, 1))$ con $h, k \in K^\times$ (Vedi J. ANDRÉ [1]) ed il suo ordine è $432 + 2 \cdot 216 = 864 (= 2^5 \cdot 3^3)$. Per un qualsiasi $\sigma \in G$ il gruppo delle collineazioni che lasciano fermo σP_0 è il trasformato di \bar{G} mediante σ . Ne segue che esistono $2^8 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 2^6 \cdot 3^3 = 360$ configurazioni collineari a P_0 . Di esse esattamente 40 contengono l'origine (bisogna infatti tener conto del sottogruppo di G/\bar{G} proveniente dalle traslazioni di G , che ha ordine 9). Ognuna di queste configurazioni contiene due coppie di punti impropri coniugati in I e poiché questo dà luogo a $\binom{5}{2} = 10$ possibilità, esistono esattamente 4 configurazioni di questo tipo che contengono l'origine e due certe coppie di punti coniugati.

Quest'ultima affermazione può esser controllata direttamente come segue: P_0 contiene l'origine e le due coppie di punti coniugati $((1, 0, 0), (0, 1, 0))$, $((1, 1, 0), (-1, 1, 0))$; ogni configurazione di ordine 3 che abbia questi 5 punti in comune con P_0 possiede sull'asse delle ascisse un certo punto $(a, 0, 1)$ con $a \in F_0$ ed è pienamente determinata una volta assegnato a (ogni piano grafico desarguesiano di ordine primo è generato proietivamente per intero da ogni suo quadrangolo non degenere); una tale configurazione si ottiene effettivamente da P_0 con la collineazione: $x' = ax$, $y' = ay$, $z' = z$ (che lascia fermi i 5 punti considerati) e possiede oltre ai punti già nominati tutti i punti della forma $(z, \beta, 1)$ con $z, \beta = 0, a, -a$. Si trovano così 4 di queste configurazioni (corrispondenti ai valori di a : $1, j, 1+j, -1+j$ (configurazioni corrispondenti a valori di a opposti coincidono) (fig. 6).

Per le configurazioni di tipo β) si trovano ancora 4 configurazioni contenenti l'origine e una certa quaterna di punti impropri (infatti al variare di $a \notin K$ nella F (quinta alternativa della ta-

bella (5)), si ottengono 2 configurazioni contenenti però quaterne di punti impropri distinte; se F è una di queste, ogni F' ad essa collineare e contenente l'origine e gli stessi punti impropri deve possedere sull'asse delle ordinate oltre all'origine e al punto improprio un certo altro punto $(0, b, 1)$ ed F' resta pienamente determinata dal valore di b ; si trovano così con lo stesso ragio-

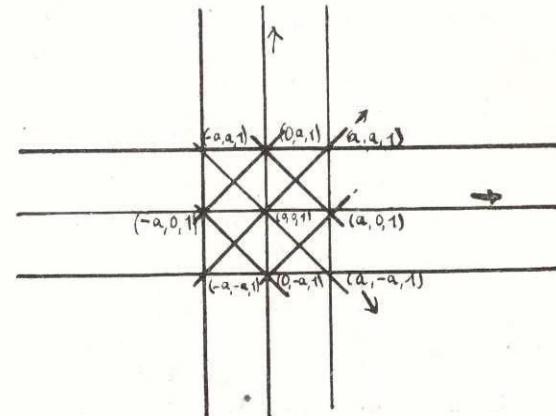


Fig. 6.

namento fatto per il caso α) 4 configurazioni F' . Una quaterna di punti impropri rispondente alla condizione trovata per il caso β) può essere scelta in $2^4 \cdot 5 = 80$ modi ed effettivamente è possibile portare con una opportuna collineazione la F a possedere una qualsiasi di queste quaterne, Q , (sia infatti p un punto della coppia esclusa in F e p' un punto della coppia esclusa in Q , e q, q' siano i loro coniugati in I , poichè P è semplicemente transitivo nei suoi punti impropri (J. ANDRÉ [1]) è possibile portare p in p' (o anche in q') e per conseguenza q in q' (in p') e in questo modo le coppie di I che possiedono un punto di F vengono portate nelle analoghe coppie relative a Q ; considerando poi opportuni prodotti della ε ($\varepsilon(x, y, 1) = (y, x, 1)$) per altre collineazioni di G (e portando se necessario p in q' anzichè in p') è sempre possibile invertire certe coppie in modo da ottenere il risultato voluto).

Si hanno così $4 \cdot 80 = 320$ configurazioni che contengono l'origine; poichè ognuna di esse contiene 9 punti propri la si può portare mediante 9 traslazioni distinte in una che ancora contiene l'origine (e quindi, come si vedrebbe facilmente, in se stessa), e

poichè l'ordine del gruppo T delle traslazioni è 81, esistono $320 \cdot 81 / 9 = 2880$ configurazioni del tipo β).

Nel piano P sono così contenute $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 = 3240$ configurazioni di ordine 3, tutte contenenti 4 punti impropri di P , e di esse: 360 contengono due coppie di punti impropri coniugati in I (e sono tutte fra loro collineari).

2880 contengono 4 punti impropri appartenenti a 4 coppie distinte di I (e sono tutte fra loro collineari).

Queste configurazioni, insieme alle configurazioni di FANO trovate in 3 esauriscono l'insieme delle configurazioni parziali chiuse contenute in P .

BIBLIOGRAFIA

Dato che ampie ed aggiornate bibliografie esistono altrove (per es in: G. PICKERT, *Projektive Ebenen*, Lange e Springer, 1955) mi limito ad indicare qui i lavori citati nel testo.

- [1] JOHANNES ANDRÉ, *Projektive Ebenen über Fastkörpern*. « Mathematische Zeitschrift », 62, pag. 137-160 (1955).
- [2] MARSHALL HALL, *Projective planes*. « Trans of the Am. Math. Soc. », 54, pag. 229-277 (1943).
- [3] LUCIO LOMBARDO - RADICE, *Su alcuni caratteri dei piani grafici*, « Rendic. del Sem. mat. della Università di Padova », luglio-dicembre pag. 312-345 (1955).
- [4] HANNA NEUMANN, *On some finite non desarguesian planes*, « Archiv. der Mathematik », 6, pag. 86 (1955).
- [5] BENIAMINO SEGRE, *Lezioni di Geometria moderna*, Vol. I, Zanichelli, Bologna 1948.
- [6] GUIDO ZAPPA, *Reticoli e geometrie finite*, Liguori, Napoli 1952.