1967 Volume XXXVIII

RENDICONTI

DEL

SEMINARIO MATEMATICO

DELLA

UNIVERSITÀ DI PADOVA

(ESTRATTO)

ROBERTO MAGARI

Su una questione riguardante le chiusure di Moore

PADOVA
CEDAM - CASA EDITRICE DOTT. ANTONIO MILANI
1967

SU UNA QUESTIONE RIGUARDANTE LE CHIUSURE DI MOORE

ROBERTO MAGARI *)

SUNTO: Sia $\langle E, K \rangle$ un C.G. (Cfr. [4]) [1]) e G, X sottoinsiemi di E. Si studiano condizioni affinchè sia $K(G \cap KX) \supseteq X$.

1. Premessa.

Sia W un insieme non vuoto e sia $F_W = \bigcup_{0 \leq i < \omega} W^{W^i}$ il *clono* (cfr. [1] cap. III) delle operazioni finitarie su W.

Allo scopo di affrontare un problema riguardante la classe equazionale di algebre « associata » a $\langle W, F \rangle$ dove F sia un fissato sottoinsieme di F_W, (cfr. [5] premessa), è opportuno caratterizzare gli elementi $f \in F_W$ che risultano, parlando imprecisamente, « esprimibili » mediante le operazioni binarie a loro volta « esprimibili » mediante f. In termini più precisi, tenuto conto del fatto che l'operatore K definito da:

(1) $$KX = \text{clono generato da } X \qquad (X \subseteq F_W)$$

è un operatore di Moore (cfr. [1] cap. I e [2] cap. III) [1]), ossia, secondo la terminologia di [4], $\langle F_W, K \rangle$ è un C.G., si tratta di caratteriz-

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca del C.N.R. (gruppo n. 37 del Comitato per la Matematica) per l'anno 66-67.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Firenze.

[1]) ved. anche il successivo n. 2.

zare quegli elementi f di F_W per cui è:

$$f \in K(W^{W^2} \cap K\{f\}). \tag{2}$$

In questa breve nota ho raccolto alcune semplici osservazioni preliminari sulla questione che hanno una portata più generale e che precisamente si inquadrano nel problema seguente:

sia $\langle E, K \rangle$ *un* C.G. *e* $G \subseteq E$. *Si chiede di studiare l'insieme degli* $X \subseteq E$ *per cui è:*

$$X \subseteq K(G \cap KX). \tag{3}$$

Il problema ora esposto presenta interesse anche per il seguente motivo. Sia E l'insieme delle espressioni di un linguaggio logico e K l'operatore conseguenza, ossia l'operatore che ad ogni insieme X di espressioni associa l'insieme KX delle espressioni che sono conseguenza di X. È ben noto che $\langle E, K \rangle$ è allora un C.G. (cfr. ad esempio [4]). Se X è una teoria (ossia un chiuso di $\langle E, K \rangle$) e G è un insieme di espressioni, la condizione (3) (equivalente, come si vedrà più oltre, alla: $K(G \cap KX) = KX$ e quindi, se X è un chiuso, alla $K(G \cap X) = X$) esprime la circostanza che è possibile reperire in G un sistema di assiomi per X.

2. Richiami sui C.G.

Per comodità del lettore ricordo che un C.G. è un sistema $\langle E, K \rangle$ in cui:

(4,1) E è un insieme

(4,2) K è un'applicazione da $\mathcal{P}(E)$ a $\mathcal{P}(E)$ tale che:

$$X \subseteq KX \qquad (X \in \mathcal{P}(E)) \tag{4,21}$$

$$K^2 = K \tag{4,22}$$

$$K(X \cup Y) \supseteq KX \qquad (X, Y \in \mathcal{P}(E)). \tag{4,23}$$

Se ne deducono immediatamente le:

$$\left.\begin{array}{ll} (4,24) & K(X \cup Y) \supseteq KX \cup KY \text{ [2] [3]} \\ (4,25) & \text{se } X \subseteq Y \text{ allora } KX \subseteq KY \text{ [2]} \\ (4,26) & K(X \cap Y) \subseteq KX \cap KY \text{ [3]} \end{array}\right\} (X, Y \in \mathcal{P}(E)).$$

Se $\langle E, K \rangle$ è un C.G., K si dice un C.G.*-operatore* o *operatore di Moore* su E.

Ricordo ancora che, detto $\mathcal{C}$ l'insieme dei « chiusi » di un C.G. $\langle E, K \rangle$ $(\mathcal{C} = \{X \in \mathcal{P}(E) : X = KX\} =$

$= \{X \in \mathcal{P}(E) :$ esiste un $Y \in \mathcal{P}(E))$ con $X = KY\})$

si ha:

(5,1) $\mathcal{C}$ è chiuso rispetto alle intersezioni (anche infinite) [4]

$$KX = \bigcap_{\substack{Y \in \mathcal{C} \\ X \subset Y}} Y \qquad (X \in \mathcal{P}(E)). \tag{5,2}$$

Viceversa se E è un insieme e $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(E)$ soddisfa la (5,1) esiste uno e un sol operatore di Moore K su E (quello appunto definito dalla (5,2)), per cui $\mathcal{C}$ è l'insieme dei chiusi di $\langle E, K \rangle$.

---

[2]) Per un qualunque $K : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ le (4,23), (4,24), (4,25), (4,26) sono ovviamente equivalenti.

[3]) Più in generale valgono le:

$$\left.\begin{array}{ll} (4,241) & K \bigcup_{X \in \mathcal{M}} X \supseteq \bigcup_{X \in \mathcal{M}} KX \\ (4,261) & K \bigcap_{X \in \mathcal{M}} X \subseteq \bigcap_{X \in \mathcal{M}} KX \end{array}\right\} \mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(E).$$

[4]) La proposizione va intesa secondo la convenzione per cui $\bigcap_{X \in \emptyset} X = E$, $\bigcup_{X \in \emptyset} X = \emptyset$.

Sarà utile nel seguito la seguente:

DEF. 1. *Sia* $\langle E, K \rangle$ *un* C.G. *e* $Y \subseteq E$. *Si dirà operatore relativo a* Y *l'applicazione* K_Y *da* $\mathcal{P}(Y)$ *a* $\mathcal{P}(Y)$ *definita da:*

$$K_Y X = Y \cap KX \qquad (X \subseteq Y). \tag{6}$$

Facilmente si verifica che $\langle Y, K_Y \rangle$ è un C.G.

3. Ora e nel seguito $\langle E, K \rangle$ indicherà sistematicamente un C.G. e $\mathcal{C}$ l'insieme dei suoi chiusi.

Si ha ovviamente:

PROP. 1. *Se* $X, G \in \mathcal{P}(E)$, *sono equivalenti le condizioni:*

$$K(G \cap KX) \supseteq X \tag{3}$$

(3,1) $\quad K(G \cap KX) = KX.$

DIM.

da (3) segue (3,1). Valga la (3), allora è:

$$K(G \cap KX) = KK(G \cap KX) \supseteq KX \tag{7}$$

e anche:

$$G \cap KX \subseteq KX$$

da cui:

$$K(G \cap KX) \subseteq KKX = KX \tag{8}$$

e dalle (7) e (8) segue la (3,1).

Che dalla (3,1) segua la (3) è ovvio.

PROP. 2. *Sono equivalenti le condizioni:*

$$\left.\begin{array}{ll} (9{,}1) & KX \cap KG \supseteq X \\ (9{,}2) & KX \cap KG \supseteq KX \\ (9{,}3) & KG \supseteq KX \\ (9{,}4) & KG \supseteq X \end{array}\right\} \quad (X, G \in \mathcal{P}(E))$$

e ciascuna di esse è condizione necessaria per la validità della (3).

DIM. L'equivalenza fra le (9,1), (9,2), (9,3), (9,4) è ovvia.

Valga la (3).

Si ha:

$$K(KX \cap G) \subseteq KKX \cap KG = KX \cap KG$$

e dalla (3) segue ora la (9,1).

Che le (9) non siano in generale sufficienti per la validità della (3) è mostrato dal seguente:

Esempio α.

Sia $\langle E, \leq \rangle$ un insieme totalmente ordinato avente almeno tre elementi distinti a, b, c (e supponiamo $a < b < c$) e K sia definito da:

$$KX = \{ y \in E : \text{esiste almeno un } x \in X \text{ con } x \leq y \} \quad (X \subseteq E). \tag{10}$$

$\langle E, K \rangle$ è ovviamente un C.G. e posto $G = \{a\}$, $X = \{b\}$ si ha ovviamente $b \in KG$ cioè $X \subseteq KG$, ossia la (9, 4), mentre è:

$$K(G \cap KX) = K(\{a\} \cap \{y \in E : y \geq b\}) = K\,\emptyset = \emptyset \not\ni b$$

Fissato G prendiamo ora in considerazione i due insiemi:

$$\mathcal{F}_G = \{X \in \mathcal{P}(E) : X \subseteq K(KX \cap G)\}$$

$$\overline{\mathcal{F}}_G = \{X \in \mathcal{C} : X \subseteq K(KX \cap G)\} = \{X \in \mathcal{C} : X \subseteq K(X \cap G)\} =$$
$$= \{X \in \mathcal{C} : X = K(X \cap G)\}$$

Ovviamente è:

$$X \in \mathcal{F}_G \text{ se e solo se } KX \in \overline{\mathcal{F}}_G . \tag{11}$$

Si ha:

PROP. 3. $\mathcal{F}_G$ *è chiuso rispetto alle unioni (anche infinite).*

DIM. Sia $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{F}_G$. Si ha:

$$K(G \cap K \bigcup_{X \in \mathcal{M}} X) \supseteq K(G \cap \bigcup_{X \in \mathcal{M}} KX) = K \bigcup_{X \in \mathcal{M}} (G \cap KX) \supseteq$$
$$\supseteq \bigcup_{X \in \mathcal{M}} K(G \cap KX) \supseteq \bigcup_{X \in \mathcal{M}} X$$

cioè

$$\bigcup_{X \in \mathcal{M}} X \in \mathcal{F}_G .$$

Minore interesse ha lo studio degli insiemi:

$$\mathcal{G}_X = \{G \in \mathcal{P}(E) : X \subseteq K(KX \cap G)\} ; \ \overline{\mathcal{G}}_X = \{G \in \mathcal{C} : X \subseteq K(KX \cap G)\},$$

ottenuti fissando X.

Banalmente si ha:

PROP. 4. *$\mathcal{G}_X$ è permesso rispetto all'unione, ossia:*

(12) se $G \in \mathcal{G}_X$ e $H \subseteq E$, $G \cup H \in \mathcal{G}_X$.

Quanto a $\overline{\mathcal{G}}_X$ si ha:

(13) $$\overline{\mathcal{G}}_X = \{G \in \mathcal{C} : X \subseteq G\}$$

ossia se G è un chiuso le (9) sono sufficienti per la validità della (3). (In altri termini si ha:

(14) se $G \in \mathcal{C}$ allora $\mathcal{F}_G = \{X \in \mathcal{P}(E) : X \subseteq G\}$.

DIM. ovvia).

4. Allo scopo di facilitare, nei casi particolari, lo studio dell'insieme $\mathcal{F}_G$ sarà utile considerare l'insieme:

$$\mathcal{R}_G = \{G \cap KX : X \in \mathcal{F}_G\}.$$

Sia poi $\mathcal{C}_G$ l'insieme dei chiusi di $\langle G, K_G \rangle$.

PROP. 5. *Si ha:*

(15) $$\mathcal{C}_G = \mathcal{R}_G = \{G \cap KX : X \subseteq E\} = \{G \cap X : X \in \overline{\mathcal{F}}_G\}.$$

DIM. Sia $F = G \cap KX$ con $X \subseteq E$. Si ha:

$$K_G F = K_G (G \cap KX) = G \cap K(G \cap KX) \subseteq G \cap KG \cap KX = G \cap KX = F$$

e poichè $\langle G, K_G \rangle$ è un C.G. si ha addirittura $K_G F = F$ ossia $F \in \mathcal{C}_G$.

Sia $F \in \mathcal{C}_G$ cioè ($F \subseteq G$ e) $F = K_G F$. È allora:

$F = G \cap KF$ e quindi $F \subseteq K(G \cap KF)$ cioè $F \in \mathcal{F}_G$ onde $F \in \mathcal{R}_G$.

È poi ovvio che è $\mathcal{R}_G \subseteq \{G \cap KX : X \subseteq E\}$ onde i primi tre insiemi scritti coincidono. Dalla (11) segue poi che

$$\mathcal{R}_G = \{G \cap X : X \in \overline{\mathcal{F}}_G\}.$$

Sia ora $F \in \mathcal{C}_G$ e indichiamo con $\mathcal{E}_F$ l'insieme $\{X \in \overline{\mathcal{F}}_G : G \cap X = F\}$

Facilmente si ha:

PROP. 6. $\overline{\mathcal{F}}_G = \bigcup_{F \in \mathcal{C}_G} \mathcal{E}_F$.

DIM. Poichè per definizione è $\mathcal{E}_F \subseteq \overline{\mathcal{F}}_G$ basterà dimostrare che è $\overline{\mathcal{F}}_G \subseteq \bigcup_{F \in \mathcal{C}_G} \mathcal{E}_F$. Sia $X \in \overline{\mathcal{F}}_G$, posto $F = G \cap X$ segue dalla prop. 5 che F è un chiuso di $\langle G, K_G \rangle$ e si ha $X \in \mathcal{E}_F$. Ne segue la proposizione.

D'altronde è subito visto che per ogni $F \in \mathcal{C}_G$ è:

(16) $$\mathcal{E}_F = \{KF\}.$$

Sia infatti $x \in \mathcal{E}_F$, cioè $X \in \overline{\mathcal{F}}_G$ e $X \cap G = F$.

La (3,1) diviene, tenuto conto del fatto che X è chiuso:

(17) $$K(G \cap X) = X$$

cioè appunto $X = KF$.

Viceversa si ha:

$$G \cap KF = K_G F = F$$

e anche

$$K(G \cap KF) = KK_G F = KF$$

e da queste segue $KF \in \mathcal{E}_F$.

Si arriva così alla seguente:

Prop. 7. $\overline{\mathcal{F}}_G = \{KF : F \in \mathcal{C}_G\}$.

La prop. 7 è notevolmente utile perchè riduce lo studio di $\overline{\mathcal{F}}_G$ a quello di $\mathcal{C}_G$.

D'altra parte $\mathcal{F}_G$ è legato a $\overline{\mathcal{F}}_G$ dalla:

(18) $$\mathcal{F}_G = \{X \in \mathcal{P}(E) : KX \in \overline{\mathcal{F}}_G\}.$$

5. La condizione (3) e l'equivalenza associata a K.

Ricordo che, secondo la terminologia di [4] (al quale rimando per maggiori dettagli) dato un C. G. $\langle E, K \rangle$ il preordine, $\leq$, e l'equivalenza R associati a K sono così definiti:

$$\left.\begin{array}{ll} (19) & x \leq y \text{ se e solo se } y \in K\{x\} \\ (20) & xRy \text{ se e solo se } x \leq y \text{ e } y \leq x \text{ (se e solo se,} \\ & \qquad\qquad \text{quindi, } K\{x\} = K\{y\}) \end{array}\right\} (x, y \in E).$$

Indichiamo ora con Q il *quantore su E associato alla R* (cfr. [3]) definito, ricordo, da:

(21) $$QX = \{y \in E : \text{esiste un } x \in X \text{ con } yRx\} \qquad (X \subseteq E).$$

Ovviamente è:

(22) Q è più fine di K, cioè:

(22,1) $$QX \subseteq KX \qquad (X \subseteq E)$$

inoltre,

(23) $$QKX = KX \qquad (X \subseteq E)$$

cioè:

(23,1) ogni chiuso di $\langle E, K \rangle$ è unione di elementi di E/R.

(24) $$KQX = KX.$$

Indichiamo ora con ϱ, σ, k, le relazioni binarie definite su $\mathcal{P}(E)$ dalle:

$$\left.\begin{array}{ll} (25) & X \varrho Y \text{ se e solo se } QX = QY \\ (26) & G \sigma X \text{ se e solo se } G, X \text{ soddisfano la (3)} \\ (27) & X k Y \text{ se e solo se } KX = KY \end{array}\right\} (X, Y, G \in \mathcal{P}(E)).$$

Si verifica facilmente che:

Prop. 8.

(*i*) ϱ, k sono di equivalenza

(*ii*) ϱ è più fine di k, cioè:

(*ii*, 1) se $X \varrho Y$ allora $X k Y$ $\quad (X, Y \in \mathcal{P}(E))$.

Vale la seguente

Prop. 9. *Sia $G_1 \varrho G_2$, $X_1 k X_2$, $(G_1, G_2, X_1, X_2 \in \mathcal{P}(E))$ allora è: $G_1 \sigma X_1$ se e solo se $G_2 \sigma X_2$. In particolare sono equivalenti le seguenti condizioni:*

$$\left.\begin{array}{lr} (28,1) & G \sigma X \\ (28,2) & QG \sigma X \\ (28,3) & G \sigma QX \\ (28,4) & G \sigma KX \\ (28,5) & QG \sigma QX \\ (28,6) & QG \sigma KX \end{array}\right\} (G, X \in \mathcal{P}(E)).$$

Dim. Tenuto conto delle considerazioni precedenti basterà dimostrare che sono equivalenti le (28,1), (28,2), (28,4).

L'equivalenza fra la (28,1) e la (28,4) segue dalla (11).

Valga la (28,2) sia cioè:

$$K(QG \cap KX) = KX$$

allora è [5]):

$$K(G \cap KX) = KQ(G \cap KX) = KQ(G \cap QKX) =$$

$$= K(QG \cap QKX) = K(QG \cap KX) = KX,$$

vale cioè la (28,1). Che poi la (28,1) implichi la (28,2) segue immediatamente dalla $G \subseteq QG$, tenuto conto della prop. 4.

---

[5]) Ricordo che vale per Q la: $Q(X \cap QY) = QX \cap QY$ ($X, Y \in \mathcal{P}(E)$). Cfr. P. R. HALMOS [3]).

TESTI CITATI

[1] P. M. COHN, *Universal Algebra*, New York 1965.

[2] P. DUBREIL, M. L. DUBREIL JACOTIN, *Leçons d'algèbre moderne*, Paris 1961.

[3] P. R HALMOS, *Algebraic Logic*, New York 1962.

[4] R. MAGARI, *Calcoli generali e spazi V_a* (Calcoli generali I). Le Matematiche Vol. XXI, Fasc. 1 (1966) pagg. 83-108.

[5] R. MAGARI, *Su una classe equazionale di algebre.*

Manoscritto pervenuto in redazione il 6-3-1967

Tipografia "Oderisi„ Editrice - Gubbio - 1967