ROBERTO MAGARI

Su una classe equazionale di algebre

Estratto dagli *Annali di matematica pura ed applicata*
Serie IV · Tomo LXXV (1967)

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI EDITORE
1967

MAGARI, ROBERTO
1967
Annali di Matematica pura ed applicata
(IV), Vol. LXXV, pp. 277-312

Su una classe equazionale di algebre (*).

Nota di ROBERTO MAGARI (Firenze)

Sunto. - *Si studiano certe classi equazionali di algebre, comprendenti in particolare le algebre di Post.*

Premessa. - Sia $A = < \mathfrak{A}, F >$ una struttura algebrica. Precisamente sia $\mathfrak{A}$ un insieme non vuoto e F un insieme di operazioni finitarie (eventualmente infinito), definite in $\mathfrak{A}$.

A partire da A è possibile definire una classe equazionale [1] di strutture algebriche nel modo seguente. Sia I l'insieme di tutte le identità valide in A (il concetto sarà precisato in modo formale nel seguito) e consideriamo tutti quei sistemi $B = < \mathfrak{B}, G, \sigma >$ in cui:

$\mathfrak{B}$ è un insieme non vuoto,

G è un insieme di operazioni finitarie definite in $\mathfrak{B}$,

σ è una suriezione da F a G che porta funzioni a n argomenti in funzioni a n argomenti,

salvo a considerare le immagini in σ degli elementi di F, tutte le identità appartenenti a I valgono in B.

La classe, K_A, di questi sistemi è ovviamente equazionale e $\bar{A} = < \mathfrak{A}, F, j >$ (dove j è l'applicazione identica di F su F) appartiene a K_A.

È ben noto che una classe è equazionale se e solo se è chiusa rispetto ai prodotti diretti, all'operazione di passaggio da un'algebra a una sua sottoalgebra e all'operazione di passaggio da un'algebra a una sua immagine omomorfa [2].

Ne segue in particolare che ogni prodotto sottodiretto [3] di algebre isomorfe ad A appartiene a K_A. Inversamente un'analisi dei più comuni problemi di «rappresentazione» porta a porre il seguente problema:

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematici del C.N.R. (per l'anno 1965-'66).

(1) Cfr. [7].

(2) Cfr. ad esempio BIRKHOFF [1].

(3) Un'algebra A si dice *prodotto sottodiretto* di una data famiglia $\mathfrak{F}$ di algebre (ad essa « simili ») se è (isomorfa a) una sottoalgebra del prodotto diretto Δ della famiglia $\mathfrak{F}$ e le restrizioni ad A degli epimorfismi canonici di Δ sui vari fattori sono ancora epimorfismi.

(°) *È ogni algebra* (*non «degenere», cioè con* σ *biiettiva*) *di* K_A *prodotto sottodiretto di algebre isomorfe ad* $\bar{A}$*?*.

In generale la risposta è negativa (un esempio sarà dato nel corso di questo lavoro) ma mi sembra assai interessante determinare condizioni su A affinchè il problema abbia risposta positiva.

In questo lavoro non affronto il problema in tutta la sua generalità ma limitatamente al caso che F sia l'insieme di tutte le operazioni binarie definibili in $\mathfrak{A}$ (si vede facilmente che ciò è equivalente a supporre che F sia addirittura l'insieme di tutte le operazioni finitarie definibili in $\mathfrak{A}$). In questo modo si ritrova per $\alpha = \text{Card}\, \mathfrak{A} = 2$ la classe delle *algebre di Boole*, per le quali il ben noto teorema di rappresentazione dà risposta a (°).

Per α finito si ritrovano in sostanza le *algebre di Post* (Cfr. P.C. ROSENBLOOM [10]) mentre per α infinito si trovano classi che non mi risulta siano state finora studiate. Sono state studiate certe generalizzazioni delle algebre di POST (Cfr. [3], [4]) che non coincidono però con quelle qui introdotte (4).

I casi di α finito e di α infinito vengono, salvo negli ultimi due paragrafi, trattati simultaneamente.

Diversi motivi rendono opportuno l'uso di metodi metamatematici, la considerazione cioè, accanto alle classi studiate, di un linguaggio formalizzato capace di essere «interpretato» sulle strutture considerate. (Si può beninteso, in luogo di un tale linguaggio, considerare una opportuna struttura «libera» e in luogo delle «interpretazioni» certi omomorfismi da questa struttura alle strutture considerate: si tratta di una inessenziale differenza nella terminologia) (5).

Precisamente:

1) – nelle varie dimostrazioni è essenziale poter usare concetti come «identità» in modo tecnicamente preciso: la definizione data sopra della classe K_A è, credo, chiara anche se il concetto di identità non è ben definito, ma diviene impossibile dimostrare qualcosa su K_A senza una rigorosa definizione.

2) – Mentre nel caso che α sia finito è possibile esprimere tutte le operazioni di F mediante due o addirittura una fra esse e ridurre le identità di I a un insieme finito in modo che le altre ne siano deducibili (è possibile

---

(4) Le «moolean algebras» introdotte in [3] sono dotate di un numero finito di operazioni e queste permettono di definire al più per composizione un'infinità numerabile di operazioni mentre, per α infinito, le algebre qui studiate sono dotate di un'infinità più che numerabile di operazioni. Le «generalized Post algebras» introdotte in [4] sono connesse invece con gli α-campi introdotti nel n. 2.

(5) Per l'uso di questa seconda tecnica cfr. ad esempio CHEVALLEY [5] cap. IV n. 5. La prima tecnica è di uso consueto in teoria dei modelli.

insomma assiomatizzare finitamente K_A) ciò è impossibile per α infinito, perchè è $\alpha^{\alpha^2} > \aleph_0$.

Anche nel caso finito una trattazione che evita di privilegiare questa o quella operazione mi sembra comunque più trasparente (anche se il formalismo può a tutta prima dar fastidio) e in definitiva più economica.

3) - Il metodo costringe a definire certi concetti in modo tale da mettere in luce alcuni loro aspetti indipendenti dalla particolare classe di strutture considerata.

Ad esempio il concetto di w-ideale (def. 21) chiarisce credo, i motivi per cui si chiede, di solito, che un ideale sia «chiuso» rispetto a certe operazioni e «permesso» rispetto a certe altre (questi motivi sono ben chiari, naturalmente, a tutti gli studiosi di algebra, ma non mi sembra inutile che la definizione li renda trasparenti).

Dato che le varie classi di algebre che vengono introdotte mi sembrano avere qualche interesse ne ho esteso lo studio al di là di quanto possa servire per la risposta al problema (°), dando i concetti e i risultati basilari per lo sviluppo di una teoria generale.

Il problema (°) ammette, nel caso esaminato in questo lavoro, nel caso cioè che sia $F = \mathfrak{A}^{\mathfrak{A}^2}$, la seguente semplice risposta:

Condizione necessaria e sufficiente perchè K_A sia «rappresentabile» (perchè cioè ogni algebra non degenere di K_A sia isomorfa a un prodotto sottodiretto di algebre isomorfe ad A), è che $\mathfrak{A}$ sia finito.

Il fatto che, per α finito, K_A sia rappresentabile è, in sostanza, il già noto teorema da rappresentazione per le algebre di POST (Cfr. [6] e [13]) di cui qui viene data una nuova dimostrazione nella forma più adatta a successive generalizzazioni (+).

1. - Una presentazione delle algebre di Boole.

Allo scopo di illustrare quanto verrà fatto in seguito ritengo utile dare una presentazione un po' inconsueta delle algebre di BOOLE, nella linea indicata nella premessa, ma rimanendo ancora a un livello scarsamente rigoroso.

Sia $W = \{0, 1\}$ un insieme di due elementi e siano $f_1, f_2, \ldots, f_{16}$ le 16 «funzioni verità» ossia gli elementi di W^{W^2}.

Sia poi I l'insieme di tutte le identità che si possono scrivere usufruendo delle f_i e di variabili e che risultano valide in W [6].

(+) (aggiunto in bozza) Cfr. anche A. L. FOSTER, *An existence theorem for functionally complete universal algebras*, Math. Zeitschr, 71 (1959) e lavori ivi citati, in cui si sviluppa *per il caso che α sia finito* una trattazione analoga alla presente.

[6] Nella trattazione successiva si preciserà questo concetto ricorrendo, come già accen-

Si possono allora definire, senza discostarsi essenzialmente dai concetti consueti, il concetto di *algebra di Boole* e il concetto di *campo di insiemi* nel modo seguente.

DEF. 1. - *Si dirà algebra di Boole* (7) *ogni sistema* $A = \langle \mathfrak{A}, f'_1, f'_2, \ldots, f'_{16} \rangle$ *in cui*:

(1,1) $\mathfrak{A}$ sia un insieme non vuoto,

(1,2) se $i \neq j$ allora $f'_i \neq f'_j$,

(1,3) ogni identità che si ottenga da una identità di I sostituendo le f'_i alle f_i sia valida in $\mathfrak{A}$.

Per comodità si possono, quando non vi sia possibilità di equivoci, identificare le f_i con le f'_i.

Sia $w \in W$ e $f_w \in W^{W^2}$ sia la funzione costante di valore w.

Allora vale in W l'identità:

$$f_w(v_1, v_2) = f_w(v_3, v_4)$$

e perciò in $\mathfrak{A}$ l'identità

$$f'_w(x_1, x_2) = f'_w(x_3, x_4)$$

cioè anche la f'_w risulta costante. Si può perciò definire una applicazione ρ di W in $\mathfrak{A}$ ponendo:

$$\rho w = f'_w(a, b)$$

(dove a, b sono due qualsiasi elementi di $\mathfrak{A}$).

È facile vedere che la ρ risulta iniettiva e dimostrare altre banali proprietà che permettono l'abuso di linguaggio consistente nell'identificare W con $\rho(W)$.

Va da sè che per molti usi è preferibile la trattazione ordinaria (cfr. ad esempio R. SIKORSKI [9]) che individua in $F = \{f_i\}_{1 \leq i \leq 16}$ un sottoinsieme a partire dagli elementi del quale le altre funzioni si possono introdurre con opportune definizioni, e in I un sottoinsieme finito a partire dagli elementi del quale le altre identità sono deducibili. In vista di una generalizzazione (specialmente in vista del caso che W sia infinito) è preferibile tuttavia abbandonare queste semplificazioni.

Sulla stessa linea conviene alterare la consueta definizione di *campo di insiemi* mediante le seguenti:

---

nato, ad un calcolo dei predicati del primo ordine. In questo paragrafo introduttivo preferisco non appesantire la trattazione.

(7) La definizione è data in modo da escludere l'algebra degenere; si otterrebbe anche il caso degenere trascurando la condizione (1, 2)

DEF. 2. - Si dirà *campo completo di insiemi* ogni sistema $C = < S, \mathcal{C}, f'_1, f'_2, \ldots, f'_{16} >$ in cui:

(2,1) S sia un insieme non vuoto,

(2,2) $\mathcal{C} = W^S$

(2,3) f'_i è definito da:

$$f'_i(p, q)x = f_i(px, qx) \qquad (p, q \in \mathcal{C};\ x \in S) \tag{2,31}$$

DEF. 3. - *Si dirà campo di insiemi ogni sistema* $C = < S, \mathcal{C}, f''_1, f''_2, \ldots, f''_{16} >$ in cui:

(3,1) S sia un insieme non vuoto,

(3,2) $\mathcal{C}$ sia un sottoinsieme di W^S stabile rispetto alle f'_i definite dalla (2,31).

(3,3) f''_i sia la restrizione della f'_i definita dalla (2,31) a $\mathcal{C}$.

Si verifica senza difficoltà che se $C = < S, \mathcal{C}, f'_1, f'_2, \ldots, f'_{16} >$ è un campo di insiemi, allora $A = < \mathcal{C}, f'_1, f'_2, \ldots, f'_{16} >$ è un'algebra di BOOLE.

Le definizioni 2 e 3 differiscono da quelle classiche, oltre che per quanto si è già esaminato a proposito della def. 1, unicamente per il fatto banale che in luogo dei sottoinsiemi di S si considerano le loro funzioni caratteristiche ([8]).

I passi da compiere a questo punto in vista della dimostrazione del teorema di rappresentazione di M. H. STONE ([12]) sono ben noti. Mi limito a suggerire, sempre in vista della successiva generalizzazione, le seguenti modifiche alla trattazione dei concetti di ideale e di filtro.

DEF. 4. - *Sia* $w \in W$ *e sia* $A = < \mathfrak{A}, f'_1, f'_2, \ldots, f'_{16} >$ *un'algebra di Boole. Si dirà che un sottoinsieme* $\mathfrak{I}$ *di* $\mathfrak{A}$ *è un w-ideale* ([9]) *se per ogni identità del*

([8]) Parlando imprecisamente si può « pensare » un elemento di un campo di sottoinsiemi di un insieme S:

a) appunto come sottoinsieme di S,

b) come elemento di W^S

c) come « bipartizione ordinata di S » ossia come una coppia ordinata formata da un sottoinsieme di S e dal suo complementare.

Nel seguito, quando si affronterà il caso Card. $W > 2$ questo banale esercizio di immaginazione avrà una maggiore utilità.

([9]) Gli « ideali » (« filtri ») della terminologia consueta saranno gli « 0-ideali » (« 1-ideali »).

tipo:

$$\psi[f_{i_1}, f_{i_2}, \ldots, f_{i_k}; f_w^{(1)}, f_w^{(2)}, \ldots, f_w^{(h)}; v_1, v_2, \ldots, v_l] = f_w(v_{l+1}, v_{l+2})\ (^{10})$$

valida in W, si ha, quali che siano $x_1, x_2, \ldots, x_l \in \mathfrak{A}$ e $u_1, u_2, \ldots, u_h \in \mathfrak{J}$:

$$\psi[f'_{i_1}, f'_{i_2}, \ldots, f'_{i_k}; u_1, u_2, \ldots, u_h; v_1, v_2, \ldots, v_l] \in \mathfrak{J}.$$

Si riconoscerà in questa definizione un'ovvia generalizzazione della tecnica consueta per definire gli ideali in un algebra di Boole o più in generale in un anello. «Grosso modo» si può dire che la distinzione fra le u_i e le v_i corrisponde alla richiesta consueta che $\mathfrak{J}$ sia «chiuso» rispetto a certe operazioni e «permesso» rispetto a certe altre. Ad esempio il fatto che un ideale debba essere «permesso» rispetto al prodotto booleano segue, per la def. 4, dal fatto che:

$$0 \cdot v = 0$$

è un' identità in W, e il fatto che esso debba essere chiuso rispetto alla «somma» booleana segue dal fatto che in W vale l' identità:

$$0 + 0 = 0.$$

Naturalmente, come è ben noto, queste due condizioni bastano ad assicurare che $\mathfrak{J}$ sia un ideale nel caso delle algebre di Boole.

2. - Algebre plurivalutate e pluricampi di insiemi.

Come si sarà notato alcuni concetti (come quello di identità) usati sistematicamente nel precedente abbozzo di trattazione delle algebre di Boole non sono stati trattati con il rigore necessario, cioè con quel tanto di rigore che consente di utilizzarli coerentemente in una dimostrazione.

Per evitare questo inconveniente è opportuno riferirsi a un calcolo dei predicati del primo ordine.

Richiamerò quindi anzitutto elementi di logica dei predicati del primo ordine. La trattazione non si discosta molto dalle altre trattazioni esistenti; ciononostante è utile sia perchè ciò che qui serve è una versione del linguaggio del primo ordine un po' semplificata, sia per introdurre le notazioni più utili per il seguito.

Il linguaggio del primo ordine, $\mathfrak{L}$, che voglio utilizzare può essere così presentato:

([10]) Le $f_w^{(i)}$ stanno per le varie occorrenze della f_w (che assume il valore costante w) Tutta la formulazione è necessariamente assai imprecisa.

DEF. 5. - *Segni elementari* di $\mathfrak{L}$ sono:

le parentesi: [,],

una infinità numerabile di *variabili*: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ (11),

i connettivi: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$,

i quantificatori: $\forall$, $\exists$,

α^{α^2} (dove α sarà un fissato cardinale, $\alpha \geq 1$) simboli funzionali:

$$f,\ g,\ h \ldots f_i,\ g_i,\ h_i,\ \ldots$$

(l'insieme dei simboli funzionali sarà indicato con F),

il segno di identità: $\doteq$,

la virgola: ,

DEF. 6. - *L'insieme T dei termini di $\mathfrak{L}$ è definito per induzione da:*

(4,1) $V \subseteq T$

(4,2) se $f \in F$ e $t_1, t_2 \in T$ allora $f[t_1, t_2] \in T$ (12)

DEF. 7. - *L'insieme $\breve{E}$ delle espressioni atomiche è costituito dalle scritture del tipo* $t_1 \doteq t_2$ dove $t_1, t_2 \in T$ (gli elementi di $\breve{E}$ saranno anche detti «identità» di $\mathfrak{L}$).

DEF. 8. - *L'insieme E delle espressioni è definito induttivamente da:*

(5,1) $\breve{E} \subseteq E$

(5,2) se $\mathcal{G}, \mathcal{F} \in E$ e $x \in V$ allora:

$$\neg[\mathcal{G}] \in E$$
$$[\mathcal{G}] \vee [\mathcal{F}] \in E$$
$$[\mathcal{G}] \wedge [\mathcal{F}] \in E$$
$$[\mathcal{G}] \rightarrow [\mathcal{F}] \in E$$
$$[\mathcal{G}] \leftrightarrow [\mathcal{F}] \in E$$
$$\forall x[\mathcal{G}] \in E$$
$$\exists x[\mathcal{G}] \in E$$

(11) I simboli saranno usati in modo autonimo. Per convenzione si scriverà $x, y, z, \ldots$ in luogo di $x_1, x_2, x_3, \ldots$ e, quando occorra considerare una sequenza di variabili, si scriverà: $x_1, x_2, \ldots, x_k$, in luogo di $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$. L'insieme delle variabili sarà indicato con V.

(12) Come si vede $\mathfrak{L}$ dispone solo di simboli funzionali binari.

DEF. 9. - *Si dirà interpretazione di $\mathfrak{L}$ ogni sistema $< M, \varphi >$ in cui:*

(6,1) M sia un insieme non vuoto,

(6,2) φ sia un'applicazione di F in M^{M^2}.

DEF. 10. - *Sia $\mathfrak{I} = < M, \varphi >$ un'interpretazione e sia $\sigma \in M^V$, si indicherà allora con $\mathfrak{I}_\sigma$ l'applicazione di T in M definita induttivamente da:*

(7,1) se $\boldsymbol{x} \in V$ allora $\mathfrak{I}_\sigma \boldsymbol{x} = \sigma \boldsymbol{x}$

(7,2) se $\boldsymbol{f} \in F$; $t_1, t_2 \in T$, allora $\mathfrak{I}_\sigma \boldsymbol{f}[t_1, t_2] = (\varphi \boldsymbol{f})(\mathfrak{I}_\sigma t_1, \mathfrak{I}_\sigma t_2)$.

DEF. 11. - *Sia $\mathfrak{I} = < M, \varphi >$ un'interpretazione e sia $\sigma \in M^V$*; allora la locuzione « $< \mathfrak{I}, \sigma >$ soddisfa $\mathfrak{E}$ » è definita (per $\mathfrak{E} \in E$) induttivamente nel modo seguente:

(8,1) se $\mathfrak{E}$ è atomica, cioè $\mathfrak{E} = t_1 \doteq t_2$ con $t_1, t_2 \in T$ allora:

(8,11) $< \mathfrak{I}, \sigma >$ soddisfa $\mathfrak{E}$ se e solo se $\mathfrak{I}_\sigma t_1 = \mathfrak{I}_\sigma t_2$

(8,2) se $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F} \in E$ e $\boldsymbol{x} \in V$ allora:

$< \mathfrak{I}, \sigma >$ soddisfa $\neg[\mathfrak{E}]$ se e solo se $< \mathfrak{I}, \sigma >$ non soddisfa $\mathfrak{E}$,

$< \mathfrak{I}, \sigma >$ soddisfa $[\mathfrak{E}] \vee [\mathfrak{F}]$ se e solo se $< \mathfrak{I}, \sigma >$ soddisfa una almeno delle espressioni $[\mathfrak{E}]$, $[\mathfrak{F}]$,

$< \mathfrak{I}, \sigma >$ soddisfa $[\mathfrak{E}] \wedge [\mathfrak{F}]$ se e solo se $< \mathfrak{I}, \sigma >$ soddisfa sia $\mathfrak{E}$ che $\mathfrak{F}$,

$< \mathfrak{I}, \sigma >$ soddisfa $[\mathfrak{E}] \rightarrow [\mathfrak{F}]$ se e solo se $< \mathfrak{I}, \sigma >$ soddisfa $[\mathfrak{F}] \vee [\neg[\mathfrak{E}]]$,

$< \mathfrak{I}, \sigma >$ soddisfa $[\mathfrak{E}] \leftrightarrow [\mathfrak{F}]$ se e solo se $< \mathfrak{I}, \sigma >$ soddisfa $[[\mathfrak{E}] \rightarrow [\mathfrak{F}]] \wedge [[\mathfrak{F}] \rightarrow [\mathfrak{E}]]$

$< \mathfrak{I}, \sigma >$ soddisfa $\forall \boldsymbol{x}[\mathfrak{E}]$ se e solo se per ogni $\tau \in M^V$ che coincida con σ su $V \dot{-} \{\boldsymbol{x}\}$, $< \mathfrak{I}, \tau >$ soddisfa $\mathfrak{E}$.

$< \mathfrak{I}, \sigma >$ soddisfa $\exists \boldsymbol{x}[\mathfrak{E}]$ se e solo se per almeno un $\tau \in M^V$ che coincida con σ su $V - \{\boldsymbol{x}\}$, $< \mathfrak{I}, \tau >$ soddisfa $\mathfrak{E}$.

DEF. 12. - *Se $\mathfrak{T}$ è un insieme di espressioni e $\mathfrak{I} = < M, \varphi >$ è un'interpretazione, si dice che « $\mathfrak{I}$ è un modello di $\mathfrak{T}$ » se e solo se:*

per ogni $\mathfrak{E} \in \mathfrak{T}$ e per ogni $\sigma \in M^V$ si ha: $< \mathfrak{I}, \sigma >$ soddisfa $\mathfrak{E}$.

Tralascio la definizione di alcuni concetti ben noti in logica, come quello di occorrenza (libera o vincolata) di una variabile, di espressione chiusa, di chiusura universale di un'espressione, etc. per i quali rimando a un qualunque testo istituzionale di logica ([13]).

Una maggiore attenzione deve essere invece dedicata al concetto di «sostituzione». Si tratta ancora di un concetto abbondantemente trattato nei testi istituzionali ma tecnicamente delicato e per cui mi occorre scegliere notazioni adatte per il seguito.

Siano $f, g \in F$; $x, y \in V$: con i simboli $\frac{f}{g}$, $\frac{x}{y}$ si indicheranno le applicazioni di T in T («sostituzioni» di g con f e di y con x rispettivamente) definite per induzione da:

$$\frac{f}{g} z = z \qquad \frac{x}{y} z = \begin{cases} z & \text{se} \quad y \neq z \\ x & \text{se} \quad y = z \end{cases} \qquad (z \in V)$$

$$\frac{f}{g} h[t_1, t_2] = \begin{cases} h\left[\frac{f}{g} t_1, \frac{f}{g} t_2\right] & \text{se} \quad h \neq g \\ f\left[\frac{f}{g} t_1, \frac{f}{g} t_2\right] & \text{se} \quad h = g \end{cases} \qquad \frac{x}{y} h[t_1, t_2] = h\left[\frac{x}{y} t_1, \frac{x}{y} t_2\right]$$

$$(h \in F;\ t_1, t_2 \in T)$$

Sia ora λ una applicazione da $F^r \times V^s$ a T (r, s numeri naturali).

Per evitare confusioni si dirà che la λ è un *funzionale* (o un r–s–funzionale) e il suo valore su un sistema $f_1, f_2, \ldots, f_r;\ x_1, x_2, \ldots, x_s$, si indicherà con $\lambda(f_1, f_2, \ldots, f_r;\ x_1, x_2, \ldots, x_s)$. Un r–s–funzionale λ si dirà *lecito* se e solo se quali che siano $f, g \in F$; $x, y \in V$ si ha:

$$\lambda\left(\frac{f}{g} f_1, \frac{f}{g} f_2, \ldots, \frac{f}{g} f_r;\ x_1, x_2, \ldots, x_s\right) = \frac{f}{g} \lambda(f_1, f_2, \ldots, f_r;\ x_1, x_2, \ldots, x_s)$$

$$\lambda\left(f_1, f_2, \ldots, f_r;\ \frac{x}{y} x_1, \frac{x}{y} x_2, \ldots, \frac{x}{y} x_s\right) = \frac{x}{y} \lambda(f_1, f_2, \ldots, f_r;\ x_1, x_2, \ldots, x_s)$$

$$\left(\text{dove} \quad \frac{f}{g} h = \begin{cases} h & \text{se} \quad g \neq h \\ f & \text{se} \quad g = h \end{cases} \qquad (h \in F)\right)$$

Sia ora t un termine e $f_1, f_2, \ldots, f_r;\ x_1, x_2, \ldots, x_s$ siano tutti e soli i simboli funzionali e le variabili occorrenti in t. È facile vedere che esiste uno e un sol funzionale lecito, λ, tale che si abbia:

$$\lambda(f_1, f_2, \ldots, f_r;\ x_1, x_2, \ldots, x_s) = t.$$

([13]) Cfr. in particolare E. MENDELSON [8] e A. ROBINSON [9].

λ si dirà un funzionale (lecito) completo collegato a t.

(L'aggettivo «lecito» sarà d'ora in poi omesso) (ovviamente i funzionali completi collegati a t sono in numero di $r!\, s!$ ma è indifferente la considerazione dell'uno o dell'altro funzionale completo).

Sia λ un r-s-funzionale, M un insieme non vuoto, $g_1, g_2, \ldots, g_r$ elementi di M^{M^2} e $y_1, y_2, \ldots, y_s$ elementi di M. È ovvio allora che cosa si dovrà intendere per $\lambda(g_1, g_2, \ldots, g_r; y_1, y_2, \ldots, y_s)$, ed è anche ovvio che se $\mathfrak{I} = < M, \varphi >$ è un'interpretazione di $\mathfrak{L}$ e $\sigma \in M^V$ si ha:

$$(*)\qquad \mathfrak{I}_\sigma(\lambda(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_r; \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_s)) = \lambda(\varphi\boldsymbol{f}_1, \varphi\boldsymbol{f}_2, \ldots, \varphi\boldsymbol{f}_r; \sigma\boldsymbol{x}_1, \sigma\boldsymbol{x}_2, \ldots, \sigma\boldsymbol{x}_s)\ \text{(14)}$$

Sia ancora t un termine e supponiamo che $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_r; \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_s$ siano al solito tutti e soli i simboli funzionali e le variabili (distinti) che occorrono in t. Ci interesserà talvolta esprimere il risultato della sostituzione in t delle varie occorrenze di una stessa variabile o di uno stesso simbolo funzionale con variabili o simboli funzionali diversi. Si tratti ad esempio della variabile $\boldsymbol{x}_1$. È facile vedere che, supposto che la x_1 abbia h occorrenze e che $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_h$ siano h variabili distinte e diverse da tutte le x_i esiste, a meno di permutazioni sugli indici 1, 2, ..., h uno e un sol termine t' in cui occorrano tutte le $\boldsymbol{y}_i$ e per cui si abbia

$$t = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}_1}\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}_2} \cdots \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}_h} t'$$

È ovvio che se λ è un funzionale completo collegato a t' con

$$\lambda \boldsymbol{f}(_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_r; \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_h; \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \ldots, \boldsymbol{x}_s) = t'$$

si ha:

$$\lambda(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_r; \boldsymbol{x}_1^{(1)}, \boldsymbol{x}_1^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{x}_1^{(h)}; \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \ldots, \boldsymbol{x}_s) = t$$

(gli indici in alto sono usati per comodità ad indicare il numero delle occorrenze).

λ si dirà un funzionale completo sviluppato rispetto a x_1, collegato a t.

Analoga trattazione si può fare per i simboli funzionali.

Nel seguito ovvie proprietà dei funzionali leciti e in particolare dei funzionali completi (eventualmente sviluppati rispetto a un argomento) collegati a un termine saranno usate senza particolari avvertenze.

---

(14) Volendo sostituire quest'ultimo capoverso con una trattazione più rigorosa si può procedere così. Anzitutto si mostra per induzione che comunque si scelgano un'applicazione φ da F a M^{M^2}, una $\sigma \in M^V$ e certi $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_2 \in F$, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_s \in V$ con $\varphi\boldsymbol{f}_i = g_i$, $\sigma\boldsymbol{x}_i = y_i$ si ottiene sempre lo stesso valore per $\mathfrak{I}_\sigma\lambda(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_2; \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_s)$, poi si adotta la (*) come definizione.

Mi preme ricordare qui il seguente risultato valido (per tutti i «linguaggi del primo ordine» e quindi in particolare) per $\mathfrak{L}$:

Teorema di finitezza ([13]). - *Se $\mathcal{T}$ è un'insieme di espressioni di $\mathfrak{L}$ tale che ogni suo sottoinsieme finito ammetta almeno un modello, allora $\mathcal{T}$ ammette almeno un modello.*

Sia ora W un insieme di cardinalità α e sia ρ una biiezione da F a W^{W^2}. Allora $< W, \rho >$ è una interpretazione di $\mathfrak{L}$.

Def. 13 - *Si dirà ora W-ρ-identità ogni identità di $\mathfrak{L}$ che ammetta $< W, \rho >$ come modello (l'insieme delle W-ρ-identità sarà indicato con $I_{W,\rho}$ o semplicemente con I).*

Siamo ora in grado di generalizzare al caso Card $W \geq 2$ le definizioni del n. 1, con un maggior grado di rigore. Poniamo:

Def. 14. - *Si dirà α-algebra ogni sistema $A = < \mathcal{A}, G, \varphi >$ in cui φ sia una iniezione da F a $\mathcal{A}^{\mathcal{A}^2}$, $< \mathcal{A}, \varphi >$ sia un modello di I e $G = \varphi(F)$.*

È ovvio che il concetto di *α-algebra* non dipende in sostanza dall'insieme W scelto (purchè, naturalmente, sia Card $W = \alpha$) ([15]). Se si toglie l'ipotesi che la φ sia iniettiva si ottengono anche le «α-algebre degeneri» che, come facilmente si vede sono i sistemi $< \mathcal{A}, G, \varphi >$ con Card $\mathcal{A} = 1$ e G ridotto all'unico elemento di $\mathcal{A}^{\mathcal{A}^2}$. La classe delle α-algebre (incluse le algebre degeneri ora considerate) è ovviamente equazionale. Nel seguito parlando di α-algebre si sottintenderà sempre «non degeneri».

Def. 15. - *Se* ([16]) $A_1 = < \mathcal{A}_1, G_1, \varphi_1 >$, $A_2 = < \mathcal{A}_2, G_2, \varphi_2 >$ *sono due α-algebre esse si diranno isomorfe se esiste un isomorfismo di A_1 su A_2, ossia una biiezione* φ da $\mathcal{A}_1$ ad $\mathcal{A}_2$ *tale che per l'applicazione* $\tilde{\varphi}$ di G_1 in G_2 *definita da*:

$$(\tilde{\varphi}f)(\varphi x, \varphi y) = \varphi(f(x, y)) \qquad (x, y \in \mathcal{A}_1;\ f \in G_1) \tag{9}$$

(*che risulta iniettiva*), *sia*:

$$\tilde{\varphi}\varphi_1 = \varphi_2 \tag{10}$$

(il che porta, naturalmente, che $\tilde{\varphi}$ sia una biiezione da G_1 a G_2).

Def. 16. - *Se $A = < \mathcal{A}, G, \varphi >$ è una α-algebra si dirà sottoalgebra di A ogni sistema $\bar{A} = < \bar{\mathcal{A}}, \bar{G}, \bar{\varphi} >$* in cui:

([15]) Nel caso di α finito si ritrovano in sostanza le algebre di Post (Cfr. [8], [2], [3], [11]).

([16]) Per comodità dò alcune definizioni di concetti elementari della normale routine algebrica pur potendosi queste ricondurre a definizioni generali esistenti nella letteratura. I concetti elementari di cui è omessa la definizione si devono intendere appunto definiti conformemente alle definizioni generali (per esempio a quelle di N. Bourbaki [2]).

(11,1) $\bar{\mathfrak{A}}$ sia una sottoinsieme non vuoto di $\mathfrak{A}$ chiuso rispetto alle operazioni appartenenti a G,

(11,2) $\bar{G}$ sia l'insieme delle restrizioni ad $\bar{\mathfrak{A}}$ delle operazioni di G,

(11,3) $\bar{\varphi} f = (\varphi f)_{\bar{\mathfrak{A}}}$ $(f \in F)$

(dove $(\varphi f)_{\bar{\mathfrak{A}}}$ indica la restrizione di φf ad $\bar{\mathfrak{A}}$).

È ovvio che per ogni $\bar{\mathfrak{A}}$ soddisfacente alla (11,1) si ha una ed una sola sottoalgebra $< \bar{\mathfrak{A}}, \bar{G}, \bar{\varphi} >$ di A. Per abuso di linguaggio si dirà anche che $\bar{\mathfrak{A}}$ è una sottoalgebra di A e si confonderanno gli elementi di G con le loro restrizioni ad $\bar{\mathfrak{A}}$ e la $\bar{\varphi}$ con la φ.

Si vede facilmente che ogni sottoalgebra di una α-algebra è una α-algebra.

Può essere utile talvolta « pensare » ad una α-algebra come ad una sopraalgebra di $< W, W^{W^2}, \rho >$ (che è ovviamente una α-algebra) [17].

Ciò è giustificato dal seguente:

LEMMA 1. - *Se $A = < \mathfrak{A}, G, \varphi >$ è una α-algebra esiste una sottoalgebra $\bar{A} = < \bar{\mathfrak{A}}, \bar{G}, \bar{\varphi} >$ di A isomorfa a $\boldsymbol{W} = < W, W^{W^2}, \rho >$.*

DIM. - Sia $w \in W$ e indichiamo con f_w la funzione (appartenente a W^{W^2}) costante, di valore w.

Appartiene allora ad I l'identità:

$$(\rho^{-1} f_w)[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] \doteq (\rho^{-1} f_w)[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{t}]$$

ed essendo A una α-algebra si ha allora:

(12) $$(\varphi\rho^{-1} f_w)(x, y) = (\varphi\rho^{-1} f_w)(z, t) \qquad (x, y, z, t \in \mathfrak{A})$$

cioè la $\bar{f}_w = \varphi\rho^{-1} f_w$ è costante su $\mathfrak{A}^2$.

L'applicazione σ di W in $\mathfrak{A}$ che ad ogni $w \in W$ associa l'elemento $\bar{w} = \bar{f}_w(a, b)$ (con $a, b \in \mathfrak{A}$) di $\mathfrak{A}$ col procedimento su esposto è iniettiva.

Da $\sigma w_1 = \sigma w_2$ segue infatti $\varphi\rho^{-1} f_{w_1} = \varphi\rho^{-1} f_{w_2}$ ed essendo la φ e la ρ biiettive, $f_{w_1} = f_{w_2}$ da cui $w_1 = w_2$. Per dimostrare il lemma è ora sufficiente mostrare (Cfr. def. 13 e def. 14) che se per $f \in W^{W^2}$; $x, y, z \in W$ si ha:

(13,1) $$f(x, y) = z$$

allora è

(13,2) $$\bar{f}(\sigma x, \sigma y) = \sigma z \quad \text{(dove si è posto } \bar{f} = \varphi\rho^{-1} f)$$

[17] D'ora in poi si userà per $< W, W^{W^2}, \rho >$ il simbolo $\boldsymbol{W}$.

Ora la (13,1) porta che:

(13,11) $$f(f_x(z_1, z_2), f_y(z_3, z_4)) = f_z(z_5, z_6) \qquad (z_1, z_2, \ldots, z_6 \in W)$$

onde è una W-ρ-identità di $\mathfrak{L}$ la:

$$[(\rho^{-1}f)[(\rho^{-1}f_x)[v_1, v_2], (\rho^{-1}f_y)[v_3, v_4]]] \doteq (\rho^{-1}f_z)[v_5, v_6]$$

e vale perciò la:

(13.12) $$(\varphi\rho^{-1}f)((\varphi\rho^{-1}f_x)(z_1, z_2), (\varphi\rho^{-}f_y)(z_3, z_4)) = \varphi\rho^{-1}f_z(z_5, z_6)$$

e infine la (13,2).

Il lemma è così dimostrato.

Detta $\boldsymbol{W}$-algebra ogni α-algebra di cui $\boldsymbol{W}$ sia sottoalgebra il lemma ammette il seguente enunciato equivalente:

Ogni α-algebra è isomorfa a una opportuna $\boldsymbol{W}$-algebra.

Ciò permetterà di riferirsi spesso alle $\boldsymbol{W}$-algebre anzichè alle α-algebre. Usufruendo degli abusi di linguaggio convenuti si potrà anche, data una $\boldsymbol{W}$-algebra $< \mathfrak{A}, G, \varphi >$, «identificare» la φ con la ρ e G con F.

Possiamo ora passare a definire il concetto di *α-campo di insiemi* (o, brevemente, *α-campo*). Diamo anzitutto la seguente:

DEF. 17. - *Sia* $\overline{\boldsymbol{W}} = < \overline{W}, W^{\overline{W}^2}, \bar{\rho} >$ *una α-algebra isomorfa a* $\boldsymbol{W}$. *Si dirà* $\overline{\boldsymbol{W}}$-campo completo *ogni sistema* $C = < S, \mathfrak{C}, G, \bar{\rho}^* >$ *in cui*:

(14,1) S sia un insieme non vuoto,

(14,2) $\mathfrak{C} = \overline{W}^S$

(14,3) $\bar{\rho}^*$ è l'applicazione (che risulta iniettiva) di F in $\mathfrak{C}^{\mathfrak{C}^2}$ definita da:

(14,31) $$((\bar{\rho}^* f)(p, q))x = (\bar{\rho} f)(px, qx) \qquad (f \in F;\ p, q \in \mathfrak{C};\ x \in S).$$

Si dirà α-campo completo *ogni sistema che sia un* $\overline{\boldsymbol{W}}$*-campo completo per un opportuno* $\overline{\boldsymbol{W}}$ *isomorfo a* $\boldsymbol{W}$.

È evidente che per ogni α-campo completo $C = < S, \mathfrak{C}, G, \bar{\rho}^* >$, il sistema $A = < \mathfrak{C}, G, \bar{\rho}^* >$ (che si dirà *l'astratto* di C) è una α-algebra.

La cosa è del resto conseguenza immediata di un noto risultato metamatematico: infatti l'astratto di un $\overline{\boldsymbol{W}}$-campo completo è una potenza diretta di $\overline{\boldsymbol{W}}$ e la classe delle α-algebre (degeneri o no), essendo equazionale, è chiusa rispetto ai prodotti diretti.

Il concetto di α-campo è ora introducibile mediante la seguente:

DEF. 18. - *Si dirà α-campo ogni sistema* $C = < S, \mathcal{C}, G, \bar{\rho}^* >$ *tale che* $< \mathcal{C}, G, \bar{\rho}^* >$ (*che si dirà l'astratto di* C), *sia una sottoalgebra dell'astratto di un α-campo completo* $\bar{C} = < S, \mathcal{C}, G, \bar{\rho}^* >$.

(In modo analogo si definisce il concetto di $\boldsymbol{W}$-campo).

È ovvio che lo studio degli α-campi può essere limitato a quello dei $\boldsymbol{W}$-campi nel senso che ogni α-campo è isomorfo (tralascio la, facilmente ricostruibile, definizione di isomorfismo di α-campi) a un opportuno $\boldsymbol{W}$-campo.

Avverto che d'ora in poi supporrò $\alpha \geq 2$. È facile vedere che nel caso $\alpha = 1$, $\boldsymbol{W}$ è l'unica $\boldsymbol{W}$-algebra e le 1-algebre sono quindi i banalissimi sistemi $< \mathcal{A}, G, \varphi >$, in cui $\mathcal{A}$ è un insieme ridotto a un solo elemento, a, G si riduce all'unica funzione g definita da $g(a, a) = a$ e φ porta l'unico simbolo funzionale f di $\mathcal{L}$ in g.

3. - Metodi dimostrativi per le $\boldsymbol{W}$-algebre.

Il lemma 1 permette di limitarsi da ora in poi allo studio delle $\boldsymbol{W}$-algebre. Come già detto, per abuso di linguaggio, se $A = < \mathcal{A}, G, \varphi >$ è una $\boldsymbol{W}$-algebra si identificherà G con W^{W^2} e φ con ρ.

Il principale metodo dimostrativo che verrà usato è quello che permette, data un'identità valida in $\boldsymbol{W}$ [18] di asserire che *la stessa* (a meno delle convenzioni linguistiche fatte sopra) identità è valida in A (essendo A una $\boldsymbol{W}$-algebra).

Mi spiego con un esempio: supponiamo che si sia dimostrato che è, per certi $f, g \in W^{W^2}$; $w_1, w_2 \in W$:

$$(15,1) \qquad f(x, g(w_1, y)) = w_2 \qquad (x, y \in W).$$

Si può allora facilmente dimostrare che vale la:

$$(15.2) \qquad f(x, g(w_1, y)) = w_2 \qquad (x, y \in \mathcal{A})$$

(dove $A = < \mathcal{A}, W^{W^2}, \rho >$ è una $\boldsymbol{W}$-algebra), nel modo seguente: la (15,1) si può anche scrivere:

$$(15,11) \qquad f(x, g(f_{w_1}(z, t), y)) = f_{w_2}(u, v) \qquad (x, y, z, t, u, v \in W)$$

([18]) Se $A = < \mathcal{A}, G, \varphi >$ si dirà che un'espressione di $\mathcal{L}$ è « valida » o « vera » in A se essa è vera nell'interpretazione $< \mathcal{A}, \varphi >$.

(dove f_{w_1}, f_{w_2} sono al solito le funzioni costanti in W^2 di valore w_1, w_2 rispettivamente).

Ciò implica che appartiene a I l'espressione:

$$[(\rho^{-1}f)[\boldsymbol{x}, (\rho^{-1}g)[(\rho^{-1}f_{w_1})[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{t}], \boldsymbol{y}]]] \doteq (\rho^{-1}f_{w_2})[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$$

da cui la validità della:

$$(15{,}21) \qquad f(x, g(f_{w_1}(z, t), y)) = f_{w_2}(u, v) \qquad (x, y, z, t, u, v \in \mathfrak{A})$$

e infine della (15,2).

Naturalmente ometterò d'ora in poi questi passaggi.

Per certi scopi, tuttavia il metodo dimostrativo ora accennato non è sufficiente: appare desiderabile poter passare ad esempio dalla validità in $\boldsymbol{W}$ di:

$$\text{« se } f(x, y) = w_1 \text{ allora } g(x, y) = w_2 \qquad (x, y \in W) \text{»}$$

dove $f, g \in W^{W^2}$; $w_1, w_2 \in W$, alla validità dell'analoga proposizione in ogni $\boldsymbol{W}$-algebra.

Allo scopo è opportuno considerare particolari elementi di W^{W^2}.

Per ogni $w \in W$ si fissino:

a) due elementi $f_1^{(w)}$, $\bar{f}_1^{(w)} \in W^{W^2}$ tali che $< W, f_1^{(w)} >$ sia un gruppo abeliano con w elemento neutro e $\bar{f}_1^{(w)}$ sia l'operazione binaria di differenza nel gruppo. Se x, y appartengono a W o più in generale a una data $\boldsymbol{W}$-algebra si scriverà:

$$x + y \quad \text{in luogo di} \quad f_1^{(w)}(x, y)$$

$$x - y \quad \text{in luogo di} \quad \bar{f}_1^{(w)}(x, y)$$

b) un ordine totale su W che ammetta primo e ultimo elemento e in cui il primo elemento sia appunto w (l'ultimo elemento sarà indicato con $\bar{w}$).

Siano inoltre $f_2^{(w)}$, $f_3^{(w)}$, $f_4^{(w)}$ ed $f_5^{(w)}$ gli elementi di W^{W^2} definiti da:

$$\left.\begin{array}{lll}
(16) & f_2^{(w)}(x, y) = \max(x, y) & \text{(nell'ordine fissato),} \\
(17) & f_3^{(w)}(x, y) = \min(x, y) & \text{(nell'ordine fissato),} \\
(18) & f_4^{(w)}(x, y) = \begin{cases} w & \text{se } x \neq w \\ \bar{w} & \text{se } x = w \end{cases} & \\
(19) & f_5^{(w)}(x, y) = \begin{cases} \bar{w} & \text{se } x \neq \bar{w} \\ w & \text{se } x = \bar{w} \end{cases} &
\end{array}\right\} \quad (x, y \in W).$$

Notazioni: $x \vee y$ per $f_2^{(w)}(x, y)$, $x \wedge y$ per $f_3^{(w)}(x, y)$, x' per $f_4(x, y)$, $'x$ per $f_5^{(w)}(x, y)$. [19]

Siano inoltre $\overset{\circ}{w}$, $\underset{\circ}{w}$ le funzioni definite in W^2 da:

$$\left.\begin{array}{ll}(20) & \overset{\circ}{w}(x, y) = \begin{cases} w & \text{se } x \neq w \\ y & \text{se } x = w \end{cases} \\ (21) & \underset{\circ}{w}(x, y) = \begin{cases} y & \text{se } x \neq w \\ w & \text{se } x = w \end{cases}\end{array}\right\} (x, y \in W)$$

Sia ora $A = < \mathfrak{A}, W^{W^2}, \rho >$ una $\boldsymbol{W}$-algebra. Sarà utile dare alcune proprietà delle funzioni introdotte [20]. Si ha:

LEMMA 2. - $< \mathfrak{A}, + >$ *è un gruppo abeliano in cui* w *è l'elemento identico e la differenza di due elementi* x, y *è* $x - y$.

DIM. - La cosa segue immediatamente dal fatto che i gruppi abeliani formano una classe equazionale. Precisamente il lemma equivale all'asserzione che per il sistema $< \mathfrak{A}, +, -, w >$ valgono le identità:

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

$$x + y = y + x$$

$$x + w = x$$

$$(x - y) + y = x$$

e poichè queste identità valgono in $\boldsymbol{W}$ il metodo dimostrativo illustrato all'inizio del paragrafo dà facilmente la loro validità in A.

Dal lemma segue in particolare il seguente:

COR. 1. - $x - y = w$ *se e solo se* $x = y$ [21] $\qquad (x, y \in \mathfrak{A})$.

---

(19) È ovvio che si può trascurare l'indicazione della seconda variabile. Si dimostra facilmente che (non solo in W ma) in qualunque $\boldsymbol{W}$-algebra $f_4^{(W)}$ e $f_5^{(W)}$ sono costanti rispetto alla seconda variabile.

I simboli $+$, $-$, $\vee$, $\wedge$, $'$ saranno affetti da indice quando si voglia esprimere la dipendenza da w.

(20) Altre proprietà, specialmente in connessione con gli ideali, saranno date nel paragrafo successivo.

(21) Enuncio esplicitamente questo banalissimo corollario per l'importanza che assumerà nel seguito: l'introduzione in W di una struttura di gruppo abeliano ha quasi esclusivamente lo scopo di arrivare a un corollario di questo tipo.

LEMMA 3. - $< \mathcal{A}, \vee, \wedge >$ *è un reticolo distributivo dotato di massimo,* $\bar{w}$ *e di minimo,* w.

DIM. - Ovviamente $< W, \vee, \wedge >$ soddisfa le richieste del lemma e queste si traducono tutte mediante opportune identità.

LEMMA 4. - *Valgono in A le:*

$$w'' = w, \quad \bar{w}'' = \bar{w}, \quad ''w = w, \quad ''\bar{w} = \bar{w}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \wedge x' = w, \quad x \vee {'x} = \bar{w} \\ (x \vee y)' = x' \wedge y' \\ '(x \wedge y) = {'x} \vee {'y} \end{array}\right\} \quad (x,\ y \in \mathcal{A})$$

dim. ovvia.

LEMMA 5. - *Si ha in* $\mathcal{A}$:

(22,1) $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n = w$ se e solo se $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = w$

(22,2) $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n = \bar{w}$ se e solo se $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \bar{w}$

(22,3) se $x' = w$ allora $x \neq w$ (*Si noti se* $A = \boldsymbol{W}$ *vale altresì l'implicazione inversa*).

DIM. - Le (22,1) e (22,2) sono ovvie conseguenze del lemma 3, la (22,3) segue immediatamente dal fatto che vale (in $\boldsymbol{W}$ e quindi) in A la $w' = \bar{w}$.

LEMMA 6. - *Se per certi* $x,\ y \in \mathcal{A}$, *è*:

(23) $\underset{\circ}{w}(x,\ y) = y$

allora si ha:

(24) se $x = w$ allora $y = w$

DIM. - Vale (in $\boldsymbol{W}$ e quindi) in A la:

$$\underset{\circ}{w}(w,\ z) = w \qquad (z \in \mathcal{A})$$

e confrontando con la (23) si ha l'asserto.

Si noti che viceversa in $\boldsymbol{W}$ (ma non necessariamente in A) dalla (24) segue la (23).

Prima di procedere a dare altre proprietà delle funzioni considerate sarà opportuno vedere come, usufruendo delle proprietà dimostrate si possa dimostrare la validità in A di certe proposizioni valide in $\boldsymbol{W}$, anche in certi casi in cui tali proposizioni non si presentano come identità.

Vale il seguente:

TEOR. 1. - *Se un' espressione $\mathfrak{E}$ di $\mathfrak{L}$ ha una delle forme:*

(i) $\neg[\mathfrak{F}]$

(ii) $[\mathfrak{F}_1] \wedge [\mathfrak{F}_2] \wedge \ldots \wedge [\mathfrak{F}_n]$ (si scriverà $\wedge\, \mathfrak{F}_i$)

(iii) $[\mathfrak{F}] \to [\mathfrak{G}]$

dove $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ sono espressioni atomiche (si avrà cioè $\mathfrak{F} = t_1 \doteq t_2$, $\mathfrak{G} = \bar{t}_1 \doteq \bar{t}_2$; $\mathfrak{F}_i = t_1^{(i)} \doteq t_1^{(i)}$ con $t_1, t_2, \bar{t}_1, \bar{t}_2$; $t_1^{(i)}, t_1^{(i)}$ termini di $\mathfrak{L}$) ed è vera in $\boldsymbol{W}$, allora $\mathfrak{E}$ è vera in ogni $\boldsymbol{W}$-algebra ([22]).

DIM. - Sia $\mathfrak{E} = \neg[t_1 \doteq t_2]$ del tipo (i) e sia $\mathfrak{E}$ vera in $\boldsymbol{W}$. Ciò significa che, posto $\mathfrak{J} = < W, \rho >$ è, per ogni $\sigma \in W^V$:

$$\mathfrak{J}_\sigma t_1 \neq \mathfrak{J}_\sigma t_2$$

cioè:

$$\mathfrak{J}_\sigma t_1 - \mathfrak{J}_\sigma t_2 \neq w$$

o anche

$$(\mathfrak{J}_\sigma t_1 - \mathfrak{J}_\sigma t_2)' = w$$

Al solito essendo $A = < \mathfrak{A}, W^{W^2}, \rho >$ una qualunque $\boldsymbol{W}$-algebra, ciò porta, posto $\bar{\mathfrak{J}} = < \mathfrak{A}, \rho >$

$$(\bar{\mathfrak{J}}_{\bar\sigma} t_1 - \bar{\mathfrak{J}}_{\bar\sigma} t_2)' = w \qquad \text{(per ogni } \bar\sigma \in \mathfrak{A}^V),$$

e, tenuto conto della (22,3) e del cor. 1, ciò implica che $\mathfrak{E}$ è vera in A.

([22]) Per chiarire il senso di questo teorema occorre tener ben presente che, a norma della def. 12, un'espressione $\mathfrak{E}$ è equivalente a (cioè ammette gli stessi modelli di) la sua chiusura universale, $\forall \mathfrak{E}$. Ciò premesso si noti che $\neg[\mathfrak{F}]$ equivale a $\forall[\neg\mathfrak{F}]$ e non (in generale) a $\neg[\forall[\mathfrak{F}]]$.

Il teor 1 porterà quindi ad esempio che se in $\boldsymbol{W}$ vale la:

$$f(x, y) \neq w \qquad (x, y \in W)$$

vale in ogni $\boldsymbol{W}$-algebra $A = < \mathfrak{A}, W^{W^2}, \rho >$ la

$$f(x, y) \neq w \qquad (x, y \in \mathfrak{A})$$

e non semplicemente che la validità in $\boldsymbol{W}$ della:

$f(x, y) \neq w$ per almeno una coppia x, y di elementi di $\boldsymbol{W}$ implica la validità della stessa proposizione in ogni $\boldsymbol{W}$-algebra, circostanza questa banalmente vera, a norma del Lemma 1.

Se $\mathfrak{S}$ è della forma (ii) la cosa è evidente poichè le varie $\mathfrak{F}_i$ risultano vere in $\boldsymbol{W}$ e quindi in A.

Sia $\mathfrak{S} = [t_1 \doteq t_2] \rightarrow [\bar{t}_1 \doteq \bar{t}_2]$ del tipo (iii) e vera in $\boldsymbol{W}$.

Ciò significa che, per ogni $\sigma \in W^V$ si ha:

$$\text{se} \quad \mathfrak{I}_\sigma t_1 - \mathfrak{I}_\sigma t_2 = w \quad \text{allora} \quad \mathfrak{I}_\sigma \bar{t}_1 - \mathfrak{I}_\sigma \bar{t}_2 = w.$$

da cui (lemma 6, osservazione):

$$\underset{\circ}{w}(\mathfrak{I}_\sigma t_1 - \mathfrak{I}_\sigma t_2,\ \mathfrak{I}_\sigma \bar{t}_1 - \mathfrak{I}_\sigma \bar{t}_2) = \mathfrak{I}_\sigma \bar{t}_1 - \mathfrak{I}_\sigma \bar{t}_2$$

Il solito metodo dimostrativo porta allora che, posto $\mathfrak{I} = \langle \mathfrak{A}, \rho \rangle$, si ha per ogni $\bar{\sigma} \in \mathfrak{A}^V$:

$$\underset{\circ}{w}(\mathfrak{I}_{\bar{\sigma}} t_1 - \mathfrak{I}_{\bar{\sigma}} t_2,\ \mathfrak{I}_{\bar{\sigma}} \bar{t}_1 - \mathfrak{I}_{\bar{\sigma}} \bar{t}_2) = \mathfrak{I}_{\bar{\sigma}} \bar{t}_1 - \mathfrak{I}_{\bar{\sigma}} \bar{t}_2$$

e, tenuto conto del lemma 6 e del cor. 1, ne segue che $\mathfrak{S}$ è vera in A.

Possiamo ora riprendere lo studio delle funzioni introdotte dimostrando che:

LEMMA 7. - *Se $x, y \in \mathfrak{A}$, sono equivalenti le*:

(25,1) $\quad \overset{\circ}{w}(x, y) = w$

(25,2) $\quad \underset{\circ}{w}(x, y) = y$

(25,3) $\quad x' \wedge y = w$

DIM. - Osserviamo anzitutto che il lemma vale per $A = \boldsymbol{W}$; ciascuna delle (25) equivale infatti, in tal caso alla « $y = w$ oppure $x \neq w$ ».

Basta dimostrare la validità in A delle tre implicazioni:

(26,1) $\quad$ se $\overset{\circ}{w}(x, y) = w$ allora $\underset{\circ}{w}(x, y) = y$

(26,2) $\quad$ se $\underset{\circ}{w}(x, y) = y$ allora $x' \wedge y = w$

(26,3) $\quad$ se $x' \wedge y = w$ allora $\overset{\circ}{w}(x, y) = w$.

Poichè queste sono valide in $\boldsymbol{W}$ la cosa è immediata conseguenza del teor. 1 e il lemma è dimostrato.

Sarà utile per il seguito introdurre la relazione binaria $\leq_w$ così definita:

(27) $y \leq_w x$ se e solo se $\mathring{w}(x, y) = w$ (ossia, a norma del lemma 7, $\underset{\circ}{w}(x, y) = y$ o anche $x' \wedge y = w$) (23).

Vale il seguente:

LEMMA 8. - *$\leq_w$ è una relazione di preordine in $\mathfrak{A}$ ed è di equivalenza in $W - \{w\}$. Nel preordine $\leq_w$ w è elemento minimo.*

DIM. - Che $\leq_w$ sia riflessiva segue dal fatto che vale (in $\boldsymbol{W}$ e quindi) in A l'identità:

$$\mathring{w}(x, x) = w$$

La transitività equivale alla validità in A della:

(28) se $\mathring{w}(x, y) = w$ e $\mathring{w}(y, z) = w$ allora $\mathring{w}(x, z) = w$, ossia (lemma 5, (22,1));

(29) se $\mathring{w}(x, y) \vee \mathring{w}(y, z) = w$ allora $\mathring{w}(x, z) = w$.

Questa vale in $\boldsymbol{W}$ come si verifica facilmente, e il teor. 1 porta la sua validità in A.

Che $\leq_w$ sia di equivalenza su $W - \{w\}$ segue subito dalla (20), anzi, quali che siano $w_1, w_2 \in W - \{w\}$, si ha: $w_1 \leq_w w_2$ e $w_2 \leq_w w_1$.

Infine vale (in $\boldsymbol{W}$ e quindi) in A la $\mathring{w}(x, w) = w$ (24). Il lemma è così dimostrato

4. - Omomorfismi, nuclei e ideali.

Si può svolgere abbastanza facilmente la consueta teoria algebrica degli omomorfismi, dei nuclei e degli ideali.

Solo il concetto di ideale presenta qualche difficoltà dovuta alla presenza, nel caso di α infinito, di infinite operazioni nelle nostre strutture. La questione si risolve mediante una generalizzazione dei metodi consueti, permessa da un'analisi della circostanza che le consuete richieste per gli ideali siano di essere «chiusi» rispetto a certe operazioni e «permessi» rispetto a certe altre.

Mi riferirò quasi esclusivamente a $\boldsymbol{W}$-algebre e a $\boldsymbol{W}$-campi; è chiaro che le definizioni e i risultati si estendono immediatamente alle α-algebre e agli α-campi.

---

(23) Nel caso booleano, $\alpha = 2$, la $\leq_w$ viene a coincidere con l'ordinario ordine parziale booleano o col suo opposto.

(24) Si può anche dimostrare che w è *l'unico* elemento minimo. Vale infatti (in W e quindi a norma del teor. 1) in A la;

$$\text{se } \mathring{w}(w, x) = w \text{ allora } x = w.$$

DEF. 19. - *Date due α-algebre $A_1 = < \mathfrak{A}_1, G_1, \varphi_1 >$, $A_2 = < \mathfrak{A}_2, G_2, \varphi_2 >$ si dirà omomorfismo da A_1 a A_2 ogni applicazione φ da $\mathfrak{A}_1$ a $\mathfrak{A}_2$ tale che:*

$$\varphi((\varphi_1 f)(x, y)) = (\varphi_2 f)(\varphi x, \varphi y) \qquad (f \in F;\ x, y \in \mathfrak{A}_1)$$

Si noti che se si tratta di W-algebre la condizione si scrive semplicemente:

$$\varphi f(x, y) = f(\varphi x, \varphi y) \qquad (f \in W^{W^2};\ x, y \in \mathfrak{A}_1)$$

Si useranno nel modo consueto i termini epimorfismo, monomorfismo, etc.
Si ha:

LEMMA 9. - *W non ammette sottoalgebre proprie ed è semplice (non esistono cioè omomorfismi di dominio W che non siano monomorfismi, ad eccezione, naturalmente, dell'omomorfismo improprio quando si considerino, fra le α-algebre, quelle degeneri.). Inoltre W non ammette automorfismi diversi dall'identità.*

DIM. - Sia A una α-algebra e φ un omomorfismo da W ad A. Possiamo supporre che A sia una W-algebra, $A = < \mathfrak{A}, W^{W^2}, \rho >$. Sia $u \in W$ e f_u al solito la funzione costante in W^2 di valore u, siano inoltre a, b due elementi di W. Dev'essere:

$$\varphi u = \varphi(f_u(a, b)) = f_u(\varphi a, \varphi b) = u.$$

Perciò φ è l'identità su W e ne segue il lemma.
Si ha subito:

COR. 2. - *Se φ è un omomorfismo di W-algebre esso è l'identità su W.*

Poniamo ora:

DEF. 20. - *Sia φ un omomorfismo da una W-algebra A_1 a una W-algebra A_2 e w un elemento di W. Si dirà w-nucleo di φ la controimmagine in φ di w.*

Per arrivare alla definizione di ideale consideriamo anzitutto, dato un $w \in W$ l'insieme $I^{(w)}(\subseteq I)$ delle identità di $\mathfrak{L}$, valide in W, della forma:

$$t \doteq (\rho^{-1} f_w)[x, y]$$

f_w essendo al solito la funzione costante di valore w.

Costruiamo ora un nuovo termine $\bar{t}$ sostituendo in t ogni sottotermine del tipo $(\rho^{-1} f_w)[t_1, t_2]$ con una variabile fissata z, diversa da tutte le variabili occorrenti in t. Siano $g_1, g_2, \ldots, g_h$ i simboli funzionali occorrenti in $\bar{t}$ e $x_1, x_2, \ldots, x_s$ le variabili, diverse da z, occorrenti in $\bar{t}$.

Allora sarà possibile trovare un funzionale completo, sviluppato rispetto a z, collegato a t. Per esso sarà:

$$\bar{t} = \lambda(g_1, g_2, g_h; z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(n)}; x_1, x_2, \dots, x_k).$$

Poniamo ora:

DEF. 21. - *Sia* $A = < \mathfrak{A}, W^{W^2}, \rho >$ *una* W*-algebra e* $w \in W$. *Si chiamerà* w*-ideale di* A *ogni sottoinsieme* J di $\mathfrak{A}$ *tale che, per ogni identità* $\mathcal{E}$ *di* $I^{(w)}$ *e quali che siano* $y_1, y_2, \dots, y_n \in J$ *e* $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathfrak{A}$ *sia*:

$$\lambda(\rho g_1, \rho g_2, \dots, \rho g_k; y_1, y_2, \dots, y_n; x_1, x_2, \dots, x_k) \in J$$

(dove λ è il funzionale costruito a partire da $\mathcal{E}$ nel modo indicato sopra).

Una certa complicazione nella def. 21 è dovuta alla necessità di riferirsi ad $\mathfrak{L}$ e soprattutto al fatto che $\mathfrak{L}$ non disponga di simboli di costanti per gli elementi di W. (Credo sia chiaro a questo punto che una loro introduzione in $\mathfrak{L}$, con una conseguente modifica formale del concetto di W-algebra non altererebbe la situazione) [25].

Per illustrare la def. 21 con un esempio, valga, per certi $f, g \in W^{W^2}$ la

$$f(w, g(w, x)) = w \qquad (x \in W)$$

allora in ogni w-ideale J di A dev'essere:

$$\text{se} \quad x \in \mathfrak{A} \quad \text{e} \quad y_1, y_2 \in J \quad \text{allora} \quad f(y_1, g(y_2, x)) \in J.$$

Dobbiamo ora mostrare che sussistono i consueti rapporti fra ideali e omomorfismi, cioè che valgono le proposizioni:

---

(25) Un linguaggio del tipo a cui si allude si può costruire nel modo seguente:

Nella def. 5 si aggiunga: « α simboli di costanti: $a, b, c, \dots, a_i, b_i, c_i, \dots$ (l'insieme dei simboli di costanti sarà indicato con K) ». Nella def. 6 al posto della clausula (4, 1) si legga: « $V \cup K \subseteq T$ ». Si sostituisca alla def. 9 la seguente: « Si dirà interpretazione di $\mathfrak{L}$ ogni sistema $< M, \varphi, k >$ in cui:

M sia un insieme non vuoto

φ sia un'applicazione di F in M^{M^2}

k sia un'applicazione di K in M ».

Si modifichino poi di conseguenza le deff. 10, 11, 12. Infine le deff. 13, 14 e segg. siano modificate a partire dal capoverso « Sia ora W . . » nel modo seguente: « Sia ora W un insieme di cardinalità α, sia ρ una biiezione da F a W^{W^2} e τ una biiezione da K a W... » etc.

Ho evitato di servirmi di questo procedimento perchè in tal modo sarebbe stata richiesta fin dalla definizione di α-algebra la validità del lemma 1, richiesta che, come si è visto, non è necessaria. D'altra parte il lemma 1 stesso giustifica ora l'osservazione fatta nel testo.

LEMMA 10. - *Se $w \in W$, A è una $\boldsymbol{W}$-algebra e φ un omomorfismo di dominio A, allora il w-nucleo di φ è un w-ideale di A.*

PROP. (*). - *Se $w \in W$, A è un $\boldsymbol{W}$-algebra e J un w-ideale proprio di A allora esiste un omomorfismo di dominio A e di w-nucleo J.*

PROP. (**). - *Se φ_1, φ_2 sono due epimorfismi da A a B_1 e da A a B_2 rispettivamente, $w \in W$ e φ_1, φ_2 hanno lo stesso w-nucleo, esiste un isomorfismo φ da B_1 a B_2 con $\varphi\varphi_1 = \varphi_2$.*

Dimostriamo anzitutto il lemma 10.

Si abbia un'identità del tipo precedentemente considerato.

Ciò significa che si ha identicamente in $\boldsymbol{W}$:

$$\lambda(f_1, f_2, \ldots, f_h; w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(n)}; x_1, x_2, \ldots, x_k) = w \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_k \in W).$$

Sia ora J il w-nucleo di φ; quali che siano $y_1, y_2, \ldots, y_n \in J$ e $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathfrak{A}$, è:

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda(f_1, f_2, \ldots, f_h; y_1, y_2, \ldots, y_n; x_1, x_2, \ldots, x_k)) &= {}^{(26)} \\ = \lambda(f_1, f_2, \ldots, f_h; \varphi y_1, \varphi y_2, \ldots, \varphi y_n; \varphi x_1, \varphi x_2, \ldots, \varphi x_k) &= \\ = \lambda(f_1, f_2, \ldots, f_h; w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(n)}; \varphi x_1, \varphi x_2, \ldots, \varphi x_k) &= w\end{aligned}$$

e il lemma è dimostrato.

Dimostrare le propp. (*), (**) si riduce a dimostrare che, data una $\boldsymbol{W}$-algebra A e un suo w-ideale proprio J esiste una e una sola congruenza [27] su A per cui la classe di equivalenza di w sia J. Per questo è opportuno dimostrare alcuni risultati preliminari.

Sia al solito $A = \langle \mathfrak{A}, W^{W^2}, \rho \rangle$ una $\boldsymbol{W}$-algebra, w un elemento di W, J un w-ideale di A e riprendiamo le notazioni del n. 3.

Definiamo in A una relazione binaria R_J ponendo:

(30) xR_Jy se e solo se $x - y \in J$.

Per dimostrare che la R_J è una congruenza per A sono utili i seguenti lemmi.

LEMMA 11. - *$w \in J$.*

DIM. - Vale in $\boldsymbol{W}$ e quindi in A l'identità:

$$f_w(x, y) = w$$

---

(26) La distributività di φ qui applicata si ricava facilmente per induzione sulla costruzione dei termini applicando la definizione di omomorfismo.

(27) Relazione di equivalenza sostitutiva rispetto alle funzioni di W^{W^2}.

da cui:

se $x, y \in \mathfrak{A}$ allora $f_w(x, y) \in J$. Ma è $f_w(x, y) = w$

LEMMA 12. - *$< J, + >$ è un sottogruppo di $< \mathfrak{A}, + >$.*

DIM. - Vale in $\boldsymbol{W}$ l'identità

$$w - w = w$$

dalla quale, tenuto conto della definizione di w-ideale segue:

se $x, y \in J$ allora $x - y \in J$

e, poichè J è, per il lemma 11, non vuoto, il lemma.

LEMMA 13. - *Se $x \in J$ e $y \in \mathfrak{A}$ allora $x \wedge y \in J$.*

DIM. - Vale in $\boldsymbol{W}$ l'identità:

$$w \wedge y = w$$

da cui, per la definizione di w ideale, il lemma.

LEMMA 14. - *Se $x, y \in J$ allora $x \vee y \in J$.*

DIM. - Vale in $\boldsymbol{W}$ l'identità.

$$w \vee w = w$$

da cui, per la definizione di ideale, il lemma.

LEMMA 15. - *Se $x \in J$, $y \in \mathfrak{A}$ e $y \leq_w x$ (cioè $\underset{\circ}{w}(x, y) = y$) allora $y \in J$.*

DIM. - Vale (in $\boldsymbol{W}$ e quindi) in A l'identità:

$$\underset{\circ}{w}(w, y) = w. \tag{31}$$

D'altronde nelle ipotesi del lemma è $x \in J$ e $\underset{\circ}{w}(x, y) = y$ e dalla (31), tenuto conto della definizione di ideale, segue il lemma.

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente:

TEOR. 2 - *La R_J è di congruenza in A e, se J è proprio, le classi di equivalenza degli elementi di W sono distinte. La classe di equivalenza di w è J.*

DIM. - Anzitutto la R_J è di equivalenza, come segue dal fatto che essa è in $< \mathfrak{A}, + >$ la congruenza associata al sottogruppo $< J, + >$.

Da ciò segue anche che in essa la classe di equivalenza di w è J.

Occorre ora dimostrare che, se $f \in W^{W^2}$, si ha:

(32) se $x - \bar{x} \in J$ e $y - \bar{y} \in J$ allora $f(x, y) - f(\bar{x}, \bar{y}) \in J$.

Cominciamo con l'osservare che vale in $\boldsymbol{W}$ (anzi in qualunque $\boldsymbol{W}$-algebra) la:

(33) se $x - \bar{x} = w$ e $y - \bar{y} = w$ allora $f(x, y) - f(\bar{x}, \bar{y}) = w$

ossia (lemma 5):

(34) se $(x - \bar{x}) \vee (y - \bar{y}) = w$ allora $f(x, y) - f(\bar{x}, \bar{y}) = w$

da cui anche (in $\boldsymbol{W}$):

(35) $\mathring{w}((x - \bar{x}) \vee (y - y), f(x, y)) - f(\bar{x}, \bar{y})) = w$

che varrà altresì in A.

È cioè, quali che siano $x, \bar{x}, y, \bar{y} \in \mathfrak{A}$;

$$f(x, y) - f(\bar{x}, \bar{y}) \leq_w (x - \bar{x}) \vee (y - \bar{y})$$

e, tenuto conto dei lemmi 14 e 15, ne segue la (32).

Resta da dimostrare che, se J è proprio e $w_1, w_2 \in W$; $w_1 \neq w_2$ allora è $w_1 - w_2 \notin J$. Poichè $w_1 - w_2 \in W$ (W, essendo una sottoalgebra, è certo un sottogruppo di $< \mathfrak{A}, + >$) e $w_1 - w_2 \neq w$ (poichè $w_1 \neq w_2$) ci basterà dimostrare che nessun elemento $\tilde{w} \in W$ diverso da w appartiene a J. Sia per assurdo $\tilde{w} \in J$.

Vale (in $\boldsymbol{W}$ e quindi) in A l'identità: $\mathring{w}(\tilde{w}, x) = x$ e allora dal lemma 15 segue $x \in J$ per ogni $x \in \mathfrak{A}$, contro l'ipotesi che J sia proprio.

Il teorema è così dimostrato.

Come ovvia conseguenza si ha:

COR. 3. - *Ogni w-ideale proprio è w-nucleo di almeno un omomorfismo (ossia la prop.* (*)).

Chè poi la R_J sia l'unica congruenza associata a J (tale cioè che J sia la classe di equivalenza in R_J di w) segue dal fatto che ogni congruenza associata a J deve in particolare essere una congruenza di $< \mathfrak{A}, + >$ associata a $< J, + >$.

Si ha così:

COR. 4. - *Esiste, a meno di isomorfismi dell'algebra immagine, un solo epimorfismo di dato w-nucleo (ossia la prop.* (**)).

5. - **Ulteriori proprietà dei w-ideali.**

Sia $A = < \mathfrak{A}, W^{W^2}, \rho >$ una W-algebra, w un elemento di W, $\mathfrak{J}$ l'insieme dei w-ideali di A e $\bar{\mathfrak{J}}$ l'insieme dei w-ideali *propri* di A.

È facile vedere che, a somiglianza di quanto avviene nelle classi di strutture più consuete, si ha:

LEMMA 16. - $< \mathfrak{J}, \subseteq >$ *è un reticolo completo, il cui massimo è* $\mathfrak{A}$ *e il cui minimo è* $\{ w \}$. *Il massimo confine inferiore di una famiglia di elementi di* $\mathfrak{J}$ *coincide con la loro intersezione insiemistica.*

DIM. - Tutto si riduce a dimostrare che:

(36) Se $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{J}$ allora $\bigcap_{J \in \mathfrak{F}} J \in \mathfrak{J}$

(37) $\{ w \} \in \mathfrak{J}$

(38) $\mathfrak{A} \in \mathfrak{J}$.

La (38) è un'ovvia conseguenza della def. 21.

La (37) segue dal fatto che w è il w-nucleo dell'isomorfismo identico da A ad A e dal lemma 10.

La (36) è anch'essa un'ovvia conseguenza della def. 21.

Tralascio la dimostrazione del seguente ovvio:

LEMMA 17. - *Se* φ *è un epimorfismo da* A *a una* W*-algebra* $B = <\mathfrak{B}, W^{W^2}, \rho>$ *allora ogni* w*-ideale di* A *ha per immagine un* w*-ideale di* B *e ogni* w*-ideale di* B *ha per controimmagine un* w*-ideale di* A.

Il lemma 16 ci autorizza ad usare nel senso consueto le locuzioni «il w-ideale generato da un dato sottoinsieme $M \subseteq \mathfrak{A}$» e «w-ideale principale». Si userà anche la locuzione «w-ideale massimale» nel senso di «elemento massimale in $< \bar{\mathfrak{J}}, \subseteq >$».

È importante per il seguito semplificare il poco maneggevole strumento costituito dalla def. 21 e analizzare la struttura del w-ideale generato da un dato $M \subseteq \mathfrak{A}$.

Allo scopo osserviamo anzitutto che le uniche proprietà di J usate nella dimostrazione del teor. 2 e quindi del successivo cor. 3 sono le seguenti:

$$\left.\begin{array}{ll}
(39,1) & J \text{ non è vuoto} \\
(39,2) & \text{se } x, y \in J \text{ allora } x - y \in J. \\
(39,3) & \text{se } x, y \in J \text{ allora } x \vee y \in J, \\
(39,4) & \text{se } x \in J \text{ e } y \leq_w x \text{ allora } y \in J \\
(39,5) & J \cap W = \{ w \}
\end{array}\right\} (x, y \in \mathfrak{A})$$

Ne segue:

LEMMA 18. - *Se $J \subseteq \mathfrak{A}$ soddisfa le* (39), *J è un w-ideale.*

DIM. - Per l'osservazione precedente J risulta w-nucleo di un omomorfismo e il risultato segue dal lemma 10.

Il lemma si può migliorare mediante il seguente:

TEOR. 3. - *Se $J \subseteq \mathfrak{A}$, sono equivalenti le seguenti condizioni*:

(i) J è un w-ideale

(ii) valgono le (39,1), (39,3), (39,4).

DIM. - Che la (i) implichi la (ii) è già stato provato nel n. 4 (lemmi 11, 14, 15). Valga la (ii) e siano $x, y \in J$.

Vale (in $\boldsymbol{W}$ e quindi) in A, l'identità:

$$\underset{\circ}{w}(x \vee y,\ x - y) = x - y \qquad (x, y \in \mathfrak{A}) \tag{40}$$

(la validità della (40) in $\boldsymbol{W}$ segue dal fatto che se $x \vee y = w$ allora $x = y = w$ e perciò $x - y = w$), è quindi:

$$x - y \leq_w x \vee y \qquad (x, y \in \mathfrak{A}) \tag{41}$$

e applicando le (39,3), (39,4) si ottiene la (39,2).

Se ora è $J = \mathfrak{A}$, J è certo un w-ideale, supponiamo quindi $J \neq \mathfrak{A}$. Ragionando come nell'ultima parte del teor. 2 si ottiene la (39,5) e per il lemma 18, J risulta un w-ideale.

Il teorema è così dimostrato.

Vale il seguente:

TEOR. 4. - *Il w-ideale generato da un insieme non vuoto $M \subseteq \mathfrak{A}$ è costituito da tutti e soli gli elementi y per cui è*:

$$y \leq_w x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n, \quad \text{per certi} \quad x_1, x_2, \ldots, x_n \in M. \tag{42}$$

(*Se poi M è vuoto genera ovviamente il w-ideale* $\{w\}$).

DIM. - Sia J_M il w-ideale generato da M e $\bar{J}_M$ l'insieme degli elementi di cui nell'enunciato. Che sia $J_M \subseteq J_M$ segue dal fatto che la (i) del teor. 3 implica la (ii).

Basterà ora dimostrare che $\bar{J}_M$ è un w-ideale (che sia $M \subseteq \bar{J}_M$ è ovvio).

Poichè M è per ipotesi non vuoto vale la (39,1) e (teor. 3) basterà dimostrare le (39,3), (39,4).

Sia y_1, $y_2 \in \bar{J}_M$. Ciò significa che è $y_1 \leq_w x_1$, $y_2 \leq_w x_2$ con:

$$x_1 = x_1^1 \vee x_1^2 \vee ... \vee x_1^{n_1}$$

$$x_2 = x_2^1 \vee x_2^2 \vee ... \vee x_2^{n_2}$$

per certi $x_1^j \in M$.

Ma le $y_1 \leq_w x_1$, $y_2 \leq_w x_2$ si scrivono ((27) e lemma 7):

$$x_1' \wedge y_1 = w$$

$$x_2' \wedge y_2 = w.$$

Ora, posto $\bar{x} = x_1 \vee x_2$ si ha (lemma 4):

$$\bar{x}' \wedge y_1 = (x_1 \vee x_2)' \wedge y_1 = x_1' \wedge x_2' \wedge y_1 = x_2' \wedge w = w$$

e analogamente:

$$\bar{x}' \wedge y_2 = w.$$

Da queste segue (lemma 3):

$$\bar{x}' \wedge (y_1 \vee y_2) = (\bar{x}' \wedge y_1) \vee (\bar{x}' \wedge y_2) = w \vee w = w$$

ossia $y_1 \vee y_2 \leq_w \bar{x}$ da cui $y_1 \vee y_2 \in \bar{J}_M$. Resta così dimostrata la (39,3).

La (39,4) segue subito dal fatto che $\leq_w$ è di preordine.

Il teorema è così dimostrato.

Ne segue in particolare:

COR. 5. - *Il w-ideale principale generato da un $a \in \mathfrak{A}$ è* $\{y : y \leq_w a\}$.

Vale il seguente:

LEMMA 19. - *Ogni w-ideale proprio di A è estendibile ad almeno un w-ideale massimale.*

DIM. - Basterà dimostrare che $< \mathfrak{J}, \subseteq >$ è induttivo, il lemma seguirà poi dal lemma di ZORN.

Sia $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{J}$ e $< \mathfrak{F}, \subseteq >$ sia totalmente ordinato. Sia poi $J = \bigcup_{L \in \mathfrak{F}} L$.

Dal teor. 2 segue che, se L è un w-ideale proprio, $W \cap L = \{w\}$.

Poichè tutti gli elementi di $\mathfrak{F}$ sono propri si avrà allora $W \cap J = \{w\}$ e perciò anche J risulterà proprio.

Che J sia un ideale segue subito dal teor. 3.
Il lemma è così dimostrato.

6. - Teoria della rappresentazione. Rappresentabilità delle W-algebre nel caso di α finito.

Come si è già osservato le W-algebre, nel caso di α finito, sono le ben note algebre di POST e per queste esistono varie dimostrazioni di un teorema di rappresentazione (Cfr. [6], [13]).

Tuttavia potrà essere utile ritrovare tale teorema nel quadro di questo lavoro anche perchè risultino più chiari i motivi della non rappresentabilità (in generale) delle W-algebre nel caso di α infinito (che sarà mostrata nel paragrafo successivo).

Poniamo anzitutto:

DEF. 22. - *Si dirà rappresentazione di una W-algebra (o più in generale di una α-algebra) A, ogni isomorfismo di A sull'astratto di un opportuno W-campo di insiemi.*

Voglio dimostrare in questo numero che se α è finito ogni W-algebra è rappresentabile. *Supporrò quindi da ora e per tutto questo paragrafo che α sia finito.*

Gli elementi di W saranno indicati con $w_0, w_1, \ldots, w_{\alpha-1}$.

Si supporrà che in corrispondenza ad ogni w_i si siano fissate delle operazioni e un ordine totale su W come in 3 e si useranno gli stessi simboli affetti dall'indice i.

Converrà anche conservare i simboli non affetti da indice in corrispondenza ad un $w \in W$ fissato.

Vale il seguente:

TEOR. 5. - *Se $A = <\mathcal{A}, W^{W^2}, \rho>$ è una W-algebra, v un elemento di W e a un elemento di $\mathcal{A}$ diverso da v allora esiste almeno un $u \in W - \{v\}$ per cui lo u-ideale $J_a^{(u)}$ generato da a è proprio.*

DIM. - La cosa è ovvia se $a \in W$, in tal caso infatti si ha $J_a^{(a)} = \{a\}$.

Possiamo quindi supporre ($A \neq W$ e) $a \notin W$. Per comodità supponiamo $v = w_0$.

Sia per assurdo:

$$J_a^{(w_1)} = J_a^{(w_2)} = \ldots = J_a^{(w_{\alpha-1})} = \mathcal{A}.$$

Per il cor. 5 ciò porta:

$$y \leq_i a \qquad (i = 1, 2, \ldots, \alpha - 1;\ y \in \mathcal{A})$$

e in particolare:

$$\bar{w}_i \leq_i a \qquad (i = 1, 2, \dots, \alpha - 1)$$

ossia:

$$\mathring{w}_i(a, \bar{w}_i) = w_i \qquad (i = 1, 2, \dots, \alpha - 1)$$

o anche:

$$\mathring{w}_i(a, \bar{w}_i) - w_i = w \qquad (i = 1, 2, \dots, \alpha - 1)$$

che infine equivale alla:

$$(\mathring{w}_1(a, \bar{w}_1) - w_1) \vee (\mathring{w}_2(a, \bar{w}_2) - w_2) \vee \dots \vee (\mathring{w}_{\alpha-1}(a, \bar{w}_{\alpha-1})) = w. \tag{42}$$

Osserviamo ora che vale in $\boldsymbol{W}$ la:

$$\text{se} \quad x \neq w_0 \quad \text{allora} \quad (\mathring{w}_1(x, \bar{w}_1) - w_1) \vee (\mathring{w}_2(x, \bar{w}_2) - w_2) \vee \dots \vee (\mathring{w}_{\alpha-1}(x, \bar{w}_{\alpha-1}) - w_{\alpha-1}) \neq w \tag{43}$$

infatti per $x = w_i$ si ha:

$$\mathring{w}_i(x, \bar{w}_i) - w_i = \bar{w}_i - w_i \neq w.$$

La (43) equivale d'altronde alla:

$$\text{se} \quad (\mathring{w}_1(x, \bar{w}_1) - w_1) \vee (\mathring{w}_2(x, \bar{w}_2) - w_2) \vee \dots \vee (\mathring{w}_{\alpha-1}(x, w_{\alpha-1}) - w_{\alpha-1}) = w \quad \text{allora} \quad x = w_0 \tag{43'}$$

e il teorema 1 ci assicura cha questa e perciò la (43) stessa vale in A, contro la (42). Il teorema è così dimostrato. Ne derivano i seguenti corollari.

COR. 6. - *Se $A = <\mathfrak{A}, W^{W^2}, \rho>$ è una $\boldsymbol{W}$-algebra e $a \in \mathfrak{A}$ allora esiste almeno un elemento u di W tale che lo u-ideale $J_a^{(u)}$ generato da a è proprio.*

Dim. ovvia.

COR. 7 - *Se $A = <\mathfrak{A}, W^{W^2}, \rho>$ è una $\boldsymbol{W}$-algebra e $a \in \mathfrak{A} - W$ allora esistono almeno due elementi distinti $u, v \in W$ tali che gli ideali $J_a^{(u)}, J_a^{(v)}$ sono propri.*

DIM. - Applicando il cor. 6 (o direttamente il teor. 5) si trova un primo elemento $v \in W$ per cui $J_a^{(v)}$ è proprio. Poichè $a \notin W$ è $a \neq v$ e dal teorema 5 segue che esiste un $u \in W$, $u \neq v$ con $J_a^{(u)}$ proprio.

COR. 8. - *W è l'unica $\boldsymbol{W}$-algebra semplice.*

DIM. - Se $A = < \mathfrak{A}, W^{W^2}, \rho >$ è una $\boldsymbol{W}$-algebra diversa da $\boldsymbol{W}$ esiste almeno un $a \in \mathfrak{A} - W$. Sia u un elemento di W con $J_a^{(u)}$ proprio. Ad $J_a^{(u)}$ appartengono almeno due elementi distinti (a e u) onde esso è il nucleo di un omomorfismo proprio di dominio A.

Si noti che il procedimento dimostrativo seguito risulta inapplicabile per α infinito, per l'impossibilità di scritture infinite analoghe alle (42) e (43).

Ci si potrebbe illudere di aggirare la difficoltà ricorrendo ad un linguaggio più ricco (per esempio con formule infinitamente lunghe) ma, a parte il fatto che ciò comporterebbe una parallela restrizione nella classe delle $\boldsymbol{W}$-algebre, non si potrebbe sperare di dimostrare un analogo del teor. 1 (che gioca un ruolo essenziale nella dimostrazione del teor. 5) se non considerando in W non solo le operazioni finitarie (qui si considerano solo operazioni binarie ma, come si è già osservato, ciò equivale a considerare tutte quelle finitarie) ma anche operazioni infinitarie. Ciò porterebbe a tutt'altra classe di algebre, diciamo, grosso modo, analoghe alle algebre di BOOLE complete.

La consueta routine che riguarda teoremi di « rappresentazione » ci porta ora a indagare se ogni $\boldsymbol{W}$-algebra (si ricordi che supponiamo α finito) sia semisemplice, cioè isomorfa a un prodotto sottodiretto di $\boldsymbol{W}$-algebre semplici.

La risposta è positiva (teor. 7).

Darò però prima ulteriori proprietà dai w-ideali.

Il fatto che α sia finito ci permette anzitutto di introdurre (in $\boldsymbol{W}$ e quindi) in ogni $\boldsymbol{W}$-algebra la « complementazione ciclica » così definita in W:

$$\varepsilon w_i = \begin{cases} w_{i+1} & \text{se} \quad i < \alpha - 1 \\ w_0 & \text{se} \quad i = \alpha - 1 \end{cases}$$

(a rigore occorrerebbe considerare una funzione binaria costante rispetto a un argomento).

È ora utile la seguente:

DEF. 23. - *Un elemento x di A si dirà* lontano *da un elemento w di W se $J_x^{(w)} = \mathfrak{A}$.*

È ovvio che gli elementi di W sono a due a due lontani l'uno dall'altro. Come si è visto nel teor. 5, x è lontano da w_i se e solo se $\overline{w}_i \leq_i x$.

Saranno utili i seguenti lemmi:

LEMMA 20. - *Se $a \in \mathfrak{A}$ e $w \in W$, uno almeno degli elementi $\varepsilon^i a$ ($i = 0, 1, \ldots, \alpha - 1$) non è lontano da w.*

DIM. - Vale (in $\boldsymbol{W}$ e quindi) in A (teor. 1) identicamente la:

$$\mathring{w}(x, \overline{w}) \vee \mathring{w}(\varepsilon x, \overline{w}) \vee \ldots \vee \mathring{w}(\varepsilon^{\alpha-1} x, \overline{w}) \neq w$$

etc.

LEMMA 21. - *Sia* $a \in \mathfrak{A}$, $a \notin W$, $w \in W$. *Allora* almeno due *degli elementi* $\varepsilon^i a$ ([28]) ($i = 0, 1, \ldots, \alpha - 1$) *sono non lontani da* w.

DIM. - Per il lemma precedente possiamo supporre che sia, diciamo, a non lontano da w e supponiamo per assurdo che $\varepsilon a, \varepsilon^2 a, \ldots, \varepsilon^{\alpha-1} a$ siano lontani da w.

Ma vale (in $\boldsymbol{W}$ e quindi, teor. 1) in A la:

$$\text{se} \quad \overset{\circ}{w}(\varepsilon x, \bar{w}) \vee \overset{\circ}{w}(\varepsilon^2 x, \bar{w}) \vee \ldots \vee \overset{\circ}{w}(\varepsilon^{\alpha-1} x, \bar{w}) = w \quad \text{allora} \quad x = w.$$

Si avrebbe perciò $a = w$, contro l'ipotesi.

LEMMA 22. - *Se* J *è un* w*-ideale proprio di* A *e* $x \in J$ *allora* $\varepsilon^i x \notin J$ ($i = 1, 2, \ldots, \alpha - 1$).

DIM. - Sia per assurdo $\varepsilon^i x \in J$ e sia φ un omomorfismo di dominio A e w-nucleo J.

Dovrebbe essere $\varphi x = w$, $\varphi \varepsilon^i x = w$, ma è anche $\varphi \varepsilon^i x = \varepsilon^i \varphi x = \varepsilon^i w$, il che è assurdo.

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente:

TEOR. 6. - *I* w*-ideali massimali di* A *formano una base per la famiglia di Moore* $\mathfrak{J}$.

In altri termini ogni w*-ideale è intersezione dei* w*-ideali massimali che lo contengono (occorre pensare* $\mathfrak{A}$ *come l'intersezione della famiglia vuota).*

DIM. - Sia J un w-ideale proprio e sia $\bar{J}$ l'intersezione (certo un w-ideale proprio, per il lemma 16) dei w-ideali massimali che lo contengono. È certo $J \subseteq \bar{J}$ e supponiamo, per assurdo, che sia $J \neq \bar{J}$. Sia allora $x \in \bar{J}$, $x \notin J$. Poichè $x \in \bar{J}$, per il lemma 22 nessuno degli $\varepsilon^i x$ con $i = 1, 2, \ldots, \alpha - 1$ appartiene a $\bar{J}$, nè quindi a J. Così nessuno degli elementi $\varepsilon^i x$ ($i = 0, 1, \ldots, \alpha - 1$) appartiene a J. Sia φ un epimorfismo di w-nucleo J da A ad una $\boldsymbol{W}$-algebra B.

$\varphi x \notin W$, in caso diverso uno degli elementi

$$\varphi \varepsilon x = \varepsilon \varphi x, \ldots, \varphi \varepsilon^{\alpha-1} x = \varepsilon^{\alpha-1} \varphi x,$$

diciamo $\varphi \varepsilon^k x$ coinciderebbe con w e allora sarebbe

$$\varepsilon^k x \in J.$$

Dal lemma 21 segue allora che vi sono due elementi $\varphi \varepsilon^i x$, $\varphi \varepsilon^j x$ ($i \neq j$) non lontani in B da w ([28]). Al più uno di essi coinciderà con φx, ve n'è quindi

([28]) Si noti che se $0 \leq i \leq \alpha - 1$, $0 \leq j \leq \alpha - 1$, $i \neq j$ e x è un elemento di una $\boldsymbol{W}$-algebra allora $\varepsilon^i x \neq \varepsilon^j x$, come segue dal teor. 1 e dal fatto che la $\varepsilon^i x \neq \varepsilon^j x$ è vera in $\boldsymbol{W}$.

uno, $\varphi\varepsilon^k x$, con $k \neq 0$ tale che l'ideale $J^{(w)}_{\varphi\varepsilon^k x}$ in B è proprio. Sia $\tilde{J}$ la controimmagine di codesto ideale in φ. $\tilde{J}$ è allora un w-ideale proprio di A con $J \subseteq \tilde{J}$ e $\varepsilon^k x \in \tilde{J}$ $(k \neq 0)$.

Per il lemma 19, $\tilde{J}$ è estendibile ad almeno un w-ideale massimale $\tilde{\tilde{J}}$, per il quale ancora si avrà $J \subseteq \tilde{\tilde{J}}$ e $\varepsilon^k x \in \tilde{\tilde{J}}$. Ma allora il lemma 22, tenuto conto del fatto che $k \neq 0$, porta $x \notin \tilde{\tilde{J}}$ e perciò $x \notin \bar{J}$, contro l'ipotesi.

Il teorema è così dimostrato.

Vale il seguente:

TEOR. 7. – (*teorema di rappresentazione per le* **W**-*algebre* (*con* α *finito*)). *Sia* $A \equiv < \mathfrak{A}, W^{W^2}, \rho >$ *una* **W**-*algebra*, $\Omega = \mathrm{Hom}(A, \boldsymbol{W})$ (*insieme degli omomorfismi da* A *a* **W**) *e sia* φ *l'applicazione di* $\mathfrak{A}$ *in* W^Ω *definita da:*

$$(\varphi x)\omega = \omega x \qquad (x \in \mathfrak{A},\ \omega \in \Omega).$$

La φ *è allora un monomorfismo da* A *all'astratto del pluricampo completo* $< \Omega, W^\Omega, \rho^* >$.

DIM. – Calcoli elementari mostrano che φ è un omomorfismo.

Fissato al solito un $w \in W$ ci basterà allora dimostrare che il w-nucleo (o meglio il $\widehat{w}$-nucleo dove $\widehat{w}$ è l'elemento di W^Ω costante e di valore w) di φ si riduce a $\{w\}$. Ovviamente $\varphi w = \widehat{w}$. (cor. 2).

Sia $\varphi x = \widehat{w}$, ciò porta:

$$(43) \qquad \omega x = w \qquad (\omega \in \Omega).$$

Se fosse $x \neq w$ allora per il teorema 5 esisterebbe almeno un $v \in W$, $v \neq w$ tale che $J^{(v)}_x$ sarebbe proprio, quindi anche un v-ideale massimale $\bar{J}$ con $x \in \bar{J}$, quindi anche un omomorfismo ω da A ad una **W**-algebra semplice con $\omega x = v$.

Ma poichè **W** è l'unica **W**-algebra semplice sarebbe $\omega \in \Omega$ contro la (43). Il teorema è così dimostrato.

7. – Non rappresentabilità nel caso di α infinito.

Supporrò, d'ora in poi, α infinito.

Per dimostrare che, se α è infinito, non ogni **W**-algebra è rappresentabile, e che esistono **W**-algebre semplici diverse da **W** sarà opportuno anzitutto modificare leggermente la definizione di $\mathfrak{L}$.

Allo scopo consideriamo un linguaggio modificato $\bar{\mathfrak{L}}$ che disponga, oltre ai simboli di $\mathfrak{L}$, di un simbolo di costante, $\boldsymbol{a}$. La definizione di termine deve essere modificata aggiungendo nella (4,1) $\boldsymbol{a} \in T$. Un'interpretazione sarà una terna $< M, \varphi, a >$ dove M, φ hanno il solito significato e $a \in M$.

Se $\mathfrak{I} = < M, \varphi, a >$ è un'interpretazione e $\sigma \in M^V$ si porrà $\mathfrak{I}_\sigma \boldsymbol{a} = a$.

La definizione di α-algebra deve a sua volta essere modificata.

Non è infatti vero che $< W, \rho >$ sia un'interpretazione di $\bar{\mathfrak{L}}$. $I_{w,\rho}$ sarà ora definito come l'insieme delle identità valide in qualunque interpretazione $< W, \rho, a >$ con $a \in W$.

Nella def. 14 in luogo di « $< \mathfrak{A}, \varphi >$ sia un modello di I » si dovrà leggere: « per almeno uno (e quindi per tutti) gli $a \in \mathfrak{A}$, $< \mathfrak{A}, \varphi, a >$ sia un modello di J ». Si notino le differenze fra le modifiche qui considerate e quelle di cui nella nota ([25]).

È facile vedere che queste alterazioni non portano differenze in quanto si è fin qui visto (d'altra parte ho evitato di considerare fin dall'inizio $\bar{\mathfrak{L}}$ in luogo di $\mathfrak{L}$ per non appesantire il formalismo già fin troppo ingombrante).

Sia ora $\mathfrak{T}$ l'insieme delle espressioni di $\bar{\mathfrak{L}}$ valide in tutte le $\boldsymbol{W}$-algebre e $\bar{\mathfrak{T}}$ l'insieme ottenuto aggiungendo a $\mathfrak{T}$ tutte le espressioni della forma:

$$\mathfrak{S}(\boldsymbol{a}, w): \qquad \overset{\circ}{w}[\boldsymbol{a}, \bar{w}] \doteq w \quad \text{con} \quad w \in W$$

(a rigore si dovrebbe parlare delle espressioni della forma:

$$[(\rho^{-1}\overset{\circ}{w})\,[\boldsymbol{a}, (\rho^{-1}f_{\bar{w}})\,[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2]] \doteq (\rho^{-1}f_w)\,[\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4]]$$

Mostriamo che:

TEOR. 8. – *Ogni sottoinsieme finito di $\bar{\mathfrak{T}}$ ammette un modello.*

DIM. – Sia $\mathfrak{F}$ un sottoinsieme finito di $\bar{\mathfrak{T}}$. Esso sarà costituito, oltre che da alcuni fra gli elementi di $\mathfrak{T}$, da al più un numero finito di espressioni del tipo $\mathfrak{S}(\boldsymbol{a}, w)$, e siano:

$$\mathfrak{S}(\boldsymbol{a}, w_1),\ \mathfrak{S}(\boldsymbol{a}, w_2),\ \ldots,\ \mathfrak{S}(\boldsymbol{a}, w_n).$$

Sia $\bar{a}$ un elemento di W diverso da $w_1, w_2, \ldots, w_n$ (certo ne esistono, perchè W è infinito). Allora $< W, \rho, \bar{a} >$ è un modello di $\mathfrak{F}$. È infatti un modello di $\mathfrak{T}$ e d'altronde si ha:

$$\overset{\circ}{w}_i(a, \bar{w}_i) = w_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Il teorema è così dimostrato.

Il teorema semantico di finitezza porta ora che $\bar{\mathfrak{T}}$ ha modelli e quindi che esiste una $\boldsymbol{W}$-algebra $A = < \mathfrak{A}, W^{W^2}, \rho >$ per un elemento $\bar{a}$ della quale si ha, per ogni $w \in W$:

$$\overset{\circ}{w}(\bar{a}, \bar{w}) = w \tag{44}$$

(e sarà allora $\bar{a} \notin W$).

La (44) porta $J_a^{(w)} = \mathfrak{A}$ per ogni $w \in W$ quindi non esistono omomorfismi da A a $\boldsymbol{W}$. Il quoziente di A rispetto ad un suo qualunque ideale massimale ci darà poi un'algebra semplice non isomorfa a $\boldsymbol{W}$.

Ciò porta:

COR. 9. - *Se α è infinito esistono $\boldsymbol{W}$-algebre non rappresentabili (non isomorfe cioè a pluricampi di insiemi).*

Tenuto poi conto del fatto che, $\boldsymbol{W}$ essendo privo di sottoalgebre proprie, ogni astratto da un pluricampo di insiemi è isomorfo a un prodotto sottodiretto di α-algebre isomorfe a $\boldsymbol{W}$ (e, ovviamente, viceversa) si ricava dal teor. 7 e dal cor. 9 il risultato annunciato nella premessa:

TEOR. 9. - *Condizione necessaria e sufficiente perchè* ogni *α-algebra sia prodotto sottodiretto di α-algebre isomorfe a $\boldsymbol{W}$ è che α sia finito.*

TESTI CITATI

[1] BIRKHOFF, *Lattice theory*, Am. Math. Soc. Colloquium-publications, New York 1948.

[2] N. BOURBAKI, *Eléments de mathématique, livre I Ch 4*, (Structures), Paris 1957.

[3] CHEN CHUNG CHANG, *Algebraisation of infinitely many-valued logics*, in Summarie of talks presented at the Summer Institut for simbolic logic.

[4] CHEN CHUNG CHANG and A. HORN, *Prime ideal characterization of generalized Post algebras* in Lattice theory, Proceedings of symposia in pure Math., Am. Math. Soc., Providence 1961.

[5] C. CHEVALLEY, *Concetti fondamentali di algebra*, (ed. italiana), Feltrinelli 1964.

[6] G. EPSTEIN, *The Lattice theory of Post algebras*, Trans. of the Am. Math. Soc., 95 (1960), pp. 300-317.

[7] L. HENKIN, *Cylindric algebras*, Lectures presented at the Seminar of the 1961, Can. Math. Congr., (litografate).

[8] E. MENDELSON, *Introduction to mathematical logic*, New York 1964.

[9] A. ROBINSON, *Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra*. Amsterdam 1963.

[10] P.C. ROSEMBLOOM, *Post algebras I: Postulates and general theory*, Am. Journ. of Math., 43 (1921), pp. 163-185.

[11] R. SIKORSKI, *Boolean algebras*, (second edition), Berlin 1964.

[12] M.H. STONE, *The theory of representation of Boolean algebras*, Trans. Am. Math. Soc., 40 (1936), pp. 37-111.

[13] T. TRACZYK, *On axioms and some properties of Post algebras*, Bull. de l'Ac. Pol. des Sc. Série des Sc. Math. Astr. et Phys., 10 (1962), pp. 509-512.

azzoguidi soc. tip. edit. via e. ponente 421 b bologna italy 1967