ROBERTO MAGARI

Problemi aperti sulle algebre diagonali

Estratto dai
« Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano »
Vol. XLIV (1974)

TIPOGRAFIA FUSI - PAVIA
11/1975

ROBERTO MAGARI

Problemi aperti sulle algebre diagonali

Estratto dai
« Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano »
Vol. XLIV (1974)

TIPOGRAFIA FUSI - PAVIA
11/1975

ROBERTO MAGARI
dell' Università di Siena

PROBLEMI APERTI SULLE ALGEBRE DIAGONALI *

(Conferenza tenuta il 30 aprile 1974) **

SUNTO. — Si da un' introduzione a carattere espositivo alle strutture algebriche legate con le teorie che esprimono Theor e nelle quali vale il lemma di diagonalizzazione. In 1. 2. 3. sono richiamate alcune proprietà basilari dell'aritmetica peaniana e nei numeri succssivi vengono introdotte le suddette strutture e presentati alcuni problemi aperti.

INTRODUZIONE.

Fin dal 1931 (K. Gödel [4]) è noto che esistono teorie formali parzialmente autologhe e che in particolare « numerano » mediante un opportuno predicato l' insieme dei propri teoremi. Come è noto questa circostanza permette di ricavare dai principali paradossi formulabili nel linguaggio comune notevoli risultati.

L'analisi di tali risultati e la ricerca di nuovi risultati analoghi è resa più agevole da una loro formulazione « al giusto livello di generalità » il che si ottiene di solito inquadrandoli nella teoria delle funzioni ricorsive. Tale metodo tuttavia non permette di metterne in luce gli aspetti più spiccatamente algebrici.

Di recente ([10]) l'autore ha proposto lo studio di certe algebre (le algebre « diagonali » del titolo) che permettono di tradurre in veste algebrica particolarmente semplice e maneggevole le principali caratteristiche delle teorie parzialmente autologhe sopra ricordate.

Questa esposizione vuol essere una illustrazione della proposta e dei principali temi di ricerca che ne derivano.

---

* La denominazione « algebre diagonali » è già stata usata nella letteratura (da PLONKA e FAJTLOWIZ) per tutt'altre strutture algebriche. L'autore si scusa per l' inconveniente.

** Pervenuta in Redazione il 30 luglio 1974.

I nn. 1, 2, 3 contengono brevi richiami sull'aritmetica peaniana al primo ordine (che è, fra le teorie parzialmente autologhe, quella più studiata), sul lemma di diagonalizzazione e sui teoremi di Gödel e di Tarski.

Nel n. 4 si introducono le algebre diagonali e le algebre « fortemente diagonali ». I nn. successivi sono dedicati a vari temi di ricerca sia di carattere algebrico universale sia riguardanti problemi logici formulati in veste algebrica.

L'esposizione è condotta in modo da essere utile anche a non esperti di logica matematica. L'autore confida che gli esperti vorranno scusare le numerose omissioni e imprecisioni (o almeno abusi di linguaggio) dovute all'esigenza di arrivare rapidamente al vivo dell'argomento.

I passi che più facilmente potrebbero suscitare equivoci o comunque richiederebbero (rigorose e) lunghe precisazioni sono in genere segnalati col segno bourbakista « ☡ ».

I « problemi aperti » presentati non sono necessariamente difficili: contrariamente a un (mal ?) costume abbastanza diffuso, non si tratta di problemi già studiati a fondo e abbandonati perché troppo difficili.

I risultati che vengono dati sono ancora in gran parte preliminari e sono emersi nel corso di seminari tenuti presso l'istituto di matematica dell'Università di Siena. Contributi notevoli sono stati dati da G. Marongiu, P. Pagli, G. Sambin, A. Ursini.

L'autore ringrazia i colleghi del seminario matematico di Milano che gli hanno offerto la possibilità di esporre questi problemi in una sede di alto livello scientifico e l'occasione di commettere forse reato di « plagio » invogliando qualche giovane allo studio della logica matematica, disciplina ancora poco coltivata e poco apprezzata in Italia.

1. - Richiami sull'aritmetica peaniana.

Sia ω l'insieme dei numeri naturali e consideriamo la struttura $\Omega = <\omega, +, \cdot, S, <, 0>$ dove $+, \cdot, <, 0$ hanno il consueto significato e S è l'operazione unaria di passaggio al successivo ($Sx = x + 1$). Si confonderà tipograficamente Ω con ω.

A partire da un « alfabeto » costituito da:

(i) un insieme numerabile V, detto « insieme delle variabili »

(ii) i connettivi: $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$

(iii) il simbolo del predicato di identità: $=$

(iv) simboli funzionali: $+, \cdot, ', 0$

(v) simbolo del predicato $< : <$

(vi) quantificatori: $\forall, \exists$

(vii) simboli ausiliari: (,), ,

si costruisce un linguaggio del primo ordine, L, con identità, atto a « parlare di » ω. In particolare si definiscono induttivamente:

l' insieme dei « termini »

l' insieme E delle « formule »

il concetto di formula « chiusa », « aperta » etc. (le formule chiuse si dicono anche « proposizioni »)

il concetto di occerrenza « libera » o « vincolata » di una variabile in una formula.

Sempre per induzione si definisce in un modo ovvio la frase: « p è vera in $\mathcal{A}$ » per $p \in E$ e $\mathcal{A} = \langle A, f, g, h, R, a \rangle$ struttura dello stesso tipo di ω.

Tale frase si scrive anche $\models_{\mathcal{A}} p$, si scriverà semplicemente $\models p$ per $\models_{\omega} p$.

Il linguaggio in cui si parla costituisce un « metalinguaggio » rispetto al « linguaggio oggetto » L. Per snellire la trattazione si sono confusi i simboli metalinguistici con i simboli di L: il contesto eviterà gli equivoci.

Una teoria in L si dà mediante un insieme di « assiomi » e di « regole » (le « regole » si fissano in genere una volta per tutte insieme agli « assiomi logici »): si definisce poi il concetto di « dimostrazione ». « Teoremi » della teoria sono allora tutti e soli gli elementi finali di « dimostrazioni ».

Si possono fissare gli « assiomi logici » e le « regole » in modo tale che per ogni insieme M di formule l' insieme dei teoremi della teoria che ammette gli elementi di M come assiomi coincida con l' insieme delle formule che sono « conseguenza » di M, che sono cioè vere in ogni struttura in cui siano vere tutte le formule di M (teoremi di validità e completezza generali per il linguaggio del primo ordine).

Si hanno teorie « assiomatiche » quando si può scegliere un insieme *ricorsivo* di assiomi ossia quando l' insieme dei teoremi è *enumerabile* (per l'equivalenza delle due richieste cfr. W. Craig [1]).

E' chiaro che se vogliamo tradurre in qualche modo il concetto vago di teoria « calcolistica » occorre considerare solo teorie assiomatiche (occorrerebbe una discussione, relativa alla « tesi di Church »).

Non è di questo tipo la teoria avente come insieme dei teoremi l' insieme $V = \{\alpha \in E : \models \alpha\}$ (V è ricorsivamente isomorfo a $\Phi^{(\omega)}$).

E' invece assiomatica *l'aritmetica peaniana* che ammette come assiomi alcuni assiomi banali e inoltre gli infiniti assiomi che sono istanze dello « schema di induzione »:

$$(\alpha(0) \wedge \forall x (\alpha(x) \to \alpha(x'))) \to \forall x\, \alpha(x) .$$

Sia $\mathcal{P}$ quest'ultima teoria e T l' insieme dei suoi teoremi. Se si dispone di un metalinguaggio abbastanza forte si trova $T \subseteq V$ (« validità » di $\mathcal{P}$) il che implica, ovviamente, la consistenza di $\mathcal{P}$. In molti sensi ragionevoli dell'aggettivo questa dimostrazione di consistenza non è « costruttiva »: la prima dimostrazione della consistenza di $\mathcal{P}$ in qualche modo « costruttiva » (ma *non* al punto di essere « formalizzabile » in $\mathcal{P}$) è dovuta a Gentzen ([3]).

2. - Lemma di diagonalizzazione.

Il sistema $\mathcal{P}$ è, entro certi limiti, autologo: si capisce quindi come gli ordinari paradossi autologici (a partire da quello del mentitore) debbano fornire risultati interessanti.

Per arrivare a stabilire l'aspetto autologo di $\mathcal{P}$ si danno:

a) una iniezione computabile da ω all' insieme dei termini: essa associa ad ogni $x \in \omega$ un $\bar{x}$ (detto « numerale » di x) secondo le seguenti clausole induttive:

$$\bar{0} = 0$$

$$\overline{x+1} = \bar{x}'$$

b) una iniezione computabile da E ad ω: essa associa ad ogni $\alpha \in E$ un $\ulcorner \alpha \urcorner \in \omega$ detto « gödeliano » di α.

c) una iniezione computabile dall' insieme delle sequenze finite di formule ad ω (si parla ancora di gödeliano) (queste iniezioni hanno codominio ricorsivo).

Sia ora $\alpha = \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$ e $R \subseteq \omega^n$.

Si dice che la α *numera* la R se [1]:

$\vdash \alpha(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ se e solo se $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \in R$

---

[1] $\vdash \alpha$ sta per $\alpha \in T$.

e che la α *binumera* la R se α numera R e $\neg\,\alpha$ numera $\omega^n - R$. In modo ovvio si definiscono i concetti di [bi]numerabile, [bi]numerato etc.

Si ha:

PROP. 1. - *Sono binumerabili tutte e sole le relazioni ricorsive e numerabili tutte e sole le relazioni ricorsivamente enumerabili.*

PROP. 2. - *Sia* f : $\omega^n \to \omega$ *una funzione totale ricorsiva. Allora esiste una formula* α *con* n + 1 *variabili libere che binumera il grafico di* f *e tale che*:

$$\vdash \forall x_1 \ \forall x_2 \ldots \ \forall x_n \ \exists_1 y\, \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$$ (2) (3).

Tenuto conto del fatto che:

l' insieme dei [godeliani degli]	assiomi è ricorsivo
l' insieme dei [godeliani delle]	dimostrazioni è ricorsivo
l' insieme dei [godeliani dei]	teoremi è ricorsivamente
etc.	enumerabile

si capisce in che senso si può parlare di autologia di $\mathcal{P}$.

I principali aspetti paradossali dell'autologia sono condensati nel seguente:

lemma di diagonalizzazione (Gödel [5], Feferman [2]). *Sia* $\alpha = \alpha(\mathrm{x})$ *un formula con esattamente una variabile libera,* x. *Allora esiste una proposizione* p *per cui*:

$$\vdash p \leftrightarrow \alpha(\overline{\ulcorner p \urcorner}).$$

Dim. - Consideriamo la relazione ricorsiva S definita da:

$(a, b) \in S$ se e solo se a è il godeliano di una formula $\beta(x)$ avente libera la (sola) variabile x e b è il godeliano della formula $\beta(\bar{a})$.

Per la prop. 2 esiste una formula $\dot{S}(y, z)$ per cui:

$\vdash S(\bar{a}, \bar{b})$ se e solo se $(a, b) \in S \qquad (a, b \in \omega)$

$\vdash \forall x\, \exists_1 y\, \dot{S}(x, y)$

(2) $\exists_1$ vale intuitivamente « esiste esattamente un », rigorosamente $\exists_1 y\, \beta(y)$ sta per $\exists y(\beta(y) \wedge \forall z(\beta(z) \to z = y))$

(3) Queste proposizioni sono dimostrabili usando solo una metateoria sostanzialmente coincidente con $\mathcal{P}$ con l'aggiunta della consistenza di P.

Sia $\alpha(x)$ come nell'enunciato e consideriamo la formula, $\beta(x)$: $\exists\, y\, (\dot{S}(x, y) \wedge \alpha(y))$ di godeliano, diciamo, u.

Sia p la proposizione ottenuta sostituendo in $\beta(x)$ x con $\bar{u}$ ossia la:

$$\exists\, y(\dot{S}(\bar{u}, y) \wedge \alpha(y))$$

e sia v il suo godeliano.

Allora ovviamente:

$$(u, v) \in S$$

da cui:

$$\vdash \dot{S}(\overline{u}, \overline{v})$$

e, applicando assiomi e regole logiche:

$$\vdash \forall y(\dot{S}(\overline{u}, y) \leftrightarrow y = \overline{v})$$

da cui:

$$\vdash (\exists\, y(\dot{S}(\overline{u}, y) \wedge \alpha(y)) \leftrightarrow \alpha(\overline{v})$$

ossia:

$$\vdash p \leftrightarrow \alpha(\overline{\ulcorner p \urcorner}) .$$

Si tratta in sostanza di un teorema di « punto fisso ». Una generalizzazione al caso di più formule in più variabili e con parametri è stata fornita da P. Pagli (comunicazione verbale, cfr. anche [12]).

3. - Teoremi di Gödel.

Sia ora $\dot{T}'(x)$ una formula che numeri T. Applicando il lemma si trova una p per cui:

$$\vdash p \leftrightarrow \neg\, \dot{T}'(\overline{\ulcorner p \urcorner}) ,$$

ossia:

$$\vdash \neg\, p \leftrightarrow \dot{T}'(\overline{\ulcorner p \urcorner})$$

e anche, come conseguenza di ovvie regole proposizionali:

$\vdash \neg\, p$ se e solo se $\vdash \dot{T}'(\overline{\ulcorner p \urcorner})$ e, dato che $\dot{T}'(x)$ numera T:
$\vdash \neg\, p$ se e solo se $\vdash p$

da cui risulta se $\mathcal{P}$ è consistente $p, \neg p \notin T$ ossia che p è « indecidibile ».

Inoltre $p \in V$. Si tratta in sostanza del primo teorema di Gödel (1931) nella forma rafforzata di Rosser [13] (1936).

Costruendo una formula $\dot{T}(x)$ che traduca in modo « naturale » la $x \in T$ si trova solo (sotto l'ipotesi di consistenza di $\mathcal{P}$): se $\vdash p$ allora $\vdash \dot{T}(\overline{\ulcorner p \urcorner})$ (in luogo di $\vdash p$ se e solo se $\vdash \dot{T}(\overline{\ulcorner p \urcorner})$) onde dal ragionamento precedente si ricava solo $p \notin T$, $p \in V$. Sotto la « ω-coerenza » (4) si trova però anche che $\dot{T}(x)$ *numera* T. Questa è in sostanza la situazione esaminata da Gödel nel '31.

Al secondo teorema di Gödel si arriva facilmente sfruttando le seguenti proprietà di $\dot{T}$ (condizioni di derivabilità):

$$\left.\begin{array}{ll}
(\dot{T}1) & \text{se } \vdash p \text{ allora } \vdash \dot{T}(\overline{\ulcorner p \urcorner}) \\
(\dot{T}2) & \text{se } \vdash \dot{T}(\overline{\ulcorner p \to q \urcorner}) \text{ allora } \vdash \dot{T}(\overline{\ulcorner p \urcorner}) \to \dot{T}(\overline{\ulcorner q \urcorner}) \\
(\dot{T}3) & \vdash \dot{T}(\overline{\ulcorner p \to q \urcorner}) \to (\dot{T}(\overline{\ulcorner p \urcorner}) \to \dot{T}(\overline{\ulcorner q \urcorner})) \\
(\dot{T}4) & \vdash \dot{T}(\overline{\ulcorner p \wedge q \urcorner}) \leftrightarrow (\dot{T}(\overline{\ulcorner p \urcorner}) \wedge \dot{T}(\overline{\ulcorner q \urcorner})) \\
(\dot{T}5) & \text{(Löb ([6]))} \ \dot{T}(\overline{\ulcorner p \urcorner}) \to \dot{T}(\overline{\ulcorner \dot{T}(\overline{\ulcorner p \urcorner}) \urcorner})
\end{array}\right\} \quad (p, q, \text{proposizioni}).$$

Infatti presa una p per cui:

$$\vdash p \leftrightarrow \neg\, \dot{T}(\overline{\ulcorner p \urcorner})$$

si ricava:

$$\begin{array}{l}
\vdash \neg\, p \leftrightarrow \dot{T}(\overline{\ulcorner p \urcorner}) \\
\vdash \dot{T}(\overline{\ulcorner \neg\, p \urcorner}) \leftrightarrow \dot{T}(\overline{\ulcorner \dot{T}(\overline{\ulcorner p \urcorner}) \urcorner}) \\
(\mathrm{o}) \vdash \dot{T}(\overline{\ulcorner p \urcorner}) \to \dot{T}(\overline{\ulcorner \neg\, p \urcorner}).
\end{array}$$

Supponendo ora che $\mathcal{P}$ sia in grado di dimostrare la propria consistenza (occorrono precisazioni: cfr. Feferman [2]) e in particolare supponendo:

$$\vdash \neg\, \dot{T}(\overline{\ulcorner p \wedge \neg\, p \urcorner})$$

---

(4) Cioè sotto l'ipotesi che per nessuna formula $\alpha(x)$ in una variabile si possa avere la situazione:

$$\begin{array}{ll}
\vdash \alpha(\bar{a}) & \qquad (a \in \omega) \\
\vdash \exists\, x(\neg\, \alpha(x)) &
\end{array}$$

si ricava:

$$\vdash \neg(\dot{T}(\ulcorner \overline{p} \urcorner) \wedge \dot{T}(\ulcorner \overline{\neg p} \urcorner))$$

e quindi per la (o):

$$\vdash \neg\, \dot{T}(\ulcorner \overline{p} \urcorner)$$

ossia:

$$\vdash p\,.$$

Ma, come si è visto $p \notin T$ onde l' ipotesi porta a contraddizione.

Sempre sfruttando il lemma di diagonalizzazione (nella teoria avente come assiomi e quindi come teoremi tutti gli elementi di V) si arriva facilmente al teorema di Tarski:

TEOREMA. - *Non esiste alcuna espressione* V(x) *con una variabile libera,* x, *per cui sia:*

$$\models p \text{ se e solo se } \models V(\ulcorner \overline{p} \urcorner) \qquad \text{(per ogni proposizione } p).$$

Le limitazioni trovate si estendono facilmente ad ogni teoria cui l'aritmetica peaniana sia « riducibile ».

In particolare al primo teorema di Gödel si può dare la forma seguente (che dovrebbe essere precisata):

Esiste un procedimento effettivo il quale per ogni teoria « calcolistica » consistente cui l'aritmetica sia « riducibile » fornisce una proposizione « vera » indecidibile

Osservazione. - Dai teoremi limitativi si sono tratte spesso pretese « conseguenze filosofiche » come la tesi di una « superiorità umana sulle macchine ».

Inferenze del genere sono assai discutibili (e in effetti assai discusse). Per una bibliografia sommaria (e per un contributo dell'autore alla discussione) cfr. [9], [10].

4. - Le algebre diagonali.

Per ricavare dai sistemi formali delle strutture algebriche si passa di solito all'algebra di Lindenbaum delle proposizioni o all'algebra di Lindenbaum delle formule. Si ottengono delle algebre di Boole e rispettivamente delle algebre di Boole con operatori (algebre « cilindriche », « poliadiche » etc.). Il primo metodo (a meno che non si introducano anche in tal caso opportuni operatori) sacrifica troppi aspetti rilevanti della struttura in esame e contro il secondo si può fare l'obiezione semplicistica che in ultima analisi si tratta solo di sostituire una eguaglianza a una equivalenza, il che può presentare solo limitati vantaggi formali (questa obiezione deve essere presa *cum grano salis*: in realtà lo studio delle algebre cilindriche e poliadiche ha fornito interessanti risultati).

Volendo però trasferire sul piano algebrico l'aspetto parzialmente autologo di certi sistemi conviene seguire una via di mezzo.

Riferiamoci al sistema $\mathcal{P}$ e sia P l' insieme delle sue proposizioni. E' ben noto che si ottiene un'algebra di Boole $\mathcal{A} = \langle A, +, \cdot, {}', 0, 1\rangle$ (algebra di Lindenbaum delle proposizioni) mediante passaggio al quoziente rispetto all'equivalenza $\sim$ definita in P da:

$$p \sim q \text{ se e solo se } \vdash p \leftrightarrow q \qquad (p, q \in P)$$

ponendo:

$$\left.\begin{array}{l} A = P/\sim \\ [p]+[q] = [p \vee q] \\ [p] \cdot [q] = [p \wedge q] \\ [p]' = [\neg p] \\ 1 = [0 = 0] \\ 0 = 1' \end{array}\right\} \quad (p, q \in P)$$

(la correttezza delle definizioni è ovvia).

Siano ora $p, q \in P$ e $p \sim q$ ossia $\vdash p \leftrightarrow q$.

Dalla $(\dot{T}1)$ si trova:

$$\vdash \dot{T}(\overline{\ulcorner p \leftrightarrow q \urcorner})$$

e, applicando la $(\dot{T}2)$:

$$\vdash \dot{T}(\overline{\ulcorner p \urcorner}) \leftrightarrow \dot{T}(\overline{\ulcorner q \urcorner})$$

ossia

$$\dot{T}(\overline{\ulcorner p \urcorner}) \sim \dot{T}(\overline{\ulcorner q \urcorner}).$$

Si può quindi definire in $\mathcal{A}$ un operatore unario, τ, ponendo:

$$\tau[p] = [\dot{T}(\overline{\ulcorner p \urcorner})]$$

e si trova:

$$(\tau 1) \quad \tau 1 = 1$$

$$(\tau 2) \quad \tau(x\, y) = \tau x \cdot \tau y$$

$$(\tau 3) \quad \tau(x \to y) \leq \tau\, x \to \tau\, y$$

(dove $u \to v$ sta per $v + u'$)

$$(\tau 4) \quad \tau\, x \leq \tau\, \tau\, x\,.$$

Algebre di Boole con un operatore τ con le proprietà scritte sono state introdotte da Kent e Simmons, ma si presenta ora il problema di arricchire la struttura delle nostre algebre sì da tradurre in qualche modo il lemma di diagonaizzazione. Al tempo stesso è opportuno che la classe che introdurremo sia una varietà.

Ciò si può fare introducendo in ogni algebra $\mathcal{A} = \langle A, +, \cdot, ', 0, 1, \tau \rangle$ della varietà sopra introdotta una nuova operazione g_f n-aria ($n \in \omega$) per ogni polinomio astratto (nei simboli booleani in τ) $f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ in cui x occorra sotto l'azione di τ, e l' identità:

$$g_f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = f(g_f(y_1, y_2, \ldots, y_n), y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Si definisce così un tipo di algebre e una varietà di algebre di questo tipo che si diranno algebre *diagonali.*

E' facile vedere che il lemma di diagonalizzazione permette di ricavare da P un'algebra diagonale.

In realtà la ricordata generalizzazione dovuta a P. Pagli permette di ricavare da P un'algebra *multidiagonale* nel senso seguente.

Sia Ω_0 un tipo di algebre contenente sei simboli $+, \cdot, ', 0, 1, \tau$ di operazioni di arietà rispettive 2, 2, 1, 0, 0, 1.

Pr ogni sequenza finita $f = (f)_{0<i\leq n}$ di polinomi del tipo Ω_0 di arietà $n + m$ e in cui le prime n variabili cadano sotto l'azione di τ consideriamo n nuovi simboli di operazione m-aria $(g_i^{(f)})_{0<i\leq n}$.

Sia Ω il tipo risultante. Le Ω algebre soddisfacenti:

(i) le identità booleane

(ii) le $(\tau 1)$, $(\tau 2)$, $(\tau 3)$, $(\tau 4)$

(iii) le identità del tipo:

$$g_i^{(f)}(\gamma) = f_i(g_1^{(f)}(\gamma), \quad g_2^{(f)}(\gamma), \ldots, g_n^{(f)}(\gamma); \gamma) \qquad (1 \leq i \leq u)$$

dove γ sta per $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ si diranno *algebre multidiagonali.*

E' invece aperto il problema se P dia luogo a un'algebra *diagonale forte* nel senso seguente:

Sia Ω_0 come sopra e per ogni polinomio $f(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ con x sotto l'azione di τ aggiungiamo un nuovo simbolo g_f e l' identità:

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = f(g(y_1, y_2, \ldots, y_n), y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

ottenendo così un nuovo tipo Ω_1 e una varietà di algebra di tipo Ω_1.

Ripetiamo il procedimento applicandolo ai polinomi astratti del tipo Ω_1 ottenendo un nuovo tipo Ω_2 e una varietà di algebre di tipo Ω_2. Iterando il procedimento si perviene in modo ovvio a un tipo Ω_ω e a una varietà di algebre di tipo Ω_ω che si diranno appunto *algebre diagonali forti.*

E' facile vedere che comunque presa un'algebra di Boole $\mathcal{A} = \langle A, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ se si pone $\tau x = 1$ per ogni x di A si ottiene un'algebra diagonale forte (nel senso che si possono aggiungere in modo ovvio operazioni ad hoc). Le algebre di questo tipo si diranno *banali.*

E' facile ora dare i corrispondenti algebrici del primo e del secondo teorema di Gödel.

TEOREMA 1 (primo teorema di Gödel). - *Se $\mathcal{A}$ è un'algebra diagonale non banale allora essa non è ridotta a* 2.

Dim. - In $\mathcal{A}$ esiste un p con $p = (\tau p)'$. Non può essere $p = 1$ altrimenti $\tau p = 1$, $(\tau p)' = 0$ e $p = 0$. Se fosse $p = 0$ si avrebbe $\tau 0 = 1$ onde l'algebra sarebbe banale.

TEOREMA 2 (secondo teorema di Gödel). - *Se $\mathcal{A} = \langle A, +, \cdot, ', 0, 1, \tau, \ldots \rangle$ è un'algebra diagonale non degenere (se cioè $0 \neq 1$) allora $\tau 0 > 0$.*

Dim. - Prendiamo la solita p con $p = (\tau p)'$. Si ha successivamente:

$$\begin{aligned}
p' &= \tau p \\
\tau p' &= \tau \tau p \\
\tau p &\leq \tau p' \\
\tau p \cdot \tau p' &= \tau p \\
\tau(p\, p') &= p' \\
\tau 0 &= p'
\end{aligned}$$

ma $p \neq 1$, come si è già osservato.

Può essere ora utile il seguente lemma dovuto a Löb [6].

LEMMA 1. - *Se in un'algebra diagonale per un certo* x *si ha* $\tau x \leq x$ *allora* $x = 1$.

Dim. - Esiste un y per cui $y = \tau y \rightarrow x$. Da questa si ricava:

$$\tau y = \tau(\tau y \rightarrow x) \leq \tau\tau y \rightarrow \tau x$$

ed essendo

$$\tau y \leq \tau\tau y :$$

$$\tau y \leq \tau x \leq x$$

da cui:

$$\tau y \rightarrow x = 1 .$$

Ma allora $y = 1$ onde $\tau y = 1$ e $x = 1$.

Come si è già osservato se $\mathcal{P}$ è ω-coerente allora $\dot{T}$ numera T onde da $\vdash \dot{T}(\ulcorner\overline{p}\urcorner)$ si ricava $\vdash p$.

Per le nostre algebre ciò si riflette nella proprietà:

($\tau 5$) se $\tau x = 1$ allora $x = 1$.

Le algebre per cui vale la ($\tau 5$) si diranno ω-coerenti: è facile vedere che esse *non costituiscono* una sottovarietà. Può essere interessante notare che:

TEOREMA 3. - *Se* $\mathcal{A}$ *è un'algebra* ω*-coerente non degenere allora è infinita.*

Dim. - Anzitutto, come si è già visto, $\tau 0 > 0$. Ovviamente è

$$0 \leq \tau 0 \leq \tau^2 0 \leq \ldots \leq \tau^n 0 \leq \ldots$$

Per ogni $n \in \omega$ è $\tau^n 0 < 1$ altrimenti applicando la ($\tau 5$) si troverebbe $0 = 1$ contro l'ipotesi che $\mathcal{A}$ sia non degenere. Per il lemma 1 non può essere allora $\tau^n 0 = \tau^{n+1} 0$ onde si ha:

$$0 < \tau 0 < \tau^2 0 < \ldots < \tau^n 0 < \ldots$$

5. - LE ESTENSIONI FINITE DI UNA TEORIA, INTERPRETATE ALGEBRICAMENTE.

E' facile vedere che le algebre diagonali costituiscono una varietà dotata di una teoria degli ideali nel senso di A. URSINI [14] come segue dal fatto che si tratta in sostanza di gruppi con multioperatori.

Giocano il ruolo di ideali gli ideali booleani con le ulteriori proprietà:

($J1$) se $x \in J$ allora $(\tau x')' \in J$

($J2$) per ogni operazione n-aria « aggiunta », g:

$$\text{se } y_1, y_2, \ldots, y_n \in A \text{ e } x_1, x_2, \ldots, x_n \in J$$

allora

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_n) \dot{+} g(y_1 \dot{+} x_1, y_2 \dot{+} x_2, \ldots, y_n \dot{+} x_n) \in J$$

(dove $\dot{+}$ sta la somma modulo 2 $(u \dot{+} v = (u + v)(u\,v)')$.

Contrariamente a quanto si potrebbe credere il passaggio al quoziente non è però l'operazione corrispondente all'estensione di una teoria mediante nuovi assiomi. Questa corrisponde piuttosto all'operazione seguente.

Sia $\mathcal{A} = \langle A, +, \cdot, ', 0, 1, \tau, \ldots \rangle$ un'algebra diagonale e F un filtro booleano principale generato da un certo p.

Si ottiene un'algebra $\mathcal{A}_F$ passando al quoziente per la parte booleana e definendo un τ^* mediante la:

$$\tau^*[q] = [\tau(p \to q)] .$$

Si vede facilmente che la definizione è corretta e che τ^* ha le proprietà volute. Facilmente si introducono poi le operazioni diagonali.

6. - Due problemi algebrici.

Sia $(A_i)_{i \in I}$ una famiglia di algebre dello stesso tipo, sia L_i il reticolo delle congruenze di A_i e $L = \prod_{i \in I} L_i$.

Se B è una sottoalgebra di $\prod_{i \in I} A_i$ si può associare ad ogni ideale J di L una congruenza R_J di B ponendo:

$$x\, R_J\, y \text{ se e solo se } \Delta(x, y) \in J \qquad (x, y \in B)$$

dove $\Delta(x, y)$ è l'elemento di L la cui componente i-esima è la congruenza generata da (x_i, y_i) in A_i.

Una classe di algebre si dice *ideale* se ogni prodotto sottodiretto di algebre della classe ha solo congruenze del tipo anzidetto. Le classi ideali sono state abbondantemente studiate (cfr. [8] e bibliografia ivi citata).

Da un teorema noto (cfr. [7]) segue che *ogni classe finita di algebre diagonali finite è ideale*. Che cosa si può dire per le altre classi? In particolare la varietà delle algebre diagonali è idealizzabile? (cioè generata da un'opportuna classe ideale).

Giovanni Sambin (comunicazione verbale) ha dato un esempio di algebra diagonale forte non banale. Si tratta dell'algebra di Boole di quattro elementi 0, 1, a, a' con $\tau 1 = 1$, $\tau 0 = a$, $\tau a = 1$, $\tau a' = a$ (il Sambin dimostra che si possono realizzare in quest'algebra tutte le operazioni aggiunte).

Restano da costruire esempi significativi di algebre diagonali *forti* ω-coerenti. Resta anzi da provare che ne esistano (di non degeneri) ma dovrebbe essere facile dimostrare per induzione che le algebre diagonali forti libere sono ω-coerenti.

7. - Il filtro delle proposizioni « vere e sensate ».

In [10] l'autore ha introdotto, partendo da esigenze di carattere neopositivistico, il concetto di proposizione « sensata » e di proposizione « vera e sensata » di $\mathcal{P}$.

Dal punto di vista algebrico ciò porta a considerare in ogni algebra diagonale $\mathcal{A} = \langle A, +, \cdot, ', 0, 1, \tau, \ldots \rangle$ il filtro V_0 generato dagli elementi x per cui:

$$x' \leq \tau x'$$

$$x \neq 0$$

Da risultati di [10] segue che nell'algebra di Lindenbaum di $\mathcal{P}$ si può introdurre un operatore v_0 con le proprietà:

$$\left.\begin{array}{l} \tau x \leq v_0 x \\ \text{se } x \in V_0 \text{ allora } v_0 x \in V_0 \\ \tau(x' \to \tau x')(\tau x')' \leq v_0 x \\ v_0(x y) = v_0 x \cdot v_0 y \\ v_0(x \to y) \leq v_0 x \to v_0 y \\ v_0 x \leq v_0 v_0 x \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} (x, y \in A, \text{ le disuguaglianze} \\ \text{sono da leggere modulo } V_0) \end{array}$$

Inoltre anche v_0 è soggetto a diagonalizzazione.

Si può introdurre e studiare una opportuna classe di strutture $\langle A, +, \cdot, ', 0, 1, \tau, v_0, V_0, \ldots \rangle$.

Ripetendo il procedimento si può passare a un filtro V_1 e a un operatore v_1 etc. Aldo URSINI ha dimostrato (comunicazione verblae) che nel caso di $\mathcal{P}$ si ha:

$$\bigcup_{n \in \omega} V_n = V$$

Si può congetturarne che nel caso algebrico, sotto opportune ipotesi, $\bigcup_{n \in \omega} V_n$ risulti un filtro massimale.

8. - L'INSIEME DEI τ DIAGONALIZZABILI DI CUI DISPONE UNA FISSATA ALGEBRA DI BOOLE.

E' facile vedere che se in un algebra diagonale $\mathcal{A} = \langle A, +, \cdot, ', 0, 1, \tau, \ldots \rangle$ si prende τ^n in luogo di τ si ottiene ancora un'algebra diagonale. Gabriele MARONGIU ha studiato, in un lavoro in corso di pubblicazione, il caso di $\mathcal{P}$ pervenendo a definire per ogni ordinale costruttivo τ^α un τ^α. Manca uno studio completo dell' insieme dei τ diagonalizzabili ammessi da una fissata algebra di Boole.

9. - LE TEORIE RIFLESSIVE DAL PUNTO DI VISTA ALGEBRICO.

Una teoria formale si dice *riflessiva* se è in grado di dimostrare la consistenza di ogni sua sottoteoria finita. $\mathcal{P}$ è una teoria di questo tipo.

Dal punto di vista algebrico si può tradurre la situazione nel modo seguente.

Si ha un'algebra diagonale $\mathcal{A} = \langle A, +, \cdot, ', 0, 1, \tau, \ldots \rangle$ un filtro booleano T. T si dirà *riflessivo* se, comunque preso $x \in T$, per l'operatore τ_x definito da:

$$\tau_x y = \tau(x \rightarrow y)$$

si ha:

$$(\tau_x 0)' \in T$$

ossia

$$(\tau x')' \in T$$

Se per esempio si considera l'algebra diagonale ottenuta come algebra di Lindenbaum del sistema Q (aritmetica priva di schema di assioma di induzione) allora il filtro dei teoremi di $\mathcal{P}$ è di questo tipo, il che traduce appunto il fatto che $\mathcal{P}$ è riflessiva.

SUMMARY. — This lecture is an expository introduction to algebraic structures linked with the theories which express Theor and in which diagonalisation Lemma holds. In 1., 2., 3. some basilar facts on Peano arithmetic are recalled, in the following numbers the quoted structures are introduced and many open problems are presented.

LAVORI CITATI

[1] CRAIG W, *On axiomatizability within a system.* Journ. Symb. Log., vol. 18, pp. 30-32 (1953).

[2] FEFERMAN S., *Arithmetization of metamathematics in a general setting.* Fund. Math., vol. 49, pp. 35-92 (1960).

[3] GENTZEN G., *Die Widerspruchspreiheit der reinen Zahlentheorie.* Math. Ann., vol. 12 (1936), pp. 493-565.

[4] GÖDEL K., *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter System, I.* Mon. fur Math. and Ph., vol. 38, pp. 173-198 (1931)

[5] KENT, *The relation of* A *to Prof* ⌜A⌝ *in the Lindenbaum sentence algebra.* Journ. Symb. Log., vol. 38, n. 2 (1973), pp. 295-298.

[6] LÖB M. H., *Solution of a problem of Leon Henkin.* Journ. Symb. Log., vol. 20, pp. 115-118 (1955).

[7] MAGARI R., *Classi metaideali di algebre simili.* (*Congruenze ideali III*). Ann. Un. Ferrara (nuova serie), sez. VII, vol. XIV, n. 8, pp. 131-143 (1970).

[8] MAGARI R., *Classi e schemi ideali.* (*Congruenze ideali V*). In corso di pubblicazione sugli Annali dell'Un. di Pisa.

[9] MAGARI R., *Su certe teorie non enumerabili* (*sulle limitazioni dei sistemi formali, I*). Ann. Mat pura ed appl., serie IV, Tomo XCVIII, pp. 119-152 (1974).

[10] MAGARI R., *Significato e verità nell'aritmetica peaniana.* In corso di pubblicazione su Ann. Mat. pura ed appl.

[11] MARONGIU G., *Sequenze di predicati aritmetici di tipo Theor.* B.U.M.I. IV, vol. IX (1974), pp. 361-375.

[12] MONTAGUE R., *Theories incomparable with respect to relative interpretability.* J. Symb. L, vol. 27 (1962), pp. 195-211.

[13] BARKLAY ROSSER J., *Extension of some theorems of Gödel and Church.* Journ. Symb. Log., vol. 1, pp. 87-91 (1936).

[14] URSINI A., *Sulle varietà di algebre con una buona teoria degli ideali.* B.U.M.I. (4), 6 (1972), pp. 90-95.