ANNALI DELL'UNIVERSITÀ DI FERRARA
(Nuova Serie)
Sezione VII - SCIENZE MATEMATICHE - Vol. XIV, N. 6

ROBERTO MAGARI

COSTRUZIONE DI CLASSI FILTRALI

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA
1969

COSTRUZIONE DI CLASSI FILTRALI

ROBERTO MAGARI (*)

PREMESSA.

In un recente lavoro ([3]) R. FRANCI e L. TOTI RIGATELLI hanno dimostrato che il reticolo distributivo semplice è filtrale. Sorge naturale il problema se tale risultato si possa generalizzare.

La piú naturale generalizzazione porta a considerare, in luogo del reticolo distributivo semplice, delle algebre munite di tutte le operazioni reticolari legate ai vari ordini totali nell'insieme di base. Il passaggio che si compie in tal modo è del tutto analogo al passaggio dall'algebra di Boole semplice all'algebra di Post n-valutata semplice o più in generale all'α-algebra funzionalmente completa di cui in [4], [5].

Ciascuna delle algebre che in tal modo si costruiscono genera una varietà di algebre che generalizza la varietà dei reticoli distributivi (che è, come è ben noto, generata dal reticolo distributivo semplice). In effetti il risultato di [3] si estende. I metodi appropriati a questa estensione permettono anzi di costruire facilmente nuove classi filtrali a partire da classi filtrali date. Per esempio si ricava molto facilmente che:

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Comitato per la Matematica del C.N.R. (gruppo 37, anno '68-'69).

(1) Presuppongo la lettura di [6] di cui conserverò in gran parte le notazioni.

(1') My paper [6] is a prerequisite to this one. Notations:

S M: class of algebras isomorphic with subalgebras of elements of M

P M: class of algebras isomorphic with direct products of elements of M

R M: class of algebras isomorphic with subdirect products of elements of M

H M: class of homomorphic images of elements of M

V M: variety generated by M.

(*i*) *Se K è una classe finita di algebre semplici e prive di sottoalgebre non semplici, simili finite ciascuna delle quali è del tipo* $\mathfrak{R}=\langle R, +, \cdot, f_i\rangle_{i\in I}$ *con* $\langle R, +, \cdot\rangle$ *reticolo distributivo, K è filtrale.*

Nel n. 1 sono richiamati nella forma più utile per il seguito alcuni concetti elementari di algebra universale (il richiamo viene fatto soprattutto per fissare le notazioni, per il resto cfr. P. M. COHN [1]). Il n. 9 è dedicato a studiare in particolare le algebre di cui nel primo capoverso di questa premessa ([1]).

1. TIPI DI ALGEBRE E FUNTORE DIMENTICANTE.

DEF. 1. *Un* tipo *è una coppia* $\langle F, \rho\rangle$ *in cui F sia un insieme e* $\rho\colon F\to\omega$ (*l'ordinale* ω).

DEF. 2. *Siano* $\tau_1=\langle F_1, \rho_1\rangle$, $\tau_2=\langle F_2, \rho_2\rangle$ *due tipi. Un omomorfismo da* τ_1 *a* τ_2 *è un'applicazione* σ *da* F_1 *a* F_2 *per cui sia*:

$$\rho_2\sigma f=\rho_1 f \qquad (f\in F_1)$$

(si sottintende la definizione, a partire dal concetto di omomorfismo, dei vari altri concetti di routine ad esso legati.)

DEF. 3. *Sia* $\tau=\langle F, \rho\rangle$ *un tipo. Una* τ*-algebra è allora una coppia* $\mathfrak{A}=\langle A, \varphi\rangle$ *in cui*:

A sia un insieme non vuoto,

$$\varphi\colon F\to\bigcup_{i\in\omega} A^{A^i}$$

con:

$$\varphi f\in A^{A^{\rho f}} \qquad (f\in F).$$

Sottintendo la definizione dei vari concetti di routine per la τ-algebre.

Siano τ_1, τ_2 due tipi e σ un omomorfismo da τ_1 a τ_2. In modo ovvio si ottiene allora un funtore σ^* dalla categoria delle τ_2-algebre alla categoria delle τ_1-algebre ponendo:

$$\sigma^*\langle A, \varphi\rangle=\langle A, \varphi\sigma\rangle \text{ (sugli oggetti)}$$

e prendendo σ^* identico sui morfismi.

Se in particolare σ è un monomorfismo (e possiamo supporre che si tratti di un'inclusione), si tratta di un *funtore dimenticante.*

Avverto che, se $\mathfrak{A}=\langle A, F\rangle$ è un sistema in cui A è un insieme non vuoto ed F è un insieme di operazioni finitarie su A si confonderà talvolta $\mathfrak{A}$ con la F-ρ-algebra $\langle A, j\rangle$ (dove ρ associa agli elementi di F la loro arietà) j essendo l'inclusione da F a $\bigcup_{i\in\omega} A^A$. Così pure si confonderanno, dove non ci sia possibilità di equivoci, le algebre con i loro insiemi di base e, se $\langle G, \sigma\rangle$ è un tipo e $\mathfrak{A}=\langle A, \varphi\rangle$ una G-σ-algebra, si ometterà talvolta la menzione dell'applicazione φ.

(Tali convenzioni sono di uso corrente nella letteratura).

Simili trasparenti abusi di linguaggio saranno usati senza particolari avvertenze.

2. Classi metafiltrali: una classe metafiltrale che non è filtrale.

È facile vedere che non ogni classe di algebre semplici e prive di sottoalgebre non semplici è filtrale, mentre è vero l'inverso (cfr. [6] teor. 4). Per esempio l'algebra di due elementi munita della sola operazione di complementazione non lo è (non è neanche semifiltrale).

Siano ora $\langle F, \rho\rangle$, $\langle G, \sigma\rangle$ due tipi con $\langle F, \rho\rangle$ sottotipo di $\langle G, \sigma\rangle$ (vale a dire $F\subseteq G$ e $\rho=\sigma|_F$).

Sia δ il funtore dimenticante dalla categoria $\mathcal{C}_{\langle G,\sigma\rangle}$ delle G-σ-algebre alla categoria $\mathcal{C}_{\langle F,\rho\rangle}$ delle F-ρ-algebre e siano H una classe filtrale di F-ρ-algebre e K una classe di algebre a sottalgebre semplici di $\mathcal{C}_{\langle G,\sigma\rangle}$ con $\delta(K)\subseteq \boldsymbol{SP}H$.

Def. 4. *In tali condizioni K si dirà* metafiltrale *relativamente al sottotipo $\langle F, \rho\rangle$ e alla classe H. Una classe K si dirà* metafiltrale *se lo è relativamente a un opportuno sottotipo e a un'opportuna classe filtrale H.*

Osservazione 1. *È evidente che se è addirittura $\delta(K)\subseteq H$ allora K è filtrale.*

Si potrebbe supporre che ogni classe metafiltrale sia filtrale. Ciò è falso, come mostra il seguente:

Esempio (α). Siano, per ogni coppia a, $b\in\omega$ con $a<b$, $\overset{b}{\underset{a}{\vee}}$, $\overset{b}{\underset{a}{\wedge}}$ le operazioni binarie (definite in ω) di supremo e di infimo reticolare rispetto all'ordinamento totale, $\leq_a{}^b$, di ω che ammette a, b rispettivamente come primo e ultimo elemento e per il resto coincide con l'ordinamento naturale.

Si ha:

$$x\overset{b}{\underset{a}{\vee}}y=\begin{cases} x \text{ se } x=b \text{ oppure } y=a \\ y \text{ se } x=a \text{ oppure } y=b \\ x\vee y \text{ altrimenti}\end{cases} \qquad (x,\ y\in\omega) \tag{1.1}$$

$$x \overset{b}{\underset{a}{\wedge}} y = \begin{cases} x \text{ se } x=a \text{ oppure } y=b \\ y \text{ se } x=b \text{ oppure } y=a \\ x \wedge y \text{ altrimenti} \end{cases} \qquad (x,\ y \in \omega) \tag{1.2}$$

dove $\vee$, $\wedge$ indicano le ordinarie operazioni reticolari rispetto all'ordinamento naturale.

Sia $\mathfrak{A}$ un'algebra avente ω come insieme di base e come operazioni tutte le $\overset{b}{\underset{a}{\vee}}$ (con $a<b$) ed almeno una delle $\overset{b}{\underset{a}{\wedge}}$ (diciamo almeno la $\overset{1}{\underset{0}{\wedge}}$).

$\mathfrak{A}$ *è ovviamente semplice* insieme a tutte le sue sottoalgebre, se infatti una certa congruenza R di una sottoalgebra $\bar{\mathfrak{A}}$ di $\mathfrak{A}$ associa due elementi distinti m, n (e sia, diciamo, m il minore) allora si ha per ogni $x \in \bar{\mathfrak{A}}$:

$$x \overset{n}{\underset{m}{\vee}} n = n$$

$$x \overset{n}{\underset{m}{\vee}} m = x$$

onde xRn e la R risulta totale.

Detto $\mathfrak{B}$ il reticolo distributivo semplice, $\{\mathfrak{A}\}$ risulta metafiltrale relativamente a $\{\mathfrak{B}\}$ e al sottotipo delle operazioni $\overset{1}{\underset{0}{\vee}}$, $\overset{1}{\underset{0}{\wedge}}$, infatti $\langle \omega, \overset{1}{\underset{0}{\wedge}}, \overset{1}{\underset{0}{\vee}} \rangle$ è ovviamente un reticolo distributivo ed è perciò isomorfo a una potenza sottodiretta di $\mathfrak{B}$, che è filtrale (cfr. R. FRANCI e L. TOTI RIGATELLI [2]).

Sia ora $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}^{\omega}$ e mostriamo che $\mathfrak{C}$ non è a congruenze filtrali. Siano α, β, γ gli elementi definiti da:

$$\left.\begin{aligned} &(2.1)\quad \alpha_i = i \\ &(2.2)\quad \beta_i = i+1 \\ &(2.3)\quad \gamma_i = i+2 \end{aligned}\right\} \quad (i \in \omega).$$

Sia C il filtro dei sottoinsiemi cofiniti di ω e, al solito, (cfr. [6]) poniamo:

$$\Delta(x,\ y) = \{ i \in \omega : x_i = y_i \} \qquad (x,\ y \in \mathfrak{C}) \tag{3}$$

e inoltre:

$$\overline{\Delta}(x,\ y) = \{ i \in \omega : x_i = y_i \text{ oppure } x_i = \alpha_i \text{ e } y_i = \beta_i \tag{4}$$

$$\text{oppure } x_i = \beta_i \text{ e } y_i = \alpha_i \} = \Delta(x,\ y) \cup (\Delta(x,\ \alpha) \cap \Delta(y,\ \beta)) \cup (\Delta(x,\ \beta) \cap \Delta(y,\ \alpha)).$$

Sia poi R la relazione binaria definita da:

$$xRy \text{ se e solo se } \overline{\Delta}(x,\ y) \in C \qquad (x,\ y \in \mathcal{C}) \tag{5}$$

e mostriamo che *la R è una congruenza che associa α con β.*

Ciò si riduce a un laborioso ma banale controllo delle formule seguenti:

$$\left.\begin{array}{ll}
(6.1) & \overline{\Delta}(\alpha,\ \beta)=\omega \\
(6.2) & \overline{\Delta}(x,\ x)=\omega \\
(6.3) & \overline{\Delta}(x,\ y)=\overline{\Delta}(y,\ x) \\
(6.4) & \overline{\Delta}(x,\ z)\supseteq \Delta(x,\ y)\cap \overline{\Delta}(y,\ z) \\
(6.5) & \overline{\Delta}(x \overset{b}{\underset{a}{\vee}} \bar{x},\ y \overset{b}{\underset{a}{\vee}} \bar{y}) \,\tilde{\supseteq}\, \overline{\Delta}(x,\ y)\cap \overline{\Delta}(\bar{x},\ \bar{y}) \\
(6.6) & \overline{\Delta}(x \overset{b}{\underset{a}{\wedge}} \bar{x},\ y \overset{b}{\underset{a}{\wedge}} \bar{y}) \,\tilde{\supseteq}\, \overline{\Delta}(x,\ y)\cap \overline{\Delta}(\bar{x},\ \bar{y})
\end{array}\right\} \quad (x, \bar{x}, y, \bar{y}, z \in \mathcal{C})$$

(dove, se A, $B \subseteq \omega$, $A \,\tilde{\supseteq}\, B$ sta per "$A \cup B' \in C$" ossia per "$B-A$ è finito").

Mi limito ad accennare brevemente al modo di controllare le (6). Prendiamo la (6.5). Scrivendo per brevità uv per $\Delta(u,\ v)$, $\cdot$ per $\cap$, $+$ per $\cup$ e $\frac{m}{n}$ per $m \overset{b}{\underset{a}{\vee}} n$ la (6.5) diviene, tenuto conto della (4):

$$\begin{aligned}
(6.5.1) \qquad & \frac{x}{\bar{x}}\,\frac{y}{\bar{y}} + \frac{x}{\bar{x}}\,\alpha \cdot \frac{y}{\bar{y}}\,\beta + \frac{x}{\bar{x}}\,\beta \cdot \frac{y}{\bar{y}}\,\alpha \,\tilde{\supseteq} \\
& \tilde{\supseteq}\, xy \cdot \bar{x}\bar{y} + xy \cdot \bar{x}\alpha \cdot \bar{y}\beta + xy \cdot \bar{x}\beta \cdot \bar{y}\alpha + \bar{x}\bar{y} \cdot x\alpha \cdot y\beta + \\
& + x\alpha \cdot y\beta \cdot \bar{x}\alpha \cdot \bar{y}\beta + x\alpha \cdot y\beta \cdot \bar{x}\beta \cdot \bar{y}\alpha + \bar{x}\bar{y} \cdot x\beta \cdot y\alpha + \\
& + x\beta \cdot y\alpha \cdot \bar{x}\alpha \cdot \bar{y}\beta + x\beta \cdot y\alpha \cdot \bar{x}\beta \cdot \bar{y}\alpha .
\end{aligned}$$

Ora chiaramente $xy \cdot \bar{x}\bar{y} \subseteq \frac{x}{\bar{x}}\,\frac{y}{\bar{y}}$ Sia i un indice appartenente a $xy \cdot \bar{x}\alpha \cdot \bar{y}\beta$. Per esso è:

$$x_i = y_i$$

$$\bar{x}_i = \alpha_i$$

$$\bar{y}_i = \beta_i \,.$$

Per i valori di $\frac{x}{\bar{y}}$, $\frac{y}{\bar{y}}$ si hanno allora le seguenti possibilità:

$$
\begin{array}{l|c|c|c|c|}
(x \overset{b}{\underset{a}{\vee}} \bar{x})_i = & x_i & x_i & \alpha_i & \alpha_i \\
(y \overset{b}{\underset{a}{\vee}} \bar{y})_i = & x_i & \beta_i & x_i & \beta_i
\end{array}\ .
$$

Nel primo e nel quarto caso i appartiene rispettivamente a $\frac{x}{x} \cdot \frac{y}{y}$ e a $\frac{x}{x}\alpha \cdot \frac{y}{y}\beta$. Se si verifica il secondo caso dev'essere $\alpha_i \leq_a{}^b x_i \leq_a{}^b \beta_i$. Se vale uno dei segni $=$ si ricade nel primo o nel quarto caso, quindi ci interessa solo il caso $\alpha_i <_a{}^b x_i <_a{}^b \beta_i$, ma ciò è possibile solo se $\alpha_i = a$ o $\beta_i = b$, il che accade solo per due indici al più. Analogamente si tratta il terzo caso. Gli altri addendi della somma a secondo membro della (6.5.1) si trattano nello stesso modo e ne resta dimostrata la (6.5).

Si osservi ora che è:

$$\bar{\Delta}(\alpha,\ \gamma) = \emptyset$$

onde:

$$\langle \alpha,\ \gamma \rangle \notin R. \tag{6}$$

Se ora la R fosse filtrale ad ogni filtro ad essa associato apparterrebbe $\Delta(\alpha,\ \beta) = \emptyset$ onde esso risulterebbe improprio e la R totale, contro la (6).

Così $\{\mathfrak{A}\}$ risulta metafiltrale *ma non filtrale e neanche semifiltrale.*

3. Alcuni lemmi sulle classi metafiltrali.

Sia K una classe metafiltrale relativamente a una certa classe filtrale H e sia $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ una famiglia di algebre di K e $\mathfrak{A}$ una sottoalgebra di $\Pi\mathfrak{A}_i$. Siano τ, $\bar{\tau}$ i tipi di H e di K rispettivamente.

Poichè K è metafiltrale relativamente ad H sarà, per ogni $i\in I$, $\delta\mathfrak{A}_i$ (δ essendo al solito il funtore dimenticante) sottoalgebra del prodotto di una famiglia $(\mathfrak{B}_j)_{j\in J_i}$ con $\mathfrak{B}_j \in H$. Possiamo supporre gli J_i a due a due disgiunti. Sia $J = \bigcup_{i\in J} J_i$ e sia φ l'applicazione canonica da $\delta\mathfrak{A}$ a $\prod_{j\in J} \mathfrak{B}_j$ (definita da:

$$\varepsilon_j \varphi x = \varepsilon_j \varepsilon_{i(j)} x \qquad (x \in \mathfrak{A})) \text{ (}^2\text{)}. \tag{8}$$

La φ è ovviamente un monomorfismo. Detta $\mathfrak{B}$ l'immagine di φ possiamo introdurre in $\mathfrak{B}$ una struttura di $\bar{\tau}$-algebra, $\bar{\mathfrak{B}}$, in modo tale che φ (precisamente

---

([2]) Dove $i(j)$ indica (l'unico) i per cui $j \in J_i$.

la sua corestrizione a $\mathcal{B}$, ma queste distinzioni saranno d'ora in poi omesse quando non necessarie), risulti un isomorfismo da $\mathcal{A}$ a $\bar{\mathcal{B}}$. Poichè H è filtrale e una $\bar{\tau}$-congruenza è ovviamente anche una τ-congruenza, ogni congruenza di $\bar{\mathcal{B}}$ è associata a un filtro su J (cfr. [6] teor. 4).

Per brevità se R è una congruenza di $\mathcal{A}$ e la sua immagine in φ è associata a un certo filtro F su J si dirà anche che la R è associata ad F.

Il punto è ovviamente di sapere se ogni congruenza di $\mathcal{A}$ sia associata, oltre che a filtri su J, anche a filtri su I. Ovviamente ciò accade, per una data R, se e solo se fra i filtri su J ad essa associati ce n'è uno *buono* nel senso della definizione seguente:

DEF. 5. *Un filtro F su J si dirà* buono *se e solo se per ogni $X \in F$ è $X = \bigcup_{\substack{J_i \subseteq X \\ i \in I}} J_i \in F$. In altri termini se ammette almeno un insieme di generatori ciascuno dei quali è unione di certi J_i.*

Detti associati un filtro F su J e un filtro G su I se e solo se F è il filtro generato da $\{\bigcup_{i \in X} J_i : X \in G\}$ (da cui segue che $G = \{\{i \in I : J_i \subseteq X\} : X \in F\}$) è chiaro che:

LEMMA 1. *I filtri su J associati a filtri su I sono tutti e soli i* buoni *filtri su J. Se una congruenza R di $\mathcal{A}$ è associata ad uno di due filtri associati è associata anche all'altro.*

Porremo:

$$\left.\begin{aligned} \Delta(x,\ y) &= \{i \in I : x_i = y_i\} \\ \bar{\Delta}(x,\ y) &= \{j \in J : (\varphi x)_j = (\varphi y)_j\} \end{aligned}\right\} (x,\ y \in \mathcal{A}).$$

Sia ora R una congruenza di $\mathcal{A}$. Indichiamo con F_R il *minimo* filtro su J associato ad R, vale a dire il filtro $\overline{\{\bar{\Delta}(p) : p \in R\}}$ (il soprassegno sta per « filtro generato da ... »), con M_R l'insieme $\bigcap_{p \in R} \bar{\Delta}(p) = (= \bigcap_{X \in F_R} X)$ e infine con $\bar{M}_R$ l'insieme $\bigcup_{\substack{i \in I \\ J_i \subseteq M_R}} J_i$.

Si dirà che X è I-cofinito se $\{i \in I : J_i \subseteq X\}$ è cofinito in I. Ovviamente se X è cofinito è anche I-cofinito ma non necessariamente viceversa.

Poniamo $F_R^* = F_R \cup \{X \subseteq J : X$ è I-cofinito e $X \supseteq \bar{M}_R\}$.

Vale il seguente:

LEMMA 2. *F_R^* è associato alla R.*

DIM. Basterà dimostrare che se per certi $x,\ y \in \mathcal{A}$ è $\bar{\Delta}(x,\ y) \in F_R^*$ si ha xRy.

Siano appunto x, y nelle condizioni dette, si avrà: $\bar{\Delta}(x, y) \supseteq Y \cap Z$ con $Y \in F_R$, $Z \supseteq \bar{M}_R$, Z I-cofinito.

Posto al solito $\bar{Z} = \bigcap_{\substack{J_i \subseteq Z \\ i \in I}} J_i$ è $\bar{M}_R \subseteq \bar{Z} \subseteq Z$ e l'insieme $L = \{i \in I : J_i \subseteq \bar{Z}'\}$ risulta finito (essendo Z, e perciò $\bar{Z}$, I-cofinito).

Tenuto conto della definizione di M_R, per ogni $i \in L$ esiste un $\langle u^{(i)}, v^{(i)} \rangle \in R$ con $\bar{\Delta}(u^{(i)}, v^{(i)}) \cap J_i \neq J_i$.

Sia R_i la chiusura transitiva dell'immagine di R in ε_i, che risulta una congruenza di $\varepsilon_i(\mathfrak{A}_i)$. È certo $\varepsilon_i u^{(i)} \neq \varepsilon_i v^{(i)}$ onde R_i, essendo $\varepsilon_i(\mathfrak{A}_i)$ semplice, risulta totale. Perciò anche $\varepsilon_i x$ e $\varepsilon_i y$ risultano associati in R_i e pertanto esiste una sequenza finita $(p^{(i,h)})_{h \in n_i}$ di coppie di R $(p^{(i,h)} = \langle r^{(i,h)}, s^{(i,h)} \rangle$ per cui si ha:

$$\varepsilon_i r^{(i,0)} = \varepsilon_i x, \quad \varepsilon_i s^{(i,h)} = \varepsilon_i r^{(i,h+1)}, \quad \varepsilon_i s^{(i,n_i-1)} = \varepsilon_i y.$$

Risulta ora:

$$\bar{Z} \cup \bar{\Delta}(x, y) \supseteq \bigcap_{\substack{h \in n_i \\ i \in L}} \bar{\Delta}(r^{(i,h)}, s^{(i,h)})$$

e infine:

$$\bar{\Delta}(x, y) \supseteq Y \cap (\bar{Z} \cup \bar{\Delta}(x, y)) \supseteq Y \cap \bigcap_{\substack{h \in n_i \\ i \in L}} \bar{\Delta}(r^{(i,h)}, s^{(i,h)}) \in F_R .$$

Pertanto $\bar{\Delta}(x, y) \in F_R$ e perciò xRy.

4. CASO IN CUI I È FINITO.

Abbiano H, K, $\mathfrak{A}$ etc. il solito significato.

Dal lemma 2 si ricava anzitutto facilmente il seguente:

TEOR. 1. *Se I è finito $\mathfrak{A}$ è a congruenze filtrali.*

DIM. Ovviamente nel caso in esame F_R^* è il filtro principale generato da $\bar{M}_R$ ed è quindi un buon filtro su J.

In seguito (teor. 3) si darà un rafforzamento del teor. 1.

Il teor. 1 ovviamente non risponde al quesito posto inizialmente, che riguardava la filtralità di K. Per arrivare a dare una condizione sufficiente per la filtralità di K sono necessari alcuni fastidiosi preliminari che verranno trattati nel n. 5.

5. UN LEMMA SULLE CONGRUENZE.

Sia $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ una famiglia di algebre simili, $\mathfrak{A}$ un prodotto sottodiretto delle $\mathfrak{A}_i$, $M \subseteq \mathfrak{A}^2$, $p \in \mathfrak{A}^2$.

Definiamo su I una relazione di equivalenza ponendo:

$$i \sim j \text{ se e solo se } \mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}_j \text{ e per ogni } q \in M \cup \{p\} \text{ è } \varepsilon_i q = \varepsilon_j q.$$

(dove ovviamente, se $q = \langle x, y \rangle \in \mathfrak{A}^2$, $\varepsilon_r q$ sta per $\langle \varepsilon_r x, \varepsilon_r y \rangle$).

Sia L un qualunque insieme di rappresentanti di $I/\sim$. Vale il seguente:

LEMMA 3. *Sia* $\mathfrak{A}_L$ *la sottoalgebra di* $\varepsilon_L(\mathfrak{A})$ [3] *generata da* $\varepsilon_L(N)$, N *essendo l'insieme degli elementi che occorrono nelle coppie di* $M \cup \{p\}$. *Se* $\varepsilon_L(p)$ *appartiene alla congruenza (di* $\mathfrak{A}_L$) $\overline{\varepsilon_L(M)}$ *generata da* $\varepsilon_L(M)$ *allora* p *appartiene alla congruenza* $\overline{M}$ *generata da* M.

DIM. Se $\varepsilon_L p \in \overline{\varepsilon_L(M)}$ esiste ovviamente una sequenza finita:

$$p^{(1)},\ p^{(2)},\ \dots,\ p^{(n)} \qquad (p^{(i)} \in \mathfrak{A}_L^2)$$

in cui ciascun $p^{(i)}$ è:

(i) o un elemento di $\varepsilon_L(M)$

(ii) o un elemento della diagonale di $\mathfrak{A}_L$

(iii) o del tipo $\breve{r}$ dove r lo precede $(\widetilde{\langle x, y\rangle} = \langle y, x\rangle)$

(iv) o del tipo $r \square s$ dove r, s lo precedono

$$(\langle x, y\rangle \square \langle y, z\rangle = \langle x, z\rangle)$$

(v) o del tipo $f(r^{(1)}, r^{(2)}, \dots, r^{(m)})$ dove gli $r^{(i)}$ lo precedono ed f è un'operazione di $\mathfrak{A}$ (più esattamente omologa in $\mathfrak{A}_L$ ad una operazione di $\mathfrak{A}$) e inoltre $p^{(n)} = \varepsilon_L p$. Sia, per ogni $x \in \mathfrak{A}_L$, $\widehat{x}$ l'elemento (di $\mathfrak{A}$, come facilmente si verifica) definito da:

$$\widehat{x}_i = x_{\rho i} \qquad (i \in I)$$

ρi essendo il rappresentante della classe di equivalenza di i che appartiene ad L. Non è difficile vedere che la sequenza dei $\widehat{p^{(i)}}$ $(\widehat{\langle x, y\rangle} = \langle \widehat{x}, \widehat{y}\rangle)$ permette di stabilire che $p \in \overline{M}$.

6. UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE PER LA FILTRALITÀ DI K.

Abbiano di nuovo $\mathfrak{A}$, H, K etc. il significato del n. 3 e supponiamo che K ammetta solo un numero finito di tipi di isomorfismo e che ogni algebra di K sia finita. Possiamo supporre addirittura che K sia finita. Sia al solito R una congruenza di $\mathfrak{A}$. Sia $F_R{}^{**}$ il filtro generato dall'insieme $\{\overline{X} : X \in F_R\}$ (dove al solito $\overline{X}$ sta per $\bigcup_{\substack{J_i \subset X \\ i \in I}} J_i$). $F_R{}^{**}$ è certo un buon filtro.

Poichè $\overline{X} \cap \overline{Y} = \overline{X \cap Y}$ per dimostrare che $F_R{}^{**}$ è ancora associato ad R basterà dimostrare che se per certi x, $y \in \mathfrak{A}^2$ è $\overline{\Delta}(x, y) \supseteq \overline{X}$ con $X \in F_R$ allora è

---

(3) Dove ε_L è l'omomorfismo canonico da $\mathfrak{A}$ a $\prod_{i \in L} \mathfrak{A}_i$; $(\varepsilon_L x)_i = x_i)(x \in \mathfrak{A},\ i \in L)$.

xRy. Siano appunto x, y, X come sopra. Sarà $X \supseteq \bigcap_{i \in n} \overline{\Delta}(p^{(i)})$, per un certo n finito, con $p^{(i)} \in R$.

Sia $\overline{I} = \{i \in I : J_i \nsubseteq X\}$ e mostriamo che $\varepsilon_{\overline{I}}\, x$, $\varepsilon_{\overline{I}}\, y$ sono associati nella chiusura transitiva $\overline{R}$ di $\varepsilon_I(R)$. Date le condizioni di finitezza la $\sim$ costruita come nel n. 5 relativamente al caso $M = \{\varepsilon_I p^{(i)} : i \in n\}$, $p = \langle \varepsilon_I x,\ \varepsilon_I y \rangle$ essendo $\varepsilon_I(\mathfrak{A})$ l'algebra interessata, ha un numero finito di classi di equivalenza. Sia L un insieme di rappresentanti. Poichè L è finito $\varepsilon_L x$, $\varepsilon_L y$ risultano ora associati nella congruenza di $\mathfrak{A}_L$ generata da $\varepsilon_L(M)$ (lemma 2) e pertanto, a norma del lemma 3, $\varepsilon_I x$ e $\varepsilon_{\overline{I}}\, y$ risultano associati in R. Pertanto esiste una certa sequenza finita $(q^{(h)})_{h \in m}$ di coppie di $R (q^{(h)} = \langle r^h, s^{(h)} \rangle)$ con:

$$\varepsilon_I\, r^{(0)} = \varepsilon_{\overline{I}}\, x, \quad \varepsilon_I\, s^{(h)} = \varepsilon_{\overline{I}}\, r^{(h+1)} \varepsilon_I\, s^{(n-1)} = \varepsilon_{\overline{I}}\, y$$

e chiaramente è $\overline{\Delta}(x, y) \supseteq X \cap \bigcap_{h \in m} \overline{\Delta}(q^{(h)}) \in F_R$ onde xRy.

Così $F_R{}^{**}$ è associato ad R. Ne segue che:

TEOR. 2. *Se K è finita, costituita di algebre finite e metafiltrale allora è filtrale.*

7. Un rafforzamento del teor. 1.

Ia stessa tecnica permette di dimostrare il seguente teorema, che rafforza il teor. 1.

TEOR. 3. *Se la famiglia $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ ha codominio finito e ogni $x \in \mathfrak{A}$ ha codominio finito allora $\mathfrak{A}$ è a congruenze filtrali.*

DIM. Ancora una volta la $\sim$ costruita come nel teor. 2 ha un numero finito di classi di equivalenza.

8. Alcune conseguenze del teor. 2.

Tenendo conto della filtralità dell'algebra di Boole semplice e del noto teorema di Stone si trova ad esempio:

COR. 1. *Ogni classe finita di algebre cilindriche semplici finite è filtrale.*

Tenendo conto della filtralità del reticolo distributivo semplice ([3]) si trova subito che:

COR. 2. *Se K è una classe finita di algebre simili del tipo $\mathfrak{R} = \langle R, +, \cdot, f_i \rangle_{i \in I}$ semplici e a sottoalgebre semplici con $\langle R, +, \cdot \rangle$ reticolo distributivo finito, K è filtrale.*

Il controesempio dato nel n. 1 mostra che questo risultato non sussiste, senza ulteriori ipotesi, se si toglie l'ipotesi della finitezza dei vari insiemi di base.

9. Varietà di plurireticoli.

È ben noto come molti concetti e risultati booleani si estendano secondo il seguente prospetto:

Cardinale	Algebra generatrice	Varietà generata
2	Algebra di Boole semplice	Varietà delle algebre di Boole
α	Algebra funzionalmente (strettamente) completa di card. α	Varietà delle α-algebre

secondo idee principalmente dovute a A. L. Foster [2] e ampiamente sviluppate e generalizzate da Foster stesso e da A. Astromoff, A. F. Pixley e altri in lavori successivi. Un'analoga estensione si può fare a partire dal reticolo distributivo semplice ottenendo il seguente prospetto:

Cardinale	Algebra generatrice	Varietà generata
2	Ret. distr. semplice	Varietà dei ret. distr.
α	α-plurireticolo fondamentale	Varietà degli α-plurireticoli

(Vedere oltre le definizioni).

Fissiamo per ogni cardinale α un insieme di α elementi (supponiamo per semplicità che si tratti di α stesso ma la cosa è ovviamente indifferente) e per ogni ordine totale ρ su α siano $\overset{\rho}{\bigvee}$, $\underset{\rho}{\bigwedge}$ le operazioni di supremo e infimo reticolare rispetto a ρ.

Def. 6. *Si darà α-plurireticolo fondamentale l'algebra α avente come insieme di base α e come operazioni tutte le operazioni reticolari legate ai vari ordini totali di α* (4) *e α-plurireticolo forte fondamentale l'algebra $\underline{\underline{\alpha}}$ che (oltre alle predette operazioni) ammette tutte le operazioni 0-adiche.*

---

(4) Ovviamente se ρ_1 è l'ordine inverso di ρ_2 è $\underset{\rho_2}{\bigwedge} = \overset{\rho_1}{\bigvee}$, $\underset{\rho_2}{\bigwedge} = \overset{\rho_1}{\bigvee}$ cosicchè la richiesta è sovrabbondante.

DEF. 7 *Si dirà α-plurireticolo (α-plurireticolo forte) ogni algebra della varietà generata da $\underline{\alpha}$ (da $\underline{\underline{\alpha}}$).*

Prima di procedere allo studio dei plurireticoli osserviamo che $\underline{\underline{\alpha}}$ per α finito $\alpha \neq 2$ è strettamente funzionalmente completa. (Il controllo può essere eseguito cominciando col dimostrare che, per $n \in \alpha$, l'operazione unaria ε^n definita da:

$$\varepsilon^n x = \begin{cases} 1 & \text{se } x = n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene al clono generato dalle operazioni di $\underline{\underline{\alpha}}$ (è essenziale l'ipotesi $\alpha \neq 2$). L'algebra $\underline{\alpha}$ per α finito $\alpha \neq 2$ ricade quindi sotto i ben noti teoremi di A. L. FOSTER.

Diversa è la situazione per $\underline{\alpha}$ (qualunque sia α) e per $\underline{\underline{\alpha}}$ con α infinito.

Dal cor 2 segue subito che:

COR. 3. *Se α è finito $\underline{\alpha}$ è filtrale (e quindi semicategorico,* cfr. [6]).

Ovviamente il risultato vale anche per $\underline{\underline{\alpha}}$ ma è banale, come sopra si è osservato.

Se invece α è infinito si presenta un'interessante situazione: $\underline{\underline{\alpha}}$ (e perciò $\underline{\alpha}$) risulta cioè semifiltrale nel senso di [6] (tale cioè che ogni potenza diretta di $\underline{\alpha}$ è a congruenze filtrali) ma non *filtrale* (e così $\underline{\underline{\alpha}}$) .

Mostriamo anzitutto che:

TEOR. 4. *Se α è infinito $\underline{\underline{\alpha}}$ non è filtrale* (nè, quindi, lo è $\underline{\alpha}$).

DIM. Sia appunto α infinito e sia d la diagonale di α^2 (il quadrato è qui inteso in senso insiemistico).

Fissiamo una biiezione φ da α ad $\alpha^2 - d$ e siano a, b gli elementi di $\underline{\underline{\alpha}}^\alpha$ definiti da:

$$\left.\begin{aligned} a_i &= \varepsilon_0 \varphi i \\ b_i &= \varepsilon_1 \varphi i \end{aligned}\right. \qquad (i \in \alpha).$$

Poniamo ora per ogni elemento $x \in \alpha^\alpha$:

$$\delta(x) = \{ i \in \alpha : x_i \in \{a_i , b_i\}\}$$

$$\rho(x) = \text{codom. } x_{|(\delta(x))'}$$

Mostriamo che gli elementi x di α^α tali che $\rho(x)$ sia finito costituiscono una sottoalgebra $\mathfrak{A}$ di $\underline{\underline{\alpha}}^\alpha$ (cui appartengono ovviamente a, b).

È anzitutto ovvio che $\mathfrak{A}$ contiene tutti gli elementi costanti, è cioè chiusa rispetto a tutte le operazioni 0-adiche.

Sia σ un qualunque ordine totale su α; x, y elementi di $\mathfrak{A}$, e mostriamo che $x \overset{\sigma}{\vee} y$ appartiene ad $\mathfrak{A}$.

Si ha:

$$\rho(x \overset{\sigma}{\vee} y) = \{(x \overset{\sigma}{\vee} y)_i : i \in (\delta(x \overset{\sigma}{\vee} y))'\} = \{x_i : y_i \leq_\sigma x_i \text{ e } x_i \notin \{a_i, b_i\}\} \cup$$

$$\cup \{y_i : x_i \leq_\sigma y_i \text{ e } y_i \notin \{a_i, b_i\}\} \subseteq \rho x \cup \rho y$$

da cui:

$$\text{Card}\, \rho(x \overset{\sigma}{\vee} y) \leq \text{Card}\, \rho x + \text{Card}\, \rho y.$$

$\mathfrak{A}$ è perciò una sottoalgebra di $\underline{\underline{\alpha}}^{\alpha}$.

Per ogni ripartizione finita di α, $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ sia $\bar{\beta} = \varphi^{-1}((\cup \beta_i^2) - d)$ e sia B l'insieme delle ripartizioni finite di α e $\bar{B} = \{\bar{\beta} : \beta \in B\}$. Si osservi che, essendo α infinito, nessun $\bar{\beta}$ con $\beta \in B$ è vuoto (almeno un β_i ha più di un elemento e β_i^2 ha coppie non appartenenti a d). Inoltre se $X = \bar{\beta} \cap \bar{\gamma}$ con $\beta, \gamma \in B$, $\beta = \{\beta_i\}_{i \in n}$, $\gamma = \{\gamma_j\}_{j \in m}$, è $X = \bar{\zeta}$ dove $\zeta = \{\beta_i \cap \gamma_j\}_{\substack{i \in n \\ j \in m}}$, cosicchè il filtro F su α generato da $\bar{B}$ è $\{X \subseteq \alpha$: esiste un $\beta \in B$ con $X \supseteq \bar{\beta}\}$.

Dato che α è infinito F risulta proprio. Può essere utile osservare che F è frechetiano (contiene cioè il filtro dei cofiniti di α). Se infatti X è un cofinito di α, posto

$$\beta = \{\{x\} : x \in \varepsilon_0\varphi(X') \cup \varepsilon_1\varphi(X')\} \cup \{(\varepsilon_0\varphi(X') \cup \varepsilon_1\varphi(X'))'\}$$

si vede facilmente che β è una ripartizione finita di α con $X \supseteq \bar{\beta}$.

Per ogni coppia $x, y \in \mathfrak{A}$ poniamo ora:

$$\bar{\Delta}(x, y) = \Delta(x, y) \cup (\delta x \cap \delta y)$$

e consideriamo la R definita su $\mathfrak{A}$ da:

$$\langle x, y \rangle \in R \quad \text{se e solo se} \quad \bar{\Delta}(x, y) \in F.$$

Verifichiamo che la R è di congruenza. Per comodità scriviamo $\overline{xy}$ per $\bar{\Delta}(x, y)$, xy per $\Delta(x, y)$, $\widehat{x}$ per δx, $\frac{x}{y}$ per il risultato di un'operazione di α applicata a x, y; inoltre $+$ per $\cup$ e $\cdot$ per $\cap$. (Purtroppo le fastidiose verifiche che seguono non possono essere del tutto omesse perchè contengono alcuni passaggi delicati).

Anzitutto:

$$\left.\begin{array}{ll} (9.1) & \overline{xx} = xx + \widehat{x} \cdot \widehat{x} = xx = \alpha \in F \\ (9.2) & \overline{xy} = \overline{yx} \\ (9.3) & \overline{xz} = xz + \widehat{x} \cdot \widehat{z} \supseteq xy \cdot yz + xy \cdot \widehat{y} \cdot \widehat{z} + yz \cdot \widehat{x} \cdot \widehat{y} + \widehat{x} \cdot \widehat{y} \cdot \widehat{z} = \overline{xy} \cdot \overline{yz} \end{array}\right\} (x, y, z \in \mathfrak{A})$$

L'unico passaggio non immediato è l'inclusione della terza espressione nella seconda. Il primo e il quarto termine della terza espressione sono ovviamente contenuti rispettivamente nel primo e nel secondo della seconda;

$$\text{se } i \in xy \cdot \widehat{y} \cdot \widehat{z} \text{ è } x_i = y_i\,,\ y_i \in \{a_i\,,\ b_i\},\ z_i \in \{a_i\,,\ b_i\}$$

dunque $x_i \in \{a_i\,,\ b_i\}$ e infine $i \in \widehat{x} \cdot \widehat{z}$. Analogamente per il terzo termine.

Le (9.1), (9.2), (9.3) mostrano che R è un'equivalenza.

Siano ora $x,\ y,\ z,\ t \in \mathfrak{A}$, xRy, zRt. Dobbiamo mostrare che $\frac{x}{z} R \frac{y}{t}$

Consideriamo le espressioni:

$$\overline{\Delta}\left(\frac{x}{z},\ \frac{y}{t}\right) = \frac{x}{z}\frac{y}{t} + \widehat{\left(\frac{x}{z}\right)} \cdot \widehat{\left(\frac{y}{t}\right)}$$

$$\overline{xy} \cdot \overline{zt} = (xy + \widehat{x} \cdot \widehat{y})(zt + \widehat{z} \cdot \widehat{t}) = xy \cdot zt + xy \cdot \widehat{z} \cdot \widehat{t} + zt \cdot \widehat{x} \cdot \widehat{y} + \widehat{x} \cdot \widehat{y}\ \widehat{z} \cdot \widehat{t}.$$

Il primo e il quarto termine della seconda espressione sono rispettivamente contenuti nel primo e nel secondo della prima.

Sia $i \in xy \cdot \widehat{z} \cdot \widehat{t}$, allora $x_i = y_i\,,\ z_i \in \{a_i\,,\ b_i\},\ t_i \in \{a_i\,,\ b_i\}$.

Sia U_0 l'insieme degli indici di questo termine non appartenenti alla prima espressione. Per ogni $i \in U_0$ deve essere $z_i \neq t_i$ (diciamo $z_i = a_i\,,\ t_i = b_i$) e inoltre $a_i\,,\ b_i$, nell'ordine totale $\leq$ su α che dà origine all'operazione considerata, devono trovarsi da parti opposte rispetto al valore comune c_i di $x_i\,,\ y_i$. U_0 è cioè contenuto in $U_0^* = \{i \in \alpha\colon\ a_i < c_i < b_i$ oppure $b_i < c_i < a_i\}$. Ma, posto $\mu_i = \{\{j \in \alpha\colon j < c_i\},\ \{c_i\},\ \{j \in \alpha\colon c_i < j\}\}$ è chiaramente $U_0^* \subseteq \bigcup \overline{\mu}'_i$. Ma essendo ρx, ρy finiti e $c_i \notin \{a_i\,,\ b_i\}$ la famiglia dei c_i considerati ha codominio finito e l'unione al secondo membro si riduce a un'unione finita. Ne segue che U_0 è il complementare di un elemento, T_0, di F.

Analogamente si dimostra che l'insieme degli indici del terzo termine non appartenenti alla prima espressione è il complementare U_1 di un elemento, T_1, di F.

In definitiva è

$$\overline{\Delta}\left(\frac{x}{z},\ \frac{y}{t}\right) \supseteq \overline{\Delta}(x,\ y) \cap \overline{\Delta}(z,\ t) \cap T_0 \cap T_1 \in F$$

onde $\frac{x}{z} R \frac{y}{t}$.

La R è perciò di congruenza.

D'altronde la R non è filtrale. Da un lato infatti $\Delta(a,\ b) = \emptyset$, dunque un eventuale filtro associato alla R dovrebb'essere improprio e la R totale, dall'altro se c, d sono due elementi di valori costanti distinti è chiaramente:

$$\overline{\Delta}(c,\ d) \notin F \qquad \text{onde} \qquad \langle c,\ d \rangle \notin R.$$

(È infatti $\overline{\Delta}(c, d) = \Delta(c, d) \cup (\delta c \cap \delta d) = \delta c \cap \delta d$. Ora supponiamo per assurdo che sia $\delta c \cap \delta d \in F$. Sarebbe ovviamente $\delta c \in F$, $\delta c \supseteq \overline{\beta}$ con β opportuna ripartizione finita di α. Ora β ha almeno un elemento β_i di cardinale infinito e dovrebb'essere $\varphi\delta c \supseteq ((\beta_i)^2 - d)$. Ma $\varphi(\delta c)$ contiene solo coppie in cui uno dei due elementi è il valore costante di c).

Il teorema è così dimostrato.

Resta da dimostrare che:

TEOR. 4. (*Anche se α è infinito*) $\underline{\alpha}$ *è semifiltrale* (*e così, ovviamente,* $\underline{\underline{\alpha}}$).

DIM. Sia $\underline{\alpha}^I$ una potenza diretta di $\underline{\alpha}$ e R una congruenza di $\underline{\alpha}^I$. Basterà dimostrare che se $\langle x^i, y^i \rangle \in R$ ($i \in n$, n finito) e $\Delta(x, y) \supseteq \bigcap_{i \in n} \Delta(x^i, y^i)$, allora xRy.

Anzitutto possiamo supporre che rispetto all'ordinamento naturale, $\leq$, di α sia $x^i \leq y^i$ e $x \leq y$. Sostituendo infatti a x^i, y^i e a x, y la loro unione reticolare e rispettivamente la loro intersezione rispetto a $\leq$ non si altera la situazione (cfr. R. FRANCI e L. TOTI RIGATELLI [3]).

Prendiamo ora in considerazione una delle coppie, e sia $\langle x^i, y^i \rangle$. Sia z^i l'elemento di α^I definito da:

$$z_j^i = x_j^i + 1$$

(dove $+$ rappresenta l'ordinaria somma ordinale) e sia:

$$\overline{x}^i = x^i \wedge z^i = (= x^i)$$

$$\overline{y}^i = y^i \wedge z^i.$$

Consideriamo ora un ordine $<$ in cui 0 preceda tutti i pari (5) e segua tutti i dispari, sia $\curlywedge$ la corrispondente intersezione reticolare e sia $\overline{0}$ l'elemento di valore costante 0. Poniamo:

$$\overline{\overline{x}}^i = \overline{x}^i \curlywedge \overline{0}$$

$$\overline{\overline{y}}^i = \overline{y}^i \curlywedge \overline{0}.$$

Chiaramente $\overline{\overline{x}}^i R \overline{\overline{y}}^i$ e $\Delta(\overline{\overline{x}}^i, \overline{\overline{y}}^i) = \Delta(x^i, y^i)$.

Ora consideriamo al posto di $\overline{\overline{x}}^i$, $\overline{\overline{y}}^i$ gli elementi

$$\begin{aligned} u^i &= \overline{\overline{x}}^i \wedge \overline{\overline{y}}^i \wedge w \\ v^i &= (\overline{\overline{x}}^i \vee \overline{\overline{y}}^i) \wedge w \end{aligned} \qquad \text{dove } w_j = \begin{cases} 0 \text{ se } j \in \Delta(x^i, y^i) \text{ e } x_j^i \text{ è dispari} \\ x_j^i + 1 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

(5) È ben noto che si possono definire i concetti di pari e dispari per gli ordinali ponendo gli ordinali limite pari etc.

con il che nuovamente la situazione non si altera e inoltre:

$$u^i = \bar{0}$$

$$v_j^i = \begin{cases} 0 \text{ se } j \in \Delta(x^i, y^i) \\ \text{un valore dispari, altrimenti.} \end{cases}$$

Infine intersechiamo i due elementi con l'elemento 1 di valore costante 1. Di nuovo la situazione non si altera e si ottengono due elementi $\bar{u}^i$, $\bar{v}^i$ con:

$$\bar{u}^i = \bar{0}$$

$$\bar{v}_j^i = \begin{cases} 0 \text{ se } j \in \Delta(x^i, y^i) \\ 1, \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

Si ha ora:

$$x = [(\bigvee_{i \in n} \bar{u}^i) \overset{1}{\underset{0}{\wedge}} y] \vee x$$

$$y = [(\bigvee_{i \in n} \bar{v}^i) \overset{1}{\underset{0}{\wedge}} y] \vee x$$

dove $\overset{1}{\underset{0}{\wedge}}$ è l'infimo reticolare rispetto a un qualunque ordine totale che ammetta 0 come minimo e 1 come massimo.

Così xRy e il teorema è dimostrato.

Pervenuto in Redazione il 13 novembre 1968.

RIASSUNTO

Sia H una classe filtrale (1) di strutture algebriche di un certo tipo e K una classe di strutture algebriche semplici e a sottoalgebre semplici che siano portate da un funtore dimenticante in strutture algebriche di $\boldsymbol{SP}H$.

Detta *metafiltrale* una classe K nelle predette condizioni si danno condizioni perchè una tal classe sia filtrale e si costruiscono alcune notevoli classi filtrali.

SUMMARY (1)

A class K of similar algebras is said to be:
« filtrale » (« semifiltrale » if each congruence R on each subdirect (direct) product $\mathfrak{A}$ of a family $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ of elements of K is « associated » with a filter F on I (« associated » in the sense of the reduced products theory, i.e.:

$$xRy \text{ iff } \{i \in I : x_i = y_i\} \in F \qquad (x, y \in \mathfrak{A})).$$

A variety V of algebras is said to be:
« sempisimple »: iff each $\mathfrak{A} \in V$ is semisimple, « sotto-semisemplice »: if $V \subseteq \mathbf{SP}\Sigma$ (Σ: class of simple algebras of V).

An algebra $\mathfrak{A}$ is said to be « regolare » if each congruence R on each subalgebra $\mathfrak{B}$ of $\mathfrak{A}$ extends to a congruence S on $\mathfrak{A}$ ($S \cap \mathfrak{B}^2 = R$).

In a previous paper ([6]) I proved:

Let K be a class of similar algebras, Σ the class of the simple algebras of $\mathbf{V}K$ $\overline{\Sigma} = \Sigma \cap \mathbf{HP}\, K$. Then:

(i) if K is « semifiltrale » then $\overline{\Sigma}$ is « semifiltrale ».

if K is « filtrale » then:

(ii) $\mathbf{V}K$ is « sottosemisemplice ».

(iii) each congruence on each $\mathfrak{A} \in \mathbf{SP}\, K$ is associated with a filter.

(iv) each $\mathfrak{A} \in \mathbf{SP}\, K$ is « regolare ».

(v) if $K = \{W\}$ and W is finite then W is semicategorical (I observe in [6] that this results can be obtained as a simple consequence of Astromoff's, Foster's and Pixley's results).

(vi) if $K = \{W\}$ and W is infinite then there are simple algebras in $\mathbf{V}K$ wich are not isomorphic to W *and* $\mathbf{V}K \subsetneq \mathbf{SP}K$.

(ivi) Let (a), (b), (c), (d) be the following properties:

(a) Σ is « filtrale ».

(b) each algebra of $\mathbf{V}K$ is « regolare ».

(c) $\mathbf{V}K$ is semisimple.

(d) $\mathbf{V}K = \mathbf{SP}K$.

then the following implications hold

$$\begin{tikzcd} & (a) \arrow[dr] \arrow[dd, shift right] & \\ (d) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (c) \\ & (b) \arrow[ur] \arrow[uu, shift right] & \end{tikzcd}$$

Let K be a class of algebras of a fied type. K is said to be « metafiltrale » iff every $\mathfrak{A} \in \mathbf{S}K$ is simple and there is a « filtrale » class H of algebras and a forgetful functor δ such that $\delta K \subseteq \mathbf{SP}H$.

I find some sufficient conditions for a « metafiltrale » classe to be « filtrale » and I give some noteworthy examples of « filtrali » and « semifiltrali » classes, in particular the varieties of « α-plurireticoli » (cfr. n. 9).

Tipical corollary: *every finite systems* $\mathfrak{R} = \langle R, +, \cdot, f_i \rangle_{i \in I}$ *wich is simple (and has only simple subalgebras) and where* $\langle R, +, \cdot \rangle$ *is a distributive lattice is « filtrale » (and for (v) semicategorical).*

BIBLIOGRAFIA

Mi limito ai lavori citati nel testo. Per maggiori notizie vedere:

a) La bibliografia del trattato di P. M. Cohn.

b) La bibliografia del trattato di Algebra Universale di G. Grätzer, di imminente pubblicazione.

c) In particolare, per quanto riguarda gli sviluppi del tema di FOSTER di cui in 9 è opportuna la consultazione dei lavori di:

A. ASTROMOFF - A. L. FOSTER - E. O. KEEFE - A. F. PIXLEY - F. M. SIOSON - TAH-KAI HU - A. YAQUB.

[1] COHN P. M., *Universal Algebra.* London, 1965.

[2] FOSTER A. L., *Generalized « Boolean » theory of universal algebras.*
I. *Subdirect sums and normal representation theorem.* Math. Z. 58, pp. 306-336 (1953).
II. *Identities and subdirect sums of functionally complete algebras.* Math. Z. 59, pp. 111-199 (1953).

[3] FRANCI R. e TOTI-RIGATELLI L., *Sulla varietà dei reticoli distributivi* (in corso di pubblicazione su questi Annali).

[4] MAGARI R., *Su una classe equazionale di algebre.* Ann. Mat. pura e appl., serie IV, Tomo LXXV (1967), pp. 277-312.

[5] MAGARI R., *Sulla varietà generata da un'algebra funzionalmente completa di cardinalità infinita.* Ann. Mat. pura e appl., serie IV, Tomo LXXVI (1967), pp. 305-324.

[6] MAGARI R., *Varietà a quozienti filtrali.* Ann. Un. Ferrara (in corso di pubblicazione).

azzoguidi soc. tip. edit. via e. ponente 421 b 40132 bologna italy