ANNALI DELL'UNIVERSITÀ DI FERRARA
(Nuova Serie)
Sezione VII - SCIENZE MATEMATICHE - Vol. XV, N. 8

ROBERTO MAGARI

CLASSI METAIDEALI DI ALGEBRE SIMILI
(congruenze ideali III)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA
1970

CLASSI METAIDEALI DI ALGEBRE SIMILI (*)
(CONGRUENZE IDEALI III)

ROBERTO MAGARI

PREMESSA.

In [14], lavoro di cui presuppongo la lettura e di cui conserverò in gran parte le notazioni, ho studiato le classi ideali di algebre (= strutture algebriche) simili. Il concetto di classe ideale generalizza quello di classe filtrale, studiato in [10] e, come risulta da [14] molti dei risultati validi per le classi filtrali si trasportano, mutatis mutandis, alle classi ideali (1).

In [11], [12] mediante il concetto di classe *metafiltrale* ho fornito uno strumento per costruire nuove classi filtrali a partire da classi filtrali date. In questo lavoro mi propongo di fare altrettanto introducendo un opportuno concetto di classe metaideale. Sotto molti aspetti i concetti « ideali » pur essendo molto più generali di quelli « filtrali » permettono un esame più chiaro della situazione e in effetti quasi tutti i risultati di [10], [11], [12] si ritrovano come semplici corollari di risultati di questo lavoro e di [14] e talvolta se ne trovano dei rafforzamenti, pur essendo tutto sommato le dimostrazioni dei risultati « ideali » più semplici o almeno più chiare. Gli è che già nel caso filtrale si presentavano delle situazioni legate, nel senso di [13] [14], a ideali. Così un'eventuale trattazione sistematica dei risultati di [8], [9], [10], [11], [12], [13], e di questo lavoro dovrebbe pressochè capovolgere l'ordine cronologico.

Nell'ordine di idee dei lavori citati restano aperti diversi problemi e prospettive di ulteriori generalizzazioni, per esempio:

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R. (contratto 115218205174 anno 1970).

(1) Conservo in gran parte le notazioni di [11], [14] di cui presuppongo la lettura.

1) Rapporti fra le classi filtrali e ideali da un lato e classi notevoli studiate da altri autori. È per esempio chiaro che le algebre primali e semi-primali di A. L. FOSTER ([2], [3], [4], [5]) sono filtrali, ma non viceversa. Le classi studiate da TAH KAI HU in [15] sono particolari classi ideali ecc.

2) Sia X una classe di algebre. Può accadere che esista un cardinale α tale che il reticolo delle congruenze di un qualunque prodotto sottodiretto di algebre di X sia determinato dai reticoli relativi ai prodotti diretti di β elementi di X con $\beta<\alpha$. Se X è filtrale è $\alpha=0$, se X è ideale è $\alpha=1$. È chiaro che è possibile qui una vasta generalizzazione.

3) Analizzando i rapporti fra i vari concetti usati nei lavori citati resta scoperto qualche caso per cui mancano per ora teoremi o controesempi (**). Alcuni risultati dipendono dalla teoria degli insiemi che si usa. In particolare dall'ammettere o meno l'esistenza di cardinali misurabili.

1. NOTAZIONI E DEFINIZIONI.

I simboli $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{P}_u$, Σ conserveranno il significato di [14], il simbolo Δ avrà il senso del $\overline{\Delta}$ di [14].

È opportuno discostarsi leggermente dalla terminologia di [14] mediante le seguenti definizioni:

DEF. 1. *Una classe X di algebre simili si dirà* semiideale (ideale) *se e solo se ogni prodotto diretto (sottodiretto) di algebre di X è a congruenze ideali.*

DEF. 2. *Una classe X di algebre simili si dirà* principale *se, per ogni $A\in X$, ogni congruenza compatta è principale.*

Le classi semiideali (ideali) di [14] sono cioè le classi semiideali (ideali) e principali.

Siano ora τ_1, τ_2 due tipi (cfr. [11], p. 36), e se σ è un omomorfismo da τ_1 a τ_2, si indichi con σ^* il funtore dalla categoria delle τ_2-algebre alla categoria delle τ_1-algebre associato a σ. Sia X una classe di τ_2-algebre e Y una classe di τ_1-algebre.

DEF. 3. *Si dirà che X è* quasiinclusa *in Y e si scriverà che $X<Y$ se esiste un omomorfismo σ da τ_1 a τ_2 con $\sigma^*(X)\subseteq Y$.*

(**) (aggiunto in bozza il 20-11-1970) In un lavoro in corso di pubblicazione su questi Annali (*Sulle classi filtrali di algebre*) BERGMANN completa la teoria sotto uno degli aspetti qui segnalati mostrando fra l'altro che: *Se X è una classe filtrale ogni $A\in \boldsymbol{V}X$ è regolare* e quindi, a norma dei risultati di [10], la filtralità di $\Sigma\cap \boldsymbol{V}X$, la semisemplicità di $\boldsymbol{V}X$ etc.

Questo notevole risultato può essere esteso alle classi ideali, come mostrerò in una prossima nota.

Negli enunciati le parti fra [] devono essere lette o non lette sistematicamente.

2. Richiami elementari, idealità di $\boldsymbol{SP}X$.

Saranno utili nel seguito le seguenti proposizioni banali.

Prop. 1. *Se Y è filtrale e $X < Y$ (in particolare se $X \subseteq Y$) allora X è filtrale.*

Prop. 2. *Se Y è ideale [principale] e $X \subseteq Y$ allora X è ideale [principale].*

Prop. 3. *Se X è ideale e $X \subseteq \Sigma$ allora X è filtrale (e quindi principale).*

Prop. 4. *Se X è filtrale allora X è ideale principale.*

Prop. 5. *Valgono le analoghe delle precedenti ove si legga semifiltrale e semiideale in luogo di filtrale e ideale.*

Vale il seguente:

Teor. 1. *Se X è ideale allora $\boldsymbol{SP}X$ è ideale.*

Dim. Sia A un prodotto sottodiretto di algebre di $\boldsymbol{SP}X$, si avrà la situazione seguente:

$$A \rightarrowtail \prod_{i\in I} A_i$$

$$A_i \overset{\iota_i}{\rightarrowtail} \prod_{j\in J_i} B_j \qquad B_j \in X$$

dove possiamo supporre gli J_i a due a due disgiunti e disgiunti da I. Poniamo

$$J = \bigcup_{i\in I} J_i \qquad B = \prod_{j\in J} B_j\,,$$

sia M_j il reticolo delle congruenze di B_j,

$$M_i = \prod_{j\in J_i} M_j\,, \qquad M = \prod_{j\in J} M_j\,,$$

L_i il reticolo delle congruenze di A_i,

$$L = \prod L_i$$

e sia ϑ_i l'applicazione canonica del reticolo degli ideali di M_i ad L_i (che è suriettiva per il teorema di regolarità (teor. 3 di [14])).

In modo canonico si costruisce un monomorfismo σ da A a B.

Sia R una congruenza di A. La sua trasportata $\overline{R}$ in $\sigma(A)$ ammette, per il cor. 2 di [14] un'estensione S a B, la quale sarà associata ad almeno un ideale P di M. Preso un p di P l'elemento $(p_j)_{j\in J_i}$ di M_i genera un ideale $p^{(i)}$ di M_i. Sia $\widehat{p}$ l'elemento di L definito da:

$$\widehat{p}_i=\vartheta_i p^{(i)}.$$

Non è difficile vedere che $\widehat{P}=\{\widehat{p} : p\in P\}$ genera un ideale di L cui è associata la R. Ne deriva il:

COR. 1. *Se X è una classe filtrale allora $\Sigma\cap \boldsymbol{SP}X$ è filtrale* che è però banale in quanto ovviamente $\Sigma\cap \boldsymbol{SP}X=\boldsymbol{S}X$.

3. CLASSI METAIDEALI.

Sia X una classe ideale [principale] e $Y<X$.

È naturale domandarsi se Y sia a sua volta ideale [principale]. La situazione, tenuto conto del teor. 1, generalizza quella considerata in [11] dove si aveva $Y<\boldsymbol{SP}X$ con X filtrale e $\boldsymbol{S}Y\subseteq\Sigma$. La risposta non può essere sempre affermativa, altrimenti presa una classe filtrale X e una classe Y di algebre semplici regolari con $Y<\boldsymbol{SP}X$ (cioè una classe metafiltrale) Y risulterebbe in ogni caso filtrale contro gli esempi dati in [11].

È anzitutto ovvio che una condizione necessaria per l'idealità di Y è la regolarità dei suoi elementi.

Sempre dagli esempi dati in [11] si ricava che tale condizione non è sufficiente.

Sono da aspettarsi risultati analoghi ai teorr. 1, 2, 3 di [11].

Tenuto conto delle osservazioni fatte in [12] conviene tuttavia cominciare l'esame delle classi Y non sottoposte all'ipotesi di regolarità.

Siano dunque τ_1, τ_2 due tipi, σ un omomorfismo da τ_1 a τ_2, σ^* il funtore della categoria delle τ_2-algebre alla categoria delle τ_1-algebre associato a σ, X una classe semiideale di τ_1-algebre e Y una classe di τ_2-algebre con $\sigma^*(Y)\subseteq X$. Sia

$$A=\prod_{i\in I} A_i\,,$$

$(A_i)_{i\in I}$ essendo una famiglia di τ_2-algebre di Y e poniamo

$$\sigma^*(A_i)=B_i\,,\qquad \sigma^*(A)=B,$$

cosicchè ovviamente

$$B=\prod_{i\in I} B_i\,.$$

Detto L_i il reticolo delle congruenze di A_i, M_i il reticolo delle congruenze di B_i,

$$L = \prod_{i \in I} L_i\,, \qquad M = \prod_{i \in I} M_i\,,$$

P il reticolo delle congruenze di A, Q il reticolo delle congruenze di B, è ovviamente

$$L_i \subseteq M_i\,, \qquad P \subseteq Q.$$

(anzi, L_i è un sottoreticolo completo di M_i, P di Q e L di M).
Sia $R \in P$. Chiaramente ogni eventuale ideale di L cui sia associata la R genera in M un ideale cui la R (che ovviamente appartiene a Q) è ancora associata e viceversa se un ideale di M cui la R è associata è generato dalla sua traccia in L allora la R è associata a tale traccia. La questione se la R sia associata ad almeno un ideale di L si riconduce quindi alla questione se fra gli ideali di M cui la R è associata ve ne sia almeno uno che è generato dalla sua traccia in L, o, come si dirà, *buono*. Sarà utile il seguente:

LEMMA 1. *Un ideale J di M è* buono *se e solo se per ogni $l \in J$ l'elemento $\bar{l} = \bigwedge \{m \in L : m \geq l\}$ appartiene a J.*

DIM. Ovvia.

Ovviamente i *buoni* ideali di M costituiscono una famiglia di Moore (si applichi il lemma 1) e dato un ideale o più in generale un sottoinsieme J di M ha allora senso parlare del minimo buon ideale contenente J, del resto ovviamente generato dall'insieme $\{\bar{l} : l \in J\}$. Sulla base delle considerazioni precedenti è facile vedere che:

LEMMA 2. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una $R \in P$ sia associata ad almeno un ideale di L è che il buon ideale generato dal minimo ideale di M associato alla R (vale a dire dall'ideale J generato in M da $\{\Delta(p) : p \in R\}$) sia ancora associato alla R.*

Vale il seguente:

TEOR. 2. *Se, nelle ipotesi fatte, $(A_i)_{i \in I}$ è inoltre costituita di algebre finite ed ammette un numero finito di tipi di isomorfismo allora A è a congruenze ideali.*

DIM. Sia R una congruenza di A, J il minimo ideale di M associato alla R e $\bar{J}$ il minimo buon ideale associato alla R. Chiaramente $R \subseteq R_{\bar{J}}$ e si tratta di dimostrare che $R_{\bar{J}} \subseteq R$. Siano $x, y \in A$ e $\Delta(x, y) \in \bar{J}$ (si intende che il simbolo Δ è riferito a B e alle B_i). Facilmente si verifica che ciò equivale a supporre che per un opportuno $l \in J$ sia:

$$\Delta(x, y) \leq \bigwedge \{m \in L : m \geq l\} \tag{1}$$

Essendo J il minimo ideale associato a R sarà anche $l \leq \bigvee_{i \in n} \Delta(p^i)$ per un'opportuna famiglia finita $(p^i)_{i\in n}$ di coppie appartenenti ad R e possiamo addirittura supporre:

$$l=\bigvee_{i\in n}\Delta(p^i).$$

Si ha ora dalla (1)

$$\langle x_j\,,\ y_j\rangle\in\bigcap\{m\in L_j : p_j{}^i\in m \text{ per ogni } i\in n\}$$

ossia:

$$(2)\qquad \langle x_j\,,\ y_j\rangle\in\overline{\overline{\{p_j{}^i : i\in n\}}}$$

(dove $\overline{\overline{\quad}}$ sta per « congruenza generata da ... in A_j »).

Sia ora R_j la chiusura transitiva della trasportata di R in ε_j. Dalla (2) segue $\langle x_j\,,\ y_j\rangle\in R_j$, pertanto esiste una sequenza finita

$$({}^hq^j)_{h\in m_j}\,,\ ({}^hq^j=\langle{}^hr^j,\ {}^hs^j\rangle),$$

di coppie della R con:

$$\varepsilon_j{}^0r^j=\varepsilon_jx,\ \ \varepsilon_j{}^hs^j=\varepsilon_j{}^{h+1}r^j,\ \ \varepsilon_j{}^{m_j-1}s^j=\varepsilon_jy.$$

È chiaro che se j_1, j_2 sono associati nella relazione di equivalenza $\sim$ definita da:

$j_1\sim j_2$ se e solo se $x_{j_1}=x_{j_2}$, $y_{j_1}=y_{j_2}$, $p^i{}_{j_1}=p^i{}_{j_2}$ $(i\in n)$,

le sequenze q^{j_1}, q^{j_2} possono essere scelte coincidenti (2) e, tenuto conto delle ipotesi del teorema, si avrà così un numero finito di tali sequenze. Ma ora si ha:

$$\Delta(x,\ y)\le\bigvee_{\substack{h\in mj\\ j\in I}}\Delta({}^hq^j)\in J.$$

Si ha così $R_{\overline{J}}=R_J$ e il teorema è dimostrato.

È facile vedere che:

LEMMA 3. *Se $Y<X$ con X principale allora Y è principale.*

COR. 2. *Se $Y<X$ con X semiideale [principale] è costituita di algebre finite ed ammette un numero finito di tipi di isomorfismo allora è semiideale [principale].*

Vale il seguente:

---

(2) Qui si sfrutta essenzialmente l'ipotesi che A sia prodotto diretto e non semplicemente sottodiretto delle A_i.

TEOR. 3. *Abbiamo Y, X il solito significato con X ideale e sia A un prodotto sottodiretto di una famiglia $(A_i)_{i \in I}$ di algebre di Y. Se I è finito A è a congruenze ideali.*

DIM. Del tutto analoga a quella del teor. 2. L'ipotesi che A sia addirittura prodotto diretto delle A_i non serve più perchè le classi di equivalenza della $\sim$ sono ora comunque in numero finito (e X è ideale).

Si sono ottenuti così gli analoghi dei teorr. 2 e 1 di [12] che ora si ritrovano come corollari dei teorr. 2 e 3.

Se ora si aggiunge l'ipotesi della regolarità delle algebre di Y si ottengono gli analoghi dei teorr. 1 e 2 di [11]. Detta cioè *metaideale* una classe Y di algebre *regolari* con $Y < X$ per un'opportuna classe X ideale si ha:

TEOR. 4. Se Y è metaideale *e A è sottoalgebra di un prodotto diretto finito di algebre di Y allora A è a congruenze ideali.*

TEOR. 5. *Se Y è metaideale [principale] costituita di algebre finite ed ammette un numero finito di tipi di isomorfismo allora è ideale [principale].*

Infine con le solite tecniche dimostrative si ottiene:

TEOR. 6. *Sia Y metaideale, A sottoalgebra di $\prod_{i \in I} A_i$ con $A_i \in Y$, la famiglia $(A_i)_{i \in I}$ abbia codominio finito ed ogni $x \in A$ abbia codominio finito. Allora A è a congruenze ideali.*

Dai teorr. 4, 5, 6 si ritrovano come semplici corollari (tenuto conto del teor. 1 e della prop. 2) i teorr. 1, 2, 3, di [11].

4. UNA CARATTERIZZAZIONE DELLE CLASSI IDEALI.

Allo scopo di dare classi ideali notevoli darò qui una caratterizzazione di queste classi abbastanza ovvia ma utile nelle applicazioni. Grossolanamente parlando è chiaro che affinchè una classe X sia ideale occorre e basta che per ogni $n \in \omega$ si possa trovare un certo tipo di test uniforme (uniforme al variare dell'algebra A in $\boldsymbol{R}X$) che permetta di stabilire, date $n+1$ coppie p^0, p^1, ..., p^{n-1}, p di elementi di A se p appartenga alla congruenza di A generata da p^0, p^1, ..., p^{n-1}.

Quel che occorre è una precisazione della locuzione « un certo tipo di test » che consenta una dimostrazione rigorosa.

Sarà utile intanto il seguente banale:

LEMMA 4. *Sia $(A_i)_{i \in I}$ una famiglia di algebre simili e A una sottoalgebra di $\prod_{i \in I} A_i$. Condizione necessaria e sufficiente affinchè A sia a congruenze ideali è che per ogni $n \in \omega$, $n \neq 0$ e comunque scelte $n+1$ coppie p, p^0, p^1, ..., p^{n-1} di elementi di A, da:*

$$\text{(i)}\ \Delta(p) \leq \bigvee_{i\in n} \Delta(p^i)$$

segua:

$$\text{(ii)}\ p \in \overline{\{p^i : i \in n\}}.$$

DIM. Ovvia.

Sia ora X una classe di algebre simili. Vale il seguente:

TEOR. 7. *Condizione sufficiente affinchè X sia ideale è che per ogni $n\in\omega$, $n\neq 0$ esista una famiglia $(\langle f^j, g^j\rangle)_{j\in J_n}$ di coppie di polinomi* (3) *del tipo di algebre considerato, ciascuno di arietà $2n+2$, tale che per ogni $A\in \boldsymbol{SP}X$ e quali che siano $p, p^0, p^1, \ldots, p^{n-1}\in A^2$ ($p=\langle x, y\rangle$, $p^i=\langle u^i, v^i\rangle$)* sia:

$$p\in \overline{\{p^i : i\in n\}}$$

se e solo se per ogni $j\in J_n$ è

$$f^j(x, y, u^0, u^1, \ldots, u^{n-1}; v^0, v^1, \ldots, v^{n-1}) =$$
$$= g^j(x, y, u^0, u^1, \ldots, u^{n-1}; v^0, v^1, \ldots, v^{n-1}).$$

Se inoltre X è un insieme la condizione è necessaria.

DIM. Valga la condizione, sia $(A_i)_{i\in I}$ una famiglia di algebre di X e A un prodotto sottodiretto delle A_i. Siano $p, p^1, p^2, \ldots, p^{n-1}\in A^2$ e sia:

$$\Delta(p)\leq \bigvee_{r\in n} \Delta(p^r).$$

Per ogni $i\in I$ si ha:

$$p_i\in \overline{\{p_i^r : r\in n\}}$$

da cui, posto $p^r=\langle u^r, v^r\rangle$, $p=\langle x, y\rangle$:

$$f^j(x_i, y_i, u_i^0, \ldots, u_i^{n-1}; v^0, \ldots, v_i^{n-1}) = g^j(x_i, y_i, u_i^0, \ldots, u_i^{n-1}; v_i^0, \ldots, v_i^{n-1})$$

per ogni $j\in J_n$
e infine:

---

(3) Nel senso di G. GRÄTZER [6]. Si può se si preferisce riferirsi a termini del τ-linguaggio (τ essendo il tipo delle algebre di X) a elementi dell'algebra assolutamente libera su un'infinità numerabile di generatori etc.

$$f^j(x, y, u^0, \ldots, u^{n-1}, v^0, \ldots, v^{n-1}) = g^j(x, y, u^0, \ldots, u^{n-1}, v^0, \ldots, v^{n-1}) \qquad (j \in J_n)$$

perciò:

$$p \in \overline{\{p^r : r \in n\}}.$$

Sia X un insieme ideale, $n \in \omega$, $n \neq 0$ e poniamo $I = \bigcup_{A \in X} (A^2)^{n+1}$. Possiamo supporre gli elementi di X a due a due (non isomorfi e) disgiunti cosicché per ogni $i \in I$ esiste uno e un solo $A_i \in X$ con $i \in (A_i^2)^{n+1}$.

Sia $A = \prod_{i \in I} A_i$ e consideriamo gli elementi x, y, u^r, v^r $(r \in n)$ di A definiti da:

$$u_i^r = (ir)0$$

$$v_i^r = (ir)1$$

$$\langle x_i, y_i \rangle = \begin{cases} \langle (in)0, (in)1 \rangle & \text{se questa coppia appartiene a } \overline{\{\langle u_i^r, v_i^r \rangle : r \in n\}} \\ \langle u_i^0, v_i^0 \rangle & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e poniamo ancora

$$p^r = \langle u^r, v^r \rangle \qquad p = \langle x, y \rangle.$$

Sia B la sottoalgebra di A generata dall'insieme

$$N = \{x, y\} \cup \{u^r : r \in n\} \cup \{v^r : r \in n\}.$$

Ovviamente è:

$$\Delta(p) \leq \bigvee_{r \in n} \Delta(p^r)$$

ed essendo X ideale e perciò B a congruenze ideali si ha:

$$p \in \overline{\{p^r : r \in n\}}.$$

Esiste allora una sequenza $x = z^0, z^1, \ldots, z^m = y$ di elementi di B, una sequenza $f^0, f^1, \ldots f^{m-1}$ di funzioni algebriche unarie (cfr. G. Grätzer [6], cap. II, n. 10) e una sequenza $(\langle r^i, s^i \rangle)$ di coppie di $\{p^i : i \in n\}$ con:

$$\{z^i, z^{i+1}\} = \{f^i(r^i), f^i(s^i)\}.$$

Le costanti che compaiono nelle f^i sono elementi di B e quindi *valori* di polinomi su elementi di N onde esiste una sequenza di polinomi $(g^i)_{i \in m}$ con

$$\{z^i, z^{i+1}\} = \{g^i(r^i, \ldots), g^i(s_i, \ldots)\}$$

dove gli ... stanno per sequenze di elementi di N.

Dato il modo in cui è costruito B è chiaro ora che salvo ad alterare i g^i con l'aggiunta di argomenti inessenziali, le coppie $(g^i;\ g^{i+1})_{i\in m}$ sono quelle cercate (4).

5. COROLLARI ED ESEMPI.

Dai risultati di [16] [11] e dal teor. 1 si ricava subito che:

COR. 3. *La classe dei reticoli distributivi è ideale.*
e dal teor. 5:

COR. 4. *Se Y è una classe finita di sistemi finiti regolari del tipo $\langle L, +, \cdot, f_i\rangle_{i\in I}$ con $\langle L, +, \cdot\rangle$ reticolo distributivo allora Y è ideale.*

Si ritrova naturalmente il risultato di [11]:

COR. 5. *Se Y ha le proprietà del cor.* 4 *ed è inoltre costituita da elementi semplici allora è filtrale.*

Applicando ancora alle strutture del cor. 5 il teor. 1 e tenuto conto del teorema di semicategoricità (cor. 4) di [14] si trova una generalizzazione del cor. 3.

COR. 6. *Se Y ha le proprietà del cor. 5 allora $\boldsymbol{V}Y$ è ideale.*

Risultano ad esempio ideali le varietà generate da α per α finito (dove α ha il senso di [11]).

Gli esempi ovviamente si possono ora moltiplicare. Mi limiterò ad alcuni semplici esempi relativi a strutture algebriche familiari. Tralascio le dimostrazioni.

LEMMA 5. *La classe degli anelli commutativi con unità è semiideale.*

---

(4) Precisamente, dopo aver osservato che possiamo sempre supporre i g^i tali da potersi scrivere:

$$x = z^0 = g^0(r^0, x, y, u^0, u^1, \dots, u^{n-1}, v^0, v^1, \dots, v^{n-1})$$

$$z^1 = g^0(s^0, x, y, u^0, u^1, \dots, u^{n-1}, v^0, v^1, \dots, v^{n-1}) =$$
$$= g^1(r^1, x, y, u^0, u^1, \dots, u^{n-1}, v^0, v^1, \dots, v^{n-1})$$

etc.

devono essere prese le coppie $(h^j, k^j)_{j\in m+1}$ definite da:

$$h^0(\xi, \eta, \xi^0, \xi^1, \dots, \xi^{n-1}, \eta^0, \eta^1, \dots, \eta^{n-1}) = \xi$$

$$k^0(\xi, \eta, \xi^0, \xi^1, \dots, \xi^{n-1}, \eta^0, \eta^1, \dots, \eta^{n-1}) = g^0(u, \xi, \eta, \xi^0, \xi^1, \dots, \xi^{n-1}, \eta^0, \dots \eta^{n-1})$$

dove se, come deve accadere, per un certo h è $r^0 = u^h$ (v^h) allora $u = \xi^h$ (η^h)

etc.

LEMMA 6. *Ogni classe finita di anelli con unità finiti è semiideale.*

Dal lemma 6 tenuto conto del cor. 2 segue che:

COR. 7. *Ogni classe finita di anelli unitari con multioperatori, finiti è semiideale.*

Pervenuto in Redazione il 1° aprile 1970.

RIASSUNTO

Sia $(A_i)_{i\in I}$ una famiglia di algebre simili e A una sottoalgebra di $\prod_{i\in I} A_i$. Detto L_i il reticolo delle congruenze di A_i e posto $L = \prod_{i\in I} L_i$, ad ogni ideale di L resta associata una congruenza di A. A si dice *a congruenze ideali* se in tal modo si ottengono tutte le congruenze di A.

Una classe X di algebre simili si dice *ideale* se ogni $A \in \boldsymbol{R}X$ (5) è a congruenze ideali e *semiideale* se ogni algebra $A \in \boldsymbol{P}X$ è a congruenze ideali.

X si dice *principale* se, per ogni $A \in X$, ogni congruenza compatta di A è principale.

In un precedente lavoro, [14], ho dimostrato fra l'altro quanto segue:

(i) *Se* X *è semiideale principale, allora* $\boldsymbol{H}\ \boldsymbol{P}\ X$ *è semiideale principale.*

(ii) *Se*

(ii, 1) X è ideale principale

(ii, 2) ogni algebra di $\boldsymbol{H}\ X$ è semisemplice

(ii, 3) i reticoli delle congruenze delle algebre di X sono sono equilimitati

allora $\boldsymbol{V}X$ *è « sottosemisemplice », vale a dire* $\boldsymbol{V}\ X = \boldsymbol{S}\ \boldsymbol{P}\ (\Sigma \cap \boldsymbol{V}\ X)$ *anzi è addirittura* $\boldsymbol{V}\ X = \boldsymbol{S}\ \boldsymbol{P}\ \boldsymbol{P}_u(\Sigma \cap \boldsymbol{H}\ X)$.

(iii) *Se* X *soddisfa le ipotesi di* (ii) *e inoltre è costituita di algebre finite ed ammette un numero finito di tipi di isomorfismo allora è « quasicategorica » ossia* $\boldsymbol{V}\ X = \boldsymbol{S}\ \boldsymbol{P}\ \boldsymbol{H}\ X$.

(iv) *Se* X *è ideale, per le condizioni*:

---

(5) $\boldsymbol{S}\ X$ classe delle algebre isomorfe a sottoalgebre di elementi di X.
$\boldsymbol{H}\ X$ classe delle immagini omomorfe di algebre di X.
$\boldsymbol{P}\ X$ classe delle algebre isomorfe a prodotti diretti di algebre di X.
$\boldsymbol{R}\ X$ classe delle algebre isomorfe a prodotti sottodiretti di algebre di X.
$\boldsymbol{P}_u X$ classe delle algebre isomorfe a ultraprodotti di algebre di X.
Σ classe di tutte le algebre semplici.

(a) $\boldsymbol{V}\, X$ è ideale

(b) ogni algebra di $\boldsymbol{V}$ X è regolare

(c) $\Sigma \cap \boldsymbol{V}\, X$ è filtrale

(d) $\boldsymbol{V}\, X$ è semisemplice:

si ha il seguente schema di implicazioni:

$$\begin{tikzcd} (b) \arrow[d, shift left] \arrow[dr] & \\ (a) \arrow[u, shift left] \arrow[r] & (c) \end{tikzcd}$$

e se inoltre i reticoli delle congruenze delle algebre di X *sono equilimitati e vale la* (ii, 1):

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, shift left] \arrow[dr] & \\ b \arrow[u, shift left] \arrow[d, shift left] \arrow[r] & (d) \\ c \arrow[u, shift left] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

In questo lavoro si dimostra che:

(v) *Se* X *è ideale allora* $\boldsymbol{S}\, \boldsymbol{P}\, X$ *è ideale.*

(vi) *Se* X *è ideale [principale] e* $Y \prec X$ *(vale a dire esiste un funtore dimenticante* δ *con* $\delta(Y) \subseteq X$*) ossia se* Y *è «debolmente metaideale» ed inoltre* Y *è costituita di algebre finite ed ammette un numero finito di tipi di isomorfismo allora* Y *è semiideale [principale].* (Per questo risultato è sufficiente la *semi*idealità di X).

(vii) *Se* Y *è debolmente metaideale e* A *è prodotto sottodiretto di una famiglia finita di algebre di* Y *allora* A *è a congruenze ideali.*

(viii) *Se* Y *è debolmente metaideale ed è costituito di algebre regolari (ossia, come si dirà, se* Y *è metaideale) e* A *è sottoalgebra di un prodotto diretto finito di algebre di* Y *allora* A *è a congruenze ideali.*

(ix) *Se* Y *è metaideale [principale] costituita di algebre finite ed ammette un numero finito di tipi di isomorfismo allora è ideale [principale].*

(x) *Sia* Y *metaideale,* A *sottoalgebra di* $\prod_{i \in I} A_i$ *con* $A_i \in Y$ *la famiglia* $(A_i)_{i \in I}$ *abbia codominio finito ed ogni* $x \in A$ *abbia codominio finito. Allora* A *è a congruenze ideali.*

I risultati esposti permettono di ritrovare e talvolta rafforzare i risultati di [10],, [11], [12], e di individuare facilmente classi ideali e classi filtrali cui applicare i vari risultati di semicategoricità, semisemplicità ecc.

Il lavoro si conclude con una caratterizzazione delle classi ideali e con alcuni esempi.

BIBLIOGRAFIA
(limitata ai lavori citati)

[1] COHN P. M., *Universal Algebra*, London, 1965.

[2] FOSTER A. L., *Generalized « Boolean » theory of universal algebras* - Part. I: *Subdirect sums and normal rapresentation theorem*, Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 306-336 (1953).

[3] FOSTER A. L., *Generalized « Boolean » theory of universal algebras* - Part. II: *Identities and subdirect sums of functionally complete algebras*, Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 191-199 (1953).

[4] FOSTER A. L. e PIXLEY A. F., *Semicategorical algebras.* I. *Semiprimal algebras*, Math. Zeitschr., 83, 147-169 (1964).

[5] FOSTER A. L. e PIXLEY A. F., *Semicategorical algebras.* II., Math. Zeitschr. 85, 169-184 (1964).

[6] GRÄTZER G., *Universal Algebra*, New York, 1969.

[7] KUROSH A. G., *Algèbre générale*, Paris, 1967.

[8] MAGARI R., *Su una classe equazionale di algebre*, Ann. di Mat. pura e appl., Serie IV, Tomo LXV, 277-311 (1967).

[9] MAGARI R., *Sulla varietà generata da un'algebra funzionalmente completa di cardinalità infinita*, Ann. Mat. pura e appl., Serie IV, Tomo LXXVI, 305-324 (1967).

[10] MAGARI R., *Varietà a quozienti filtrali*, Ann. Un. Ferrara (Nuova serie), Sez. VII, Vol. XIV, n. 2, pp. 5-20 (1969).

[11] MAGARI R., *Costruzione di classi filtrali*, Ann. Un., Ferrara (Nuova serie), Sez. VII, Vol. XIV, n. 6, pp. 35-52 (1969).

[12] MAGARI R., *Un'osservazione sulle classi metafiltrali*, in corso di pubbl. sugli Annali Un. Ferrara.

[13] MAGARI R., *Congruenze di un prodotto diretto legate alle congruenze dei fattori* (*congruenze ideali* I) (*Algebre a congruenze speciali*, parte III) sta in: Atti del Convegno di Teoria dei Modelli di Roma, novembre 1969.

[14] MAGARI R., *Varietà a congruenze ideali* (*congruenze ideali* II). in corso di pubblicazione sugli Annali Un. Ferrara.

[15] TAH KAI HU, *On equational classes of algebras in which congruences on finite direct products are induced by congruences of their factors.* (Il lavoro mi è stato gentilmente inviato dall'autore in copia ciclostilata).

[16] FRANCI R. e TOTI RIGATELLI L., *Sulla varietà dei reticoli distributivi*, Ann. Un. Ferrara, nuova serie, Sez. VII, vol. XIV, n. 4 (1969), pp. 23-27.

azzoguidi soc. tip. edit. via e. ponente 421 b 40132 bologna Italy