ANNALI DELL'UNIVERSITÀ DI FERRARA
(Nuova Serie)
Sezione VII - SCIENZE MATEMATICHE - Vol. XIV. N. 15

ROBERTO MAGARI

UN'OSSERVAZIONE SULLE CLASSI METAFILTRALI

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA
1969

UN'OSSERVAZIONE SULLE CLASSI METAFILTRALI

ROBERTO MAGARI *)

In un precedente lavoro ([1] a cui rimando per le notazioni, la bibliografia, etc.) ho studiato le classi di algebre *metafiltrali*, vale a dire le classi K di algebre simili tali che:

(i) esista una classe *filtrale* H ed un funtore dimenticante, δ, dalla categoria delle algebre del tipo di similitudine di quelle di K alla categoria delle algebre del tipo di similitudine di quelle di H per cui sia:

$$\delta(K) \subseteq \boldsymbol{SP}K \tag{1}$$

(ii) ogni algebra di $\boldsymbol{S}K$ sia semplice.

Uno dei risultati è il seguente:

PROP. 1. *Se K è finita (o più in generale ammette un numero finito di tipi di isomorfismo) e costituita di algebre finite allora è filtrale.*

Banalmente vale anche l'inverso, cioè:

LEMMA 1. *Se K è filtrale allora è metafiltrale.*

DIM. La validità della (i) è ovvia perchè $K \subseteq \boldsymbol{R}K$. Così pure è ovvia la validità della:

(ii') *ogni algebra di K è semplice.*

Meno immediata è la validità della intera (ii) che però si ricava subito dal teorema 4 di [2], secondo il quale se K è filtrale allora ogni algebra di $\boldsymbol{SP}K$ è a congruenze filtrali. Poichè $\boldsymbol{RS}K \subseteq \boldsymbol{SPS}K \subseteq \boldsymbol{SP}K$ se ne ricava che ogni al-

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R. contratto 115218205174 (anno 1969).

gebra di $\boldsymbol{RS}K$ è a congruenze filtrali per cui $\boldsymbol{S}K$ è filtrale e perciò costituita di algebre semplici.

Si potrebbe tuttavia pensare che nella prop. 1 la condizione (ii) potesse essere sostituita dalla più debole (ii'). Che non sia così è mostrato dal seguente:

ESEMPIO α. Sia $\mathfrak{A}=\langle A, \vee, \wedge, f, g\rangle$ un'algebra avente come insieme di base $A=\{a, b, c, d\}$ e come operazioni l'unione e l'intersezione reticolari $(\vee, \wedge)$ rispetto all'ordine $a<b<c<d$ e inoltre le f, g binarie definite da:

$$f(x, y)=\begin{cases} a \text{ se } x=c,\ y=d \\ x\vee y \text{ altrimenti.}\end{cases}$$

$$g(x, y)=\begin{cases} a \text{ se } x=b,\ y=d \\ x\vee y \text{ altrimenti}\end{cases}$$

$\mathfrak{A}$ è semplice, come si controlla facilmente, mentre la sua sottoalgebra che ha per elementi a, b, c, non lo è; inoltre $\langle A, \vee, \wedge\rangle\in\boldsymbol{R}\{2\}$ (dove 2 è il reticolo distributivo semplice).

Dette tuttavia *debolmente metafiltrali* le classi soddisfacente le (i), (ii') si possono ricavare per esse alcuni risultati che sono indebolimento di risultati paralleli per le classi metafiltrali.

Vale intanto il:

TEOREMA 1. *Sia K debolmente metafiltrale, $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ una famiglia di algebre di K e $\mathfrak{A}$ un prodotto sottodiretto delle $\mathfrak{A}_i$. Se I è finito allora $\mathfrak{A}$ è a congruenze filtrali.*

DIM. La stessa che per il teor. 1 di [1] contenuta nei paragrafi 3, 4 di [1] salvo a sostituire nel rigo 8 di pag. 8 al posto di « $\varepsilon_i(\mathfrak{A})$ semplice » « $\varepsilon_i(\mathfrak{A})=\mathfrak{A}_i$ e perciò semplice ».

Al posto del teor. 2 di 1 si ottiene il seguente:

TEOREMA 2. *Se K è finita, costituita di algebre finite e debolmente metafiltrale è semifiltrale.*

DIM. Al posto del lemma 3 (n. 5) di [1] si dimostra anzitutto il lemma seguente:

Sia $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ una famiglia di algebre simili, $\mathfrak{A}=\prod\limits_{i\in I}\mathfrak{A}_i$, M, p, $\sim$, L, N come in [1] *n. 5. Se $\varepsilon_L(p)$ appartiene alla congruenza generata in $\varepsilon_L(\mathfrak{A})$* (**non** *più come in* [1] *nella sottoalgebra $\mathfrak{A}_L$ generata da $\varepsilon_L(N)$) da $\varepsilon_L(M)$, allora $p\in\overline{M}$.*

La dimostrazione di questo lemma è del tutto analoga a quella del lemma 3 di [1] con la differenza che stavolta l'ipotesi che $\mathfrak{A}$ sia *prodotto diretto* (e non solo sottodiretto) delle $\mathfrak{A}_i$ ci garantisce che per ogni $x \in \varepsilon_L(\mathfrak{A})$ (e non solo per ogni $x \in \mathfrak{A}_L$), $\widehat{x}$ appartiene ad $\mathfrak{A}$. Per il resto la dimostrazione si conduce come quella del teor. 2 di [1] salvo che nel rigo 8 di pag. 44 si deve leggere $\varepsilon_L(\mathfrak{A})$ in luogo di $\mathfrak{A}_L$.

Pervenuto in Redazione il 10 ottobre 1969.

SUNTO

Si dimostrano alcuni risultati complementari a quelli di [1].

SUMMARY

Some additional results to [1] are proved.

BIBLIOGRAFIA

(Mi limito ai due lavori direttamente citati a cui rimando per altri riferimenti bibliografici).

[1] R. MAGARI - *Costruzione di classi filtrali*, in corso di pubbl. sugli Annali dell'Università di Ferrara.

[2] R. MAGARI - *Varietà a quozienti filtrali*, Annali dell'Università di Ferrara (Nuova Serie), Sez. VII, Scienze Mat. Vol. XIV, n. 2 (1969), pp. 5-20.

azzoguidi soc. tip. edit. via e. ponente 421 b 40132 bologna italy