ROBERTO MAGARI

Sulle varietà generate da classi ideali

Estratto da:
Bollettino della Unione Matematica Italiana
(4) 4 (1971), 1007-1009

NICOLA ZANICHELLI EDITORE
BOLOGNA

Bollettino U. M. I.
(4) **4** (1971), 1007-1009

Sulle varietà generate da classi ideali.

ROBERTO MAGARI (Siena)

Summary. – *This paper is itself a summary of new results on varieties generated by ideal classes. I am intended to publish later on a more complete paper in English language with the proofs of the announced results.*

Premessa.

In un recente lavoro [1] G. BERGMANN ha rafforzato i miei risultati di [4] relativi alle classi filtrali. I suoi risultati si basano su un semplice lemma che a me era completamente sfuggito durante la elaborazione di [4]. Questo lemma può essere esteso a certe classi ideali senza eccessive difficoltà. Il quadro che ne è derivato mi ha suggerito di tentare una classificazione delle varietà idealizzabili (vale a dire generate da classi ideali).

1. – Notazioni e definizioni.

Sia X una classe di algebre simili. Indicherò con:

$\boldsymbol{SX}$ la classe delle algebre [isomorfe a] sottoalgebre di algebre di X;

$\boldsymbol{HX}$ la classe delle immagini omomorfe di algebre di X;

$\boldsymbol{PX}$ la classe delle algebre [isomorfe a] prodotti diretti di algebre di X;

$\boldsymbol{RX}$ la classe delle algebre [isomorfe a] prodotti sottodiretti di algebre di X;

$\boldsymbol{VX}$ la varietà generata da X.

Indicherò con Σ la classe di tutte le algebre semplici.

DEFINIZIONE 1. – *Sia A un'algebra. A si dirà principale se ogni sua congruenza compatta è principale. Una classe X di algebre si dirà principale se ogni sua algebra è principale.*

DEFINIZIONE 2. – *Sia A un'algebra. A si dirà superprincipale se comunque scelta una congruenza compatta, R, di A e un $a \in A$ esiste un $x \in A$ tale la coppia $\langle a, x \rangle$ genera R. Una classe di algebre si dirà superprincipale se ogni sua algebra è superprincipale. La classe di tutte le algebre superprincipali si indicherà con Π.*

Per il resto seguo le notazioni e le convenzioni di [4], [7], [8], [9] di cui presuppongo la lettura. Per le classi ideali seguo la versione di [9] (ideale non implica cioè principale).
Sarà utile ancora la seguente:

DEFINIZIONE 3. – *Una varietà X di algebre si dirà*:
— *filtrabile*: se è generata da una classe filtrale;
— *idealizzabile*: se è generata da una classe ideale;
— *principalmente idealizzabile*: se è generata da una classe ideale principale;
— *superprincipalmente idealizzabile*: se è generata da una classe ideale superprincipale.

2. – Varietà idealizzabili.

TEOREMA 1. – *Sia X una varietà e consideriamo le condizioni*:

(a,1) X è filtrabile;

(a,2) $X = \boldsymbol{V}(\Sigma \cap X)$ e $\Sigma \cap X$ è filtrale;

(a,3) esiste una classe Y ideale superprincipale con $\boldsymbol{H}Y$ semisemplice, con i reticoli delle congruenze delle algebre di Y finitamente equilimitati e con $\boldsymbol{V}Y = X$;

(b,1) X è ideale e generata da $\Pi \cap X$;

(b,2) X è superprincipalmente idealizzabile;

(c,1) X è ideale;

(c,2) X è idealizzabile e regolare;

(d) X è idealizzabile.

Allora le condizioni recanti la stessa lettera sono equivalenti (*l'equivalenza fra* (a,1) *e* (a,2) *era già stata stabilita da Bergmann in* [1]) *e si ha*:

$$(a) \rightarrow (b) \rightarrow (c) \rightarrow (d)\,.$$

Nessuna delle implicazioni precedenti può essere rovesciata, nemmeno con l'aggiunta dell'ipotesi che X sia principalmente idealizzabile (*nè,* *per quanto riguarda le due ultime implicazioni, con l'aggiunta della negazione di questa ipotesi).*

Nel corso della dimostrazione di questi risultati ho trovato alcuni risultati che mi sembrano avere un interesse a sè stante ma che sono un po' difficili da riassumere in breve. Mi limito a citarne due.

TEOREMA 2. – *Sia X una classe di algebre simili. Condizione necessaria e sufficiente perchè $\boldsymbol{V}X$ sia ideale è che lo sia $\boldsymbol{H}X$.*

TEOREMA 3. – *Sia A_0 un insieme non vuoto e L_0 un reticolo di equivalenze su A_0 che sia reticolo delle congruenze per qualche algebra parziale* (1). *Allora esiste un'algebra (totale) A* ideale, *contenente A_0 e tale che gli elementi di L_0 sono tutte e sole le tracce delle congruenze di A su A_0^2.*

(1) Questi reticoli, contrariamente a quanto accade nel caso di algebre totali, sono facilmente caratterizzabili.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. BERGMANN, *Sulle classi filtrali di algebre*, in corso di pubblicazione sugli Annali dell'Università di Ferrara.

[2] P. M. COHN, *Universal Algebra*, London (1965).

[3] G. GRÄTZER, *Universal Algebra*, London (1968).

[4] R. MAGARI, *Varietà a quozienti filtrali*, Ann. Univ. Ferrara (nuova serie), Sez. VII, **14** (1969), pp. 5-20.

[5] R. MAGARI, *Costruzione di classi filtrali*, Ann. Univ. Ferrara (nuova serie), Sez. VII, **14**, 6 (1969), pp. 35-52.

[6] R. MAGARI, *Un'osservazione sulle classi metafiltrali*, Ann. Univ. Ferrara (nuova serie), Sez. VII, **14**, 15 (1969), pp. 145-147.

[7] R. MAGARI, *Congruenze di un prodotto diretto legate alle congruenze dei fattori (congruenze ideali I)*, in: *Algebre a congruenze speciali*, Ist. Naz. Alta Matematica, Symposia Math., **5** (1971), pp. 82-111.

[8] R. MAGARI, *Varietà a congruenze ideali (congruenze ideali II)*, Ann. Univ. Ferrara (nuova serie), Sez. VII, **15**, 7 (1970), pp. 113-129.

[9] R. MAGARI, *Classi metaideali di algebre simili*, Ann. Univ. Ferrara (nuova serie), Sez. VII, **15**, 8 (1970), pp. 131-143.

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 18 ottobre 1971

"Monograf" - Bologna, via Collamarini 5