ANNALI DELL'UNIVERSITÀ DI FERRARA
(Nuova Serie)
Sezione VII · SCIENZE MATEMATICHE · Vol. XIV, N. 1

ROBERTO MAGARI

UNA DIMOSTRAZIONE DEL FATTO CHE OGNI VARIETÀ AMMETTE ALGEBRE SEMPLICI

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA
1969

UNA DIMOSTRAZIONE DEL FATTO CHE OGNI VARIETÀ AMMETTE ALGEBRE SEMPLICI

ROBERTO MAGARI (*)

AVVERTENZA.

Si pone abbastanza naturalmente la questione se ogni varietà di algebre (1) ammetta algebre *semplici*. La risposta è ovviamente affermativa per ogni varietà che abbia algebre finite, ma non è immediata negli altri casi, dato che esistono algebre (infinite) prive di congruenze proprie massimali, ed esistono varietà prive di algebre finite. Tuttavia quando, qualche tempo fa, la questione si è presentata a me e ad alcuni miei colleghi, eravamo convinti che il problema, dato il suo interesse, dovesse esser già stato studiato; poichè un esame della letteratura e un quesito posto a uno dei massimi studiosi di algebra universale (*) non ci hanno fornito la desiderata risposta, mi decido a pubblicare una dimostrazione che in seguito ho trovato.

1. Sia $\mathcal{V}$ una varietà non degenere di algebre. Se $\mathcal{V}$ non ammette algebre semplici allora ovviamente ogni algebra di $\mathcal{V}$ è priva di quozienti semplici (per il teorema di Birkhoff $\mathcal{V}$ contiene tutti i quozienti di ogni sua algebra).

Mostrerò nel paragrafo successivo che, se $\mathcal{A}$ è un'algebra non degenere priva di quozienti semplici allora esiste una sottoalgebra di una sua potenza diretta che ammette quozienti semplici.

Se $\mathcal{A} \in \mathcal{V}$, per il ricordato teorema di Birkhoff, tali quozienti appartengono ancora a $\mathcal{V}$ onde resterà dimostrato il risultato del titolo.

2. Sia $\mathcal{A}$ un'algebra (non degenere) priva di quozienti semplici, priva cioè di congruenze proprie massimali. È allora ovvio che:

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Comitato Nazionale per le Scienze Matematiche del C.N.R. (anno '68-'69, programma 8).

(1) La parola « algebre » è qui usata ad indicare « strutture algebriche » in generale. Per le varie nozioni di algebra universale usate vedi P. M. COHN [1].

(*) notizia chiesta al prof. Grätzer nel 1968.

LEMMA 1. *Se M è un sottoinsieme finito di $\mathfrak{A}$* (2) *la minima congruenza R_M di $\mathfrak{A}$ che pone tutti gli elementi di M in una stessa classe di equivalenza non è totale.*

Dimostrazione (per induzione sul cardinale di M). Se M è vuoto la cosa è ovvia. Supponiamo che la cosa valga per insiemi di cardinale $n-1$ $(0<n<\omega)$, sia M di cardinale n e sia a un suo elemento. Per ipotesi induttiva $R_{M-\{a\}}$ è propria e, o $R_{M-\{a\}}=R_M$ e perciò R_M non è totale o, via lemma di Zorn, è facile vedere che esiste una congruenza R massimale rispetto alla condizione $R_{M-\{a\}}\subseteq R\subset R_M$. Se ora R_M fosse totale la R risulterebbe (propria) massimale contro l'ipotesi che $\mathfrak{A}$ sia priva di quozienti semplici. Il lemma è così dimostrato.

Sia ora $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}^{\mathfrak{A}}$, sia, per ogni $x\in\mathfrak{A}$, $\widehat{x}$ l'elemento di $\mathfrak{B}$ costante di valore x e sia v l'elemento di $\mathfrak{B}$ definito da:

$$v_x=x \qquad (x\in\mathfrak{A})$$

Infine sia $\mathfrak{C}$ la sottoalgebra di $\mathfrak{B}$ generata da v e dall'insieme $\widehat{\mathfrak{A}}=\{\widehat{x}:\, x\in\mathfrak{A}\}$.

Mostriamo che:

LEMMA 2. *Esiste almeno una congruenza R di $\mathfrak{C}$ nella quale tutte le costanti appartengono ad una medesima classe di equivalenza, K, mentre $v\notin K$.*

Dimostrazione. Non sia così. Ciò significa che esiste una sequenza finita $p_1, p_2, \ldots, p_n$ di coppie di elementi di $\mathfrak{C}$ tale che p_n è del tipo $(\hat{a}, v)$ con $a\in\mathfrak{A}$ e ciascun p_i è:

(i) o una coppia di costanti,

(ii) o una coppia della diagonale di $\mathfrak{C}$,

(iii) o del tipo (α, β), (β, α) essendo una coppia precedente,

(iv) o del tipo (α, γ), essendo (α, β) e (β, γ) due coppie precedenti,

(v) o del tipo $(\widehat{g}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m), (\widehat{g}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m))$ dove le (α_i, β_i) sono coppie precedenti, g è un'operazione m-aria di $\mathfrak{A}$ e $\widehat{g}$ è l'operazione analoga in $\mathfrak{B}$.

Le costanti implicate nella sequenza saranno ovviamente in numero finito e siano $\widehat{a}_1, \widehat{a}_2, \ldots, \widehat{a}_r$ (questa parte della dimostrazione può naturalmente essere abbreviata ricordando che l'operatore di « passaggio alla congruenza generata » è un operatore di Moore algebrico). Sia ora S la minima congruenza di $\mathfrak{A}$ per

(2) Confondo tipograficamente $\mathfrak{A}$ col suo insieme di base.

cui $a_1, a_2, \dots, a_r, a$ sono in una stessa classe H e sia $x\in\mathfrak{A}$. La sequenza delle proiezioni x-esime delle p_i termina con la coppia $(\widehat{a_x}, v_x)=(a, x)$ onde $x\in H$.

La S risulta perciò totale, contro il lemma 1, e la contraddizione dimostra il lemma.

Mostriamo ancora che:

LEMMA 3. *Presa una R soddisfacente la condizione del lemma 2. la minima congruenza S di $\mathfrak{C}$ per cui $\hat{\mathfrak{A}}\cup\{v\}$ è contenuto in una stessa classe di equivalenza H della S è totale.*

Dimostrazione. Sia $x\in\mathfrak{C}$. Allora esistono: un'operazione n-aria f appartenente al clono generato dalle operazioni di $\mathfrak{A}$ e un elemento $y=({}_jy)_{j\in n}\in\mathfrak{C}^n$ con ${}_jy\in\{v\}\cup\hat{\mathfrak{A}}$ per cui $x=fy$.

Preso un a di $\mathfrak{A}$ e detto $\bar{a}=({}_ja)_{j\in n}$ l'elemento di $\mathfrak{C}^n$ definito da ${}_ja=\hat{a}$ è ${}_jyS{}_ja$ onde $fySf\bar{a}$. Ma $f\bar{a}$ è ovviamente una costante onde $x=(=fy)$ è associato nella S a una costante e appartiene perciò ad H.

Perciò $H=\mathfrak{C}$ e la S è totale.

Dai lemmi 2 e 3 segue subito che:

TEOREMA 1. *$\mathfrak{C}$ ammette quozienti semplici.*

Dimostrazione. Via lemma di Zorn si dimostra subito l'esistenza di una congruenza massimale rispetto alle condizioni del lemma 2 ed essa risulta (propria) massimale per il lemma 3.

Ne segue, tenuto conto delle considerazioni fatte nel n. 1, che:

TEOREMA 2. *Ogni varietà di algebre ammette algebre semplici.*

Pervenuto in Redazione il 9 gennaio 1969.

RIASSUNTO

Si dimostra che se $\mathfrak{A}$ è una struttura algebrica priva di quozienti semplici, allora un'opportuna sottoalgebra di $\mathfrak{A}^{\mathfrak{A}}$ ammette quozienti semplici. Ne segue il risultato del titolo.

SUMMARY

Let $\mathfrak{A}$ be an algebraic structure with no simple quotients. Then there is a subalgebra of $\mathfrak{A}^{\mathfrak{A}}$ which possess simple quotients. Therefore every variety of algebras (= algebraic structures) has simple algebras.

BIBLIOGRAFIA

Per questo articolo è sufficiente la consultazione di un qualunque trattato di algebra universale, per esempio:

[1] P. M. COHN, *Universal Algebra*, Harper & Row, London 1965.

[2] G. GRATZER, *Universal Algebra* (annunciato dall'editore Van Nostrand).

azzoguidi soc. tip. edit. via e. ponente 421 b 40132 bologna italy 1969