ROBERTO MAGARI

Su certe teorie non enumerabili.
(Sulle limitazioni dei sistemi formali, I)

Estratto dagli *Annali di matematica pura ed applicata*
Serie IV - Tomo XCVIII (1974)

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI EDITORE
1974

Magari, Roberto
1974
Annali di Matematica pura ed applicata
(IV), Vol. XCVIII, pp. 119-152

Su certe teorie non enumerabili.

(Sulle limitazioni dei sistemi formali, I) (*).

Roberto Magari (Siena) (**) (‡)

Sunto. – *Si studiano certi sistemi che, pur non essendo in senso stretto sistemi formali, sembrano proponibili come schematizzazione adeguata di un certo modo di procedere matematico e al tempo stesso sfuggono ad alcune delle ordinarie limitazioni gödeliane. Lo studio viene sostanzialmente condotto dal punto di vista della teoria delle funzioni ricorsive. Tali sistemi vengono introdotti a studiati come contributo alla discussione sulla portata e sulle cosiddette conseguenze «filosofiche» delle limitazioni gödeliane, nel senso che tale discussione può, a giudizio dell'autore, essere condotta con maggiore chiarezza se, accanto ai sistemi formali propriamente detti, vengono considerati i sistemi qui introdotti.*

Questo lavoro non presenta risultati tecnici sostanzialmente nuovi, dal punto di vista tecnico infatti la maggior parte delle proposizioni dimostrate si riduce a una serie di esercizi su certi insiemi numerici di grado di insolubilità minore o uguale a 2. Risultati tipici sono:

(*a*) nei sistemi considerati (se consistenti) data una proposizione p, o p è una «tesi definitiva» (vedi § 2) o lo è $\neg p$ (se il sistema non è consistente l'insieme delle «tesi definitive» è vuoto).

(*b*) Per ogni sistema formale classico F consistente e in grado di «esprimere» la propria consistenza esiste un sistema F^* del tipo considerato tale che:

(*b*,1) Ogni tesi di F è fra le tesi definitive di F^*.

(*b*,1) Fra le tesi definitive di F^* ce n'è una che «asserisce» la consistenza di F^*.

(*b*,3) F^* è consistente.

(*c*) Esiste un procedimento effettivo il quale ad ogni sistema del tipo considerato tale che ogni tesi dell'aritmetica peaniana sia tra le sue tesi definitive associa una proposizione che è vera se e solo se non è fra le tesi definitive del sistema.

Questi risultati dipendono da semplici circostanze di teoria delle funzioni ricorsive e sono facili da dimostrare; il loro eventuale interesse riposa su certe ipotesi, opinabili, ma, a giudizio dell'autore, sostenibili, riguardanti i sistemi considerati, per esempio l'ipotesi che i sistemi considerati schematizzino bene un modo di procedere sostanzialmente ammesso dalla comunità matematica.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Comitato per le Scienze Matematiche del C.N.R. (1972).

(**) Entrata in Redazione il 20 febbraio 1973.

(‡) (*Aggiunto in bozza*). Risultati simili (in particolare per quanto riguarda il punto (*c*) del sunto, di cui fornisce un'importante precisazione, e il risultato enunciato nella nota (17)) sono stati stabiliti indipendentementa da R. G. Jeroslow. (Cfr. R. G. Jeroslow, *Two theorems on experimental logics* Res. Rep. 73-4 Dept. of Math. Mellow Inst. of Science Carnegie-Mellon University).

Summary. (added in proof reading). – *We propose some concepts as rigorous counterpart of the informal concept of « theories which proceed by trials and errors ». In such a theory it is reasonable to suppose that the set of the theorems is in* Σ_2 *(in the arithmetical hierarchy). We study the problems linked with Gödel's limitations for theories for which the set of theorems is in one of the following classes:*

i) *the set* D *of the socalled « dialectic sets » (the adjective « dialectic » is playful: there are not ties with the philosophical dialectics)*:

ii) $\Delta_2 = \Sigma_2 \cap \Pi_2$.

iii) Σ_2.

Every set in D *is a Lindenbaum's completion of the set of the theorems of an usual formal system.*

Examples of results:

1. *Let* T *be the set of the theorems of the Peano's arithmetic (or of a formal system to which the Peano's arithmetic is reducible).*
   Then there esists a $T^* \in D$, $T \subseteq T^*$, T^* *consistent for which a proposition which « expresses » the consistency of* T^* *is in* T^*.
   It is possible to strenghten these results. Roughly speaking we have:
   For every « reasonable » way which associates with every $T^* \supseteq T$ *a proposition* p_{T^*} *which « expresses » the consistency of* T^* *there exists a consistent* T^* *for which*:

$$T \subseteq T^* \in D$$

$$p_{T^*} \in T^*$$

   (see section 7).

2. *There exists a (recursive) procedure which for every* $A \in \Sigma_2$, *where* A *is a set of propositions of the Peano's arithmetic, picks out a* p *which is true (in the standard model) iff* $p \notin A$.
   (But there is not a procedure which picks out for every A, *a* p *which is true but is not in* A*)*
   (see section 6 and footnote (17)*).*

Similar results (in particular the results of 2 of the summary for which he gives an important specification) were indipendently found by R. G. Jeroslow (see Two theorems on experimental logics *by R. G. Jeroslow, Res. Rep. 73-4 Dept. of Math. Mellon Inst. of Science, Carnegie Mellon University).*

1. – Premessa.

I teoremi limitativi di Gödel dipendono fra l'altro, in alcune formulazioni, dalla enumerabilità dell'insieme delle tesi della teoria sotto esame (1).

Naturalmente la banale scappatoia consistente nel considerare teorie non enumerabili *ad hoc* non risolve i problemi connessi con i risultati di Gödel, nè annulla

(1) Naturalmente valgono risultati analoghi per teorie non enumerabili che però siano atte a rappresentare adeguate classi di relazioni e non solo le relazioni ricorsive.

le moltissime conseguenze « filosofiche » che, qualche volta a ragione, più spesso a torto, se ne sono fatte scaturire.

Una eventuale controparte e, per così dire, una delimitazione alla portata dei teoremi limitativi può essere trovata solo in eventuali teorie che da un lato, pur essendo sufficientemente potenti, sfuggano ad alcune delle limitazioni deduttive e dall'altro, pur non essendo enumerabili, posseggano un certo grado di effettività, sì da imitare in qualche modo l'ordinario procedere deduttivo umano e/o meccanico (²),

Ora, nella storia recente della matematica, un processo caratteristico e forse sottovalutato nella sua importanza è stato quello di rimuovere le contraddizioni mano a mano che si presentavano, concellando, per così dire, alcuni degli assiomi di partenza e sostituendoli con altri più deboli.

Questo processo è stato accompagnato dal processo complementare: quello di rafforzare gli assiomi quando essi non danno luogo (o non hanno ancora dato luogo) a contraddizioni.

Così per eliminazione delle contraddizioni (chiamiamo così il primo processo) si passa dalla teoria ingenua degli insiemi al sistema ZF e per rafforzamento (secondo processo) si passa da ZF ad altri sistemi (per esempio Morse-Kelley), oppure a sistemi ottenuti con l'aggiunta di opportuni assiomi esistenziali riguardanti grandi cardinali ecc.) (³).

Un certo orrore della contraddizione ha impedito forse di considerare anche lontanamente la possibilità di istituzionalizzare, per così dire, il processo.

Il « fallimento » del programma hilbertiano (⁴) ha portato più facilmente a reviviscenze di visioni platoniche che a rinunciare al tabù della contraddizione.

Mi sembra interessante provare invece a descrivere un tipo di teoria che, sia pure in modo grossolano, preveda i due processi di cui parlavo prima e procedere a uno studio delle sue limitazioni. Un simile studio è giustificato, oltre che dalle considerazioni precedenti anche dalla circostanza seguente.

L'aspetto a prima vista paradossale dei teoremi limitativi consiste in questo: che da un lato sembra ragionevole assimilare il procedere deduttivo umano a un opportuno (anche se sconosciuto) sistema formale, mentre dall'altro molti studiosi

---

(²) Non discuto per ora dell'*eventuale* distinzione fra procedere deduttivo umano e procedere deduttivo meccanico. Le connessioni di questo problema con i risultati di Gödel sono ben note.

(³) È chiaro che ben pochi matematici saranno disposti a riconoscere questi due processi come caratteristici dell'ordinario procedere matematico. Ci sono ben pochi esempi storici del primo processo (anzi uno solo di rilievo) e gli esempi principali del secondo riguardano soprattutto la teoria degli insiemi. Notiamo tuttavia che il secondo processo viene ad investire proprio la teoria nella quale molti matematici considerano sviluppabile l'intero edificio matematico e che d'altra parte il primo processo è in qualche modo implicito nel secondo.

(⁴) Mentre non c'è dubbio che in un senso stretto i risultati di Gödel (e risultati analoghi) mettano in crisi il programma hilbertiano, mi pare tuttavia che la disinvoltura con cui spesso si enuncia la cosa senza precisazioni e riserve sia pericolosa. Questo è il motivo delle virgolette del testo.

ritengono di poter inferire dalle limitazioni deduttive dei sistemi formali la negazione di questa ipotesi e di poter asserire una cosiddetta « superiorità » dell'uomo o di non chiaramente identificabili « teorie informali » sulle « macchine » (alias teorie formali). Per quanto la validità di una simile inferenza sia dubbia essa merita di essere analizzata a fondo. La letteratura sull'argomento naturalmente è vastissima. Sembra all'autore (la questione sarà ripresa più oltre) che l'inferenza di cui sopra possa essere sostenuta (dopo un'adeguata precisazione) solo se per « teoria informale » si intende una teoria che proceda per così dire per tentativi ed errori, un pò nella linea delle considerazioni precedenti.

Ma una simile teoria può essere considerata ancora in qualche modo « meccanica » e così gran parte dell'apparente portata dell'inferenza va perduta. Un punto di vista abbastanza simile è stato sostenuto da molti avversari della ricordata inferenza (cfr. per esempio SMART [9], pp. 116-119).

Per precedenti studi di procedimenti per tentativi ed errori cfr. per esempio H. PUTNAM [6] e M. GOLD [3]. (‡)

Risultano proponibili come controparte rigorosa del concetto di insieme delle tesi definitive di una teoria che procede per tentativi ed errori tre concetti:

(*a*) gli insiemi « dialettici » introdotti in questo lavoro. Si tratta di particolari completamenti alla Lindenbaum di teorie enumerabili;

(*b*) gli insiemi appartenente a Δ_2 nella gerarchia aritmetica (cfr. H. ROGERS [7] cap. 14) o col linguaggio di questo lavoro, *limiti*;

(*c*) gli insiemi appartenenti a Σ_2 nella gerarchia aritmetica o col linguaggio di questo lavoro *limiti inferiori* (cfr. M. GOLD [3]).

Il terzo e più ampio concetto è, a giudizio dell'autore il più adeguato, ma gli altri due danno luogo a sottoclassi, per vari aspetti, notevoli.

Il lavoro è stato svolto in sostanza in vista di un'analisi delle limitazioni deduttive e della loro portata, tuttavia è risultato che una simile analisi *non è esauriente senza un'analisi simultanea delle limitazioni « espressive » (teorema di Tarski) cui sarà dedicato un secondo lavoro.*

Analizziamo ora più da vicino il senso dei due processi di « eliminazione delle contraddizioni » e di « rafforzamento ». (5)

Sia dato un sistema formale nel senso consueto. Ciò significa che avremo:

(i) un insieme S decidibile (insieme delle proposizioni;

(5) A causa dei dubbi sul sussistere e sull'interesse dei due processi considerati (cfr. nota (2)) quanto fin qui si è osservato non mostra forse a sufficienza l'interesse di un simile studio. La discussione su questo punto tuttavia non è facile da condurre senza una preliminare precisazione sulla natura del tipo di teoria che si vuole qui introdurre e verrà perciò ripresa nei nn. 8 e 9.

(ii) un operatore di Moore algebrico $\boldsymbol{H}$ sui sottoinsiemi di S, il quale ad ogni sottoinsieme enumerabile X di S associa un insieme $\boldsymbol{H}X$ ancora enumerabile (operatore deduzione);

(iii) un elemento $c \in S$ con $\boldsymbol{H}\{c\} = S$ (contraddizione).

Ovviamente ogni sistema formale classico rientra ampiamente in questo schema. Supponiamo dato un sottoinsieme enumerabile A di S e supponiamo che l'attenzione dei matematici sia rivolta alla teoria $\boldsymbol{H}A$ (6).

In un primo tempo i matematici si dedicheranno a «dedurre» da A elementi di $\boldsymbol{H}A$, cioè procederanno a una parziale enumerazione di $\boldsymbol{H}A$.

Se a un certo punto della enumerazione si troverà c, uno degli elementi di A verrà rimosso e con esso tutti gli elementi di $\boldsymbol{H}A$ dedotti tenendone conto. In seguito qualcuno proporrà di aggiungere ad A nuovi elementi ed il processo si ripeterà (7).

Se (si tratta naturalmente di un grosso se!) si ammette che nel suo procedere la comunità dei matematici sia assimilabile a una macchina di Turing (8), esisterà una funzione ricorsiva h la quale, per ogni stato della situazione, calcola la successiva tesi che verrà dedotta e una funzione ricorsiva f la quale calcola per ogni stato della situazione, il successivo nuovo assioma che verrà proposto (9).

Tenterò ora di proporre un concetto di sistema matematico che schematizzi e precisi la situazione cui ho, brevemente, accennato.

Per ovvie associazioni di idee chiamerò questi sistemi «dialettici» ma il nome non deve suggerire legami inesistenti con le varie «dialettiche» filosofiche.

2. – Introduzione e primi risultati sui sistemi dialettici.

Consideriamo ancora un sistema $\langle S, \boldsymbol{H}, c\rangle$ come nella premessa. Supponiamo che, come avviene nei sistemi classici, si possa dare una funzione ricorsiva h' la quale ad ogni procedimento di enumerazione di un sottoinsieme enumerabile X di S associ un procedimento di enumerazione di $\boldsymbol{H}X$.

---

(6) Gli elementi di A sono gli assiomi di $\boldsymbol{H}A$. Di solito l'insieme A è addirittura decidibile. Del resto, per un teorema di CRAIG [1], nella logica ordinaria se $\boldsymbol{H}A$ è enumerabile esiste un B decidibile con $\boldsymbol{H}B = \boldsymbol{H}A$.

(7) L'esigenza eventuale e l'effettivo verificarsi storico di questi processi è legato ovviamente alle limitazioni deduttive dei sistemi formali. Si possono individuare o proporre processi analoghi legati alle limitazioni espressive. Se ne tratterà in un successivo lavoro.

(8) Mentre è ovviamente un'impresa disperata precisare questa asserzione non mi pare che nei limiti in cui può essere intesa essa possa essere considerata smentita da risultati noti di logica e di ricorsività, non foss'altro per la circostanza banale ma, forse proprio perchè banale spesso dimenticata, che finora è stato scritto un numero finito di proposizioni matematiche.

(9) Ovviamente sto proponendo schemi semplificati. È ovvio per esempio che la situazione dovrebbe essere descritta come un albero anzichè come una catena ma non credo che la semplificazione qui sottointesa conduca a una sostanziale perdita di generalità.

Di conseguenza esisterà almeno una h che ad ogni sottoinsieme finito X di S associa una enumerazione di $\boldsymbol{H}X$.

In termini più precisi. Supponiamo anzitutto, come possiamo fare senza perdita di generalità, $S = \omega$.

La h associerà ad ogni $x \in \omega$ un hx tale che $\boldsymbol{H}D_x = D\varphi_{h(x)} = W_{h(x)}$ (seguo in gran parte il simbolismo di H. ROGERS [7], così D_x è l'insieme di indice canonico x. $D\psi$ dove ψ è una funzione indicherà invece il dominio di ψ).

Se X è un insieme finito scriviamo per comodità $\boldsymbol{H}_n X$ per indicare l'insieme degli elementi di $\boldsymbol{H}X$ ottenuti facendo n^2 passi nella enumerazione associata da h ad x.

Più precisamente poniamo:

$$\boldsymbol{H}_n X = \{y \in n\colon \text{ la macchina } P_{h(x)} \ (x \text{ essendo l'indice canonico di } X) \text{ applicata ad } y \text{ si ferma dopo al più } n \text{ passi}\} \cup X\,.$$

Poniamo ancora:

$$\boldsymbol{K}_0 X = X$$

$$\boldsymbol{K}_{n+1} X = \bigcup \{\boldsymbol{H}_{n+1} Y\colon \ Y \subseteq \boldsymbol{K}_n X\}$$

È chiaro che si ha per ogni $Z \subseteq S$

$$\boldsymbol{H}Z = \bigcup \{\boldsymbol{K}_n X\colon \ X \subseteq Z, \ X \text{ finito}, \ n \in \omega\}$$

Queste osservazioni e le considerazioni fatte nella premessa guidano alla definizione seguente: (cfr. § 4 per una breve discussione sull'adeguatezza del concetto introdotto).

DEF. 1. – *Si dirà sistema dialettico ogni terna* $d = \langle h, f, c\rangle$ *in cui:*

(1.1) h, f sono funzioni totali ricorsive,

(1.2) f è una biiezione ricorsiva (da ω a ω),

(1.3) $c \in \omega$,

(1.4) $\varphi_{h(2^c)}$ è totale,

(1.5) $D\varphi_{h(0)} \neq \emptyset$,

h si dirà la funzione deduzione *di d, f la* funzione proponente, *c la* contraddizione.

Si osserverà che nella def. 1 non c'è menzione esplicita di un insieme da chiamarsi « insieme delle proposizioni » di d; si è assunto in realtà ω come insieme delle proposizioni.

Si ha facilmente:

LEMMA 1. - *Sia $d = \langle h, f, c\rangle$ un sistema dialettico. Definiti (in relazione ad h) $\boldsymbol{H}_n$, $\boldsymbol{K}_m$, $\boldsymbol{H}$ come sopra, il sistema $\langle \omega, \boldsymbol{H}, c\rangle$ è un sistema formale (nel senso dianzi considerato), (lo si dirà il sistema formale associato a d).*

DIM. - È facile vedere che si ha:

$$\left.\begin{array}{l} X \subseteq \boldsymbol{H}_n X \subseteq \boldsymbol{K}_n X \\ \text{se } n \leqslant m \text{ allora } \boldsymbol{H}_n X \subseteq \boldsymbol{H}_m X \text{ e } \boldsymbol{K}_n X \subseteq K_m X \\ \boldsymbol{K}_n \boldsymbol{K}_m X \subseteq \boldsymbol{K}_{n+m} X \end{array}\right\} \quad (X \subseteq \omega;\ X \text{ finito};\ n, m \in \omega)\,.$$

$$\bigcup_{i\in h} \boldsymbol{K}_{m_i} X_i \subseteq \boldsymbol{K}_m \bigcup_{i\in h} X_i \qquad (h \in \omega;\ m = max_i m_i;\ X_i \text{ finito})$$

da cui si ricava facilmente che $\boldsymbol{H}$ è un operatore di Moore algebrico. Che poi sia $\boldsymbol{H}\{c\} = \omega$ si ricava facilmente dalla (1.4). Infine è ovvio che $\boldsymbol{H}$ associa a insiemi enumerabili insiemi enumerabili. Osserviamo anche che, in virtù della (1.5), $\boldsymbol{H}\emptyset \neq \emptyset$.

Allo scopo di dare uno status formale ai due processi indicati nella premessa saranno utili le definizioni seguenti.

DEF. - *Sia $d = \langle h, f, c\rangle$ un sistema dialettico: si dirà stato provvisorio di d ogni sequenza finita $\langle (x_0, X_0), \dots (x_n, X_n)\rangle$ in cui:*

(2.1) $x_i \in \omega$,

(2.2) X_i è un sottoinsieme finito di ω.

Dato un sistema dialettico $d = \langle h, f, c\rangle$ definiamo ora una successione $(s_n)_{n\in\omega}$ di stati provvisori e una successione $(A_n)_{n\in\omega}$ di insiemi, induttivamente come segue:

$$s_0 \text{ è la sequenza } \langle (0, \{f0\})\rangle$$

sia $s_n = \langle (x_0, X_0), \dots (x_m, X_m)\rangle$ e siano:

$$k = \begin{cases} \min\{i \leqslant m \colon c \in X_i\} \colon & \text{se per qualche } i \leqslant m \text{ è } c \in X_i \\ m+1 \colon & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$h = \begin{cases} k \colon & \text{se } k \leqslant m \\ m \colon & \text{se } k = m+1\,. \end{cases}$$

Si porrà:

$$A_n = \bigcup_{i<k} X_i$$

$$s_n = (x_0, \boldsymbol{K}_n X_0), \big(x_1, \boldsymbol{K}_n(X_0 \cup X_1)\big), \dots, (x_{k-1}, \boldsymbol{K}_n \bigcup_{i<k} X_i), \big(x_h + 1, \{f(x_h+1)\}\big)$$

DEF. 3. – s_n *si dirà l'n-esimo stato provvisorio di d*, A_n *l'insieme delle tesi provvisorie allo stadio n e infine si dirà insieme delle tesi definitive di d l'insieme*:

$$A_d = \underline{\lim}_n A_n = \{x \in \omega: \text{ esiste un } k \text{ tale che per ogni } m \geqslant k \text{ è } x \in A_m\} \quad (^{10})$$

L'insieme A_d è stato costruito seguendo da vicino l'idea iniziale, tuttavia se ne possono dare utili definizioni alternative.

Consideriamo:

(i) l'insieme B_d definito induttivamente da:

$$f0 \in B_d \qquad \text{se e solo se} \qquad c \notin \boldsymbol{H}\{f0\}$$

per $n > 0$ è $fn \in B_d$ se e solo se $c \notin \boldsymbol{H}(\{fn\} \cup (B_d \cap f^*n))$ (per comodità scriviamo f^*A per $\{fi: i \in A\}$);

(ii) l'insieme C_d costruito nel modo seguente.

Anzitutto poniamo:

$$C'_n = \{x_i: i < k\}$$

(dove gli x_i e k hanno il senso del passo induttivo nella definizione di $(s_n)_{n\in\omega}$). Posto ancora $C_n = f^*C'_n$ è facile vedere che $(C_n)_{n\in\omega}$ ammette limite ([10]) e si porrà $C_d = \lim_n C_n$;

(iii) l'insieme E_d costruito nel modo seguente:

Definiamo una successione $(E_n)_{n\in\omega}$ mediante le clausole:

(iii.1) $E_n \subseteq f^*(n+1)$,

(iii.2-0) $f0 \in E_n$ se e solo se $c \notin \boldsymbol{K}_n\{f0\}$,

(iii.2-n) per $0 < i \leqslant n$ è:

$$f(i) \in E_n \qquad \text{se e solo se} \qquad c \notin \boldsymbol{K}_n(\{fi\} \cup (E_n \cap f^*i))$$

È facile vedere che la successione $(E_n)_{n\in\omega}$ ammette limite ([10]) e si porrà $E_d = \lim_n E_n$.

Si ha:

LEMMA 2. – $A_d = B_d = C_d = E_d$ ([11]).

([10]) Per richiami elementari sui limiti di successioni di insiemi cfr. § 3.

([11]) Il lemma 2 mostra che se $d = \langle h, f, c\rangle$ è un sistema dialettico e $\langle \omega, \boldsymbol{H}, c\rangle$ il sistema formale ad esso associato allora A_d (in quanto coincidente con B_d) è il *completamento al modo di Lindenbaum* di $\boldsymbol{H}\emptyset$ ottenuto partendo da una enumerazione ricorsiva di ω (la f) (cfr. per esempio E. MENDELSON, lemma 2.11; S. FEFERMAN [2], n. 2.7). Ciò rende conto dei risultati che seguono, che sono, in questa luce, banali.

DIM. – È anzitutto ovvio che è, per ogni $n \in \omega$, $C_n \subseteq A_n$ onde $C_d \subseteq A_d$. È anche ovvio che sono equivalenti le condizioni:

$$f0 \in A_d\,, \qquad f0 \in B_d\,, \qquad f0 \in C_d\,, \qquad f0 \in E_d\,.$$

Sia $n > 0$ e per ipotesi induttiva supponiamo:

$$f^*n \cap A_d = f^*n \cap B_d = f^*n \cap C_d = f^*n \cap E_d\,.$$

Ciò implica che esiste un $k \in \omega$ tale che per $m \geqslant k$ si ha:

$$f^*n \cap B_d = f^*n \cap C_m = f^*n \cap E_m \subseteq f^*n \cap A_m\,.$$

Sia $fn \notin B_d$. Ciò significa che si ha $c \in \boldsymbol{H}(\{fn\} \cup (B_d \cap f^*n)) \subseteq \boldsymbol{H}(\{fn\} \cup (A_m \cap f^*n))$ (per ogni $m \leqslant k$), onde ogni volta che sia, per un $i \geqslant k$, $fn \in A_i$, esiste un $j > i$ con $fn \notin A_j$. Perciò $fn \notin A_d$.

Sia $fn \notin B_d$. Ciò significa che si ha

$$c \notin \boldsymbol{H}(\{fn\} \cup (B_d \cap f^*n)) = \boldsymbol{H}(\{fn\} \cup (E_m \cap f^*n)) \supseteq \boldsymbol{K}_m(\{fn\} \cup (E_m \cap f^*n))$$

(per ogni $m \geqslant \max\{k, n\}$) e quindi $fn \in E_d$.

Infine sia $fn \notin C_d$. Ciò implica che esiste un h tale che per $m \geqslant h$ è $c \in \boldsymbol{K}_m(\{fn\} \cup (f^*n \cap C_m))$ e quindi per $m \geqslant \max(k, n)$ si trova $fn \notin E_m$ onde $fn \notin E_d$. Tenuto conto della $C_d \subseteq A_d$ ne segue che sono equivalenti le:

$$fn \in A_d\,, \qquad fn \in B_d\,, \qquad fn \in C_d\,, \qquad fn \in E_d\,.$$

Per induzione ne resta dimostrato il lemma ([11]).

Dal lemma 2 si ricavano facilmente i seguenti corollari.

COR. 1. – *Se il sistema formale $\langle S, \boldsymbol{H}, c\rangle$ associato a d è consistente (se cioè $H\emptyset \neq S$) allora le tesi di $\langle S, H, c\rangle$ sono tesi definitive di d (cioè $H\emptyset \subseteq A_d$).*

DIM. – Ovvia considerarando la definizione di B_d e il lemma 2.

COR. 2. – *Se il sistema formale $\langle S, \boldsymbol{H}, c\rangle$ associato a d è consistente allora A_d è non contraddittorio massimale per $\langle S, \boldsymbol{H}, c\rangle$ (cioè A_d è un chiuso proprio in $\boldsymbol{K}$ massimale fra i chiusi propri).*

DIM. – Ovvia dal lemma 2 e dalla definizione di B_d.

DEF. 4. – *Un sistema dialettico d si dirà consistente se e solo se $A_d \neq \emptyset$.*

COR. 3. – *Un sistema dialettico è consistente se e solo se lo è il sistema formale ad esso associato.*

DIM. – Ovvia (si tenga conto anche della clausola (1.5) la quale porta $\boldsymbol{H}\emptyset \neq \emptyset$).

Consideriamo ora un sistema dialettico d dotato degli ordinari connettivi $\neg$, $\vee$, tale che cioè esistano due funzioni totali ricorsive $\neg$, $\vee$ (rispettivamente unaria e binaria) con le proprietà:

$$\left.\begin{array}{ll}
(3.1) & \boldsymbol{H}\{\neg\neg x\} = \boldsymbol{H}\{x\} \\
(3.2) & c \in \boldsymbol{H}\{x, \neg x\} \\
(3.3) & x \vee (\neg x) \in \boldsymbol{H}\emptyset \\
(3.4) & \boldsymbol{H}(X \cup \{x \vee y\}) = \boldsymbol{H}(X \cup \{x\}) \cap \boldsymbol{H}(X \cup \{y\})
\end{array}\right| \quad (x, y \in \omega;\ X \subseteq \omega)$$

È facile vedere che per un tal sistema si ha:

COR. 4. – *Nelle suddette ipotesi, se d è consistente, allora per ogni $x \in \omega$ vale una e una sola delle $x \in A_d$, $\neg x \in A_d$.*

DIM. – Tenuto conto del lemma 2 e della definizione di B_d è ovvio che vale al più una delle $x \in A_d$, $\neg x \in A_d$.

Supponiamo che nessuna delle due appartenenze valga.

Allora per la definizione di B_d devono esistere certi sottoinsiemi finiti M, N di A_d con:

$$c \in \boldsymbol{H}(M \cup \{x\}),$$
$$c \in \boldsymbol{H}(N \cup \{\neg x\}).$$

Ora si trova, posto $P = M \cup N$

$$c \in \boldsymbol{H}(P \cup \{x\}) \cap \boldsymbol{H}(P \cup \{\neg x\}) = \boldsymbol{H}(P \cup \{x \vee (\neg x)\}) = \boldsymbol{H}P$$

contro il cor. 2.

Prendiamo ora un sistema formale $\langle \omega, \boldsymbol{H}, c \rangle$ che possa «esprimere» la propria consistenza mediante una certa proposizione t e costruiamo un sistema dialettico $d = \langle h, f, c \rangle$ cui $\langle \omega, \boldsymbol{H}, c \rangle$ sia associato e per cui sia $f0 = t$. Supponiamo ancora che:

(4.1) $\langle \omega, \boldsymbol{H}, c \rangle$ ammetta un connettivo di negazione, ossia una funzione totale ricorsiva $\neg$ soddisfacente le (3.1), (3.2).

(4.2) $\neg t \notin \boldsymbol{H}\emptyset$,

(4.3) valga per $\langle \omega, \boldsymbol{H}, c \rangle$ la «reductio ad absurdum» cioè si abbia:

(4.3-1) se $X \subseteq \omega$, $x \in \omega$ e $c \in \boldsymbol{H}(X \cup \{x\})$ allora $\neg x \in \boldsymbol{H}X$

(in realtà per gli scopi che ci proponiamo è sufficiente la, più debole:

(4.3-2) se $c \in \boldsymbol{H}\{x\}$ allora $\neg\, x \in \boldsymbol{H}\emptyset$).

Vale il:

TEOR. 1. – *Nelle ipotesi fatte, che, ove essi siano consistenti, sono ampiamente verificate in molti dei sistemi formali classici, t è una tesi definitiva di d.*

DIM. – Ovvia.

Osserviamo ora che, in virtù del cor. 3, *t esprime in sostanza la consistenza di d il quale ha così fra le sue tesi definitive l'« asserzione » della propria consistenza*

Questo risultato che differenzia nettamente i sistemi dialettici da quelli formali è tutt'altro che sorprendente ed era ampiamente scontato [12].

Esso è legato in sostanza all'ovvio fatto che mentre, a norma dei risultati di Gödel, un sistema formale consistente non ha fra le sue tesi una tesi t che « esprima » la sua consistenza [13], l'aggiunta ai suoi assiomi di t non porta a contraddizione (come è ovvio t non esprime la consistenza del nuovo sistema). Per ulteriori commenti sul teor. 1 vedi § 7.

Potrà essere utile osservare esplicitamente che:

COR. 5. – *A_d dipende solo da $\boldsymbol{H}, f, c$.*

DIM. – Ovvia dalla definizione di B_d e dal lemma 2.

Per comodità chiamiamo *insiemi dialettici* tutti quei sottoinsiemi di ω che sono insiemi di tesi definitive per qualche sistema dialettico e inoltre ω stesso.

È facile vedere che:

COR. 6. – *La classe degli insiemi dialettici è chiusa rispetto agli isomorfismi ricorsivi.*

DIM. – Sia $d = \langle h, f, c\rangle$ un sistema dialettico e g una biiezione ricorsiva di ω. È facile vedere che:

$$g(A_d) = A_{d^{(g)}} \qquad \text{dove} \qquad d^{(g)} = \langle h^{(g)}, g \circ f, gc\rangle$$

$h^{(g)}$ essendo una funzione totale ricorsiva (che ne esistano segue facilmente dall's-m-n-teorema) per cui:

$$\varphi_{h^{(g)}(s)}(y) = \varphi_{h\left(\sum_{y \in D_s} 2^{g^{-1}(y)}\right)}(g^{-1}(y))\,.$$

---

(12) Ritorneremo sulla questione nel n. 7 mostrando l'esistenza (sempre sotto l'ipotesi della consistenza dell'ordinaria aritmetica peaniana al prim'ordine) di un sistema dialettico d consistente fra le cui tesi definitive ce n'è una, p, che « esprime » la consistenza di d in modo per così dire più « naturale » e diretto di quanto non faccia la t.

(13) Questa asserzione naturalmente è vera solo se si interpreta opportunamente il verbo « esprimere ». Per opportune letture di « esprimere » essa è falsa, come mostra S. FEFERMAN in [2].

È opportuno osservare ancora che la limitazione per cui il sistema formale associato a un sistema dialettico ha sempre come insieme delle proposizioni ω è inessenziale.

Volendo rimuovere le limitazioni converrà intendere per *sistema dialettico generale* un sistema $\langle S, \gamma, d\rangle$ in cui S sia un insieme decidibile, d un sistema dialettico e γ una biiezione computabile da S a ω. In modo ovvio si definiranno poi le tesi provvisorie e le tesi definitive di $\langle S, \gamma, d\rangle$.

Quando si parlerà di sistemi dialettici che « estendono » sistemi formali $\langle S, H, c\rangle$ con $S \neq \omega$, ci si riferirà ovviamente a sistemi dialettici generali. Precisamente $\langle S, \gamma, \langle h, f, c'\rangle\rangle$ « estende » $\langle S, H, c\rangle$ se il sistema formale associato a $d = \langle h, f, c'\rangle$ è $\langle \gamma(S), \gamma^* H \gamma^{*-1}, \gamma c\rangle$.

3. – Sistemi dialettici e limiti.

Allo scopo di dare risultati limitativi sui sistemi dialettici sarà utile immergere la classe degli insiemi dialettici in una classe più ampia i cui oggetti sono di più facile studio ([14]).

Ricordiamo intanto che, data una successione $(A_n)_{n\in\omega}$ di insiemi si dicono rispettivamente limite superiore e limite inferiore della successione, gli insiemi:

$$\overline{\lim}_n A_n = \{x\colon \text{ per ogni } k \in \omega \text{ esiste un } m \geqslant k \text{ con } x \in A_m\} = \bigcap_{k\in\omega} \bigcup_{m\geqslant k} A_m\,,$$

$$\underline{\lim}_n A = \{x\colon \text{ esiste un } k \in \omega \text{ tale che per ogni } m \geqslant k \text{ è } x \in A_m\} = \bigcup_{k\in\omega} \bigcap_{m\geqslant k} A_m\,.$$

Si dice poi che la successione $(A_n)_{n\in\omega}$ ammette limite se $\underline{\lim}_n A_n = \overline{\lim}_n A_n$ e in tal caso il valore comune si dice limite della successione e si indica con $\lim_n A_n$.

Ci interessano ora in particolare quei sottoinsiemi di ω che sono limiti di successioni enumerabili di sottoinsiemi *finiti* di ω. Ciò ci conduce alla seguente:

DEF. 5. – *Si dirà che un insieme A è un limite se e solo se esiste una funzione ricorsiva f tale che* (la successione $(D_{f_n})_{n\in\omega}$ ammette limite e):

$$A = \lim_n D_{f_n}$$

(dove D_k è al solito l'insieme finito di indice canonico k (H. ROGERS [7] cap. 5, § 6)).

Se x è un (r.e.) indice per f si scriverà anche λx per $\underline{\lim}_n D_{f_n}$ ([15]).

([14]) Va anche osservato che, mentre il concetto di insieme dialettico non è certamente più vasto del concetto vago che si vuole approssimare, sussistono buoni motivi per ritenerlo propriamente più ristretto. Per esempio è facile vedere che un insieme enumerabile non ricorsivo non è un insieme dialettico. La questione sarà ripresa nel § 4.

([15]) È facile vedere che si otterrebbe la stessa classe considerando limiti di successioni enumerabili di insiemi ricorsivi (relativamente ad indici caratteristici). Cfr. anche [3], [6].

(*Aggiunto in bozza*). Concetti affini interessanti sono stati introdotti e studiati da P. ALOISIO e da alcuni suoi collaboratori.

OSSERVAZIONE 1. – Dalla definizione si ricava subito che la classe Λ dei limiti è contenuta nella classe $\Delta_2 = \Sigma_2 \cap \Pi_2$ della gerarchia aritmetica (H. ROGERS [7] cap. 14).

Si vedrà più oltre (oss. 2) ed è del resto facile vedere che si ha addirittura $\Lambda = \Delta_2$. L'attuale presentazione di Λ è tuttavia utile in vista di un confronto con la classe degli insiemi dialettici.

TEOR. 2. – *Ogni insieme dialettico è un limite, anzi si può passare in modo effettivo da insiemi dialettici a limiti.*

DIM. – Sia d un sistema dialettico e $A = A_d$. Allora per il lemma 2, utilizzando le notazioni del § 2, è $A = \lim_n C_n$.

Sulla base della definizione induttiva dei C_n non è difficile vedere che esiste una funzione ricorsiva g con:

$$C_n = D_{g_n}$$

Anzi il passaggio può essere reso effettivo uniforme nel senso che si può costruire una funzione totale ricorsiva di tre variabili, θ, la quale soddisfa la condizione seguente:

Se $d = \langle \varphi_u, \varphi_v, c \rangle$ è un sistema dialettico allora per ogni n si ha:

$$C_n = D_{\varphi_{\theta(u,v,c)}(n)}$$

e quindi:

$$A = \lambda\theta(u, v, c).$$

Vedremo più avanti che *non ogni limite è un insieme dialettico.*

Sarà utile ora studiare brevemente i limiti.

Anzitutto è ovvio che *ogni insieme enumerabile è un limite.*

Vale il seguente:

LEMMA 4. – *Se A è un limite anche $\bar{A}(= \omega - A)$ lo è e il passaggio avviene in modo uniforme effettivo, cioè esiste una funzione totale ricorsiva α per cui:*

(5) se x ammette limite (cioè se è indice di una funzione totale ricorsiva f tale che $(D_{fn})_{n\in\omega}$ ammette limite) allora $\lambda\alpha x = \overline{\lambda x}$.

DIM. – Sia $A = \lim_n A_n$, $(A_n)_{n\in\omega}$ essendo una successione di insiemi finiti.

Si ha:

$$\bar{A} = \overline{\bigcap_{k\in\omega} \bigcup_{m\geqslant k} A_m} = \bigcup_{k\in\omega} \bigcap_{m\geqslant k} \bar{A}_m = \bigcup_{k\in\omega} \bigcap_{m\geqslant k} (m \setminus A_m),$$

$$\bar{A} = \overline{\bigcup_{k\in\omega} \bigcap_{m\geqslant k} A_m} = \bigcap_{k\in\omega} \bigcup_{m\geqslant k} \bar{A}_m = \bigcap_{k\in\omega} \bigcup_{m\geqslant k} (m \setminus A_m).$$

Ora se f è una funzione totale ricorsiva con $A_n = D_{fn}$ non è difficile costruire una g totale ricorsiva con $n - A_n = D_{gn}$.

Resta così dimostrato che se A è un limite anche $\bar{A}$ lo è.

Per dare il teorema nella forma uniforme consideriamo la χ così definita:

$$\chi(x, y) = \begin{cases} \text{indice canonico di } x \setminus D_{\varphi_y x}\text{: se } x \in D\varphi_y \\ \text{divergente: altrimenti} \end{cases}$$

La χ è ovviamente parziale ricorsiva onde, via s-m-n-teorema, è, per un'opportuna funzione totale ricorsiva α

$$\varphi_{\alpha(y)}(x) = \chi(x, y) \qquad (x, y \in \omega)$$

ed è ora facile vedere che se y ammette limite è $\lambda xy = \overline{\lambda y}$.

LEMMA 5. - *Se A è un limite e $B \leqslant_T A$ (notazioni di* ROGERS *[7]) allora anche B è un limite.*

DIM. - Sia A un limite, sarà $A = \lim_n A_n$, $\bar{A} = \lim_n C_n$ (cfr. lemma 4) $A_n = D_{fn}$, $C_n = D_{gn}$ per certe f, g totali ricorsive. Sia $B \leqslant_T A$.

Esisterà una macchina di Turing con oracolo, P_z, la quale calcola la funzione caratteristica c_B di B in seguito a risposte sull'appartenenza o meno di certi numeri naturali ad A.

Definiamo (per $n \in \omega$) B_n nel modo seguente:

Per ogni $i \in n$ facciamo eseguire alla macchina P_z, n passi nel computo di $c_B(i)$ dando alle sue domande del tipo «$x \in A$?» risposta affermativa se $x \in A_n \setminus C_n$, negativa se $x \in C_n \setminus A_n$, nessuna risposta altrimenti.

Se (e solo se) il computo ha termine senza alcuna domanda priva di risposta. e risulta $c_B(i) = 1$ allora $i \in B_n$.

Sia $x \in \omega$ e siano $x_0, x_1, \ldots, x_n$ i numeri naturali su cui la macchina P_z nell'eseguire il computo di $c_B(x)$ pone domande (nel caso che ottenga le giuste risposte). Da un certo indice k in poi sarà per ogni $i \in n$:

$$x_i \in A_m \quad \text{se e solo se} \quad x_i \in A$$

$$x_i \in C_m \quad \text{se e solo se} \quad x_i \in \bar{A}\,.$$

Quindi per ogni indice $m \geqslant k$ è:

$$x \in B_m \quad \text{se e solo se} \quad x \in B\,.$$

Si ha quindi:

$$B = \lim_n B_n\,.$$

È ora facile vedere anche che il passaggio può essere reso effettivo uniforme, nel senso che esiste una funzione totale ricorsiva ϱ di due variabili tale che:

se $A = \lambda u$ e v è l'indice di una macchina con oracolo che calcola, relativamente ad A, la funzione caratteristica di un certo B, allora $B = \lambda\varrho(u, v)$.

Osservazione 2. – *Da questo lemma e dal teorema di Post* (H. Rogers [7] cap. 14 teor. VIII (b)), *tenuto conto dell'oss.* 1 *e del fatto che K, essendo enumerabile, è un limite, si ha subito $\Lambda = \Delta_2$.*

Per maggiore chiarezza trattiamo tuttavia la questione direttamente.

Lemma 6. – *Ogni limite è riducibile a K* (notazione del Rogers, $K = \{x : x \in W_x\}$).

Dim. – Sia A un limite, $A = \lim_n A_n$, $\bar{A} = \lim_n B_n$ (cfr. lemma 4) $A_n = D_{fn}$, $B_n = D_{gn}$ $(n \in \omega)$. Non è difficile mostrare l'esistenza di (e in effetti costruire) due funzioni totali ricorsive h, k di due variabili con le proprietà seguenti:

$$\varphi_{h(x,n)}(y) = \begin{cases} \text{il più piccolo } m > n \text{ per cui } x \in A_m\text{: se un tal } m \text{ esiste,} \\ \text{divergente: altrimenti} \end{cases}$$

$$\varphi_{k(x,n)}(y) = \begin{cases} \text{il più piccolo } m > n \text{ per cui } x \in B_m\text{: se un tal } m \text{ esiste,} \\ \text{divergente: altrimenti} \end{cases}$$

Un procedimento di decisione relativo a K per A è ora il seguente:

stadio 0:	si domanda se	$h(x, 0) \in K$
» 1:	»	$k(x, 0) \in K$
stadio $2n$:	si domanda se	$h(x, n) \in K$
» $2n + 1$:	»	$k(x, n) \in K$

Il procedimento termina alla prima risposta negativa, (che ovviamente dovrà esserci).

Se questa risposta si presenta in uno stadio pari allora $x \in \bar{A}$, altrimenti $x \in A$.

Lemma 7. – *$\bar{K}$ è un insieme dialettico* (*e quindi un limite*) (*anzi ogni insieme coenumerabile è dialettico*).

Dim. – Sia f la funzione identica.

Per definire la h scegliamo anzitutto un $c \in K$ e consideriamo la ψ definita da:

$$\psi(x, n) = \begin{cases} 0\text{: se } n \in D_x \text{ oppure } n = c \text{ e per qualche } y \in D_x \text{ è } y \in W_y \\ \text{divergente: altrimenti} \end{cases}$$

La ψ è chiaramente parziale ricorsiva e per l'*s-m-n*-teorema esiste una funzione totale ricorsiva h con:

$$\varphi_{h(x)}(n) = \psi(x, n) \qquad (x, n \in \omega)$$

$$\text{Chiaramente } D\varphi_{h(x)} = \left\{ \begin{array}{l} \omega\text{: se } c \in D_x \\ D_x \cup \{c\}\text{: se } c \notin D_x \text{ e } D_x \cap K \neq \emptyset \\ D_x\text{: se } D_x \subseteq \overline{K} \end{array} \right\} (x \in \omega)$$

Per l'operatore $\boldsymbol{H}$ associato al sistema $\langle h, f, c \rangle$ si ha dunque:

$$\boldsymbol{H}X = \left\{ \begin{array}{l} \omega\text{: se } X \cap K \neq \emptyset \\ X\text{: se } X \subseteq \overline{K} \end{array} \right.$$

cosicchè, via lemma 2, si conclude facilmente che $A_d = \overline{K}$, quindi $\overline{K}$ è un insieme dialettico. Ne segue anche che $\overline{K}$ è un limite come del resto si ricava subito anche dall'osservazione che K, essendo enumerabile, è un limite e dal lemma 4.

TEOR. 3. – *Sono limiti tutti e soli gli insiemi di grado di insolubilità minore o uguale a* 1. (*Si ritrova cioè direttamente quanto già osservato*: $\Lambda = \Delta_2$). *La classe dei limiti è precisamente la classe degli insiemi riducibili a qualche insieme dialettico.*

Nonostante che, come si vedrà, non ogni limite sia ricorsivamente isomorfo a qualche insieme dialettico, il teor. 3 ci autorizza in un certo senso a studiare i limiti piuttosto che gli insiemi dialettici.

4. – Breve discussione sull'adeguatezza del concetto di « sistema dialettico ».

Prima di procedere allo studio di ulteriori proprietà dei sistemi dialettici sarà opportuno discutere brevemente se essi rappresentano bene la situazione vagamente indicata nella premessa.

Come avviene in questi casi l'imprecisione del concetto da schematizzare rende a sua volta imprecisa la discussione, ma questo non significa che la discussione sia del tutto superflua o, peggio, completamente insensata.

In particolare ci sono diversi aspetti della situazione indicata nella premessa che sembrano messi in ombra dallo schema introdotto.

Il primo e meno importante riguarda l'insieme A degli assiomi iniziali (vedi premessa) che non ha corrispettivo nello schema del § 2.

Questa obiezione si rimuove facilmente osservando che si può identificare A con l'insieme delle tesi provvisorie a un opportuno stadio fissato.

Una seconda obiezione riguarda le funzioni h ed f che, secondo le indicazioni della premessa, dovrebbero dipendere dallo stato provvisorio assunto dal calcolo.

È infatti ovvio che in ogni stato della comunità matematica il successivo teorema che verrà dedotto e il successivo assioma che verrà introdotto dipendono dall'intero stato (anzi dall'intera « storia » cioè dall'intera sequenza degli stati fino ad allora raggiunti, ma questa « storia » si può considerare riassunta nell'indice dello stato) e *non* semplicemente, come avviene nel caso dei sistemi dialettici, dall'*insieme* delle tesi provvisorie e dalla sequenza degli assiomi provvisoriamente accettati in quello stato.

Ciò si tradurrebbe in definitiva nel considerare sistemi $\langle h, f, c\rangle$ in cui h, f siano funzioni totali ricorsive di due variabili e nel dare una nuova definizione induttiva della successione $(s_n)_{n\in\omega}$ utilizzando nel passaggio dallo stato n allo stato $n+1$ la h e la f col secondo argomento n.

Una terza obiezione riguarda la supposta biiettività della f.

È questa ipotesi a far sì che gli insiemi dialettici siano particolari completamenti, ma essa introduce una restrizione eccessiva. Non è affatto chiaro che il modo di procedere della comunità matematica tenda, per così dire, a una teoria completa.

Infine un'obiezione decisiva che mostra come gli insiemi dialettici costituiscano una classe troppo ristretta nasce dal fatto che *un insieme dialettico è enumerabile se e solo se è ricorsivo.*

Come si è visto (lemma 7) ogni insieme coenumerabile e quindi in particolare ogni insieme ricorsivo è dialettico.

Sia $d = \langle h, f, c\rangle$ un sistema dialettico, $\boldsymbol{H}$ l'operatore associato e sia A_d enumerabile. Consideriamo la ψ definita da:

$$\psi x = \left\{\begin{array}{ll} 1: & \text{se } x \in A_d \\ 0: & c \in \boldsymbol{H}(\{x\} \cup A_d) \\ \text{divergente: altrimenti} & \end{array}\right\} \quad (x \in \omega)$$

È chiaro che ψ è parziale ricorsiva ma è anche facile vedere che il terzo caso non si presenta, onde ψ è totale ed è la funzione caratteristica di A_d, che risulta così ricorsivo.

È chiaro che comunque si vogliano introdurre, tenendo conto delle obiezioni viste, sistemi adeguati alle indicazioni della premessa appare molto ragionevole che la definizione sia tale che:

(a) *i sistemi dialettici introdotti nel § 2 siano particolari sistemi del nuovo tipo;*

(b) *per ognuno dei nuovi sistemi l'insieme delle tesi definitive sia un limite;*

o almeno:

(b') *per ognuno dei sistemi considerati l'insieme delle tesi definitive sia un limite inferiore (superiore).*

Ora i risultati che ci interessano sono principalmente di due tipi:

(α) asserzioni che mostrano la non validità per i sistemi studiati di certe limitazioni.
Queste sono date nella forma « esiste un sistema dialettico tale che ... » e quindi, tenuta presente la (a), varrebbero *a fortiori* per i nuovi sistemi.

(β) Asserzioni che mostrano la validità per i sistemi studiati di limitazioni analoghe a quelle gödeliane.
Queste possono essere date per i limiti (anzi per i limiti inferiori e per i limiti superiori) onde, avuto riguardo alla (b) (o alla (b')) varranno per i nuovi sistemi.

D'altronde ha ovviamente qualche interesse dare i risultati di tipo (α) per i sistemi dialettici.

Resta la questione se un ampliamento della classe degli insiemi dialettici atto ad includere gli insiemi enumerabili sia da considerarsi adeguato. Nel prossimo paragrafo si darà una tal classe, che risulta anch'essa più ristretta di quella dei limiti.

OSSERVAZIONE. – Poichè, come si è visto, ogni coenumerabile è dialettico e nessun enumerabile non ricorsivo lo è, potrebbe sorgere il dubbio che gli insiemi dialettici fossero precisamente i coenumerabili. Che non sia così risulta dal seguente esempio.

Sia in $d=\langle h, f, c\rangle$, f identica, $c\in K$ e h tale che per l'operatore $\boldsymbol{H}$ associato si abbia:

$$\boldsymbol{H}X=\begin{cases}\omega: & \text{se } x\in 2K \text{ oppure, per un } y\in\omega,\ \{2y, 2y+1\}\subseteq X\\ X: & \text{altrimenti}\end{cases}$$

(facilmente si costruisce una h totale ricorsiva con la proprietà voluta). È facile vedere che il complementare di A_d è $2K\cup\{2x+1: 2x\notin 2K\}$ che è ovviamente non enumerabile.

5. – Una classe intermedia fra quella degli insiemi dialettici e quella dei limiti.

Scopo di questo paragrafo è di costruire una classe che contenga la classe degli insiemi dialettici e quella degli insiemi enumerabili e che ammetta una indiciazione « naturale ». Sia $d=\langle\varphi_u, \varphi_v, c\rangle$ un sistema dialettico.

Viene naturale attribuirgli come indice $\tau^{(3)}(u, v, c)$ ($\tau^{(3)}$ essendo una biiezione ricorsiva da ω^3 ad ω (notazioni di H. ROGERS [7] cap. 5, § 3)). Preso però un $n\in\omega$ e posto $u=\pi_1^3 n$, $v=\pi_2^3 n$, $c=\pi_3^3 n$ la terna $\langle\varphi_u, \varphi_v, c\rangle$ non sarà in generale un sistema dialettico, potendo φ_u non essere totale o φ_v non biiettiva da ω a ω. Vogliamo appunto associare, a meno di biiezioni ricorsive, ad ogni n un insieme M_n in modo tale che, quando $\langle\varphi_u, \varphi_v, c\rangle$ è un sistema dialettico d, esso sia A_d.

Sia u un numero naturale e poniamo $h = \varphi_u$. Definiamo degli operatori $\boldsymbol{H}_u$, $\boldsymbol{K}_u$ sui sottoinsiemi finiti di ω nel modo seguente.

Sia $X \subseteq \omega$, X finito con indice canonico x. Allora:

$$\boldsymbol{H}_n X = \begin{cases} X \cup \{i \in n: \varphi_{h(x)}(i) \text{ converge in al più } n \text{ passi}\}: & \text{se } h \text{ converge su } x \text{ al più } n \text{ passi,} \\ X: \text{altrimenti} & \end{cases}$$

$$\boldsymbol{K}_0 X = X$$

$$\boldsymbol{K}_{n+1} X = \bigcup \{\boldsymbol{H}_{n+1} Y: Y \subseteq \boldsymbol{K}_n X\}\,.$$

Infine definiamo un $\boldsymbol{H}_u$ al solito modo:

$$\boldsymbol{H}_u Z = \bigcup \{\boldsymbol{K}_n Y: Y \subseteq Z,\ Y \text{ finito},\ n \in \omega\} \qquad (Z \subseteq \omega)$$

È chiaro che *se h è totale l'operatore $\boldsymbol{H}_u$ concide con l'operatore $\boldsymbol{H}$ definito a partire da h come nel* § 2.

È opportuno osservare che esiste una funzione totale ricorsiva μ la quale ad ogni u associa un μu tale che $\varphi_{\mu u}$ è totale e dà luogo, con i procedimenti del § 2, ad $\boldsymbol{H}_u$.

Infatti la ψ definita da:

$$\psi(i, n, x) = \left.\begin{cases} 0: \text{ se } i \in D_x \text{ oppure } x \in W_n \text{ e } i \in W_{\varphi_n x} \\ \text{divergente: altrimenti} \end{cases}\right\} (i, u, x \in \omega)$$

è ovviamente parziale ricorsiva e, con due applicazioni dell'*s*-*m*-*n*-teorema, si trova che esiste una μ per cui:

$$\varphi_{\varphi_{\mu u} x} i = \psi(i, u, x) \qquad (i, u, x \in \omega)\,.$$

Siano ora v, n numeri naturali e consideriamo la biiezione ricorsiva $f_n^{(v)}$ così definita. Anzitutto poniamo $\psi_v(x) = 2\varphi_v(x)$ $(x \in \omega)$.

Si facciano n passi nella enumerazione di ψ_v (cioè un passo nel calcolo di $\psi_v(0)$, poi ancora un passo nel calcolo di $\psi_v(1)$, poi ancora un passo nel calcolo di $\psi_v(0)$, etc.).

Si troveranno ordinatamente certe coppie $\langle (x_i, y_i) \rangle_{i \in m}$ (eventualmente nessuna). Si cancelli ogni coppia la cui seconda componente occorra già in qualche coppia precedente. Le coppie $\langle (x_i, y_i) \rangle_{i \in k}$ residue sono coppie della $f_n^{(v)}$. Si considerino poi le coppie (z_j, t_j) in cui z_j è lo j-esimo elemento (nell'ordine naturale) di $\omega - \{x_i: i \in k\}$ e t_j è lo j-esimo elemento di $\omega - \{y_i: i \in k\}$.

La $f_n^{(v)}$ è precisamente $\{(x_i, y_i): i \in k\} \cup \{(z_j, t_j): j \in \omega\}$.

Ovviamente esiste una funzione totale ricorsiva ν tale che:

$$f_n^{(v)} = \varphi_{\nu(v, n)}$$

È anche chiaro che se ψ_v è totale e iniettiva, allora per ogni m esiste un k tale che per ogni $n \geqslant k$ la restrizione ad m della $f_n^{(v)}$ coincide con la restrizione ad m della ψ_v.

Dato un ulteriore numero naturale w si consideri il sistema $d = \langle \varphi_{\mu(u)}, f_n^{(v)}, w \rangle$.

Sia, per $i \in \omega$, $E_i^{(u,v,n,w)}$ lo i-esimo insieme della successione $(E_i)_{i\in\omega}$ costruito a partire da d come nei preliminari del lemma 2 e consideriamo la successione $(E_n^{(u,v,n,w)})_{n\in\omega}$.

Mostriamo che essa ammette limite.

Anzitutto sia χ_v la funzione parziale (non necessariamente ricorsiva) definita da:

$$\chi_v x = \begin{cases} \psi_v x\colon \text{ se } x \in D\psi_v \text{ e non esiste alcun } y < x \text{ con } y \in D\psi_v \text{ e } \psi_v y = \psi_v x \\ \text{divergente: altrimenti}. \end{cases}$$

Sia $m \in \omega$ e sia $M = \{i \in m\colon i \in D\chi_v\}$. Ovviamente esiste un k_1 tale che, per ogni $n \geqslant k_1$, la $f_n^{(v)}$ assume sugli elementi di M gli stessi valori di χ_v.

Sia h il numero degli elementi di $m - M$ e poniamo $p = \max\{n \in D\chi_v\colon \chi_v n \leqslant 2h\}$ $P = (p+1) \cap D\chi_v$. Esisterà un k_2 tale che per ogni $n \geqslant k_2$ la $f_n^{(v)}$ assume sugli elementi di P gli stessi valori di χ_v. Posto $k_m = \max\{k_1, k_2\}$ è ora chiaro che tutte le $f_n^{(v)}$ con $n \geqslant k_m$ assumono gli stessi valori sugli elementi di m, precisamente, dove essa è definita, i valori della χ_v.

Sia ancora $m \in \omega$ e poniamo $k = k_{m+1}$. Tenuto conto della definizione degli $E_i^{(u,v,n,w)}$ si ha ora, per ogni $n \geqslant k$:

$$f_n^{(v)} m = f_k^{(v)} m \quad \text{e} \quad f_k^{(v)} m \in E_n^{(u,v,k,w)} \quad \text{se e solo se} \quad f_k^{(v)} m \in E_n^{(u,v,n,w)}.$$

Infatti l'appartenenza o meno di $f_k^{(v)} m = f_n^{(v)} m$ a $E_n^{(u,v,h,w)}$ dipende solo da n e dai valori della $f_h^{(v)}$ sugli argomenti minori di $m+1$.

Poichè la $(E_n^{(u,v,k,w)})_{n\in\omega}$ ammette limite non può accadere che gli insiemi

$$\{n\colon f_k^{(v)} m \in E_n^{(u,v,n,w)}\}, \qquad \{n\colon f_k^{(v)} m \notin E_n^{(u,v,n,w)}\}$$

siano ambedue infiniti, onde la $(E_n^{(u,v,n,w)})_{n\in\omega}$ ammette limite, e sia $E^{(u,v,w)}$. È chiaro poi che esiste una g totale ricorsiva con $E_n^{(u,v,n,w)} = D_{gn}$ onde $E^{(u,v,w)}$ è un limite.

Poniamo ora:

$$M_0 = A_0 = \omega$$

$$\text{per } t \geqslant 1 \qquad A_t = E^{(\pi_1^3(t-1), \pi_2^3(t-1), \pi_3^3(t-1))}$$

(dove π_1^3, π_2^3, π_3^3 hanno il senso di H. ROGERS [7] cap. 5, § 3) e ancora:

$$\text{per } t \geqslant 1 \qquad M_t = \{x\colon 2x \in A_t\}.$$

Esaminando la costruzione fatta è facile vedere che:

LEMMA 8. – *Ogni insieme dialettico è un M_t per un opportuno t.*

DIM. - Sia $d = \langle \varphi_u, \varphi_v, w \rangle$ un sistema dialettico e $\boldsymbol{H}$ l'operatore ad esso associato. Sia P l'insieme dei pari e consideriamo l'operatore $\boldsymbol{H}^*$ definito da:

$$H^* X = (X \cap \overline{P}) \cup \{2x:\ x \in \boldsymbol{H}\{y: 2y \in X\}\} .$$

Facilmente si vede che esiste una funzione totale ricorsiva σ per cui, comunque scelto $n \in \omega$, se $\boldsymbol{H}$ è l'operatore associato a φ_u allora H^* è l'operatore associato a $\varphi_{\sigma u}$. Posto ora $t = \tau^3(\sigma u, v, 2w) + 1$ è facile vedere che $A_d = M_t$. Il passaggio può essere reso uniforme effettivo nel senso seguente.

Poniamo:

$A^{(0)} = \omega$

$A^{(t+1)}$ è definito solo se $\pi_1 t$ è indice di una funzione totale e $\pi_2 t$ di una biiezione da ω a ω, e in tal caso è uguale a A_d con $d = \langle \varphi_{\pi_1 t}, \varphi_{\pi_2 t}, \pi_3 t \rangle$.

Allora esiste una funzione totale ricorsiva μ tale che, se $A^{(t)}$ è definito si ha:

$$A^{(t)} = M_{\mu t} .$$

Poniamo ora $L = \{x:\ x \in M_x\}$. L è un limite.

Posto infatti:

$$L_n = \{x: x \geqslant 1 \text{ e } 2x \in E_n^{(\pi_1^3(x-1), \pi_2^3(x-1), n, \pi_3^3(x-1))}\} \cup \{0\} .$$

è facile vedere che la $(L_n)_{n \in \omega}$ ammette limite, che $L = \lim_n L_n$ e che esiste una funzione totale ricorsiva g con $L_n = D_{gn}$.

Per il lemma 4 anche $\overline{L}$ è un limite. Non può esistere d'altronde un t con $\overline{L} = M_t$ perchè si avrebbe: $t \in \overline{L}$ se e solo se $t \notin \overline{L}$.

Si ha quindi, tenuto conto del lemma 8:

TEOR. 4. - *La classe degli insiemi sopra considerati è propriamente contenuta in quella dei limiti.*

Infine è facile vedere che alla classe considerata appartengono tutti gli insiemi enumerabili; preso infatti A enumerabile non ricorsivo (i ricorsivi come si è visto sono dialettici) basterà prendere φ_u tale che l'operatore $\boldsymbol{H}$ associato sia discreto, $c \notin A$ e φ_v totale con $D\varphi_v = A$ per avere $A = M_{\tau^3(u, v, c)+1}$.

6. - Limitazioni per i sistemi dialettici.

Dal lemma 6, tenuto conto del fatto che l'insieme V delle proposizioni del primo ordine vere per l'aritmetica è ricorsivamente isomorfo a $\emptyset^{(\omega)}$ (H. ROGERS [7] cap. 14, § 7) si ricava subito che:

TEOR. 5. - *L'insieme V non è un limite (nè a fortiori un insieme dialettico).*

In effetti questa situazione si verifica già per K' (uso al solito il simbolismo del ROGERS: $K' = \{x \in \omega : x \in D\varphi_x^K\}$) e quindi per l'insieme delle proposizioni vere del tipo $x \in K'$. (Più esattamente, detta $\mathcal{E}$ una espressione con una variabile libera per cui sia:

$$\models \mathcal{E}(\boldsymbol{x}) \qquad \text{se e solo se} \qquad x \in K' \qquad (\boldsymbol{x} \text{ numerale associato a } x)$$

per l'insieme $\{\mathcal{E}(\boldsymbol{x}) : x \in K'\}$ che ha, essendo $\{\mathcal{E}(\boldsymbol{x}) : x \in \omega\}$ decidibile, lo stesso grado di insolubilità di K'). Possiamo vedere che vale un teorema limitativo assai più forte, simile al primo teorema di Gödel. Consideriamo l'insieme:

$$M = \{x : \varphi_x \text{ è totale, } (D_{\varphi_x n})_{n \in \omega} \text{ ammette limite e } x \notin \lambda x\}$$

È facile vedere che M è aritmeticamente definibile mediante un opportuno predicato P. Esiste cioè un'espressione con una variabile libera, P, per cui:

$$\models P(\boldsymbol{x}) \qquad \text{se e solo se} \qquad x \in M$$

(dove $\boldsymbol{x}$ è al solito il numerale associato a x e $\models$ sta per «vero nel modello standard»).

È chiaro che l'insieme delle proposizioni aritmetiche del tipo $P(\boldsymbol{x})$ è decidibile. Preso ora un x che ammetta limite è chiaro che $x \in \lambda x + M$: (con $+$ indico la «differenza simmetrica»: $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$).

M risulta cioè «completamente limite-produttivo» (uso la locuzione estendendo in modo ovvio l'ordinario concetto di completa produttività).

Con ragionamenti familiari (cfr. ad esempio H. ROGERS [7], cap. 7, § 8) tenuto conto del teorema 2 (la parte asserente l'uniformità effettiva) se ne ricava:

TEOR. 6. – *Esiste un procedimento effettivo il quale, comunque dato un sistema dialettico generale (o più in generale un limite) le cui proposizioni siano quelle dell'aritmetica peaniana, fornisce una proposizione che è vera se e solo se non è fra le tesi definitive del sistema.*

DIM. – Tutto si riduce a dimostrare l'analogo del lemma di Rogers loco citato, cioè:

Se A, M sono sottoinsiemi di ω con A ricorsivo e $M \cap A$ completamente limite produttivo (tale cioè che esista una funzione totale ricorsiva f per cui, qualunque sia $x \in \omega$ che ammette limite, $fx \in \lambda x + (M \cap A)$ allora anche M è completamente limite produttivo.

Ciò segue immediatamente dal fatto che, fissato un insieme ricorsivo A, esiste una funzione totale ricorsiva g tale che, se x ammette limite, anche gx ammette limite e $\lambda gx = \lambda x \cap A$. Si ha allora subito:

$$fgx \in \lambda gx + (M \cap A) = (\lambda x \cap A) + (M \cap A) \subseteq \lambda x + M .$$

A questo punto basta osservare che $A = \{P(\boldsymbol{x}): x \in \omega\}$ è ricorsivo e che $V \cap A$ è ricorsivamente isomorfo ad M per derivare il teorema.

Dato tuttavia che non abbiamo presumibilmente modo in generale di sapere se la proposizione è o no una tesi definitiva, il teor. 6 non permette di trarre inferenze del tipo di quelle che sono state tratte (comunque, credo, a torto) dai teoremi di Gödel circa la « superiorità » dell'uomo rispetto alle macchine o, meno pittorescamente, delle teorie informali (qualunque cosa esse siano) sulle teorie formali. Se anche noi conosciamo una macchina operante come un sistema dialettico e assumiamo ipotesi non assurde sulla sua correttezza ([16]) difficilmente potremo dedurre qualcosa in più della (o in contrasto con) la macchina con qualche ragionevole speranza di essere nel giusto ([17]).

7. - Costruzione di un sistema dialettico che « asserisce » la propria consistenza in modo « naturale ».

Il teor. 1, come si è osservato, è tutt'altro che sorprendente. La sua portata può sembrare inoltre diminuita dal fatto che la t di cui si parla « esprime » sì la consistenza di d ma solo, per così dire, attraverso il cor. 3. L'interpretazione « naturale » della t nel metalinguaggio è cioè una asserzione che nel metalinguaggio stesso viene mostrata equivalente all'asserzione della consistenza di d, ma non è, direttamente, quest'ultima.

([16]) Per esempio la sua consistenza. È ovvio che non possiamo supporre la sua validità a causa del teorema 6.

([17]) Quest'ultima affermazione esprime, naturalmente, solo un'opinione e si presta a una discussione che sarà approfondita in un successivo lavoro.

Fissiamo una biiezione computabile γ dall'insieme P delle proposizioni chiuse dell'aritmetica peaniana ad ω e per ogni x che ammetta limite sia $T_x = \gamma^{-1}(\lambda x)$. A norma del teorema 6 per ogni x che ammette limite esiste una p vera non appartenente a T_x (se T_x è consistente). È anche chiaro che per *taluni* x una tal p è facilmente individuabile. Le principali differenze con i sistemi formali sono:

(*a*) nel caso dei sistemi formali esiste un procedimento effettivo che per ogni sistema formale consistente estendente l'aritmetica peaniana fornisce una tale p. Nel caso invece dei T_x un simile procedimento *non esiste* come si può dimostrare lavorando sugli M_t del § 5.

(*b*) Nel caso dei sistemi formali estendenti l'aritmetica peaniana si può individuare una p come sopra che (sotto l'ipotesi di consistenza risulta vera ma comunque) è *falsificabile* nel senso che esiste un procedimento effettivo il quale (dimostrabilmente nell'aritmetica peaniana stessa) se la p è falsa fornisce una dimostrazione della sua negazione. Si vedrà in un successivo lavoro che, almeno per i limiti inferiori, *non sussiste* una analoga situazione. Si tratterà precisamente di proporre un adeguato concetto di « sensatezza » per le proposizioni dell'aritmetica sotto il quale si vedrà che, mentre gli insiemi di Σ_1 (enumerabili) cadono sotto le limitazioni deduttive, esistendo, per ciascuno di essi, una proposizione *sensata* che è trattata dal sistema in modo inadeguato, esiste un insieme di Σ_2 (enumerabile in K) che tratta adeguatamente tutte le proposizioni sensate.

Ciò ha qualcosa di insoddisfacente, anzi, se gli strumenti metalinguistici usati nella dimostrazione del cor. 3 fossero così potenti da permettere di dimostrare altresì la consistenza di d, sarebbe del tutto privo di interesse, in quanto in tal caso comunque scelta una $p \in V$ la sua interpretazione « naturale » nel metalinguaggio (cioè l'asserzione della sua verità) sarebbe dimostrabilmente (nel metalinguaggio) equivalente alla consistenza di d, usando quegli stessi strumenti ([18]).

Il teorema 1 acquista invece interesse se si dimostra che, con un'opportuna scelta di d, una proposizione r la cui interpretazione « naturale » è il cor. 3 fa parte delle tesi definitive di d (insieme alla t) o, meglio ancora, delle tesi del sistema formale associato a d.

Anzichè battere questa strada, (che, a quanto sembra all'autore, non dovrebbe presentare ostacoli, dato che il cor. 3 è in sostanza, sotto opportuni codici, una tesi dell'aritmetica peaniana al primo ordine) può essere però di maggiore interesse costruire un sistema dialettico d consistente che ammetta fra le sue tesi definitive una p che « esprima », nella sua interpretazione « naturale » la consistenza di d. Consideriamo l'ordinaria aritmetica peaniana $\langle S, \boldsymbol{H}, c\rangle$ al primo ordine (c, sia, poniamo, $0 \neq 0$). Per le sue formule usiamo i simboli consueti.

In particolare se $x \in \omega$ scriviamo $\boldsymbol{x}$ per il corrispondente numerale.

Scegliamo una biiezione computabile γ dall'insieme delle proposizioni (intendo formule chiuse) dell'aritmetica ad ω.

Se p è una proposizione scriviamo al solito $\ulcorner p \urcorner$ per γp.

Posto $\boldsymbol{H}' = \gamma^* \circ \boldsymbol{H} \circ \gamma^{*-1}$ consideriamo il sistema formale $\langle \omega, \boldsymbol{H}', \gamma c\rangle$.

Fissiamo una h totale ricorsiva tale che l'operatore ad essa associato con i metodi del § 2 sia H'.

Per ogni $v \in \omega$ con φ_v totale e biiettiva sia $d^{(v)}$ il sistema dialettico $\langle h, \varphi_v, \gamma c\rangle$ e, per $n \in \omega$, $A_n^{(v)}$ il suo n-esimo insieme di tesi provvisorie.

([18]) Sarà bene aggiungere qualche ovvia considerazione.

Supponiamo di dire

($\circ$) « la tal teoria è in grado di dimostrare la propria consistenza ».
(Mi riferisco ora a teorie nel senso classico).
Si sarebbe tentati di tradurre questa frase un pò vaga nel modo seguente:

($\circ\circ$) « esiste una proposizione p che è una tesi della teoria sotto esame e tale che: $\models p$ se e solo se la teoria è consistente ».

Questa traduzione tradirebbe in realtà il senso della frase iniziale, specialmente se fossimo in grado di dimostrare la consistenza della teoria. In tal caso infatti basterebbe che la teoria avesse almeno una tesi vera perchè nel senso di ($\circ\circ$) fosse in grado di dimostrare la propria consistenza. In realtà a rigore la frase iniziale viene adeguatamente precisata solo fissando una particolare p che per qualche motivo ci sembri « esprimere in modo naturale » la consistenza di T e asserendo « p è una tesi di T ». In [2] S. FEFERMAN analizza a fondo la situazione fornendo per una larga classe di *presentazioni* di teorie la formula che esprime la consistenza in modo « intensionalmente corretto ».

Riesaminando la definizione di $A_n^{(v)}$ è facile vedere che esiste un'espressione $\mathcal{E}(x, y, t)$ dell'aritmetica peaniana, con tre variabili libere, tale che per ogni $v \in \omega$ con φ_v totale e biiettiva si ha:

$$\models \mathcal{E}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}) \quad \text{se e solo se} \quad x \in A_n^{(v)} \qquad (n, x \in \omega)$$

Consideriamo ora l'espressione $\mathcal{F}(y)$ con una variabile libera data da:

$$\exists x \, \exists z \, \forall t (t \geqslant z \to \mathcal{E}(x, y, t))$$

Ovviamente è, per ogni v con φ_v totale e biiettiva:

$$\models \mathcal{F}(\boldsymbol{v}) \quad \text{se e solo se} \quad A_{d^{(v)}} \neq \emptyset$$

$\mathcal{F}(\boldsymbol{v})$ « esprime » cioè la consistenza di $d^{(v)}$ (19).

È facile vedere ora che la funzione g definita da:

$$gv = \ulcorner \mathcal{F}(\boldsymbol{v}) \urcorner$$

è totale ricorsiva.

Consideriamo ora la funzione di due variabili definite da:

$$\psi(x, y) = \begin{cases} gx: \text{ se } y = 0 \\ y\text{-esimo elemento (nell'ordine naturale) di } \omega - \{gx\}: \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

Per l's-m-n-teorema esiste una s totale ricorsiva tale che, quali che siano x, y si ha $\varphi_{s(x)}(y) = \psi(x, y)$, inoltre, qualunque sia x, la $\varphi_{s(x)}$ è totale e biiettiva.

Per il primo teorema di recursione (H. Rogers [7] cap. 11, § 2) esisterà un v con $\varphi_v = \varphi_{s(v)}$.

Si è dunque trovato una v con φ_v totale e biiettiva e con $\varphi_v(0) = g(v)$.

Supponiamo ora che l'aritmetica peaniana sia valida (20) e quindi consistente per cui anche $d^{(v)}$ è consistente. Si ha $\ulcorner c \urcorner \notin \boldsymbol{H}'\{\ulcorner \mathcal{F}(\boldsymbol{v}) \urcorner\}$ altrimenti si avrebbe successivamente:

$$c \in \boldsymbol{H}\{\mathcal{F}(\boldsymbol{v})\}$$

$\mathcal{F}(\boldsymbol{v}) \to c \in \boldsymbol{H}\emptyset$ e, per la supposta validità: $\models \mathcal{F}(\boldsymbol{v}) \to c$, ma, poichè per ipotesi $\langle \mathcal{S}, \boldsymbol{H}, c \rangle$ è consistente, $\mathcal{F}(\boldsymbol{v})$ è valida onde si troverebbe:

$$\models c \qquad \text{ossia} \qquad 0 \neq 0 \, .$$

(19) « Esprime » nel senso largo cioè nel senso della ($\circ$) della nota (18). Tuttavia è chiaro che, in molti dei sensi stretti plausibili di « esprimere », la $\mathcal{F}(\boldsymbol{v})$, *purchè si sia scelta opportunamente la* $\mathcal{E}$, esprime la consistenza di $d^{(v)}$.

(20) Non si è precisato quale sia il metalinguaggio che si sta usando. È chiaro che se esso è, per esempio, ZF questa ipotesi è superflua, potendo essere dimostrata.

Poichè $\varphi_v(0)=gv=\ulcorner\mathcal{F}(\boldsymbol{v})\urcorner$ e $\ulcorner c\urcorner \notin H'\{\ulcorner\mathcal{F}(\boldsymbol{v})\urcorner\}$ dal lemma 2 segue che $\ulcorner\mathcal{F}(\boldsymbol{v})\urcorner$ fa parte delle tesi definitive di $d^{(v)}$.

Indicato con $d^{(v)}$ il sistema dialettico generale (cfr. § 2) $\langle S, \gamma, d^{(v)}\rangle$ si ha dunque:

TEOR. 7. – *Se l'aritmetica peaniana è valida allora esiste un sistema dialettico generale $d^{(v)}$ che la estende ed ha fra le sue tesi definitive l'asserzione della propria consistenza (nella forma $\mathcal{F}(\boldsymbol{v})$).*

La precisazione « nella forma $\mathcal{F}(\boldsymbol{v})$ » nel teor. 7 ci spinge a proseguire la discussione di cui all'inizio di questo paragrafo e nelle note (18,19).

In effetti taluno potrebbe considerare ancora insoddisfacente il teor. 7 proponendo come proposizione esprimente « naturalmente » la consistenza di $d^{(v)}$ una proposizione diversa dalla $\mathcal{F}(\boldsymbol{v})$ ed esigendo perciò che si dimostri l'esistenza di un sistema dialettico che abbia fra le sue tesi definitive una proposizione che esprima « naturalmente » la sua consistenza, dove l'avverbio « naturalmente » avrebbe per lui una accezione diversa da quella indicata in questo paragrafo.

È desiderabile perciò mostrare che:

(∘) *Per ogni ragionevole accezione dell'avverbio « naturalmente » esiste un sistema dialettico che ha fra le sue tesi definitive una proposizione che esprime naturalmente la sua consistenza.*

Quest'ultimo enunciato è vago e perciò indimostrabile, tuttavia è possibile, anzichè scartarlo come insensato, sottoporlo ad analisi.

Sembra accettabile che:

(∘∘) *Qualunque sia la scelta che uno vuol fare della proposizione che « esprime » la consistenza di $d^{(v)}$ esista una funzione totale ricorsiva f tale che, se φ_v è totale e biiettiva, fv è il gödeliano della proposizione scelta ad esprimere la consistenza di $d^{(v)}$.*

Ma in tal caso si può ripetere la dimostrazione del teor. 7.

Se si interpreta perciò l'enunciato (∘) in modo da rendere vera la (∘∘), (∘) risulta dimostrato.

Il discorso può naturalmente prescindere dalla particolare questione della consistenza e anche dal riferimento all'aritmetica peaniana, si ha cioè:

TEOR. 8. – *Sia T (l'insieme dei teoremi di) una teoria valida, S l'insieme delle proposizioni (chiuse) del calcolo in cui T è costruita e f una funzione totale ricorsiva tale che per ogni v con φ_v totale e biiettiva si abbia:*

$$\models \gamma f v$$

(γ essendo una biiezione computabile da ω ad S).

Allora esiste un sistema dialettico $d^{(v)}$ estensione di T con fv fra le sue tesi definitive.

Sfrondato dai riferimenti logici il teor. 8 può anche esser messo nella forma seguente:

TEOR. 9. – *Sia h una funzione totale ricorsiva, $c \in \omega$ e per ogni v con φ_v totale e biiettiva indichiamo con $d^{(v)}$ il sistema dialettico $\langle h, \varphi_v, c\rangle$ e con $A^{(v)}$ l'insieme delle sue tesi definitive. Sia $\boldsymbol{H}$ l'operatore di Moore associato ad h e supponiamo $\boldsymbol{H}\emptyset \neq \omega$.*

Se f è una funzione totale ricorsiva tale che per ogni v con φ_v totale e biiettiva sia: $c \notin \boldsymbol{H}\{fv\}$ allora esiste un $v \in \omega$ per cui $fv \in A^{(v)}$.

La dimostrazione del teor. 9 è del tutto analoga a quella del teor. 7; riportiamola tuttavia per completezza.

Siano h, f, c come nell'enunciato. Per l's-m-n-teorema esiste una s tale che:

$$\varphi_{s(x)}(y) = \begin{cases} fx: \text{ se } y = 0 \\ y\text{-esimo elemento (nell'ordine naturale) di } \omega - \{fx\}: \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Per il primo teorema di recursione esiste un v con $\varphi_v = \varphi_{s(v)} \cdot \varphi_v$ è totale e biiettiva e $\varphi_v(0) = fv$. Poichè $c \notin \boldsymbol{H}\{fv\}$ si ha: $fv \in A^{(v)}$. Il teorema è così dimostrato.

8. – La portata delle limitazioni godeliane e i sistemi dialettici.

È ben noto che molti autori (ometto ogni citazione dato che sull'argomento esiste una letteratura vastissima) inferiscono dai teoremi di Gödel proposizioni del tipo « gli uomini sono superiori alle macchine », « gli uomini non sono macchine », « le teorie non formali sono superiori alle teorie formali » ecc.

Ritengo inutile una discussione sui termini impiegati perchè, pur essendo la precisazione di questi termini delicata e difficile, credo che il nocciolo della disputa non nasca da un equivoco terminologico ma proprio da una divergenza di contenuto. Cerchiamo piuttosto di esaminare che cosa fa il supposto « uomo » che sarebbe superiore alle « macchine ».

Per ogni sistema formale F di un certo tipo che gli venga dato egli costruisce, col procedimento di Gödel, una certa proposizione p indecidibile nel sistema e, *assunta la consistenza del sistema dato*, dimostra p (o meglio una « traduzione » di p nel suo linguaggio) [21].

Egli assume così un nuovo assioma [22].

---

[21] Che è poi, ovviamente, l'asserzione della verità di p.

[22] « Nuovo » naturalmente rispetto a quegli assiomi e regole del suo linguaggio che gli permettono esclusivamente di dedurre la verità delle tesi di F, che costituiscono cioè, per così dire, un duplicato di F.

Sembra allora plausibile che il confronto debba essere fatto non fra l'« uomo » considerato e un ordinario sistema formale (o macchina) ma fra l'« uomo » e una macchina che, in certe occasioni, assuma nuovi assiomi, pronta naturalmente a « cancellarli » quando diano luogo a contraddizioni (come del resto l'« uomo » considerato), cioè fra l'« uomo » e i sistemi dialettici (o qualcosa di molto analogo) ([23]).

Un simile confronto non sembra più dar luogo a possibili « superiorità ».

D'altronde i sistemi dialettici sono ovviamente « macchine ».

Essi differiscono non nella struttura ma, per così dire, solo nell'intenzione con cui vengono considerati, dai sistemi formali (o comunque da macchine enumeranti numeri naturali).

Se anche i sistemi dialettici o i limiti, o i limiti inferiori non costituiscono una adeguata schematizzazione del procedere dei matematici (saranno ovviamente di questo parere tutti coloro che non accettino di considerare i due processi descritti nella premessa come tipici del consueto procedere matematico, oppure come parti di un programma accettabile per il futuro) essi sembrano però rendere conto di (o almeno avere qualche analogia con) l'« uomo » cui molti autori alludono quando parlano di « superiorità » nel senso prima ricordato.

9. – Possibili vantaggi dei sistemi dialettici. La scelta della f.

Come già osservato probabilmente non molti matematici saranno del parere che i due processi indicati nella premessa giochino un ruolo essenziale nell'ordinario procedere matematico e non molti di più accetteranno in tutto o in parte questi due processi come parte di un programma.

Chiariamo anzitutto qualche aspetto banale della questione.

Il concetto di sistema dialettico può forse costituire a certi effetti una adeguata schematizzazione del procedere dei matematici, ma lo è semmai in quanto si voglia prendere questo procedere come oggetto di studio e non ovviamente come modello da seguire in senso stretto. Intanto è ovvio che converrebbe semmai usare sistemi in cui la h e la f dipendano da due variabili. In secondo luogo è chiaro che il rapporto fra i sistemi dialettici e i sistemi che potrebbe esser conveniente usare è un pò simile a quello fra le macchine di Turing e i calcolatori. Conviene prendere le macchine di Turing come oggetto di studio ed è chiaro che, mutatis mutandis, non c'è niente nelle possibilità dei calcolatori che non sia nelle possibilità delle macchine di Turing (anzi, ovviamente, le possibilità delle macchine di Turing sono maggiori) ma è altrettanto chiaro che conviene far eseguire i calcoli agli ordinari calcolatori.

Sbarazzato il campo da questo possibile banale equivoco c'è un altro punto da mettere in luce.

([23]) Limitato forse all'aggiunta di assiomi asserenti certe consistenze. Cfr. per esempio Smart [8], [9].

I teorr. 5 e 6, mostrando una grave limitazione dei sistemi dialettici, non devono tuttavia far ritenere che la scelta della f sia indifferente.

Partiamo per esempio, come nel § 7, dall'aritmetica peaniana e supponiamo di voler costruire un sistema dialettico d in modo da minimizzare la differenza simmetrica fra A e V (che abbiamo visto essere in ogni caso non vuota).

È chiaro allora che nella enumerazione data dalla f la proposizione fermatiana p:

$$\forall x \forall y \forall z \forall t (t > 2 \to x^t + y^t \neq z^t)$$

dovrà *precedere* la sua negazione e ogni proposizione implicante questa negazione. È chiaro infatti che in tal modo avremo:

$$p \in A_d \quad \text{se e solo se} \quad p \in V$$

(e di conseguenza $\neg p \in A_d$ se e solo se $\neg p \in V$) cioè $p, \neg p \notin A_d + V$.

Con una diversa scelta della f invece, qualora sia $p \in V - \boldsymbol{H}\emptyset$ (qualora cioè p sia vera ma non sia una tesi dell'ordinaria aritmetica) si avrà $p, \neg p \in A_d + V$ (precisamente $p \in V$, $p \notin A_d$, $\neg p \notin V$, $\neg p \in A_d$).

Questo è precisamente il caso della proposizione di Gödel.

Questa situazione indica un possibile vantaggio di certi sistemi dialettici sul sistema formale associato.

Per illustrarlo userò un esempio in termini di teoria dei giochi.

La differenza fra i sistemi dialettici e i sistemi formali può essere vista in questo modo.

Un sistema formale schematizza il comportamento di un uomo che, data una proposizione p, si astenga da ogni giudizio sulla verità di p finchè non abbia eventualmente dimostrato p oppure $\neg p$. Un sistema dialettico invece schematizza il comportamento di un uomo che va enumerando (con un certo procedimento: la f) proposizioni in cui crede «fino a prova contraria» [24].

Abbiano i simboli S, $\boldsymbol{H}$, h, f, c il solito significato con riferimento, per esempio, all'aritmetica peaniana e sia p una proposizione tale che fra le tesi di $\langle S, \boldsymbol{H} \rangle$ ci sia la $q = \neg p \to \mathrm{Teor}(\ulcorner \neg p \urcorner)$ (tale è per esempio il caso per la proposizione fermatiana sopra ricordata, e per la proposizione di Gödel).

Sarà allora anche (se $\boldsymbol{H}\emptyset \subseteq V$): se $\neg p \in V$ allora $\neg p \in \boldsymbol{H}\emptyset$ (in realtà è sufficiente questa ipotesi ma il caso $q \in \boldsymbol{H}\emptyset$ ha maggiore interesse).

Supponiamo che la f sia scelta in modo che p preceda $\neg p$ (e ogni proposizione r per cui sia $r \to (\neg p) \in \boldsymbol{H}\emptyset$ [25])).

---

[24] La cosa è un pò più complicata: la f stabilisce altresì l'ordine di preferenza.

[25] Qui mi riferisco per semplicità a sistemi dialettici generali nel senso chiarito alla fine del § 2.

Consideriamo ora due giocatori A, B i quali giochino contro un « banco », C, nel modo seguente:

periodicamente viene chiesto al giocatore un giudizio sulla verità di p. Se il giudizio è giusto il giocatore guadagna 1, se è errato guadagna -1, se si astiene dal giudizio guadagna 0.

Supponiamo che A scelga come sua strategia quella di riferirsi, all'n-esima domanda, all'insieme A_n, n-esimo insieme delle tesi provvisorie di d, mentre il giocatore B sceglie come sua strategia quella di astenersi se nè p nè $\neg p$ sono comparse fra i primi n elementi enumerati in una fissata enumerazione di $\boldsymbol{H}\emptyset$ e di dare un giudizio conseguente se una delle due proposizioni compare fra le prime n.

Si danno ora tre casi:

$$(\alpha) \qquad p \in V\,, \qquad p \notin \boldsymbol{H}\emptyset$$

in tal caso dette s_n^A, s_n^B le somme guadagnate rispettivamente da A e da B dopo le prime n domande si ha:

$$\lim_n s_n^A = +\infty$$

$$\lim_n s_n^B = 0$$

(β) $p \in \boldsymbol{H}\emptyset$ (e quindi, avendo supposto $\boldsymbol{H}\emptyset \subseteq V$, $p \in V$) in tal caso ovviamente:

$$\lim_n s_n^A = \lim_n s_n^B = +\infty$$

(γ) $p \notin V$. In tal caso A perde inizialmente delle somme ma si ha ugualmente:

$$\lim s_n^A = \lim_n s_n^B = +\infty$$

Alla lunga quindi la strategia di A è preferibile.

Ci sono qui ovviamente molte osservazioni da fare.

Anzitutto se A e B sono mortali la strategia preferibile varierà al variare di p. Come strategia globale (al variare cioè di p) converrà una strategia intermedia. Questo ci porterebbe a sistemi dialettici, per così dire, temperati, (in cui la f per esempio non finisca col proporre tutto S ma solo una parte). Con una speculazione un pò azzardata suggerirei che proprio questo tipo di sistemi semmai schematizzi l'ordinario comportamento.

In secondo luogo le considerazioni fatte sono valide per proposizioni per cui sia « se $\neg p \in V$ allora $\neg p \in \boldsymbol{H}\emptyset$ ».

Insomma per giochi condotti sull'appartenenza o meno di un naturale all'insieme K (o su questioni equivalenti o a questo riducibili) cioè per giochi legati a insiemi di grado di insolubilità 1, la strategia di A è preferibile (purchè d sia opportuno) mentre la situazione può volgere a favore della strategia « astensionistica » di B in caso diverso. Questa osservazione può di nuovo portare a sistemi con opportune limitazioni su $\mathfrak{A}f$.

Infine è ovvio che il gioco particolare proposto è ben lontano dal rendere la complessità delle situazioni che potrebbero essere considerate. Un'analisi più precisa della situazione può esser condotta con riferimento al concetto di proposizione « sensata » che verrà proposto in un successivo lavoro.

10. – Ulteriore analisi delle conseguenze del teor. 6.

Alla luce della versione « strategica » dei sistemi dialettici è possibile un'ulteriore analisi delle conseguenze del teor 6. Sia d un sistema dialettico il cui sistema formale associato, $F = \langle S, H, c\rangle$, sia l'ordinaria aritmetica peaniana. Il procedimento di cui nel teor. 6 ci fornisce una proposizione per la quale, nel gioco suggerito nel § 9, possediamo una strategia migliore di quella suggerita da d, precisamente la strategia consistente nell'asserire, allo stadio n-esimo, p, se e solo se $p \notin A_n$.

Queste considerazioni potrebbero portare a un tentativo di risollevare argomenti a favore della più volte ricordata « superiorità » umana. In effetti disponiamo ora di un procedimento il quale, comunque si dia una strategia s per il gioco descritto nel § 9, permette di individuare una strategia s' e una proposizione p tale che s' coincide con s su tutte le proposizioni, eccettuata p, sulla quale è, dimostrabilmente, preferibile. In effetti la situazione ricorda molto da vicino quella classica relativa ai sistemi formali.

Senonchè il fatto che ogni strategia (nel gioco in esame) possa essere migliorata non è molto più sorprendente del fatto che ogni numero naturale ammetta un successivo e il tentativo di inferirne una asimmetria nel rapporto « uomo » « macchina » non ha molto più peso del tentativo, nel giochetto infantile consistente nello scommettere su chi dice il numero più alto, di averla vinta dicendo:

« il doppio del numero che hai pensato tu » ([26]).

11. – Sui limiti inferiori.

Per completare le considerazioni del § 4 occorre ancora considerare le limitazioni di eventuali sistemi i cui insiemi di tesi definitive siano « limiti inferiori » nel senso

---

([26]) Per chiarire ulteriormente. Supponiamo di avere a che fare con « macchine » il cui unico compito è di enunciare numeri naturali (ciascuna macchina un numero naturale). Sia M_x la macchina che enuncia x. È ovvio che esiste un procedimento che, dato (l'indice di) una macchina, permette di individuare un numero naturale maggiore di quello dato dalla macchina. Inferire dai teoremi limitativi relativi ai sistemi formali (o dal teor. 6 relativo ai sistemi dialettici) che « l'uomo è superiore alle macchine come scopritore di verità logiche » (o asserzioni analoghe) mi sembra molto simile all'inferire dalla banalità sopra osservata che « l'uomo è superiore alle macchine come dicitore di numeri naturali ».

della seguente definizione:

DEF. 6. – *Un insieme $A \subseteq \omega$ si dirà un limite inferiore (superiore) se esiste una funzione totale ricorsiva f per cui si abbia:*

$$A = \underline{\lim}_n D_{fn} \qquad (A = \overline{\lim}_n D_{fn})$$

se $f = \varphi_x$ si scriverà anche $A = \underline{\lambda} x$ $(A = \bar{\lambda} x)$.

È facile in realtà associare ad ogni naturale x (sia o no esso indice di una funzione totale) un limite inferiore (coincidente con $\underline{\lambda} x$ se x è indice di una funzione totale).

Sia infatti $x \in \omega$. Per ogni $n \in \omega$ sia:

$$M_n = \{y : y \leqslant n \text{ e } \varphi_x \text{ converge su } y \text{ in al più } n \text{ passi}\} .$$

Poniamo ora:

$$A_0 = \emptyset$$

$$A_{n+1} = \begin{cases} D_{\varphi_x(y)} & \text{dove } y \text{ è il primo elemento di } M_{n+1} - M_n \text{ (nell'ordine naturale):} \\ & \text{se } M_{n+1} \supset M_n \\ A_n : & \text{se } M_{n+1} = M_n \end{cases}$$

È chiaro che esiste una funzione totale ricorsiva f con $A_n = D_{fn}$ anzi esiste una funzione totale ricorsiva σ tale che, per ogni $x \in \omega$, σx è un indice per una tal f. Poichè se φ_x è totale ovviamente $\underline{\lambda}\sigma x = \underline{\lambda} x$ si può assumere questa eguaglianza come definizione di $\underline{\lambda} x$ per ogni x. Vedremo più avanti che l'insieme $\underline{\Lambda}$ dei limiti inferiori coincide con Σ_2 ed è facile vedere che si può passare in modo effettivo uniforme dall'indicazione ora data per i limiti inferiori alla Σ_2-indiciazione di cui in H. ROGERS [7] cap. 14, § 3 (cfr. anche cap. 14, § 5 teor VIII (c)) e viceversa.

Si omette la semplice dimostrazione del seguente:

LEMMA 9. – *A è un limite inferiore se e solo se $\bar{A}$ è un limite superiore e (introdotta anche per i limiti superiori un'indiciazione analoga alla precedente) i due passaggi possono essere fatti in modo uniforme effettivo.*

È anche facile vedere, tenuto conto del teorema di completezza (H. ROGERS [7] cap. 14, § 1), che si ha:

TEOR. 8. – $\underline{\Lambda} = \Sigma_2 = \{A \subseteq \omega : A \leqslant_1 K'\}$, $\bar{\Lambda} = \pi_2 = \{A \subseteq \omega : A \leqslant_1 \overline{K'}\}$.

È ora facile ritrovare per i limiti inferiori risultati del tutto analoghi ai teorr. 5 e 6. Lo stesso accadrebbe se si volesse ampliare la classe in esame a quella di tutti gli insiemi riducibili a qualche limite inferiore o a qualche limite superiore che, come facilmente si verifica, è $\Delta_3 = \Sigma_3 \cap \Pi_3$.

12. - Osservazioni sulle varie proposte.

Sia $\langle \omega, \boldsymbol{H}, c \rangle$ un sistema formale. Come si è osservato nella premessa sono possibili diverse proposte come controparte rigorosa del concetto vago di: «insieme delle tesi definitive di una teoria che procede per tentativi ed errori ed estende $\boldsymbol{H}\emptyset$» per esempio le:

(α) insieme dialettico contenente $\boldsymbol{H}\emptyset$;

(β) insieme costruito in modo analogo agli insiemi dialettici seguendo l'indicazione del § 4 e contenente $\boldsymbol{H}\emptyset$ (da precisare);

(γ) limite contenente $\boldsymbol{H}\emptyset$;

(δ) limite inferiore contenente $\boldsymbol{H}\emptyset$.

È abbastanza facile vedere che la proposta (β), se adeguatamente precisata, viene a coincidere con la proposta (δ).

Se poi $\langle \omega, \boldsymbol{H}, c \rangle$ ammette un connettivo di negazione, nel senso che per un'opportuna funzione totale ricorsiva $\neg$ si abbia:

$$c \in \boldsymbol{H}\{x, \neg x\} \qquad (x \in \omega)$$

è facile vedere che:

TEOR. 9. - *Se A è un limite inferiore completo (tale cioè che per ogni $x \in \omega$ valga una delle $x \in A$, $\neg x \in A$) e consistente ($c \notin \boldsymbol{H}A$) allora A è un limite.*

DIM. - Sia A come nella ipotesi, $A = \underline{\lim}\, D_{fn}$ con f totale ricorsiva. Per la consistenza di A comunque presi x, $n \in \omega$ esiste un $m \geqslant n$ per cui non è $x, \neg x \in D_{fm}$ Poniamo ora per $n \in \omega$

$$B_n = D_{fn} \setminus \bigcup \left\{\{x, \neg x\} \colon \{x, \neg x\} \subseteq D_{fn}\right\}.$$

È facile costruire una h totale ricorsiva per cui $B_n = D_{hn}$ e mostrare che $\overline{\lim}\, B_n = A$. Così $A \in \underline{\Lambda} \cap \overline{\Lambda} = \Lambda$.

ELENCO DEI LAVORI CITATI (*)

[1] W. CRAIG, *On axiomatizability within a system,* Jour. of Symb. Logic, **18** (1953), pp. 30-32.
[2] S. FEFERMAN, *Arithmetization of metamathematics in general setting,* Fund. Math., **49** (1960), pp. 35-92.
[3] E. M. GOLD, *Limiting recursion,* Jour. of Symb. Logic, **18**, (1965), pp. 28-48.
[4] C. MANGIONE, *Su alcune questioni connesse con i principi di riflessione,* Symp. Math. dell'Ist. Naz. di Alta Mat., **5** (1971), pp. 189-201.
[5] E. MENDELSON, *Introduction to mathematical logic,* New York (1964).
[6] H. PUTNAM, *Trial and error predicates,* Journ. of Symb. Logic, **18** (1953), pp. 49-57.
[7] H. ROGERS, *Theory of recursive functions and effective computability,* New York (1967).
[8] J. J. SMART, *Gödel's Theorem, Church's Theorem, and Mechanisms,* Synthese, **13** (1961), pp. 105-110.
[9] J. J. SMART, *Philosophy and scientific realism,* London (1965).

(*) Questo breve elenco è limitato ai soli lavori citati cosicchè non solo non costituisce, come è ovvio, una bibliografia (che dovrebbe comprendere almeno un centinaio di titoli) ma nemmeno una scelta rappresentativa. Le citazioni infatti sono state fatte per la loro immediata pertinenza con questo o quel singolo passaggio onde l'elenco ha carattere accidentale ed esclude molti lavori importanti in vista di un'eventuale discussione approfondita sulle idee di questo articolo.