Capes externe – Mathématiques

ÉPREUVE D'ADMISSIBILITÉ 1

ÉNONCÉ DU DEVOIR N°1

Pierre Burg

ATTENTION :
ce devoir est à envoyer à la correction.

CNED, BP 60200, 86980 Futuroscope Chasseneuil Cedex,
France © CNED 2020

1-2011-DV-WB-01-21

1 Problème 1

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie. Pour un entier n et un endomorphisme f de E, on désigne par f^n la composée de f par lui même n fois.
On introduit aussi le *crochet* de deux endomorphismes :

$$\forall (f,g) \in \mathscr{L}(\mathrm{E})^2,\ [f,g] = f \circ g - g \circ f$$

On s'intéresse aux familles libres (f,g) d'endomorphismes de E vérifiant

$$[f,g] \in \mathrm{V}ect(f,g)$$

On considère plus particulièrement les cas où au moins l'un des deux endomorphismes est un projecteur. On notera $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ l'ensemble des projecteurs de E.

Partie I. Trace, projecteurs, crochet.

1. Questions de cours.
   (a) Justifier la possibilité de définir la trace d'un endomorphisme.
   (b) Rappeler la définition d'un projecteur, d'une projection et la relation entre les deux. On ne demande pas de démonstration.
   (c) Soit p un projecteur. Montrer que

$$\mathrm{T}r(p) = \mathrm{r}g(p), \quad \mathrm{I}m(p) = \mathrm{K}er(p - \mathrm{I}d_{\mathrm{E}}), \quad \mathrm{K}er(p) = \mathrm{I}m(p - \mathrm{I}d_{\mathrm{E}})$$

2. Propriétés des projecteurs. Soit p et q deux projecteurs.
   (a) Montrer que

$$p \circ q = q \Leftrightarrow \mathrm{I}m\, q \subset \mathrm{I}m\, p, \qquad p \circ q = p \Leftrightarrow \mathrm{K}er\, q \subset \mathrm{K}er\, p$$

   (b) Soit $\mathscr{R}$, la relation binaire définie sur $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ par :

$$\forall (p,q) \in \mathscr{P}(\mathrm{E})^2, \quad p \mathscr{R} q \Leftrightarrow p \circ q = q \circ p = p$$

   Comment caractériser $p \mathscr{R} q$ par des relations entre noyaux et images ? Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathscr{P}(\mathrm{E})$.

(c) Soit p un projecteur et $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Montrer que $p - \lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ est un isomorphisme.

3. Propriétés du crochet.

   (a) Montrer que : $\forall (f,g) \in \mathscr{L}(\mathrm{E})^2$, $\mathrm{T}r([f,g]) = 0$, $[g,f] = -[f,g]$. Montrer que l'application, pour $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ fixé,
   $$\begin{cases} \mathscr{L}(\mathrm{E}) \to \mathscr{L}(\mathrm{E}) \\ \quad g \mapsto [f,g] \end{cases}$$
   est linéaire.

   (b) Le crochet n'est pas associatif mais il vérifie une autre relation. Calculer
   $$\big[f,[g,h]\big] + \big[g,[h,f]\big] + \big[h,[f,g]\big]$$
   pour tout $(f,g,h) \in \mathscr{L}(\mathrm{E})^3$ (identité de *Jacobi*).

   (c) Soit (f,g) une famille libre d'endomorphismes de E vérifiant $[f,g] \in \mathrm{V}ect(f,g)$. On note $\mathrm{V} = \mathrm{V}ect(f,g)$, montrer que V est stable pour l'opération crochet.

Partie II. Un exemple de projecteur.

Dans cette partie, $\mathrm{E} = \mathbb{R}^4$. La base canonique est notée $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.
On définit $p_0 \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ par

$$\mathrm{M}at_{\mathscr{E}}(p_0) = \mathrm{A} \text{ avec } \mathrm{A} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que p_0 est un projecteur.
2. (a) Montrer que $(e_1 + e_3, e_4)$ est une base de $\mathrm{K}er\, p_0$ et $(-2e_1 + e_3, e_1 + 3e_2 + e_3)$ est une base de $\mathrm{I}m\, p_0$

   (b) Montrer que $(-2e_1 + e_3, e_1 + 3e_2 + e_3, e_1 + e_3, e_4)$ est une base de E. Exprimer la matrice de p_0 dans cette base.
3. Soit $\mathscr{B}$ une base de E telle que, en adoptant la notation de matrices par blocs et I_r désignant la matrice carrée identité d'ordre r,
   $$\mathrm{M}at_{\mathscr{B}}(p_0) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } r = \mathrm{rg}\, p_0$$
   Déterminer, dans $\mathscr{B}$, la forme de la matrice d'un projecteur q vérifiant $p_0 \mathscr{R} q$.

Partie III. Plans stables pour le crochet.

Dans cette partie, (f,g) est une famille libre d'endomorphismes de E tels que

$$[f,g] \neq 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})} \text{ et } [f,g] \in \mathrm{V} \text{ avec } \mathrm{V} = \mathrm{V}ect(f,g)$$

1. On suppose que $[f,g] \in \mathrm{V}ect(f)$. Plus précisément, $\exists \alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $[f,g] = \alpha f$.

   (a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $[f^k, g] = \alpha k f^k$.

(b) Montrer que,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^k \neq 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})} \Rightarrow (\mathrm{id}, f, f^2, \cdots, f^k) \text{ libre dans } \mathscr{L}(\mathrm{E})$$

En déduire l'existence d'un entier n tel que $f^n = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$. On dira que f est *nilpotent*.

2. Montrer que $[f, g] \in \mathrm{V}ect(g)$ entraîne g nilpotent.
3. On suppose que f et g sont deux projecteurs. Comme $[f, g] \in \mathrm{V}$, il existe des réels α, β tels que

$$[f, g] = \alpha f + \beta g$$

(a) Montrer que α et β sont non nuls.

(b) Montrer que

$$[f, g] = \alpha\left(f \circ g + g \circ f\right) + 2\beta g$$

En déduire

$$\alpha(1-\alpha) f = 2\alpha g \circ f + \beta(1+\alpha) g \;\text{ et }\; \beta(1-\alpha) g = -2\alpha f \circ g + \alpha(1+\alpha) f$$

(c) Montrer que $\alpha = 1$ entraîne $f \circ g = f$ et $g \circ f = g$.

(d) Montrer que $\alpha \neq 1$ entraîne $g \circ f = f$ et $f \circ g = g$.

(e) Décrire, en précisant les relations entre les noyaux et les images, les projecteurs f et g satisfaisant aux conditions imposées dans cette question. Que vaut alors leur crochet ?

4. Soit p_0 le projecteur de la partie II. et $\mathscr{B}$ la base de la question II.3..

(a) Préciser la forme de la matrice dans $\mathscr{B}$ d'un projecteur g vérifiant $[p_0, g] = -p_0 + g$.

(b) Préciser la forme de la matrice dans $\mathscr{B}$ d'un projecteur g vérifiant $[p_0, g] = p_0 - g$.

2 Problème 2

Étude d'une fonction définie par une intégrale.
f désigne une fonction réelle continue sur $]0, +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, on pose $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$.

(a) Déterminer F lorsque $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

(b) Déterminer F lorsque $f : x \mapsto 1$.

(c) Déterminer F lorsque $f : x \mapsto \ln(x)$.

2. Dans la suite, on choisit pour f la fonction $x \mapsto \cos(x)$.

(a) Déterminer le signe de $\mathrm{F}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ et de $\mathrm{F}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(b) Montrer que, pour tout $x > 0$, $|\mathrm{F}(x)| \leqslant \ln(3)$.

(c) Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \int_x^{3x} \sin(t) \ln(t) \mathrm{d}t$.

(d) Étudier la limite de F lorsque $x \to 0^+$. Quelle conséquence en tirer ?

3. On considère la fonction G définie sur $[0,\ +\infty[$ par :

$$G(x) = \begin{cases} F(x) & \text{si } x > 0 \\ \ln 3 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Montrer que G est dérivable en 0 et calculer $G'(0)$.

(b) Montrer que G est dérivable sur $[0,\ +\infty[$ et calculer $G'(x)$.

(c) Majorer

$$\left| G(x) - \frac{\sin(3x) - 3\sin(x)}{3x} \right|$$

(d) En déduire la limite de G lorsque $x \to +\infty$.

(e) Déterminer les intervalles sur lesquels G est croissante et les intervalles où G est décroissante.
Montrer que G admet un zéro sur chaque intervalle $\left[(2k+1)\frac{\pi}{2},\ (2k+3)\frac{\pi}{2}\right]$, $k \in \mathbb{N}$.
Allure du graphe de G.