Les explications sont parfois assez confuses, et il y a des erreurs, également beaucoup de questions non traités

VELU Etienne 6/20

(1)

Epreuve Admissibilité 1 - Devoir n°2

I 1a. On pose la suite $\left(\frac{n+2}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n} = \lim_{n\to+\infty} 1+\frac{2}{n} = 1.$$

Si $n=1$ alors $1+\frac{2}{n} = 3$. La suite est décroissante et elle est minorée donc elle converge et la borne inférieure de la suite est 1 donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{n+2}{n} \geqslant 1$. On sait aussi qu'il existe $n_x = 1$ tel que $\frac{n+2}{n} = 3$ ligne inutile

On en conclut que pour tout $x \in]1,2]$ il existe une

oui valeur n_x tq $\forall n \geqslant n_x$ $x > \frac{n+2}{n}$.

b. On dit qu'une suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement s'il existe une fonction u telle que $u_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u(x)$ $\forall x \in X$ oui

si $x\in]1,2]$ On sait qu'il existe n_x tel que pour tout $n \geqslant n_x$, $x > \frac{n+2}{n}$.

non, elle prend la valeur 1 sur [n+1 /n , n+2 /n]

Donc à partir de n_x, la fonction $\mathbb{1}_{\left[\frac{n_x+1}{n_x}, \frac{n_x+2}{n_x}\right]}$ est nulle.

On en conclut que la limite quand n tend vers $+\infty$ de $(g_n)_{n\geqslant 2}$ est 0 et la suite converge simplement vers la fonction nulle. raisonnement insuffisant

c.

2a. On montre l'existence d'un entier naturel k_n tel que $2^{k_n} \leqslant n < 2^{k_n+1}$.

indice n inutile Pour tout $k_n \in\mathbb{N}$ on a $2^{k_n} < 2^{k_n+1} = 2^{k_n}\times 2$ car, par définition, pour tout $a\in\mathbb{N}^*$ $a < a\times 2$. 2^{k_n} et 2^{k_n+1} étant des nombres entiers naturels, il existe alors un entier naturel n compris entre 2^{k_n} et 2^{k_n+1} qui est au minimum au moins égal à 2^{k_n} si 2^{k_n} et 2^{k_n+1} sont consécutifs.

n est fixé et on cherche k et non l'inverse

Ensuite on montre l'unicité de cet entier naturel k_n.

Supposons qu'il existe k_{n_1} et k_{n_2} deux entiers naturels

tels que $2^{k_{n_1}} \leqslant n < 2^{k_{n_1}+1}$ et $2^{k_{n_2}} \leqslant n < 2^{k_{n_2}+1}$ et $k_{n_1} < k_{n_2}$. Or $k_{n_1} < k_{n_2} \Rightarrow k_{n_2} = k_{n_1} + i$, $i \in \mathbb{N}^*$
On aurait donc $2^{k_{n_1}} \leqslant n < 2^{k_{n_1}+1} \leqslant 2^{k_{n_1}+i} = 2^{k_{n_2}}$, $i \in \mathbb{N}^*$,
Mais pourtant $2^{k_{n_2}} \leqslant n$ ce qui est impossible donc le nombre k_n tel que $2^{k_n} \leqslant n < 2^{k_n+1}$ existe et est unique.
On a $k_n = \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln 2} \right\rfloor$ là oui

b. Pour tout $n \in [2^k, 2^{k+1}-1]$ on a $2^k \leqslant n \leqslant 2^{k+1}-1$

$\Leftrightarrow 2^k \leqslant n < 2^{k+1}$

$\Leftrightarrow \ln(2^k) \leqslant \ln(n) < \ln(2^{k+1})$ par stricte croissance du logarithme

$\Leftrightarrow k \times \ln(2) \leqslant \ln(n) < (k+1) \times \ln(2)$

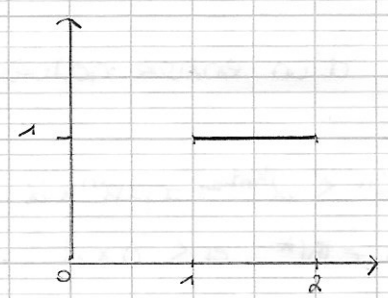
$\Leftrightarrow k \leqslant \frac{\ln(n)}{\ln(2)} < k+1$.

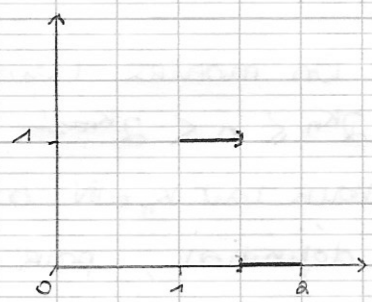
oui On a donc pour tout $n \in [2^k, 2^{k+1}-1]$ $k \leqslant \frac{\ln(n)}{\ln(2)} < k+1$

c. Les valeurs de k_n pour n de 1 à 16 sont :

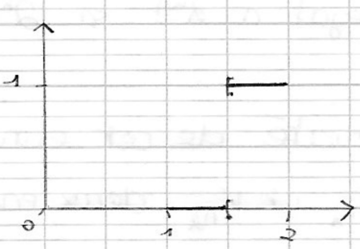
$k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$, $k_4 = 2$, $k_5 = 2$, $k_6 = 2$,
oui $k_7 = 2$, $k_8 = 3$, $k_9 = 3$, $k_{10} = 3$, $k_{11} = 3$, $k_{12} = 3$,
$k_{13} = 3$, $k_{14} = 3$, $k_{15} = 3$, $k_{16} = 4$.

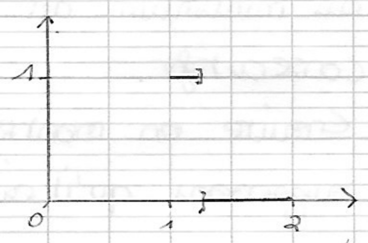
d. $f_1(x) = \mathbb{1}_{[1,2]}(x)$ $f_2(x) = \mathbb{1}_{[1,3/2]}(x)$



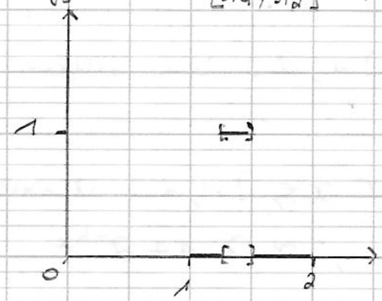


$f_3(x) = \mathbb{1}_{[3/2,2]}(x)$ $f_4(x) = \mathbb{1}_{[1,5/4]}(x)$

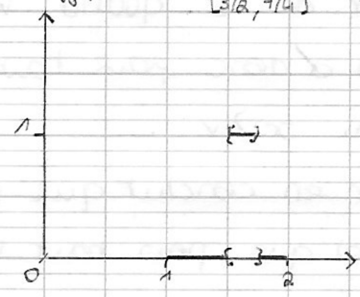




$f_5(x) = \mathbb{1}_{[5/4\,,\,3/2]}(x)$

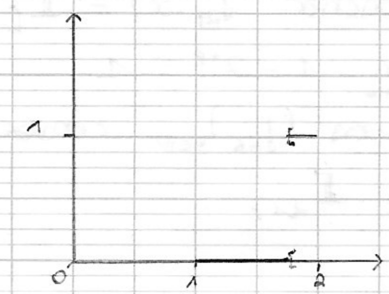


$f_6(x) = \mathbb{1}_{[3/2\,,\,7/4]}(x)$

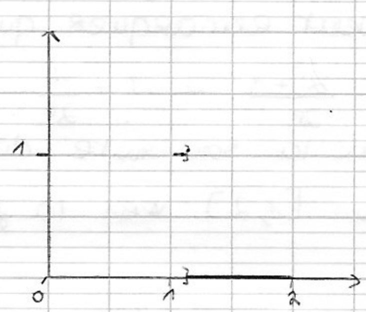


oui

$f_7(x) = \mathbb{1}_{[7/4\,,\,2]}(x)$



$f_8(x) = \mathbb{1}_{[1\,,\,9/8]}(x)$



3a. On peut montrer par récurrence que la suite numérique $(f_{2p}(1))_{p\in\mathbb{N}^*}$ est constante à 1 et la suite numérique $(f_{2^p-1}(1))_{p\in\mathbb{N}^*}$ est constante à 0.

oui

Pour $p=1$, on a $f_2(1) = \mathbb{1}_{[1\,;\,3/2]}(1) = 1$ et $f_3(1) = \mathbb{1}_{[3/2,2]}(1) = 0$

Supposons les hypothèses vraies au rang p, vérifions qu'elles sont vraies au rang $p+1$.

$f_{2^{p+1}}(1) = \mathbb{1}_{\left[\frac{2^{p+1}}{2^{\frac{\ln(2^{p+1})}{\ln(2)}}}\,,\,\frac{2^{p+1}+1}{2^{\frac{\ln(2^{p+1})}{\ln(2)}}}\right]}(1)$ et $\dfrac{2^{p+1}}{2^{\frac{\ln(2^{p+1})}{\ln(2)}}} = \dfrac{2^{p+1}}{2^{(p+1)\frac{\ln(2)}{\ln(2)}}} = \dfrac{2^{p+1}}{2^{p+1}} = 1$

oui, mais il n'y a pas besoin de récurrence

On a pu montrer que $(f_{2p}(1))_{p\in\mathbb{N}^*}$ est constante à 1.

et pour f_2^p-1(1) ?

b. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite en une fonction unique car elle prend pour valeur 0 et 1. La suite n'ayant pas une fonction limite, elle ne converge pas simplement sur $[1,2]$

ça ne suffit pas

la suite f_n(1) diverge donc la suite (f_n) ne converge pas simplement sur [1,2]

c. Si on pose $v(k) = 1 + 2^{-k_{\cancel{x}}}$ une suite numérique.

pas d'indice x ici

$\lim\limits_{k_x\to+\infty} 1 + 2^{-k_{\cancel{x}}} = \lim\limits_{k_x\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{2^{k_{\cancel{x}}}} = 1$ et la suite est décroissante.

La borne inférieure est donc 1 et la borne supérieure est de 2 quand $k_x = 0$.

On a donc pour tout $x \in]1;2]$ une valeur $v(k)$ dans cette suite où $x > v(k)$. phrase confuse

On en conclut que pour tout $x \in]1,2]$ il existe un entier k_x tel que pour tout $k > k_x$, $x > 1 + 2^{-k_x}$.

Avec cette démonstration et celle de la question 3(a), on peut remarquer que la fonction f_{2^p} ~~(x)~~ $x \mapsto \mathbb{1}_{[1, 1+2^{-p}]}(x)$

et $\frac{2^p+1}{2^p} = 1 + \frac{1}{2^p}$. $\lim_{p \to +\infty} 1 + 2^{-p} = 1$.

si $x \in]1,2]$, alors $\forall p > p_x$, $f_{2^p}(x) = 0$

Donc la sous-suite de fonctions $(f_{2^k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[1,2]$ vers la fonction $\mathbb{1}_{\{1\}}$ oui

d.i. La définition mathématique formelle de l'ensemble A est

$$A = \{x \in [1,2] \mid \lim_{n \to +\infty} (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*} = l, \ l \in \mathbb{R}\}.$$

l dépend de x

4a. Pour montrer que f_n est Riemann-Integrable, il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions étagées u_ε et v_ε appartiennent à $\mathcal{E}([a,b])$ telles que.

$$-u_\varepsilon \leqslant f \leqslant v_\varepsilon \quad \text{et} \quad \left| \int_a^b u_\varepsilon(t)\,dt - \int_a^b v_\varepsilon(t)\,dt \right| < \epsilon.$$

ici, f doit être continue par morceaux

or ici, f est une fonction en escalier

II 1a. On utilise la règle de d'Alembert

$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!\,|z|^n}{n!\,|z|^n} = n+1 = +\infty$ le rayon de convergence est donc 0.

z∈C* fixé

b. $\lim_{n\to+\infty} \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{|z|^n} = \frac{|z|}{n+1} = 0$. Le rayon de convergence est donc $+\infty$.

c. $\lim_{n\to+\infty} \frac{|z|^{n+1}}{|z|^n} = |z|$. Le rayon de convergence est $\frac{1}{|z|}$.

il faut détailler le raisonnement et utiliser la définition du rayon de convergence donné dans l'énoncé

2a. Par déduction, si $z \in D_R$ alors $|z| < R$.

On pose $A = \{R \geq 0 \mid (a_nR^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée$\}$. $|z|$ ne majore pas A vu que $R = \sup A$, donc il existe $R > 0$ tel que $|z| < R$ et tel que la suite $(a_nR^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.

ça n'est pas le même R qu'à la première ligne

D'après le lemme d'Abel, si on pose $z_0 = R$, $|z| < R \Rightarrow \sum a_nz^n$ converge absolument.

oui

b. Si $|z| > R$ alors $|z| \notin A$, A définit précédemment donc la suite $(a_nz^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée et par conséquent ne tend pas vers 0, donc la série est grossièrement divergente

oui

3a. $$\sum_{n=p+1}^{q-1} (v_n - v_{n+1})\sigma_{p,n} = \sum_{n=p+1}^{q-1} v_n\sigma_{p,n} - \sum_{n=p+1}^{q-1} v_{n+1}\sigma_{p,n}$$

$$= \sum_{n=p+1}^{q-1} v_n\sigma_{p,n} - \sum_{n=p+2}^{q} v_n\sigma_{p,n-1}$$

$$= v_{p+1}\sigma_{p,p+1} + \sum_{n=p+2}^{q-1} v_n\sigma_{p,n} - v_q\sigma_{p,q-1} - \sum_{n=p+2}^{q-1} v_n\sigma_{p,n-1}$$

$$= v_{p+1}\sigma_{p,p+1} - v_q\sigma_{p,q-1} + \sum_{n=p+2}^{q-1} v_n(\sigma_{p,n} - \sigma_{p,n-1})$$

$$= v_{p+1}\sigma_{p,p+1} - v_q\sigma_{p,q-1} + \sum_{n=p+2}^{q-1} v_n v_n$$

oui

Et donc

$$u_q\sigma_{p,q} + u_{p+1}v_{p+1} - u_q\sigma_{p,q-1} + \sum_{n=p+2}^{q-1} u_n v_n$$

$$= u_{p+1}v_{p+1} + u_q(\sigma_{p,q} - \sigma_{p,q-1}) + \sum_{n=p+2}^{q-1} u_n v_n$$

$$= u_{p+1}v_{p+1} + u_q v_q + \sum_{n=p+2}^{q-1} u_n v_n$$

$$= u_{p+1}v_{p+1} + \sum_{n=p+2}^{q} u_n v_n = \sum_{n=p+1}^{q} u_n v_n$$ oui

On a donc bien pour tout $q, p \in \mathbb{N}$ tels que $p < q$:

$$\sum_{n=p+1}^{q} u_n v_n = u_q\sigma_{p,q} + \sum_{n=p+1}^{q-1}(u_n - u_{n+1})\sigma_{p,n}.$$ oui

b. i. $\left|\sum_{n=p+1}^{q} v_n\right| = \left|v_{p+1} + \sum_{n=p+2}^{q} v_n\right|$

$\leq |v_{p+1}| + \left|\sum_{n=p+2}^{q} v_n\right|$

$\leq |v_{p+1}| + |v_{p+2}| + \dots |v_q|$

$\leq \sum_{n=p+1}^{q} |v_n| = M$ ce M dépend de p et de q

Il existe donc un réel M tel que : $\forall p, q \in \mathbb{N}$ avec $p < q$:

$|\sigma_{p,q}| = \left|\sum_{n=p+1}^{q} v_n\right| \leq M$ raisonnement faux donc, M ne doit pas dépendre de p ni de q

ii. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant à termes réels, positifs et décroissante de limite nulle. $\frac{\varepsilon}{2M}$ est strictement positif alors il

oui, mais pas très bien rédigé

existe un terme $u_{n_0} \leq \frac{\varepsilon}{2M}$ ~~et~~ $\forall n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$ $u_n \leq \frac{\varepsilon}{2M}$.

∃n0∈IN tel que

$\left|\sum_{n=p+1}^{q} u_n v_n\right| = \left|u_q \sum_{n=p+1}^{q} v_n + \sum_{n=p+1}^{q-1}(u_n - u_{n+1})\sigma_{p,n}\right|$

$\leq \left|u_q \sum_{n=p+1}^{q} v_n\right| + \left|\sum_{n=p+1}^{q-1}(u_n - u_{n+1})\sigma_{p,n}\right|$

$\leq u_q \left|\sum_{n=p+1}^{q} v_n\right| + \left|\sum_{n=p+1}^{q-1} u_n\sigma_{p,n} - u_{n+1}\sigma_{p,n}\right|$

$\leq \frac{\varepsilon}{2M} M + \left|\sum_{n=p+1}^{q-1} \frac{\varepsilon}{2M}\sigma_{p,n} - \frac{\varepsilon}{2M}\sigma_{p,n}\right|$ inégalité fausse

$\leq \frac{\varepsilon}{2} + 0 \leq \varepsilon.$

On a donc bien $\forall p, q \in \mathbb{N}$ tels que $n_0 \leq p < q$: $\left|\sum_{n=p+1}^{q} u_n v_n\right| \leq \varepsilon$.

raisonnement donc faux, vous n'utilisez pas la décroissance de (Un)

iii. On peut en conclure que comme $\left|\sum_{n=p+1}^{q} u_n v_n\right| \leq \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$

p et q ≥n0

et à partir d'un certain rang, la suite numérique complexe $\sum_{n\geq 0} u_n v_n$ est convergente carsuite des sommes partielles de Cauchy

III 1. R est le rayon du cercle donc est un réel. Si U est d'affixe R alors $U(R,0)$. A appartient au cercle $C(U,R)$.

restez plutôt dans le repère (O,i,j)

Si on prend un repère d'origine U. Dans ce repère $|z_A| = R$ et on peut écrire $z_A = |z_A|e^{i\varphi} = Re^{i\varphi}$

Par rapport à l'origine O on a l'affixe de A qui est égale à $z_A = U(R) + Re^{i\varphi} = R + Re^{i\varphi}$. oui

2a

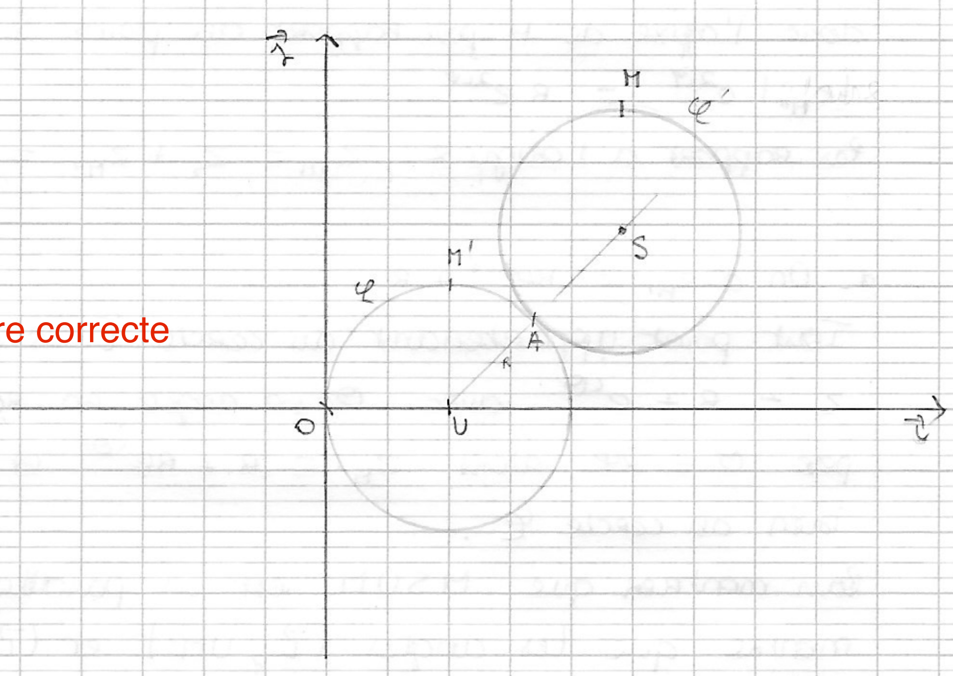


figure correcte

b. $\mathscr{C}'$ est le cercle tangent extérieurement à $\mathscr{C}$ au point.
On a comme propriété que la distance entre deux centres des cercles est la somme de chacun de leurs rayons donc $[US] = R + R = 2R$ or $[UA] + [AS] = R + R = 2R$, si $[US] = [UA] + [AS]$ alors les points U, A et S sont alignés.

oui

Par translation de U vers A et de A vers S, S est le point d'affixe z_S, dans le repère d'origine O
$z_S = z_A + z_A - R$, On soustrait R car z_A est exprimé avec un décalage de R depuis l'origine. Or on a décalé qu'une seule fois et non deux pour z_S.

un peu confus

On a donc $z_S = R + Re^{i\varphi} + R + Re^{i\varphi} - R$
$= R + 2Re^{i\varphi}$ oui, résultat juste

c. On pose M le point d'affixe z_M. $(\vec{i}, \vec{UA}) = \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$ donc

$(\vec{i}, \vec{SA}) = \pi + \varphi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{N}$ comme S est le symétrique de U par rapport à A. Alors

$$(\vec{i}, \vec{SM}) = (\vec{i}, \vec{SA}) + (\vec{SA}, \vec{SM})$$
$$= \pi + \varphi + \pi + \varphi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{N}$$
$$= 2\pi + 2\varphi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{N}$$
$$= 2\varphi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{N}.$$

$k \in \mathbb{Z}$

donc l'affixe de M par rapport au point S est $z_{M''} = |z_{M''}| e^{2i\varphi} = R e^{2i\varphi}$.

Par rapport à l'origine, $z_m = z_s + z_{M''} = R + 2Re^{i\varphi} + Re^{2i\varphi}$

oui

d. On a $z_{M'} = Re^{2i\varphi} + R$.

Tout point appartenant au cercle $\mathcal{C}$ s'écrit de la forme $z = R + Re^{i\theta}$ avec θ un angle en radian. Si on pose $\theta = 2\varphi$ alors $z_{M'} = R + Re^{i\theta}$ et M' appartient bien au cercle $\mathcal{C}$. oui

(r au lieu de R)

Pour montrer que MSUM' est un parallélogramme, on montre que les angles $(\vec{i}, \vec{UM'})$ et $(\vec{i}, \vec{SM})$ sont égaux à $2k\pi$ près avec $k \in \mathbb{N}$ et que les vecteurs $\vec{UM'}$ et $\vec{SM}$ sont de même longueur et donc qu'ils sont égaux.

c'est compliqué

on vérifie que zS-zM=zU-zM'

$\|\vec{UM'}\| = R$ le rayon du cercle $\mathcal{C}$ et $\|\vec{SM}\| = R$ le rayon du cercle $\mathcal{C}'$ donc les vecteurs $\vec{UM'}$ et $\vec{SM}$ sont de même longueur. On a $(\vec{i}, \vec{UM'}) = 2\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$ comme montré précédemment et $(\vec{i}, \vec{SM}) = 2\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Donc les vecteurs $\vec{UM'}$ et $\vec{SM}$ sont égaux et MSUM' est un parallélogramme

oui, d'accord