CNED

Capes externe – Mathématiques

ÉPREUVE D'ADMISSIBILITÉ 2

CORRIGÉ DU DEVOIR N°1

Marie-Hélène
Mourgues

CNED, BP 60200, 86980 Futuroscope Chasseneuil Cedex, France

1-2012-CT-WB-01-21

SOMMAIRE

Problème capes deuxième épreuve d'admissibilité - Correction

Problème 1

Dans ce problème toutes les matrices carrées considérées sont à coefficients dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.
Soit A une matrice carrée (n, n), on note $A = (a_{ij})$ où a_{ij} est le coefficient intersection de la i-ème ligne et la j-ème colonne.
On note I_n la matrice identité de taille n, c'est à dire la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf les coefficients diagonaux qui sont égaux à 1 et et E_n la matrice de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1.
On appelle *matrice semi-magique de taille* n, une matrice (n, n) à coefficients dans $\mathbb{N}$ dont la somme des termes de chaque ligne et la somme des termes de chaque colonne sont égales. En d'autres termes la matrice $A = (a_{ij})$ est dite semi-magique s'il existe un entier $s(A)$ tel que pour tout $(i, j) \in \{1, \cdots, n\}$:

$$s(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}$$

L'entier naturel $s(A)$ est appelé *somme* de la matrice semi-magique A. On dit qu'une matrice est une *matrice magique de taille* n si elle est est semi-magique de taille n et si, de plus, la somme des éléments diagonaux et la somme des éléments anti-diagonaux sont aussi égales à la somme $s(A)$ de A. En d'autre terme A est magique si : pour tout $(i, j) \in \{1, \cdots, n\}$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = \sum_{k=1}^{n} a_{k\,n-k+1}$$

L'entier naturel $s(A)$ est appelé somme de la matrice magique A.
On note $\mathcal{SM}_n$ et $\mathcal{M}_n$ respectivement l'ensemble des matrices semi-magiques de taille n et l'ensemble des matrices magiques de taille n.

Soient n un entier naturel et x et y deux entiers la notation $x = y[n]$ signifie que n divise $x - y$.

I Quelques généralités et exemples

(I.1). *Vérifier que I_n est semi-magique et que E_n est magique.*
La matrice I_n est clairement semi-magique de somme 1 et E_n est magique de somme n.

(I.2). *Soient A et B deux matrices semi-magiques (resp. magiques) et a et b deux entiers naturels. Montrer que $aA+bB$ est semi-magique (resp. magique) et exprimer $s(aA+bB)$ en fonction de $s(A)$ et $s(B)$.*

Si $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$, alors $aA+bB=(c_{ij})$ avec $c_{ij}=aa_{ij}+bb_{ij}$. Un calcul simple conduit à, $\sum_{i=1}^n c_{ij}=a\sum_{i=1}^n a_{ij}+b\sum_{i=1}^n b_{ij}=as(A)+bs(B)$. De même, $\sum_{j=1}^n c_{ij}=a\sum_{j=1}^n a_{ij}+b\sum_{j=1}^n b_{ij}=as(A)+bs(B)$. Par suite si A et B sont semi-magiques $aA+bB$ est semi-magique de somme $as(A)+bs(B)$. Si de plus A et B sont magiques on a aussi, $\sum_{i=1}^n c_{ii}=a\sum_{i=1}^n a_{ii}+b\sum_{i=1}^n b_{ii}=as(A)+bs(B)$ et $\sum_{i=1}^n c_{i\,n+1-i}=a\sum_{i=1}^n a_{i\,n-i+1}+b\sum_{i=1}^n b_{i\,n-i+1}=as(A)+bs(B)$. La matrice $aA+bB$ est donc magique de somme $as(A)+bs(B)$.

(I.3). On note J_2 la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) *Montrer que l'ensemble des matrices semi-magiques de taille* 2 *est* $\mathcal{SM}_2=\{aI_2+bJ_2; a,b\in\mathbb{N}\}$.
Comme I_2 et J_2 sont semi-magiques, il est clair par la question précédente que, pour tous entiers a et b, aI_2+bJ_2 est semi-magique.
Réciproquement toute matrice semi-magique A de taille 2 et de somme s s'écrit
$\begin{pmatrix} a & s-a \\ s-a & a \end{pmatrix}=aI_2+(s-a)J_2$.

(b) *Montrer que l'ensemble des matrices magiques de taille* 2 *est* $\mathcal{M}_2=\{aE_2; a\in\mathbb{N}\}$.
Il est clair que E_2 étant magique, par la question (I.2), toute matrice de la forme aE_2 est magique.
Si A est magique, elle est semi-magique et, par la question précédente, il existe deux entiers naturels a et b tels que aI_2+bJ_2. De plus on doit avoir $2a=2b=a+b$, donc $a=b$. Finalement $A=a(I_2+J_2)=aE_2$.

(c) *Donner un exemple de matrice semi-magique de taille* 4 *et de somme* 1 *distincte de* I_4.
Toute matrice obtenue en permutant les colonne de la matrice I_4 convient.

II Matrices semi-magiques de taille 3

(II.1). *Monter que* $A\in\mathcal{SM}_3$ *ssi il existe* $a\in\mathbb{N}$ *tel que* $AE_3=E_3A=aE_3$. *Dans ce cas, exprimer* $s(A)$ *en fonction de* a.
On obtient

$$AE_3=\begin{pmatrix} a_{11}+a_{12}+a_{13} & a_{11}+a_{12}+a_{13} & a_{11}+a_{12}+a_{13} \\ a_{21}+a_{22}+a_{23} & a_{21}+a_{22}+a_{23} & a_{21}+a_{22}+a_{23} \\ a_{31}+a_{32}+a_{33} & a_{31}+a_{32}+a_{33} & a_{31}+a_{32}+a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 a_{1j} & \sum_{j=1}^3 a_{1j} & \sum_{j=1}^3 a_{1j} \\ \sum_{j=1}^3 a_{2j} & \sum_{j=1}^3 a_{2j} & \sum_{j=1}^3 a_{2j} \\ \sum_{j=1}^3 a_{3j} & \sum_{j=1}^3 a_{3j} & \sum_{j=1}^3 a_{3j} \end{pmatrix}$$

et

$$E_3A=\begin{pmatrix} a_{11}+a_{21}+a_{31} & a_{11}+a_{21}+a_{31} & a_{11}+a_{21}+a_{31} \\ a_{12}+a_{22}+a_{32} & a_{12}+a_{22}+a_{32} & a_{12}+a_{22}+a_{32} \\ a_{13}+a_{23}+a_{33} & a_{13}+a_{23}+a_{33} & a_{13}+a_{23}+a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^3 a_{i1} & \sum_{i=1}^3 a_{i1} & \sum_{i=1}^3 a_{i1} \\ \sum_{i=1}^3 a_{i2} & \sum_{i=1}^3 a_{i2} & \sum_{i=1}^3 a_{i2} \\ \sum_{i=1}^3 a_{i3} & \sum_{i=1}^3 a_{i3} & \sum_{i=1}^3 a_{i3} \end{pmatrix}.$$

Si A est semi-magique alors la somme de toutes les lignes et de toutes les colonnes de la

matrice est égale à $s(A)$. On a donc $AE_3 = E_3A = s(A)E_3$.
Réciproquement si $AE_3 = E_3A = aE_3$, alors il est clair que A est semi-magique de somme a.
On pouvait ici raisonner directement par équivalence.

(II.2). *Montrer que le produit de deux matrices semi-magiques de taille 3 est une matrice semi-magique, exprimer $s(AB)$ en fonction de $s(A)$ et de $s(B)$.*
Par définition du produit de deux matrices si on note $AB = (c_{ij})$, on a $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}b_{kj}$. Par suite,

$$\sum_{i=1}^{3} c_{ij} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{3} b_{kj}(\sum_{i=1}^{3} a_{ik}) = s(A)\sum_{k=1}^{3} b_{kj} = s(A)s(B)$$

Le calcul est le même pour la somme des lignes. Donc AB est semi-magique de somme $s(A)s(B)$.

(II.3). On appelle matrice de permutation toute matrice obtenue par permutation des colonnes de la matrices I_3. L'objet de cette question est de montrer que toute matrice semi-magique de taille 3 est combinaison linéaire de matrices de permutation.

(a) *Donnez les 6 matrices de permutation de taille 3 et vérifier qu'elles sont semi-magiques de somme 1.*
Les 6 matrices de permutation de taille3 sont :
I_3 ; $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Elles sont toutes semi-magiques de somme 1.
On pourrait remarquer que ce sont les seules matrices semi-magiques de taille 3 et de somme 1 et qu'aucune d'elle n'est magique, il n'y a donc pas de matrice magique de somme 1.

(b) *Soit A un matrice semi-magique de somme $s(A) > 1$. On suppose que a_{11} est différent de 0. Montrer que si $a_{22} = 0$ ou $a_{33} = 0$ alors $a_{23} \neq 0$ et $a_{32} \neq 0$. Autrement dit, la matrice extraite de taille 2, $\begin{pmatrix} a_{22} & a_{22} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ n'a ni colonne ni ligne nulle. En déduire qu'il existe une matrice de permutation P telle que $A-P$ soit une matrice à coefficients dans $\mathbb{N}$. Montrer que cette matrice $A-P$ est magique de somme $s(A)-1$.*
Supposons que $a_{22} = 0$. On a alors $a_{23} = s(A) - a_{21} = s(A) - s(A) + a_{11} + a_{31} \geq a_{11}$. Par suite $a_{23} \neq 0$. De même, $a_{32} = s(A) - a_{12} = s(A) - s(A) + a_{11} + a_{13} \geq a_{11}$. Par suite $a_{32} \neq 0$.
On raisonne de même dans le cas où $a_{33} = 0$.
Finalement, si $a_{22} \neq 0$ et $a_{33} \neq 0$, alors $A - I_3$ est à coefficients dans $\mathbb{N}$ et on vérifie facilement qu'elle est semi-magique de somme $s(A) - 1$. Sinon, $a_{23} \neq 0$ et $a_{32} \neq 0$ et la

matrice $A - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est à coefficients dans $\mathbb{N}$.

Dans chacun des deux cas, on a enlevé 1 à un et un seul élément de chaque ligne et de chaque colonne, on obtient donc bien une matrice semi-magique de somme $s(A) - 1$.

(c) *Expliquer comment généraliser le résultat précédent en considérant un coefficient a_{ij} non nul de A.*

Comme la matrice n'est pas nulle, il existe un coefficient $a_{i_0 j_0} \neq 0$. Par le même raisonnement que précédemment on montre que la matrice de taille deux obtenue à partir de A en supprimant la ligne i_0 et la colonne j_0 n'a ni ligne ni colonne nulle. Alors une des deux matrices de permutation $P = (p_{ij})$ avec $p_{i_0 j_0} = 1$, est telle que $A - P$ est une matrice à coefficients dans $\mathbb{N}$ et est semi-magique de somme $s(A) - 1$.

(d) *Montrer par récurrence sur la somme que toute matrice semi-magique s'écrit comme combinaison linéaire des matrices de permutation*

Initialisation : une matrice semi-magique de somme 1 est clairement une matrice de permutation. En effet elle a exactement un 1 et deux 0 sur chaque colonne et chaque ligne.

Hérédité : Soit $k \geq 1$, on suppose que toute matrice semi-magique de somme k est combinaison linéaire à coefficients entiers de matrices de permutation. Soit A une matrice semi-magique de somme $k+1$ alors par la question précédente, il existe une matrice de permutation P telle que $A - P$ est semi-magique de somme k. On applique alors l'hypothèse de récurrence à $B = A - P$ qui est donc combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{N}$ de matrices de permutation, par suite $A = B + P$ est également combinaison linéaire à coefficients entiers naturels de matrices de permutation.

(e) *Donner la forme de toutes les matrices semi-magiques de taille 3.*

D'après la question précédente toute matrice semi-magique de taille 3 est de la forme

$$a_1 I_3 + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a_5 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_6 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + a_4 & a_2 + a_5 & a_3 + a_6 \\ a_2 + a_6 & a_1 + a_3 & a_4 + a_5 \\ a_3 + a_5 & a_4 + a_6 & a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

.

III Carrés latins et carrés magiques

On appelle carré de taille n une matrice de taille n que l'on écrira sous forme de tableau.
On appelle *carré latin de taille n* une matrice de taille n telle que les entiers de 0 à $n-1$ apparaissent une et une seule fois sur chaque ligne et sur chaque colonne. On notera ces matrices par un carré, par exemple

$C_1 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$ et $C_2 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 \\ \hline \end{array}$ sont des carrés latins de taille 3.

On appelle *carré magique de taille n* toute matrice magique dont l'ensemble des coefficients est $\{0, 1 \cdots, n^2 - 1\}$, chaque élément apparaissant une et une seule fois. Voici un exemple de carré magique d'ordre 3 :

$$A = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 7 & 0 & 5 \\ \hline 2 & 4 & 6 \\ \hline 3 & 8 & 1 \\ \hline \end{array}$$

(III.1). *Montrer qu'un carré latin est une matrice semi-magique et calculer sa somme. Sont-ils tous des matrices magiques ?*

Par définition chaque ligne et chaque colonne étant constituée de tous les entiers de 0 à $n-1$, la somme de chaque colonne et de chaque ligne vaut $s = 1 + \cdots + (n-1) = n(n-1)/2$. Un carré latin est donc une matrice semi-magique de somme $n(n-1)/2$. Le carré latin C_2 n'est pas une matrice magique.

(III.2). *Quelle est la somme d'un carré magique ?*

La somme de tous les coefficients d'un carré magique est $s = 1 + \cdots + (n^2 - 1) = n^2(n^2 - 1)/2$. Il suffit de diviser par le nombre de n de lignes (ou de colonne) pour trouver la somme du carré magique qui vaut donc $n(n^2 - 1)/2$.

(III.3). Soit $C = (c_{ij})$ et $C' = (c'_{ij})$ deux carrés latins de taille n. On note $B = [CC']$ la matrice de taille n dont le terme générique est $b_{ij} = (c_{ij}, c'_{ij})$, ses coefficients sont donc des couples d'entiers appartenant à l'ensemble $\{0, \cdots, n-1\}$.

On note $A = C \star C' = nC + C'$, c'est à dire A est la matrice dont le terme générique est $a_{ij} = nc_{ij} + c'_{ij}$.

(a) *Soit C_1 et C_2 les carrés latins de taille 3 donnés en exemple en début de partie.*

Montrez que $C_1 \star C_2 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 1 & 8 \\ \hline 8 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 8 & 3 \\ \hline \end{array}$

C'est une simple vérification.

(b) *Montrer que si C et C' sont des carrés latin de taille n, alors les coefficients de $C \star C'$ appartiennent à l'ensemble $\{0, \cdots n^2 - 1\}$.*

Comme tous les coefficients d'un carré latin sont dans $\{0, \cdots, n-1\}$, on a avec les notations de la définition, pour tout couple $(i, j) \in \{1, \cdots n\}^2$, $0 \leq c_{ij} = na_{ij} + a'_{ij} \leq n(n-1) + (n-1) = n^2 - 1$.

(c) *Montrer que l'application* f : $\begin{array}{ccc} \{0, \cdots, n^2 - 1\} & \mapsto & \{0, \cdots, n-1\} \times \{0, \cdots, n-1\} \\ m & \to & (q, r) \end{array}$

où q et r sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$ de m par n, est une bijection.

Pour montrer que l'application est bien définie il faut vérifier que le couple (q, r) est

unique ce qui est le cas par le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{N}$, et que $(q,r) \in \{0,\cdots,n-1\} \times \{0,\cdots,n-1\}$. Toujours par le théorème de division euclidienne, $r \in \{0,\cdots,n-1\}$. De plus, $0 \le q = (m-r)/n \le (n^2-1)/n < n$.
Le cardinal de $\{0,\cdots,n^2-1\}$ est n^2 et celui de $\{0,\cdots,n-1\} \times \{0,\cdots,n-1\}$ est aussi n^2. Il suffit donc de montrer que f est injective ou surjective. Soit $(q,r) \in \{0,\cdots,n-1\} \times \{0,\cdots,n-1\}$. Posons $m = nq + r$, alors $0 \le m \le n(n-1)+n-1 = n^2-1$ et $f(m) = (q,r)$. Par suite f est surjective et donc bijective.

(d) On dit que deux carrés $C = (c_{ij})$ et $C' = (c'_{ij})$ sont orthogonaux si les couples (c_{ij}, c'_{ij}) de la matrice $[CC'] = ((c_{ij}, c'_{ij}))$ sont deux à deux distincts.

i. *Montrer que si $C = (c_{ij})$ et $C' = (c'_{ij})$ sont des carrés latins orthogonaux qui sont aussi des matrices magiques alors $A = C \star C' = nC + C'$ est un carré magique.*
Par la question (III.3)b, les coefficients de A sont bien compris entre 0 et $n^2 - 1$.
Montrons que ces coefficients sont tous distincts. C'est une conséquence de la bijection f de la question (III.3)c. En effet $a_{ij} = f^{-1}((c_{ij}, c'_{ij}))$. Par suite, si $a_{ij} = a_{kl}$ alors $(c_{ij}, c'_{ij}) = (c_{kl}, c'_{kl})$ ce qui implique $(i,j) = (k,l)$ puisque les carrés latins C et C' sont orthogonaux.
D'après la question (I.2), A est une matrice magique en tant que combinaison linéaire à coefficients entiers de C et C'.

ii. *Soit C un carré magique, on note $C_q = (q_{ij})$ et $C_r = (r_{ij})$ les carrés de taille n telle que pour tout $(i,j) \in \{0,\cdots,n-1\} \times \{0,\cdots,n-1\}$, $c_{ij} = nq_{ij} + r_{ij}$, C_q est le carré des quotients et C_r est le carré des restes des coefficients de C dans la division euclidienne par n. Montrer, en utilisant la question précédente, que C_r et C_q sont des carrés orthogonaux dont les coefficients sont compris entre 0 et $n-1$.*
Nous avons déjà montré à la question précédente que, si $m \in \{0,\cdots,n^2-1\}$, alors le quotient et le reste de m dans la division euclidienne par m appartiennent à $\{0,\cdots,n-1\}$. Par suite, les coefficients de C_r et C_q sont compris entre 0 et $n-1$
Montrons maintenant que C_r et C_q sont orthogonales. Comme C est un carré magique, l'ensemble de ses coefficients est $\{0,\cdots,n-1\}$. L'application f envoie chaque coefficient c_{ij} de C sur le couple (q_{ij}, r_{ij}). Ces couples sont tous distincts puisque f est bijective.

iii. *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 6 & 4 & 2 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Vérifier que A est un carré magique. En utilisant la méthode précédente, décomposer A en $A_q \star A_r$ où A_1 et A_2 sont des carrés latins orthogonaux.
On effectue la division euclidienne de chacun des coefficients de A par n et on écrit

les matrices A_q et A_r obtenues.

$$C_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} C_r = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

C_q et C_r sont deux carrés latins orthogonaux et on a bien $A = C_q \star C_r$.

IV Construction géométrique de carrés magiques

Dans cette partie on suppose que n est un nombre premier.
Un carré de taille n est considéré comme un plan contenant un nombre fini de points, les n^2 cases de ce carré. Le point intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est le point de coordonnées $(j-1, n-i)$) (voir graphique ci-dessous). Un carré de taille n est considéré comme un plan contenant un nombre fini de points, les n^2 cases de ce carré. Le point intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est le point de coordonnées $(j-1, n-i)$) (voir graphique ci-dessous).
Une droite du plan est :

- soit l'ensemble des points (x, y) vérifiant $y = mx + b[n]$, où m et b appartiennent à $\{0, \cdots, n-1\}$. Si $m = 0$, on dit que la droite est horizontale.
- soit une colonne du carré, on dit que la droite est verticale. Une droite verticale est caractérisée par son équation $x = k[n]$, on convient que dans ce cas $m = \infty$.

Dans tous les cas, l'entier m est appelé pente de la droite.
La figure suivante représente un exemple de carré de taille 5 où l'on a indiqué les points de coordonnées $(0,1)$ $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$ et $(4,0)$ qui appartiennent tous à la droite d'équation $y = x + 1[5]$.

4				(3,4)	
3			(2,3)		
2		(1,2)			
1	(0,1)				
0					(4,0)
	0	1	2	3	4

FIGURE 1 –

(IV.1). *Montrer que toutes les droites d'un carré de taille n ont exactement n points.*
Si $m = 0$ alors la droite d'équation $y = b[n]$ a exactement n points, les points de coordonnées(i, b), pour $0 \leq i \leq n-1$. De même toute droite verticale d'équation $x = k[n]$, $0 \leq k \leq n-1$ a exactement n points, les points de coordonnées (k, j) pour $0 \leq j \leq n-1$. Soit D la droite d'équation $y = mx + b$, avec $m \neq 0$, $m \neq \infty$. On va montrer qu'aux n valeurs distinctes

que peut prendre l'abscisse x correspond n points distincts de la droite. Supposons que $mx+b = mx'+b[n]$, on a alors n divise $m(x-x')$. Comme n est premier, par le Lemme de Gauss, n divise m ou n divise $x-x'$. Or $0 < m < n$ et $0 \leq x-x' < n$, on a nécessairement $x = x'$.

Par suite chaque droite possède exactement n points.

(IV.2). *Montrer qu'il y a n droites de même pente m, ces droites seront dites parallèles. Montrer que deux droites parallèles ont une intersection vide.*

Il y a n droites de pente ∞, les droites d'équation $x = k$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Ces droites sont clairement d'intersection vide.

Supposons maintenant $m \neq \infty$. A chaque valeur de $b \in \{0, \cdots, n-1\}$, correspond une droite d'équation $y = mx+b[n]$. Soit D la droite d'équation $y = mx+b[n]$ et D' la droite d'équation $y = mx+b'[n]$. Supposons qu'il existe un point de coordonnées (x, y) dans l'intersection de D et de D'. On a alors immédiatement $b = b'[n]$ et comme $b \in \{0, \cdots, n-1\}$, on a $b = b'$. Par suite les droites distinctes de même pente ont une intersection vide. A fortiori si $b \neq b'$, elles sont distinctes, il y en a donc exactement n.

(IV.3). *Montrer que pour tout $m \in \{0, \cdots, n-1\}$ la réunion de toutes les droites parallèles de pente m est l'ensemble des points du plan. On dit que le plan est recouvert par des droites parallèles de pente m.*

Pour m fixé, nous avons n droites parallèles qui comportent chacune n points. Comme ces droites sont deux à deux d'intersection vide, leur réunion a exactement n^2 points distincts, c'est donc l'ensemble de tous les points du plan.

(IV.4). *Soit $m \neq m'$ et D_m et $D_{m'}$ deux droites de pente respective m et m'.*

(a) *On suppose que m et m' sont différents de ∞. Montrer que il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que $u(m-m') = 1[n]$*

On a $-n+1 < m-m' < n-1$, et $m-m' \neq 0$, par conséquent $m-m'$ n'est pas un multiple de n qui est premier donc n et $m-m'$ sont premiers entre eux. Par le théorème de Bezout, il existe donc deux entiers u et v tels que $u(m-m')+vn = 1$, donc il existe un entier u tel que $u(m-m') = 1[n]$.

(b) *En déduire que l'intersection de deux droites non parallèles et non verticales est réduit à un singleton.*

Soit D_m et $D_{m'}$ deux droites de pente respective m et m' avec $m \neq m'$ et m et m' différents de ∞. Soit $y = mx+b[n]$ et $y = m'x+b'[n]$ leur équation respective. Le point de coordonnées (x, y) appartient à $D_m \cap D_{m'}$ ssi $y = m'x+b' = mx+b[n]$ ou encore ssi $(m-m')x = b'-b$. On a alors en multipliant cette égalité par u, $u(m-m')x = x = u(b'-b)[n]$. Cette égalité définit un unique entier naturel $x \in \{0, \cdots, n-1\}$. On vérifie que le point de coordonnées $(x, mx+b)$ appartient à la droite D'_m, en effet $m'x+b' = mx+p+(m'-m)x+(b'-b) = mx+b[n]$. Le point de coordonnées $(x, mx+b)$ est donc le seul point d'intersection de D_m et $D_{m'}$.

(c) *Soit D une droite verticale et D_m une droite non verticale, montrer que l'intersection de D et de D_m est également réduite à un singleton.*

Soit maintenant D une droite verticale d'équation $x = k[n]$. Le point de coordonnées (x, y) appartient à $D_m \cap D$ ssi $x = k$ et $mx + b = mk + b[n]$. Par conséquent le point de coordonnées $(k, mk + b)$ est l'unique point de $D_m \cap D$.

(IV.5). *Soit m fixé. On appelle C_m le carré obtenu en remplaçant dans C chaque point de la droite d'équation $y = mx+b$ par l'entier b, $b \in \{0, \cdots, n-1\}$. Par exemple dans la figure suivante, Figure 2, chaque point de la droite $y = x + 1[5]$ est remplacé par 1 et chaque point de la droite $y = x[5]$ est remplacé par 0*

4				1	0
3			1	0	
2		1	0		
1	1	0			
0	0				1
	0	1	2	3	4

FIGURE 2 –

Montrer que si $m \notin \{0, \infty, 1, n-1\}$, C_m est un carré latin qui est aussi une matrice magique. Indication : on pourra considérer l'intersection des droites de pente m avec les droites horizontales, verticales, la diagonale et l'anti-diagonale.
Expliquez pourquoi C_0, C_1, C_∞ et C_{n-1} ne sont pas des matrices magiques
Comme $m \neq 0$, chaque coefficient de la i-ème ligne est donc l'unique point d'intersection de la droite d'équation $y = n - i[n]$ et d'une des droites $y = mx + b[n]$, pour $b \in \{0, \cdots, n-1\}$. Par suite, chaque élément de $\{0, \cdots, n-1\}$ apparaît une et une seule fois dans chaque ligne. De même, comme $m \neq \infty$, chaque coefficient de la j-ème colonne est l'intersection de la droite $x = j - 1[n]$ et d'une des droites $y = mx + b[n]$. Chaque élément de $\{0, \cdots, n-1\}$ apparaît donc une et une seule fois dans chaque colonne.
De la même façon, comme $m \neq 1$ et $m \neq n-1$, chaque élément de la diagonale est l'intersection de la droite $y = x[n]$ et d'une des droites $y = mx + b[n]$, et chaque élément de l'anti-diagonale est l'intersection de la droite $y = (n-1)x[n]$ et d'une des droites $y = mx+b$, elles comportent donc chacune une et une seule fois chaque élément de $\{0, \cdots, n-1\}$. Par conséquent C_m est une matrice magique de somme $n(n-1)/2$.
La matrice C_0 n'est pas magique car elle a une ligne dont tous les coefficients valent 0, de même C_1 n'est pas magique car tous les coefficients de la diagonale sont egaux à 0, etc. Cela vient du fait que dans tous ces cas, les droites du recouvrement sont les lignes, les colonnes, les parallèles à la diagonale ou à l'anti-diagonale et donc le raisonnement précédent ne peut pas s'appliquer.

(IV.6). *Soit $m, m' \notin \{0, \infty, 1, n-1\}$, avec $m \neq m'$. Montrer que les carrés C_m et $C_{m'}$ sont orthogonaux. En déduire la construction d'un carré magique de taille n.*
Si les carrés ne sont pas orthogonaux alors le couple (b, b') apparaît deux fois dans la matrice

$[CC']$. Ce qui signifie que les droites d'équation $y = mx + b$ et $y = m'x + b'$ ont deux points d'intersection ce qui contredit la question (IV.4). Par suite les carrés sont orthogonaux.
La question (III.3)(d)i nous permet de conclure que $C_m \star C_{m'}$ est un carré magique en tant que combinaison linéaire à coefficients entiers positifs de deux matrices magiques.

(IV.7). *On choisit $m = 2$ et $m' = 3$, construire grâce au procédé précédent un carré magique de taille* 5.

On remarque que, à cause des restrictions sur la valeur de m vues dans les questions précédentes, il ne restait pas d'autres choix pour les deux valeurs distinctes de m.
On va construire le carré C_2 obtenu par recouvrement d'une matrice de taille 5 par les droites d'équation $y = 2x + b$, $0 \leq b \leq 4$, en remplaçant chaque points de la droite $y = 2x + b$ par b.
Les points de la droite $y = 2x[5]$ sont $(0, 0), (1, 2), (2, 4), (3, 1), (4, 3)$, ils sont donc remplacés par 0.
Les points de la droite $y = 2x + 1[5]$ sont $(0, 1), (1, 3), (2, 0), (3, 2), (4, 4)$, ils sont donc remplacés par 1. Les points de la droite $y = 2x + 2[5]$ sont $(0, 2), (1, 4), (2, 1), (3, 3), (4, 0)$, ils sont donc remplacés par 2. Ainsi de suite. On obtient donc le carré latin suivant :

4	2	0	3	1
3	1	4	2	0
2	0	3	1	4
1	4	2	0	3
0	3	1	4	2

On va construire le carré C_3 obtenu par recouvrement d'une matrice de taille 5 par les droites d'équation $y = 3x + b$, $0 \leq b \leq 4$, en remplaçant chaque points de la droite $y = 3x + b$ par b.
Les points de la droite $y = 3x[5]$ sont $(0, 0), (1, 3), (2, 1), (3, 4), (4, 2)$, ils sont donc remplacés par 0.
Les points de la droite $y = 3x + 1[5]$ sont $(0, 1), (1, 4), (2, 2), (3, 0), (4, 3)$, ils sont donc remplacés par 1, etc. On obtient :

4	1	3	0	2
3	0	2	4	1
2	4	1	3	0
1	3	0	2	4
0	2	4	1	3

On obtient ensuite le carré magique demandé $C = C_2 \star C_3$.

24	11	3	15	7
18	5	22	14	1
12	4	16	8	20
6	23	10	2	19
0	17	9	21	13

Problème 2

Il s'agit dans ce problème d'étudier les évolutions de deux populations d'animaux, les proies et les prédateurs.

V Evolution avec prédateurs

Dans une région évoluent deux espèces, les proies et les prédateurs.
On note x_0 le nombre initial de proies et x_n le nombre de proies au bout de n années. On note y_0 le nombre initial de prédateurs et y_n le nombre de prédateurs au bout de n années. Soit a, b, d des réels strictement positifs, et e un réel tel que $0 < e < 1$. Nous faisons les hypothèses suivantes :
(H1) : le taux de natalité des proies est constant et égal à a.
(H2) : Le taux de mortalité des proies dépend proportionnellement du nombre de prédateurs avec un coefficient b.
(H3) Le taux de natalité des prédateurs dépend proportionnellement du nombre de proies avec un coefficient d.
(H4) Le taux de mortalité des prédateurs est constant et égal à e.

(V.1). Généralités.

(a) *Expliquer les relations de récurrence suivantes :*
$x_{n+1} = (1+a)x_n - by_nx_n$
$y_{n+1} = (1-e)y_n + dx_ny_n$.
Par (H1), le taux de natalité des proies est constant égal à a, donc le nombre de naissances pendant l'année $n+1$ est égal à ax_n. Par (H2), le taux de mortalité pendant l'année $n+1$ vaut by_n, par suite de nombre de mort pendant l'année $n+1$ est by_nx_n.
On obtient la population des proies à l'année $n+1$ en ajoutant à la population à l'année n le terme ax_n qui représente le nombre de naissances puis en retranchant le terme by_nx_n qui représente le nombre de tués par les prédateurs.
De même, on obtient la population des prédateurs à l'année $n+1$ en ajoutant à la population à l'année n le terme dx_ny_n qui représente le nombre de naissances et en retranchant ey_n qui représente le nombre de morts de l'année.

(b) *Montrer qu'il existe un état stable, c'est à dire deux réels x et y non nuls tels que si $x_0 = x$ et $y_0 = y$ les suites (x_n) et (y_n) sont constantes.*
Le couple (x, y) est un état stable ssi pour tout n, $x_n = x$ et $y_n = y$. Si (x, y) est un état stable on a donc en particulier pour $n = 1$:
$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& x+ax-bxy \\ y &=& y+dxy-ey \end{array}\right.$
Ce système est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(a-by) &=& 0 \\ y(dx-e) &=& 0 \end{array}\right.$$

ou encore puisque x et y sont non nuls, à :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a - by & = & 0 \\ dx - e & = & 0 \end{array}\right.$$

L'unique solution de ce système est $x = e/d$ et $y = a/b$. On vérifie ensuite par une récurrence évidente que si $x_0 = e/d$ et $y_0 = a/b$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = e/d$ et $y_n = a/b$. Il existe donc un unique état stable, le couple $(e/d, a/b)$.

(c) *On définit les suites (u_n) et (v_n) par, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
$u_n = x_n - x$ et $v_n = y_n - y$.
Montrer les relations de récurrences suivantes : $\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & u_n - (be/d)v_n - bu_nv_n \\ v_{n+1} & = & v_n + (ad/b)u_n + du_nv_n \end{array}\right.$

On remplace x_n, x_{n+1}, y_n et y_{n+1} par leur valeurs en fonction de u_n, v_n, u_{n+1} et v_{n+1}.
On obtient, $u_{n+1} + x = (1+a)(u_n + x) - b(v_n + y)(u_n + x) = (1 + a - by)u_n - bxv_n - bu_nv_n + x(1 + a - by)$, par suite $u_{n+1} = u_n - (be/d)v_n - bu_nv_n$.
De même, $v_{n+1} + y = (1-e)(v_n + y) + d(v_n + y)(u_n + x) = (1 - e + xd)v_n + y(1 - e + xd) + ydu_n + du_nv_n$ et par conséquent, $v_{n+1} = v_n + (ad/b)u_n + du_nv_n$.

(d) *On suppose dans cette question que $u_0 = 3000$, $v_0 = 0$, $a = 0,09$, $b = 10^{-5}$, $d = 5.10^{-6}$, $e = 0,25$. Calculer à l'aide d'un tableur les 50 premiers termes des suites (u_n) et (v_n). Calculer ensuite les 50 premiers termes des suites (u'_n) et (v'_n) obtenues en supprimant les termes en u_nv_n c'est à dire :* $\left\{\begin{array}{lcl} u'_{n+1} & = & u'_n - de/bv'_n \\ v'_{n+1} & = & v'_n + ab/du'_n \end{array}\right.$
Puis calculer les 50 premiers termes des suites (x_n), (y_n), (x'_n) et $y'_n)$ correspondantes. Que pouvez-vous en déduire ?
On peut utiliser un tableau de calcul où la ligne 1 donne les valeurs initiales u_0, v_0, u'_0, v'_0, x_0, y_0, x'_0, y'_0. Puis écrire dans la ligne 2, les formules donnant les valeurs de u_1, v_1, u'_1, v'_1, x_1, y_1, x'_1, y'_1. On obtient ensuite, en incrémentant cette formule, à chaque ligne $i - 1$, $0 \leq i \leq 49$, les valeurs de u_i, v_i, u'_i, v'_i, x_i, y_i, x'_i, y'_i.
On constate sur le tableau que les suites (x_n), (x'_n) d'une part et (y_n), (y'_n) d'autre part, ne diffèrent que d'une dizaine d'individus, ce qui, rapporté à l'état stable $x = 50000$ et $y = 9000$ est tout à fait acceptable.

(V.2). *Dans toute la suite du problème on suppose que b et d sont petits et que l'on peut négliger les termes bu_nv_n et du_nv_n. On suppose donc que les suites vérifient les relations de récurrence suivantes :*
$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & u_n - de/bv_n \\ v_{n+1} & = & v_n + ab/du_n \end{array}\right.$$

(a) *Montrer alors la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -de/b \\ ad/b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

C'est une simple réécriture matricielle de la relation obtenue plus haut.

On note A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -de/b \\ ab/d & 1 \end{pmatrix}$.

(b) *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$*

Récurrence évidente.

(c) *On écrit $A = I + B$, où $B = \begin{pmatrix} 0 & -de/b \\ ab/d & 0 \end{pmatrix}$.*

Il s'agit dans cette question de calculer A^n. Pour cela nous allons tout d'abord calculer les puissances de la matrice B, et plus généralement les puissances d'une matrice de la forme $B = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$, où α et β sont deux réels positifs.

i. *Montrer que pour tout k, $B^{4i} = (\alpha\beta)^{2i} I$, $B^{4i+1} = (\alpha\beta)^{2i} B$, $B^{4i+2} = -(\alpha\beta)^{2i+1} I$, $B^{4i+3} = -(\alpha\beta)^{2i+1} B$.*

On montre la première égalité par récurrence sur i.

Initialisation. $i = 0$. On a bien $B^0 = I$. On montre aussi, car nous l'utiliserons dans l'hérédité que $B^2 = -\alpha\beta I$, $B^3 = -\alpha\beta B$.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose $B^{4k} = \alpha^{2k}\beta^{2k} I$. Alors $B^{4(k+1)} = B^{4k}B^4 = \alpha^{2i}\beta^{2i} BB^3 = -\alpha^{2k+1}\beta^{2k+1}B^2 = -\alpha^{2k+2}\beta^{2k+2} I = -\alpha^{2(k+1)}\beta^{2(k+1)} I$.

On a donc, pour tout i, $B^{4i} = (\alpha\beta)^{2i} I$. Les autres égalités se déduisent de la première en multipliant par B, puis par B^2, enfin par B^3.

ii. *On pose :*

$$a_n = \sum_{0 \leq 4i \leq n} \binom{n}{4i} (\alpha\beta)^{2i} - \sum_{0 \leq 4i+2 \leq n} \binom{n}{4i+2} (\alpha\beta)^{2i+1}$$

et,

$$b_n = \sum_{0 \leq 4i+1 \leq n} \binom{n}{4i+1} (\alpha\beta)^{2i} - \sum_{0 \leq 4i+3 \leq n} \binom{n}{4i+3} (\alpha\beta)^{2i+1}$$

Déduire de la question précédente pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = a_n I + b_n B$$

On applique la formule du binôme de Newton :

$$A^n = (I + B)^n = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} B^k$$

puis on regroupe les puissances de B selon leur congruence modulo 4

$$A^n = \sum_{0 \leq 4i \leq n} \binom{n}{4i} B^{4i} + \sum_{0 \leq 4i+1 \leq n} \binom{n}{4i+1} B^{4i+1} + \sum_{0 \leq 4i+2 \leq n} \binom{n}{4i+2} B^{4i+2} + \sum_{0 \leq 4i+3 \leq n} \binom{n}{4i+3} B^{4i+3}$$

On remplace enfin par les expressions des puissances de B trouvées à la question précédente et on obtient le résultat demandé.

iii. *Soit $z = 1 + i\sqrt{\alpha\beta}$.*
Montrer que $z^n = a_n + i\sqrt{\alpha\beta}b_n$.
Par la formule du binôme, on a, $z^n = (1+i\sqrt{\alpha\beta})^n = \sum_{0\leq k\leq n} \binom{n}{k}(i)^k(\sqrt{\alpha\beta})^k$. Comme précédemment on regroupe les puissances de i selon leur congruence modulo 4, en sachant que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ et $i^4 = 1$. On obtient, $z^n = \sum_{0\leq 4i\leq n} \binom{n}{4i}(\alpha\beta)^{2i} - \sum_{0\leq 4i+2\leq n} \binom{n}{4i+2}(\alpha\beta)^{2i+1} + i\left(\sum_{0\leq 4i+1\leq n} \binom{n}{4i+1}(\alpha\beta)^{2i}\sqrt{\alpha\beta} - \sum_{0\leq 4i+3\leq n} \binom{n}{4i+3}(\alpha\beta)^{2i+1}\sqrt{\alpha\beta}\right)$.
Par suite $a_n = \mathrm{Re}(z^n)$ et $\mathrm{Im}(z_n) = \sqrt{\alpha\beta}b_n$.

iv. *Montrer qu'il existe un réel $r > 0$ et un réel $\theta \in [0, \pi]$ tel que $z = re^{i\theta}$.*
Montrer ensuite que, pour tout n, $A^n = r^n \left(\cos(n\theta)I + \frac{\sin(n\theta)}{\sqrt{\alpha\beta}}B\right)$.
Comme z est un nombre complexe dont la partie imaginaire est positive, un argument de z peut être choisi dans $[0, \pi]$. En posant $r = |z|$ et θ cet argument on a bien $z = re^{i\theta}$.
On a ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = a_nI + b_nB = \mathrm{Re}(z^n)I + \frac{\mathrm{Im}(z_n)}{\sqrt{\alpha\beta}}B = r^n\cos(n\theta)I + r^n\frac{\sin(n\theta)}{\sqrt{\alpha\beta}}B$.

v. *En déduire les coefficients de A^n en fonction de α, β, θ et n, puis en fonction de a, b, d et e.*
Avec les notations précédentes on a $\alpha\beta = ae$, $z = 1 + i\sqrt{ae}$, donc $|z| = \sqrt{1+ae}$ et $\theta = arcos\frac{1}{\sqrt{1+ae}}$. Par suite, $A^n = (\sqrt{1+ae})^n \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta)\frac{d\sqrt{e}}{b\sqrt{a}} \\ \sin(n\theta)\frac{b\sqrt{a}}{d\sqrt{e}} & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$.

vi. *En déduire l'expression des termes u_n et v_n, puis de x_n et y_n en fonction de a, b, d, e et de x_0 et y_0.*
En utilisant la relation $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$, on obtient :
$u_n = r^n \left(u_0\cos(n\theta) - v_0\frac{d\sqrt{e}}{b\sqrt{a}}\sin(n\theta)\right)$ et
$v_n = r^n \left(u_0\frac{b\sqrt{a}}{d\sqrt{e}}\sin(n\theta) + v_0\cos(n\theta)\right)$.
Par suite, $x_n = u_n + x = u_n + e/d = e/d + r^n\left(u_0\cos(n\theta) - v_0\frac{d\sqrt{e}}{b\sqrt{a}}\sin(n\theta)\right)$ et $y_n = v_n + a/b = a/b + r^n\left(u_0\frac{b\sqrt{a}}{d\sqrt{e}}\sin(n\theta) + v_0\cos(n\theta)\right)$.

(d) *Application numérique. On donne :*
$x_0 = 53000$, $y_0 = 9000$, $a = 0,09$, $b = 10^{-5}$, $d = 5.10^{-6}$, $e = 0,25$. *Exprimer les termes x_n et y_n en fonction de n et de $\theta = arctan(0,15)$.*

En déduire que ces deux suites présentent des oscillation décalées autour de l'état stable. Expliquer ce phénomène.
Avec les notation précédentes, les calculs donnent :
$r = \sqrt{1,0225} = 1,011$, $r\cos\theta = 1$, $r\sin\theta = 0,15$
L'état d'équilibre est $x = e/d = 50000$ et $y = a/b = 9000$.
Les formules suivantes donnent le n-ième terme des suites (x_n) et (y_n) :
$x_n = 50000 + 3000r^n\cos(n\theta)$ et $y_n = 9000 + 900r^n\sin(n\theta)$. La présence du cosinus et du sinus donnent des oscillations décalées autour de l'état d'équilibre qui s'amplifient avec le temps, car $r > 1$. Quand les prédateurs sont peu nombreux, les proies se développent et les prédateurs ont davantage de nourriture. Ils se développent alors à leur tour, ce qui a pour conséquence de diminuer le nombre de proies et ensuite le nombre de prédateurs et le cycle recommence. On trouve ici une période d'environ 42 ans [1]

1. Voir pour les données numériques le documents de l'APMP nř 501 : Matrices et suites