CHAPITRE 2 : Expérience Aléatoire, probabilités, probabilités conditionnelles

Aurélie JEANMOUGIN

13 avril 2021

1 Expérience aléatoire et évènements

1.1 Expérience aléatoire

Définition 1.1. Une **expérience aléatoire** est une expérience renouvelable à l'identique, dont ls résultats possibles sont connus sans qu'on puisse déterminer lequel sera réalisé.

Exemple 1.1. *Lancer un dé à 6 faces est une expérience renouvelable dont les résultats possibles sont tous les nombre entiers de 1 à 6.*

Définition 1.2. Les résultats possibles d'une expérience aléatoire sont appelés **éventualités** ou **issues**.

Définition 1.3. L'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire est appelé **univers**. On le note généralement Ω.

Exemple 1.2. *On peut reprendre l'exemple précédent : l'ensemble de toutes les issues de cette expérience aléatoire est* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Dans cette leçon on peut se limiter au cas où Ω est un ensemble fini.

1.2 Evénement

Un événement est associé à une expérience aléatoire, nous allons donner quelques définitions.

Définition 1.4.
- Un **événement** est un ensemble de plusieurs issues, c'est un sous-ensemble de Ω.
- Un événement est dit **élémentaire** si une seule issue le réalise.
- L'**événement impossible** est la partie vide (noté $\emptyset$), lorsque aucune issue ne le réalise.

— L'**événement certain** est Ω, lorsque toutes les issues le réalisent.
— L'**événement** $A \cup B$ (lu "A union B") est constitué des issues qui appartiennent soit à A, soit à B, soit aux deux ensembles.
— L'**événement** $A \cap B$ (lu "A inter B") est constitué des issues qui appartiennent à la fois à A et à B.
— Deux événements sont **incompatibles** s'ils n'ont pas l'éléments en commun, c'est-à-dire que $A \cap B = \emptyset$.
— L'événement $\bar{A}$ est dit **événement contraire** de A si les deux événements sont incompatibles et si l'union des deux événements forme la totalité des issues, c'est-à-dire que $A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap B = \emptyset$.

Exemple 1.3. *1. Obtenir un 2 est un événement élémentaire :* $\omega = \{7\}$.
2. Obtenir un nombre pair est un événement : $A = \{2, 4, 6\}$.
3. Obtenir un multiple de trois est un événement : $B = \{3, 6\}$.
4. $A \cap B = \{6\}$.
5. $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$.
6. Si on a :

$$C = \{1\}$$

alors $C \cap A = \emptyset$ *donc* C *et* A *sont incompatibles.*
7. Si $\bar{A}$ *est l'événement "Obtenir un nombre impair" on a :*

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$A \cup \bar{A} = \Omega$$

1.3 Exercices

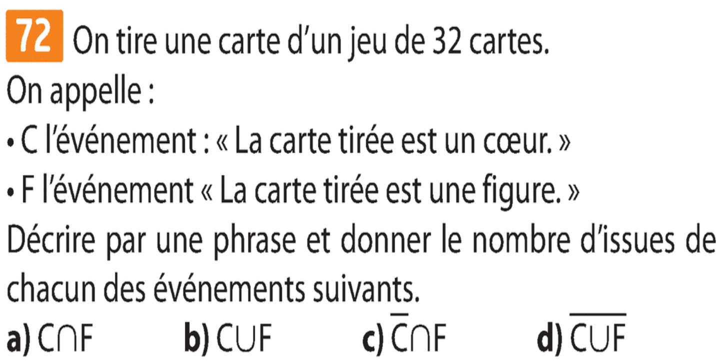

72 On tire une carte d'un jeu de 32 cartes.
On appelle :
• C l'événement : « La carte tirée est un cœur. »
• F l'événement « La carte tirée est une figure. »
Décrire par une phrase et donner le nombre d'issues de chacun des événements suivants.
a) $C \cap F$ **b)** $C \cup F$ **c)** $\bar{C} \cap F$ **d)** $\overline{C \cup F}$

FIGURE 1 – 72 page 331 Sesamath 2nde

2 Probabilités

2.1 Arbre des possibles

Définition 2.1. L'**arbre des possibles** permet de visualiser les issues d'une expérience aléatoire. On peut y noter la probabilité de chaque issue sur chacune des branches.

Exemple 2.1. *Lorsque l'on fait tourner une roue de la fortune on peut modéliser chacune des issues sur un arbre des possibles.*

2.2 Loi de probabilités sur un univers Ω

Définition 2.2. Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. On définit une loi de probabilité P sur Ω en associant à chaque événement élémentaire ω_i une probabilité $p_i \in [0,1]$ tel que :

$$\sum_i p_i = 1$$

On peut aussi noter $p_i = P(\omega_i)$.

Proposition 2.1. La probabilité P(E) d'un événement E est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Exemple 2.2. *On joue avec un dé truqué. La probabilité d'apparition de chaque face est donnée ci-dessous :*

Issue ω	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Probabilité $P(\omega)$	*0,05*	*0,2*	α	*0,1*	*0,25*	*0,1*

1. On veut calculer la probabilité de l'événement A : "Obtenir un nombre pair". D'après la définition on a :

$$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = 0,2 + 0,1 + 0,1 = 0,4.$$

2. On veut calculer la probabilité d'obtenir 3. On sait que :

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

On a alors :

$$P(3) = 1-(P(1)+P(2)+P(4)+P(5)+P(6)) = 1-(0,05+0,2+0,1+0,25+0,1) = 0,3.$$

Propriété 2.1. Soient A, B $\subset \Omega$. Alors :
- 1. $P(\Omega) = 1$
- 2. $P(\emptyset) = 0$
- 3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- 4. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

— 5. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
— 6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Démonstration 2.1. *1.* $P(\Omega) = P(\bigcup_i \omega_i) = \sum_i P(\omega_i) = \sum_i \frac{1}{n} = 1$.
2. $P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset) \iff P(A) = P(A) + P(\emptyset)$.
3. On a : $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, *de plus* $(A \setminus B)$ *et* $A \cap B$ *sont disjoints donc on peut appliquer la définition :*

$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$$

4. Comme $A \cap \bar{A} = \emptyset$ *et* $A \cup \bar{A} = \Omega$, *on a :*

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) \iff P(\Omega) = P(A) + P(\bar{A})$$

5. $A \subset B \Rightarrow B = (B \cap A) \cup A$ *donc :*

$$P(B) = P(B \setminus A) + P(A) \leq P(A)$$

6. On a :

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$

2.3 Equiprobabilité

Définition 2.3. Si tous les éléments de Ω ont la même probabilité d'apparition alors Ω est dit **équiprobable**. Si $\Omega = \{a_1, ..., a_n\}$ alors :

$$P(\{a_i\}) = \frac{1}{n}, \forall a_i \in \Omega$$

Propriété 2.2. Si Ω est équiprobable, la probabilité d'un événement $A \subset \Omega$ contenant n_A éléments est :

$$P(A) = \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n} = \frac{n_A}{n} = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

Exemple 2.3. *On lance un dé non truqué.*
1. La probabilité d'obtenir 5 est : $P(5) = \frac{1}{6}$.
2. La probabilité d'obtenir un nombre pair est : $P(2) + P(4) + P(6) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

2.4 Exercices

34 Extrait de brevet

Trois personnes, Aline, Bernard et Claude, ont chacune un sac contenant des billes. Chacune tire au hasard une bille de son sac.
Le contenu des sacs est le suivant :
Sac d'Aline : 5 billes rouges
Sac de Bernard : 10 billes rouges, 30 billes noires
Sac de Claude : 100 billes rouges et 3 billes noires

a. Laquelle de ces trois personnes a la plus grande probabilité de tirer une bille rouge ? Justifier.

FIGURE 2 – 34 page 171 Sesamath Cycle 4

89 Le standard d'un cabinet médical dispose de deux lignes de téléphone.
On considère les événements :
- O_1 : « La première ligne est occupée. »
- O_2 : « La seconde ligne est occupée. »

Une étude statistique montre que :
- $p(O_1) = 0{,}4$ • $p(O_2) = 0{,}3$ • $p(O_1 \cap O_2) = 0{,}2$

Calculer la probabilité des événements suivants.

a) « La ligne 1 est libre. »
b) « Au moins une des lignes est occupée. »
c) « Au moins une des lignes est libre. »

FIGURE 3 – 89 page 333 Sesamath 2nde

3 Probabilité conditionnelle

3.1 Probabilité conditionnelle

Définition 3.1. Soit A et B deux événements avec $P(A) > 0$ et $A \subset \Omega$, on appelle **probabilité conditionnelle de B sachant A**, la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé. Cette probabilité conditionnelle à A est l'application $P_A(.)$ de l'ensemble des événements $(P(\Omega))$ dans $[0, 1]$ telle que :

$$\begin{array}{lll} P_A : & P(\Omega) & \to [0,1] \\ & B & \mapsto P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \end{array}$$

Exemple 3.1. *On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.*
Soit A l'événement "Le résultat est un pique".
Soit B l'événement "Le résultat est un roi".
Donc $A \cap B$ est l'événement "Le résultat est le roi de pique".
Alors : $P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ *et* $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$.
Donc la probabilité que le résultat soit un roi sachant qu'on a tiré une carte pique est :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{8}$$

Propriété 3.1. Soit A et B deux événements avec $P(A) > 0$, on a :

— $0 \leq P_A(B) \leq 1$
— $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$
— $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)$

3.2 Probabilités totales et de Bayes

Propriété 3.2. Formule des probabilités totales. Soit $\{E_1, ..., E_n\}$ une partition de Ω d'événements non vides. Soit $A \subset \Omega$. Alors :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P_{E_i}(A) \times P(E_i)$$

Exemple 3.2. *On considère deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient 6 boules noires et 4 boules blanches. L'urne U_2 contient 3 boules noires et 7 boules blanches. On lance un dé non truqué. S'il indique le chiffre 1, on choisit l'urne U_1 sinon on choisit l'urne U_2. On effectue ensuite deux tirages avec remise. On cherche la probabilité d'avoir tiré deux boules noires en tout. On note :*

$$N = \{\textit{noir au premier tirage}\}$$

$$N' = \{\textit{noir au second tirage}\}$$

$$H_1 = \{\textit{choix de l'urne } U_1\}$$

$$H_2 = \bar{H}_1 = \{\textit{choix de l'urne } U_2\}$$

On a ainsi :

$$P_{H_1}(N) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$P_{H_1}(N \cap N') = (\frac{3}{5})^2$$

$$P_{H_2}(N) = \frac{3}{10}$$

$$P_{H_2}(N \cap N') = (\frac{3}{10})^2$$

La formule nous donne alors :

$$P(N) = P_{H_1}(N) \times P(H_1) + P_{H_2}(N) \times P(H_2)$$

$$P(N) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{5}{6} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{10} + \frac{1}{4} = \frac{7}{20}$$

$$P(N \cap N') = P_{H_1}(N \cap N') \times P(H_1) + P_{H_2}(N \cap N') \times P(H_2)$$

$$P(N) = \frac{1}{6} \times (\frac{3}{5})^2 + \frac{5}{6} \times (\frac{3}{10})^2 = \frac{27}{200}$$

Propriété 3.3. Formule de Bayes. Soit $\{E_1, ..., E_n\}$ une partition de Ω d'événements non vides. Soit $A \subset \Omega$. Alors :

$$P_A(E_i) = \frac{P_{E_i}(A) \times P(E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P_{E_i}(A) \times P(E_i)}$$

3.3 Indépendance

Définition 3.2. Deux événements A et B sont **indépendants** si :

— $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
— $P_A(B) = P(B)$
— $P_B(A) = P(A)$

Exemple 3.3. *On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.*
Soit A l'événement "Le résultat est un trèfle".
Soit B l'événement "Le résultat est un roi".
Donc $A \cap B$ est l'événement "Le résultat est le roi de trèfle".
Alors : $P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$.
On a donc :

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32} = P(A \cap B)$$

Les événements A et B sont indépendants.

Propriété 3.4. Si A et B sont indépendants alors $\bar{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration 3.1.

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B \cap \bar{A})$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) \times P_B(\bar{A})$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) \times (1 - P_B(A))$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) \times (1 - P(A)) \mathit{car\ A\ et\ B\ sont\ indépendants}$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) \times P(\bar{A})$$

Donc $\bar{A}$ et B sont indépendants.

3.4 Schéma de Bernoulli

Définition 3.3. Toute expérience aléatoire conduisant à deux issues possibles S (Succès) et $\bar{S}$ (Echec) est appelée une **épreuve de Bernoulli**.

Exemple 3.4. *Si on appelle Succès lors d'un lancé d'un dé, l'événement noté : S = "Obtenir 6". Le lancer du dé peut alors être considéré comme une épreuve de Bernoulli avec :*

— $S = \{6\}$ *et* $p = P(S) = \frac{1}{6}$.

— $\bar{S} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *et* $q = 1 - p = \frac{5}{6}$.

Définition 3.4. Si on répète n fois et de façon indépendante une épreuve de Bernoulli, on obtient un **schéma de Bernoulli**.

Propriété 3.5. Soit $0 \leq k \leq n$ avec $k, n \in \mathbb{N}$,

$$P(\text{"Obtenir k succès"}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

3.5 Exercices

84 Poisson frais

Saumonix est poissonnier et 15 % du poisson qu'il vend a été pêché par ses soins, 30 % vient d'un grossiste normand et le reste d'un grossiste de Paris.

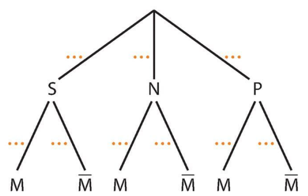
Il a remarqué que 5 % de ses clients sont mécontents du poisson qu'il a lui-même pêché, 10 % du poisson provenant du grossiste normand et 90 % du poisson de Paris.

Un client achète un poisson à Saumonix.

On considère les événements suivants :

- S : « Le poisson a été pêché par Saumonix. »
- N : « Le poisson provient du grossiste normand. »
- P : « Le poisson provient du grossiste de Paris. »
- M : « Le client est mécontent du poisson. »

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



2. a) Calculer $p(P \cap M)$ et $p(M)$.

b) Les événements S et M sont-ils indépendants ?

c) Un client est mécontent du poisson acheté.

Quelle est la probabilité que ce poisson ait été pêché par Saumonix ?

3. Saumonix souhaite ramener le taux de mécontentement à 30 % en continuant à pêcher 15 % de sa production. Déterminer les proportions de poisson qu'il doit commander à chaque grossiste pour atteindre son objectif.

FIGURE 4 – 84 page 291 Sesamath 1ere Spe