Capes externe – Mathématiques

# ÉPREUVE D'ADMISSIBILITÉ 1

## ÉNONCÉ DU DEVOIR N°2

**Pierre Balvay**

**Jean-Louis Cornou**

**Christian Een**

**ATTENTION :**
ce devoir est à envoyer à la correction.



**CNED, BP 60200, 86980 Futuroscope Chasseneuil Cedex,**

**France** © CNED 2020

1-2011-DV-WB-02-21

Problème capes première épreuve d'admissibilité.
L'épreuve est constituée de 3 problèmes indépendants.

# I Autour de la convergence des suites de fonctions

## Notations et rappels

Soit $x \in \mathbb{R}$, on notera $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de $x$.
Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Nous dirons qu'une fonction $f$ définie sur $[a, b]$ est *intégrable* sur $[a, b]$ si elle est intégrable au sens de Riemann sur cet intervalle.
Rappels :

- Soit $I$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On appelle *fonction indicatrice* de l'ensemble $I$, la fonction notée $\mathbb{I}_I$ définie par

$$\mathbb{I}_I \ : \ \mathbb{R} \to \{0, 1\}, \quad x \mapsto \mathbb{I}_I(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin I \\ 1 & \text{si } x \in I \end{cases}$$

- Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $f$ définie sur $[a, b]$ est continue sur $[a, b]$ sauf peut-être en un nombre fini de points, alors $f$ est intégrable sur $[a, b]$.

### Introduction au mode de convergence $L^1$ des suites de fonctions

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (non vide).

**Définition I.1.** *Soit $(h_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $h_n$ est intégrable sur $I$ (au sens de Riemann). Soit $h$ une fonction intégrable (au sens de Riemann). On dira que la suite $(h_n)_{n \geq 0}$ converge dans $L^1([a, b])$ vers la fonction $h$ si*

$$\int_a^b |h_n(x) - h(x)| dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

On commence par s'intéresser à la suite de fonctions $(g_n)_{n \geq 2}$ définie comme suit :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$,

$$g_n \ : \ [1, 2] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto n^2 \mathbb{I}_{[\frac{n+1}{n}, \frac{n+2}{n}]}(x)$$

(I.1). **Etude de la convergence de la suite** $(g_n)_{n \geq 2}$

(a) Montrer que pour tout réel $x \in ]1, 2]$, il existe un entier $n_x$ tel que pour tout $n \geq n_x$, $x > \frac{n+2}{n}$.

(b) En déduire que la suite $(g_n)_{n \geq 2}$ converge simplement sur $[1, 2]$.

(c) Montrer que la suite $(g_n)_{n \geq 0}$ ne converge pas dans $L^1([1, 2])$. On pourra commencer par monter que la suite $(g_n)_{n \geq 0}$ ne converge pas vers la fonction nulle.

On s'intéresse maintenant à la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie comme suit :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n \ : \ [1, 2] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \mathbb{I}_{[n2^{-k_n}, (n+1)2^{-k_n}]}(x)$$

où $k_n$ désigne l'unique entier naturel tel que $2^{k_n} \leq n < 2^{k_n+1}$.

(I.2). **Compréhension de la suite** $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe effectivement un unique entier naturel $k_n$ tel que $2^{k_n} \leq n < 2^{k_n+1}$. Donner l'expression de $k_n$ en fonction de $n$.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $n \in [2^k, 2^{k+1} - 1$, $k \leq \frac{\ln n}{\ln 2} < k + 1$

(c) Exprimer les valeurs de $k_n$ pour $n = 1, \ldots, 16$.

(d) Tracer les graphes des fonctions $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_8$.

(I.3). **Etude de la convergence simple de la suite** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

(a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, la suite numérique $(f_{2^p}(1))_{p\in\mathbb{N}^*}$ est constante égale à 1 et que la suite numérique $(f_{2^{p+1}-1}(1))_{p\in\mathbb{N}^*}$ est constante égale à 0.

(b) Déduire de la question précédente que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas simplement sur $[1, 2]$.

(c) Montrer que pour tout $x \in ]1, 2]$, il existe un entier $k_x$ tel que, pour tout $k \geq k_x$, $x > 1+2^{-k_x}$. En déduire qu'il existe qu'il existe une sous-suite $(f_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}^*}$ qui converge simplement sur $[1, 2]$ vers la fonction $\mathbb{I}_{\{1\}}$.

(d) On note $A$ l'ensemble des points $x \in [1, 2]$ tels que la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

i. Écrire une définition mathématique formelle de l'ensemble $A$.

ii. Montrer que la suite numérique $(f_{\lfloor 2^p x\rfloor}(x))_{p\in\mathbb{N}^*}$ est stationnaire identiquement égale à 1.

iii. Montrer que, pour tout $x \in ]1, 2[$, il existe $p_x$ tel que, pour tout $p \geq p_x$, $1 + 2^{-p} < x$. En déduire que la suite $(f_{2^p}(x))_{p\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 lorsque $p$ tend vers $+\infty$.

iv. Déduire des questions précédentes que $A$ est l'ensemble vide.

(I.4). **Etude de la convergence dans** $L^1([1, 2])$ **de la suite** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n$ est Riemann intégrable.

(b) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^1([1, 2])$ vers la fonction nulle.

(I.5). **Etude de la convergence d'une série de fonctions**

Dans cette question nous allons étudier les convergences simple, normale et uniforme, de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{f_n}{n}$ sur $[1, 2]$. Nous poserons $S_n\ :\ [1, 2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{f_k(x)}{k}$ la somme partielle d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de la série.

(a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{f_n}{n}$ ne converge pas normalement sur $[1, 2]$.

(b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{f_n}{n}$ converge simplement sur $[1, 2]$.

(c) Etude de la convergence uniforme

# II Séries entières - au bord du disque de convergence

## Notations et rappels

Dans ce problème nous nous intéressons aux Séries Entières d'arguments complexes, qui s'écrivent sous la forme générale

$$\sum_{n\geq 0} a_n\, z^n \quad \text{où } \ z \in \mathbb{C}.$$

La suite $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est appelée *terme général* de la série entière que l'on note $\sum a_n z^n$ (sans précisions d'indices).

On rappelle également que le *rayon de convergence* de la série entière de terme général $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est l'élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ défini par

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ \mid (a_n\, r^n)_{n\geq 0} \text{ est une suite bornée}\}.$$

avec les conventions $0^0 = 1$ et $\sup \varnothing = 0$.

Le disque $D_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ est appelé *disque de convergence* de la série entière.

La fonction $D_R \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{n\geq 0} a_n\, z^n$ est appelée *somme de la série entière de terme général* $(a_n)_{n\geq 0}$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté on parlera seulement de la somme de la série.

On rappelle également la définition d'une suite de Cauchy :
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p, q \in \mathbb{N},\ (p \geq N,\ q \geq N, \Rightarrow |u_p - u_q| \leq \varepsilon)$$

On admet le résultat suivant : toute suite de Cauchy à valeurs dans $\mathbb{C}$ converge.

## Résultats préliminaires

(II.1). **Généralités**

(a) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum n!\, z^n$ ?

(b) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{1}{n!}\, z^n$ ?

(c) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum z^n$ ?

(II.2). Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de terme général $(a_n)_{n\geq 0}$ et de rayon de convergence $R > 0$.

(a) Montrer que pour tout $z \in D_R$, la série numérique complexe $\sum_{n\geq 0} a_n\, z^n$ est absolument convergente. En déduire que la somme d'une série entière de rayon de convergence $R$ est une fonction bien définie sur $D_R$.

(b) Montrer que la série numérique complexe $\sum_{n\geq 0} a_n\, z^n$ est grossièrement divergente pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$.

(II.3). **Le théorème d'Abel**

(a) Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p < q$, on note $\sigma_{p,q} = \displaystyle\sum_{n=p+1}^{q} v_n$.

Montrer que

$$\forall p, q \in \mathbb{N} \text{ tels que } p < q\ :\ \sum_{n=p+1}^{q} u_n v_n = u_q \sigma_{p,q} + \sum_{n=p+1}^{q-1} (u_n - u_{n+1})\, \sigma_{p,n}.$$

Cette identité est connue sous le nom de *transformation d'Abel*[1].

(b) Nous allons maintenant montrer le résultat suivant dû au mathématicien Abel :

**Théorème II.1.** *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs, décroissante et de limite nulle et soit $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$ dont la suite des sommes partielles est bornée.*[2] *Alors la série numérique complexe $\sum_{n\geq 0} u_n\, v_n$ est convergente.*

On se place sous les hypothèses du théorème.

i. Montrer qu'il existe un réel $M$ tel que :

$$\forall p, q \in \mathbb{N} \text{ tels que } p < q\ :\ |\sigma_{p,q}| = \left| \sum_{n=p+1}^{q} v_n \right| \leq M.$$

1. On pourra remarquer que la transformation d'Abel est une sorte d'« intégration par parties » discrète

2. C'est-à-dire qu'il existe un réel $M$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\sum\limits_{k=0}^{n} v_k\right| \leq M$. On prendra garde au fait que le module est pris à l'extérieur de la somme partielle.

ii. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2M}\right).$$

En utilisant la transformation d'Abel en déduire alors que

$$\forall p, q \in \mathbb{N} \text{ tels que } n_0 \leq p < q \ : \ \left|\sum_{n=p+1}^{q} u_n\, v_n\right| \leq \varepsilon.$$

iii. Conclure.

(II.4). **Tous les comportements sont possibles au bord du disque de convergence. Une illustration par l'étude de la Série Entière de Riemann**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} n^\alpha z^n$ est égal à 1.

Dans toute la suite de la question (II.4), on considère un nombre $z \in \mathbb{C}$ de module 1 s'écrivant $z = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

(b) Montrer que si $\alpha \geq 0$ la série $\sum_{n\geq 1} n^\alpha\, z^n$ est divergente[3].

(c) Montrer que si $\alpha < -1$ la série $\sum_{n\geq 1} n^\alpha\, z^n$ est absolument convergente.

(d) On suppose maintenant que $-1 \leq \alpha < 0$.

i. Montrer si $\theta \equiv \pi\ [2\pi]$ alors la série $\sum_{n\geq 1} n^\alpha\, z^n$ est semi-convergente.

ii. Que dire si $\theta \equiv 0 \quad [2\pi]$ ?

iii. Montrer que si $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$ alors la série $\sum_{n\geq 1} n^\alpha\, z^n$ est semi-convergente.

## Un autre résultat dû à Abel : le théorème d'Abel non-tangentiel

Soit $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$ fixé.

(II.5). Dessiner l'ensemble $\triangle_\theta \cap D_1 \subset \mathbb{C}$ où $\triangle_\theta$ est défini par

$$\triangle_\theta = \left\{1 - \rho e^{i\varphi} \mid \rho > 0, \ \ \varphi \in ]-\theta, \theta[\right\}.$$

(II.6). Le but de cette section est de montrer que le résultat suivant, un nouvelle fois dû à Abel.

**Théorème II.2.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1 et $f\ :\ D_1 \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$ sa fonction somme associée. Si l'on suppose que la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge alors*

$$f(z) \underset{\substack{z \to 1 \\ z\in\triangle_\theta}}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

(a) Montrer que la fonction somme de la série entière de terme général $((-1)^n z^n)_{n\geq 0}$ admet une limite lorsque $z$ tend vers $1^-$ par valeurs réelles. Qu'en déduisez-vous ?

(b) On se place maintenant dans le cadre des hypothèses du théorème. On notera $S = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ la somme totale de la série de terme général $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ et le reste $R_n = (S - S_n)$.

i. Montrer pour tout $z = 1 - \rho e^{i\varphi} \in \triangle_\theta \cap D_1$ les inégalités

$$\frac{1}{1-|z|} \leq \frac{2}{1-|z|^2} \quad \text{puis} \quad \frac{|z-1|}{1-|z|} \leq \frac{2}{2\cos(\theta) - \rho}.$$

3. On prendra soin d'isoler le cas $\alpha = 0$

ii. En déduire que pour tout $z \in \triangle_\theta \cap D_1$ tel que $|z-1| \leq \cos(\theta)$ on a l'inégalité

$$(*) \ : \ \frac{|1-z|}{1-|z|} \leq \frac{2}{\cos(\theta)}.$$

iii. Montrer que

$$\forall z \in D_1, \quad f(z) - S = (z-1)\sum_{n=0}^{\infty} R_n z^n.$$

Indication : utiliser la transformation d'Abel

iv. Soit $\varepsilon' > 0$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad |R_n| \leq \varepsilon'$$

et que la série $\sum z^n R_n$ converge absolument.
Puis en déduire – en utilisant la transformation d'Abel – que

$$\forall z \in \triangle_\theta \cap D_1, \quad |f(z) - S| \leq |1-z| \sum_{n=0}^{n_0} |R_n| + \varepsilon' \frac{|1-z|}{1-|z|}.$$

v. A l'aide de l'inégalité $(*)$, en déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $z \in \triangle_\theta \cap D_1$ vérifiant $|z-1| < \eta_\varepsilon$, on a

$$|f(z) - S| \leq \varepsilon$$

et conclure.

# III Introduction à l'étude de l'ensemble de Mandelbrot

## Notations

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, on convient de noter $M(z)$ le point d'affixe $z$. Pour $B$ un point du plan et $r > 0$, on convient de noter $\mathcal{C}(B; r)$ le cercle de centre $B$ et de rayon $r$.

### Construction d'une cardioïde

Soit $r > 0$ fixé.

(III.1). Soit $U$ le point d'affixe $r$. Soit $A$ un point d'affixe $z_A$ appartenant au cercle $\mathcal{C}(U; r)$. Montrer que l'affixe du point $A$ s'écrit sous la forme $r + r\mathrm{e}^{i\varphi}$ pour un certain paramètre $\varphi \in [-\pi, \pi[$.

(III.2). On considère le cercle $\mathcal{C}'(S; r)$ tangent extérieurement à $\mathcal{C}(U; r)$ au point $A$ et de même rayon $r > 0$.

(a) Faire un dessin.

(b) Expliquer pourquoi les points $U, A, S$ sont nécessairement alignés. En déduire une expression de l'affixe du point $S$ (le centre du cercle $\mathcal{C}'$) en fonction de $z_A$ et $r$, puis en fonction du paramètre $\varphi$ intervenant dans la paramétrisation de $z_A$.

(c) On s'intéresse au point $M$ du cercle $\mathcal{C}'$ tel que la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SM}\right)$ est égale à $\pi + \varphi$. Montrer que l'expression de l'affixe du point $M$ en fonction de $\varphi$ est donnée par

$$r\mathrm{e}^{2i\varphi} + 2r\mathrm{e}^{i\varphi} + r.$$

(d) Soit $M'$ le point d'affixe $z_{M'} = r\mathrm{e}^{2i\varphi} + r$. Montrer que $M'$ appartient au cercle $\mathcal{C}(U; r)$ et que $M\,S\,U\,M'$ est un parallélogramme.

(e) Montrer que les points $M$, $\mathcal{O}$ et $M'$ sont alignés (non nécessairement dans cet ordre).

(f) En déduire que le cercle $\mathcal{C}(M';2r)$ est un cercle tangent au cercle $\mathcal{C}(U;r)$ contenant $M$.

(g) Calculer l'affixe du point $K$ où $\mathcal{C}(U;r)$ et $\mathcal{C}(M';2r)$ sont tangents et montrer que $M$, $A$ et $K$ sont alignés.

ce qui prouve que les points $M$, $A$ et $K$ sont alignés.

On conviendra d'appeler *cardioïde standard de raison* $2r$ la courbe formée des points du plan complexe dont l'affixe appartient à l'ensemble

$$\left\{ r\mathrm{e}^{2i\varphi} + 2r\mathrm{e}^{i\varphi} + r \mid \varphi \in [-\pi, \pi[ \right\}.$$

La construction précédente montre qu'une cardioïde standard est le lieu décrit par un point $M$ d'un cercle roulant sans glisser, extérieurement, autour d'un cercle (*epicycloïde*) de même rayon.

On peut également considérer la cardioïde standard comme le lieu décrit par un point d'un cercle roulant tangentiellement sans glisser autour d'un cercle de rayon moitié « en le contenant » (*pericycloïde*).

On conviendra d'appeler *cardioïde* l'image d'une cardioïde standard par une isométrie du plan.

## L'ensemble de Mandelbrot

L'ensemble de Mandelbrot, noté $\mathcal{M}$, est défini par un processus d'itérations de fonctions du plan complexe.

Pour $c \in \mathbb{C}$ fixé, introduisons la fonction complexe $Q_c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2 + c$. On convient de noter par $(z_n(c))_{n\geq 0}$ la suite complexe de paramètre $c$ définie par récurrence par

$$\begin{cases} z_0(c) = 0 \\ z_{n+1}(c) = Q_c(z_n) \quad \left(= z_n^2(c) + c\right). \end{cases}$$

L'ensemble de Mandelbrot $\mathcal{M}$ est alors défini par

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} \mid |z_n(c)| \not\to +\infty \text{ lorsque } n \to +\infty\}$$

c'est-à-dire le complémentaire de l'ensemble des paramètres $c \in \mathbb{C}$ tels que $(z_n(c))_{n\geq 0}$ tend en module vers $+\infty$

$$\mathbb{C} \setminus \mathcal{M} = \left\{ c \in \mathbb{C} \mid |z_n(c)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \right\}.$$

(III.3). Nous allons commencer par montrer que l'ensemble de Mandelbrot est borné.

(a) Soit $c \in \mathbb{C}$ tel que $|c| > 2$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $|z_n(c)| \geq |c|(|c|-1)^{n-1}$. En déduire que $c \notin \mathcal{M}$ et que $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}(\mathcal{O};2)$.

(b) Soit $c \in \mathbb{C}$ quelconque. Montrer que s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|z_{n_0}(c)| > 2$, alors $c \notin \mathcal{M}$.

(c) En déduire que

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ |z_n(c)| \leq 2\}.$$

et

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} \mid (z_n(c))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite bornée de } \mathbb{C}\}.$$

(III.4). **Etude des points attractifs de $\mathcal{M}$**

**Définition III.1.** *Soit $c \in \mathbb{C}$. On appelle point attractif pour $Q_c$, un point $z^* \in \mathbb{C}$ tel que :*

— *$z^*$ est solution de l'équation $(E_c) : z = Q_c(z)$ (équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$), autrement dit $z^*$ est un point fixe de $Q_c$.*

— $|2z^*| < 1$ [4]

(a) On note $\mathcal{P}_1 = \{c \in \mathbb{C} \mid \text{il existe un point attractif pour } Q_c\}$. Montrer que

$$\mathcal{P}_1 = \left\{ \frac{r}{2}\mathrm{e}^{i\theta} - \frac{r^2}{4}\mathrm{e}^{2i\theta} \mid 0 \leq r < 1, \quad \theta \in [0, 2\pi[ \right\}.$$

Nous admettrons que $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{M}$. [5]

(b) Posons

$$\partial\mathcal{P}_1 := \left\{ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{i\theta} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi[ \right\}$$

la frontière de l'ensemble $\mathcal{P}_1$. Montrer que $\partial\mathcal{P}_1$ est l'ensemble des affixes de l'image d'une cardioïde standard de raison 1/2 par la symétrie centrale de centre $K$ d'affixe réel 1/8. D'après la remarque ci-dessus, cet ensemble est encore une cardioïde et est appelée *cardioïde principale de* $\mathcal{M}$.

(c) Montrer que la cardioïde principale de $\mathcal{M}$ résulte également de la transformation de la cardioïde standard de raison 1/2 par la symétrie orthogonale d'axe vertical d'équation $\mathcal{R}e(z) = 1/8$.

4. On remarquera que l'on a l'égalité $|Q_c'(z)| = |2z|$ (au sens de la dérivation dans $\mathbb{C}$) : l'application $Q_c$ est donc localement contractante autour de $z^*$, par conséquent $z^*$ possède un *bassin d'attraction*, ce qui explique cette définition.

5. En fait un corollaire d'un théorème très important sur les systèmes dynamiques dû au mathématicien Fatou permet alors d'affirmer que pour tout $c \in \mathcal{P}_1$, la suite $(z_n(c))_{n\geq 0}$ converge vers $z^*$. Autrement dit, le point 0 (point initial de la suite $(z_n(c))_{n\geq 0}$) est dans le *bassin d'attraction* de $z^*$.