Capes externe – Mathématiques

ÉPREUVE D'ADMISSIBILITÉ 2

DEVOIR N°1

Marie-Hélène
Mourgues

CNED, BP 60200, 86980 Futuroscope Chasseneuil Cedex, France

1-2012-DV-WB-01-21

SOMMAIRE

Problème capes deuxième épreuve d'admissibilité.

Problème 1

Dans ce problème toutes les matrices carrées considérées sont à coefficients dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.
Soit A une matrice carrée (n, n), on note $A = (a_{ij})$ où a_{ij} est le coefficient intersection de la i-ème ligne et la j-ème colonne.
On note I_n la matrice identité de taille n, c'est à dire la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf les coefficients diagonaux qui sont égaux à 1 et et E_n la matrice de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1.
On appelle *matrice semi-magique de taille* n, une matrice (n, n) à coefficients dans $\mathbb{N}$ dont la somme des termes de chaque ligne et la somme des termes de chaque colonne sont égales. En d'autres termes la matrice $A = (a_{ij})$ est dite semi-magique s'il existe un entier $s(A)$ tel que pour tout $(i, j) \in \{1, \cdots, n\}$:

$$s(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}$$

L'entier naturel $s(A)$ est appelé *somme* de la matrice semi-magique A. On dit qu'une matrice est une *matrice magique de taille* n si elle est est semi-magique de taille n et si, de plus, la somme des éléments diagonaux et la somme des éléments anti-diagonaux sont aussi égales à la somme $s(A)$ de A. En d'autre terme A est magique si : pour tout $(i, j) \in \{1, \cdots, n\}$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = \sum_{k=1}^{n} a_{k\,n-k+1}$$

L'entier naturel $s(A)$ est appelé somme de la matrice magique A.
On note $\mathcal{SM}_n$ et $\mathcal{M}_n$ respectivement l'ensemble des matrices semi-magiques de taille n et l'ensemble des matrices magiques de taille n.

Soient n un entier naturel et x et y deux entiers la notation $x = y[n]$ signifie que n divise $x - y$.

I Quelques généralités et exemples

(I.1). Vérifier que I_n est semi-magique et que E_n est magique.

(I.2). Soient A et B deux matrices semi-magiques (resp. magiques) et a et b deux entiers naturels. Montrer que $aA + bB$ est semi-magique (resp. magique) et exprimer $s(aA + bB)$ en fonction de $s(A)$ et $s(B)$.

(I.3). On note J_2 la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que l'ensemble des matrices semi-magiques de taille 2 est $\mathcal{SM}_2 = \{aI_2 + bJ_2; a, b \in \mathbb{N}\}$.

(b) Montrer que l'ensemble des matrices magiques de taille 2 est $\mathcal{M}_2 = \{aE_2; a \in \mathbb{N}\}$.

(c) Donner un exemple de matrice semi-magique de taille 4 et de somme 1 distincte de I_4.

II Matrices semi-magiques de taille 3

(II.1). Monter que $A \in \mathcal{SM}_3$ ssi il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $AE_3 = E_3A = aE_3$. Dans ce cas, exprimer $s(A)$ en fonction de a.

(II.2). *Montrer que le produit de deux matrices semi-magiques de taille* 3 *est une matrice semi-magique, exprimer* $s(AB)$ *en fonction de* $s(A)$ *et de* $s(B)$.
Par définition du produit de deux matrices si on note $AB = (c_{ij})$, on a $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}b_{kj}$. Par suite,

$$\sum_{i=1}^{3} c_{ij} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{3} b_{kj}(\sum_{i=1}^{3} a_{ik}) = s(A)\sum_{k=1}^{3} b_{kj} = s(A)s(B)$$

Le calcul est le même pour la somme des lignes. Donc AB est semi-magique de somme $s(A)s(B)$.

(II.3). On appelle matrice de permutation toute matrice obtenue par permutation des colonnes de la matrices I_3. L'objet de cette question est de montrer que toute matrice semi-magique de taille 3 est combinaison linéaire de matrices de permutation.

(a) Donnez les 6 matrices de permutation de taille 3 et vérifier qu'elles sont semi-magiques de somme 1.

(b) Soit A un matrice semi-magique de somme $s(A) \geq 1$. On suppose que a_{11} est différent de 0. Montrer que si $a_{22} = 0$ ou $a_{33} = 0$ alors $a_{23} \neq 0$ et $a_{32} \neq 0$. Autrement dit, la matrice extraite de taille 2, $\begin{pmatrix} a_{22} & a_{22} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ n'a ni colonne ni ligne nulle. En déduire qu'il existe une matrice de permutation P telle que $A - P$ soit une matrice à coefficients dans $\mathbb{N}$. Montrer que cette matrice $A - P$ est magique de somme $s(A) - 1$.

(c) Expliquer comment généraliser le résultat précédent en considérant un coefficient a_{ij} non nul de A.

(d) Montrer par récurrence sur la somme que toute matrice semi-magique s'écrit comme combinaison linéaire des matrices de permutation.

(e) Donner la forme de toutes les matrices semi-magiques de taille 3.

.

III Carrés latins et carrés magiques

On appelle carré de taille n une matrice de taille n que l'on écrira sous forme de tableau.
On appelle *carré latin de taille* n une matrice de taille n telle que les entiers de 0 à $n-1$ apparaissent une et une seule fois sur chaque ligne et sur chaque colonne. On notera ces matrices par un carré, par exemple

$$C_1 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ \hline\end{array} \text{ et } C_2 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 \\ \hline\end{array}$$ sont des carrés latins de taille 3.

On appelle *carré magique de taille* n toute matrice magique dont l'ensemble des coefficients est $\{0, 1 \cdots, n^2-1\}$, chaque élément apparaissant une et une seule fois. Voici un exemple de carré magique d'ordre 3 :

$$A = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 7 & 0 & 5 \\ \hline 2 & 4 & 6 \\ \hline 3 & 8 & 1 \\ \hline\end{array}$$

(III.1). Montrer qu'un carré latin est une matrice semi-magique et calculer sa somme. Sont-ils tous des matrices magiques ?

(III.2). Quelle est la somme d'un carré magique ?

(III.3). Soit $C = (c_{ij})$ et $C' = (c'_{ij})$ deux carrés latins de taille n. On note $B = [CC']$ la matrice de taille n dont le terme générique est $b_{ij} = (c_{ij}, c'_{ij})$, ses coefficients sont donc des couples d'entiers appartenant à l'ensemble $\{0, \cdots, n-1\}$.
On note $A = C \star C' = nC + C'$, c'est à dire A est la matrice dont le terme générique est $a_{ij} = nc_{ij} + c'_{ij}$.

(a) Soit C_1 et C_2 les carrés latins de taille 3 donnés en exemple en début de partie. Montrez que $C_1 \star C_2 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 1 & 8 \\ \hline 8 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 8 & 3 \\ \hline\end{array}$.

(b) Montrer que si C et C' sont des carrés latin de taille n, alors les coefficients de $C \star C'$ appartiennent à l'ensemble $\{0, \cdots n^2-1\}$.

(c) Montrer que l'application f : $\begin{array}{ccc} \{0, \cdots, n^2-1\} & \mapsto & \{0, \cdots, n-1\} \times \{0, \cdots, n-1\} \\ m & \to & (q, r) \end{array}$
où q et r sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$ de m par n, est une bijection.

(d) On dit que deux carrés $C = (c_{ij})$ et $C' = (c'_{ij})$ sont orthogonaux si les couples (c_{ij}, c'_{ij}) de la matrice $[CC'] = ((c_{ij}, c'_{ij}))$ sont deux à deux distincts.

i. Montrer que si $C = (c_{ij})$ et $C' = (c'_{ij})$ sont des carrés latins orthogonaux qui sont aussi des matrices magiques alors $A = C \star C' = nC + C'$ est un carré magique.

ii. Soit C un carré magique, on note $C_q = (q_{ij})$ et $C_r = (r_{ij})$ les carrés de taille n telle que pour tout $(i,j) \in \{0,\cdots,n-1\} \times \{0,\cdots,n-1\}$, $c_{ij} = nq_{ij} + r_{ij}$, C_q est le carré des quotients et C_r est le carré des restes des coefficients de C dans la division euclidienne par n. Montrer, en utilisant la question précédente, que C_r et C_q sont des carrés orthogonaux dont les coefficients sont compris entre 0 et $n-1$.

iii. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 6 & 4 & 2 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Vérifier que A est un carré magique. En utilisant la méthode précédente, décomposer A en $A_q \star A_r$ où A_1 et A_2 sont des carrés latins orthogonaux.

IV Construction géométrique de carrés magiques

Dans cette partie on suppose que n est un nombre premier.
Un carré de taille n est considéré comme un plan contenant un nombre fini de points, les n^2 cases de ce carré. Le point intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est le point de coordonnées $(j-1, n-i))$ (voir graphique ci-dessous). Une droite du plan est :

— soit l'ensemble des points (x,y) vérifiant $y = mx + b[n]$, où m et b appartiennent à $\{0,\cdots,n-1\}$. Si $m = 0$, on dit que la droite est horizontale.

— soit une colonne du carré, on dit que la droite est verticale. Une droite verticale est caractérisée par son équation $x = k[n]$, on convient que dans ce cas $m = \infty$.

Dans tous les cas, l'entier m est appelé pente de la droite.
La figure suivante représente un exemple de carré de taille 5 où l'on a indiqué les points de coordonnées $(0,1)$ $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$ et $(4,0)$ qui appartiennent tous à la droite d'équation $y = x + 1[5]$.

4				(3,4)	
3			(2,3)		
2		(1,2)			
1	(0,1)				
0					(4,0)
	0	1	2	3	4

Figure 1 –

(IV.1). Montrer que toutes les droites d'un carré de taille n ont exactement n points.

(IV.2). Montrer qu'il y a n droites de même pente m, ces droites seront dites parallèles. Montrer que deux droites parallèles ont une intersection vide.

(IV.3). Montrer que pour tout $m \in \{0, \cdots, n-1\}$ la réunion de toutes les droites parallèles de pente m est l'ensemble des points du plan. On dit que le plan est recouvert par des droites parallèles de pente m.

(IV.4). Soit $m \neq m'$ et D_m et $D_{m'}$ deux droites de pente respective m et m'.

(a) On suppose que m et m' sont différents de ∞. Montrer que il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que $u(m - m') = 1[n]$.

(b) En déduire que l'intersection de deux droites non parallèles et non verticales est réduit à un singleton.

(c) Soit D une droite verticale et D_m une droite non verticale, montrer que l'intersection de D et de D_m est également réduite à un singleton.

(IV.5). Soit m fixé. On appelle C_m le carré obtenu en remplaçant dans C chaque point de la droite d'équation $y = mx + b$ par l'entier b, $b \in \{0, \cdots, n-1\}$. Par exemple dans la figure suivante, Figure 2, chaque point de la droite $y = x + 1[5]$ est remplacé par 1 et chaque point de la droite $y = x[5]$ est remplacé par 0

4				1	0
3			1	0	
2		1	0		
1	1	0			
0	0				1
	0	1	2	3	4

FIGURE 2 –

Montrer que si $m \notin \{0, \infty, 1, n-1\}$, C_m est un carré latin qui est aussi une matrice magique. Indication : on pourra considérer l'intersection des droites de pente m avec les droites horizontales, verticales, la diagonale et l'anti-diagonale.
Expliquez pourquoi C_0, C_1, C_∞ et C_{n-1} ne sont pas des matrices magiques.

(IV.6). Soit $m, m' \notin \{0, \infty, 1, n-1\}$, avec $m \neq m'$. Montrer que les carrés C_m et $C_{m'}$ sont orthogonaux. En déduire la construction d'un carré magique de taille n.

(IV.7). On choisit $m = 2$ et $m' = 3$, construire grâce au procédé précédent un carré magique de taille 5.

Problème 2

Il s'agit dans ce problème d'étudier les évolutions de deux populations d'animaux, les proies et les prédateurs.

V Evolution avec prédateurs

Dans une région évoluent deux espèces, les proies et les prédateurs.
On note x_0 le nombre initial de proies et x_n le nombre de proies au bout de n années. On note y_0 le nombre initial de prédateurs et y_n le nombre de prédateurs au bout de n années. Soit a, b, d des réels strictement positifs, et e un réel tel que $0 < e < 1$. Nous faisons les hypothèses suivantes :
(H1) : le taux de natalité des proies est constant et égal à a.
(H2) : Le taux de mortalité des proies dépend proportionnellement du nombre de prédateurs avec un coefficient b.
(H3) Le taux de natalité des prédateurs dépend proportionnellement du nombre de proies avec un coefficient d.
(H4) Le taux de mortalité des prédateurs est constant et égal à e.

(V.1). Généralités.

(a) Expliquer les relations de récurrence suivantes :
$x_{n+1} = (1+a)x_n - by_nx_n$
$y_{n+1} = (1-e)y_n + dx_ny_n$.

(b) Montrer qu'il existe un état stable, c'est à dire deux réels x et y non nuls tels que si $x_0 = x$ et $y_0 = y$ les suites (x_n) et (y_n) sont constantes.

(c) On définit les suites (u_n) et (v_n) par, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$u_n = x_n - x$ et $v_n = y_n - y$.
Montrer les relations de récurrences suivantes : $\left\{\begin{array}{lll} u_{n+1} & = & u_n - (be/d)v_n - bu_nv_n \\ v_{n+1} & = & v_n + (ad/b)u_n + du_nv_n \end{array}\right.$.

(d) On suppose dans cette question que $u_0 = 3000$, $v_0 = 0$, $a = 0,09$, $b = 10^{-5}$, $d = 5.10^{-6}$, $e = 0,25$. Calculer à l'aide d'un tableur les 50 premiers termes des suites (u_n) et (v_n).
Calculer ensuite les 50 premiers termes des suites (u'_n) et (v'_n) obtenues en supprimant les termes en u_nv_n c'est à dire : $\left\{\begin{array}{lll} u'_{n+1} & = & u'_n - de/bv'_n \\ v'_{n+1} & = & v'_n + ab/du'_n \end{array}\right.$
Puis calculer les 50 premiers termes des suites (x_n), (y_n), (x'_n) et $y'_n)$ correspondantes. Que pouvez-vous en déduire ?

(V.2). Dans toute la suite du problème on suppose que b et d sont petits et que l'on peut négliger les termes bu_nv_n et du_nv_n. On suppose donc que les suites vérifient les relations de récurrence suivantes :
$$\left\{\begin{array}{lll} u_{n+1} & = & u_n - de/bv_n \\ v_{n+1} & = & v_n + ab/du_n \end{array}\right.$$

(a) Montrer alors la relation de récurrence suivante :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -de/b \\ ad/b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

On note A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -de/b \\ ab/d & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.

(c) On écrit $A = I + B$, où $B = \begin{pmatrix} 0 & -de/b \\ ab/d & 0 \end{pmatrix}$.

Il s'agit dans cette question de calculer A^n. Pour cela nous allons tout d'abord calculer les puissances de la matrice B, et plus généralement les puissances d'une matrice de la forme $B = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$, où α et β sont deux réels positifs.

i. Montrer que pour tout k, $B^{4i} = (\alpha\beta)^{2i} I$, $B^{4i+1} = (\alpha\beta)^{2i} B$, $B^{4i+2} = -(\alpha\beta)^{2i+1} I$, $B^{4i+3} = -(\alpha\beta)^{2i+1} B$.

ii. On pose :

$$a_n = \sum_{0 \leq 4i \leq n} \binom{n}{4i} (\alpha\beta)^{2i} - \sum_{0 \leq 4i+2 \leq n} \binom{n}{4i+2} (\alpha\beta)^{2i+1}$$

et,

$$b_n = \sum_{0 \leq 4i+1 \leq n} \binom{n}{4i+1} (\alpha\beta)^{2i} - \sum_{0 \leq 4i+3 \leq n} \binom{n}{4i+3} (\alpha\beta)^{2i+1}$$

Déduire de la question précédente pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = a_n I + b_n B$$

iii. Soit $z = 1 + i\sqrt{\alpha\beta}$.
Montrer que $z^n = a_n + i\sqrt{\alpha\beta} b_n$.

iv. Montrer qu'il existe un réel $r > 0$ et un réel $\theta \in [0, \pi]$ tel que $z = re^{i\theta}$.
Montrer ensuite que, pour tout n, $A^n = r^n \left(\cos(n\theta) I + \frac{\sin(n\theta)}{\sqrt{\alpha\beta}} B \right)$.

v. *En déduire les coefficients de A^n en fonction de α, β, θ et n, puis en fonction de a, b, d et e.*
Avec les notations précédentes on a $\alpha\beta = ae$, $z = 1 + i\sqrt{ae}$, donc $|z| = \sqrt{1 + ae}$ et $\theta = arcos\frac{1}{\sqrt{1+ae}}$. Par suite, $A^n = (\sqrt{1+ae})^n \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta)\frac{d\sqrt{e}}{b\sqrt{a}} \\ \sin(n\theta)\frac{b\sqrt{a}}{d\sqrt{e}} & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$.

vi. En déduire l'expression des termes u_n et v_n, puis de x_n et y_n en fonction de a, b, d, e et de x_0 et y_0.

(d) Application numérique. On donne :
$x_0 = 53000$, $y_0 = 9000$, $a = 0,09$, $b = 10^{-5}$, $d = 5.10^{-6}$, $e = 0,25$. Exprimer les termes x_n et y_n en fonction de n et de $\theta = arctan(0,15)$.
En déduire que ces deux suites présentent des oscillation décalées autour de l'état stable.
Expliquer ce phénomène.