CHAPITRE 2 : Expérience Aléatoire, probabilités, probabilités conditionnelles

Aurélie Jeanmougin

12 avril 2021

1 Expérience aléatoire et évènements

1.1 Expérience aléatoire

Définition 1.1. Une **expérience aléatoire** est une expérience renouvelable à l'identique, dont ls résultats possibles sont connus sans qu'on puisse déterminer lequel sera réalisé.

Exemple 1.1. *Lancer un dé à 6 faces est une expérience renouvelable dont les résultats possibles sont tous les nombre entiers de 1 à 6.*

Définition 1.2. Les résultats possibles d'une expérience aléatoire sont appelés **éventualités** ou **issues**.

Définition 1.3. L'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire est appelé **univers**. On le note généralement Ω.

Exemple 1.2. *On peut reprendre l'exemple précédent : l'ensemble de toutes les issues de cette expérience aléatoire est* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Dans cette leçon on peut se limiter au cas où Ω est un ensemble fini.

1.2 Evénement

Un événement est associé à une expérience aléatoire, nous allons donner quelques définitions.

Définition 1.4.
- Un **événement** est un ensemble de plusieurs issues, c'est un sous-ensemble de Ω.
- Un événement est dit **élémentaire** si une seule issue le réalise.
- L'**événement impossible** est la partie vide (noté $\emptyset$), lorsque aucune issue ne le réalise.

— L'**événement certain** est Ω, lorsque toutes les issues le réalisent.
— L'**événement** $A \cup B$ (lu "A union B") est constitué des issues qui appartiennent soit à A, soit à B, soit aux deux ensembles.
— L'**événement** $A \cap B$ (lu "A inter B") est constitué des issues qui appartiennent à la fois à A et à B.
— Deux événements sont **incompatibles** s'ils n'ont pas l'éléments en commun, c'est-à-dire que $A \cap B = \emptyset$.
— L'événement $\bar{A}$ est dit **événement contraire** de A si les deux événements sont incompatibles et si l'union des deux événements forme la totalité des issues, c'est-à-dire que $A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap B = \emptyset$.

Exemple 1.3. *1. Obtenir un 2 est un événement élémentaire :* $\omega = \{7\}$.
2. Obtenir un nombre pair est un événement : $A = \{2, 4, 6\}$.
3. Obtenir un multiple de trois est un événement : $B = \{3, 6\}$.
4. $A \cap B = \{6\}$.
5. $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$.
6. Si on a :

$$C = \{1\}$$

alors $C \cap A = \emptyset$ *donc C et A sont incompatibles.*
7. Si $\bar{A}$ *est l'événement "Obtenir un nombre impair" on a :*

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$A \cup \bar{A} = \Omega$$

2 Probabilités

2.1 Loi de probabilités sur un univers Ω

Définition 2.1. Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. On définit une loi de probabilité P sur Ω en associant à chaque événement élémentaire ω_i une probabilité $p_i \in [0, 1]$ tel que :

$$\sum_i p_i = 1$$

On peut aussi noter $p_i = P(\omega_i)$.

Proposition 2.1. La probabilité P(E) d'un événement E est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Exemple 2.1. *On joue avec un dé truqué. La probabilité d'apparition de chaque face est donnée ci-dessous :*

Issue ω	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Probabilité $P(\omega)$	*0,05*	*0,2*	α	*0,1*	*0,25*	*0,1*

1. On veut calculer la probabilité de l'événement A : "Obtenir un nombre pair". D'après la définition on a :

$$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = 0,2 + 0,1 + 0,1 = 0,4.$$

2. On veut calculer la probabilité d'obtenir 3. On sait que :

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

On a alors :

$$P(3) = 1-(P(1)+P(2)+P(4)+P(5)+P(6)) = 1-(0,05+0,2+0,1+0,25+0,1) = 0,3.$$

Propriété 2.1. Soient A, B $\subset \Omega$. Alors :

— 1. $P(\Omega) = 1$

— 2. $P(\emptyset) = 0$

— 3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

— 4. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

— 5. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

— 6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Démonstration 2.1. *1.* $P(\Omega) = P(\bigcup_i \omega_i) = \sum_i P(\omega_i) = \sum_i \frac{1}{n} = 1.$
2. $P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset) \iff P(A) = P(A) + P(\emptyset).$
3. On a : $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, *de plus* $(A \setminus B)$ *et* $A \cap B$ *sont disjoints donc on peut appliquer la définition :*

$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$$

4. Comme $A \cap \bar{A} = \emptyset$ *et* $A \cup \bar{A} = \Omega$, *on a :*

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) \iff P(\Omega) = P(A) + P(\bar{A})$$

5. $A \subset B \Rightarrow B = (B \cap A) \cup A$ *donc :*

$$P(B) = P(B \setminus A) + P(A) \leq P(A)$$

6. On a :

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$

2.2 Equiprobabilité

Définition 2.2. Si tous les éléments de Ω ont la même probabilité d'apparition alors Ω est dit **équiprobable**. Si $\Omega = \{a_1, ..., a_n\}$ alors :

$$P(\{a_i\}) = \frac{1}{n}, \forall a_i \in \Omega$$

Propriété 2.2. Si Ω est équiprobable, la probabilité d'un événement $A \subset \Omega$ contenant n_A éléments est :

$$P(A) = \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n} = \frac{n_A}{n} = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

Exemple 2.2. *On lance un dé non truqué.*
1. La probabilité d'obtenir 5 est : $P(5) = \frac{1}{6}$.
2. La probabilité d'obtenir un nombre pair est : $P(2) + P(4) + P(6) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.