CHAPITRE 2 : Expérience Aléatoire, probabilités, probabilités conditionnelles

Aurélie Jeanmougin

13 avril 2021

1 Expérience aléatoire et évènements

1.1 Expérience aléatoire

Définition 1.1. Une **expérience aléatoire** est une expérience renouvelable à l'identique, dont ls résultats possibles sont connus sans qu'on puisse déterminer lequel sera réalisé.

Exemple 1.1. *Lancer un dé à 6 faces est une expérience renouvelable dont les résultats possibles sont tous les nombre entiers de 1 à 6.*

Définition 1.2. Les résultats possibles d'une expérience aléatoire sont appelés **éventualités** ou **issues**.

Définition 1.3. L'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire est appelé **univers**. On le note généralement Ω.

Exemple 1.2. *On peut reprendre l'exemple précédent : l'ensemble de toutes les issues de cette expérience aléatoire est* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Dans cette leçon on peut se limiter au cas où Ω est un ensemble fini.

1.2 Evénement

Un événement est associé à une expérience aléatoire, nous allons donner quelques définitions.

Définition 1.4.
- Un **événement** est un ensemble de plusieurs issues, c'est un sous-ensemble de Ω.
- Un événement est dit **élémentaire** si une seule issue le réalise.
- L'**événement impossible** est la partie vide (noté $\emptyset$), lorsque aucune issue ne le réalise.

- L'**événement certain** est Ω, lorsque toutes les issues le réalisent.
- L'**événement** $A \cup B$ (lu "A union B") est constitué des issues qui appartiennent soit à A, soit à B, soit aux deux ensembles.
- L'**événement** $A \cap B$ (lu "A inter B") est constitué des issues qui appartiennent à la fois à A et à B.
- Deux événements sont **incompatibles** s'ils n'ont pas l'éléments en commun, c'est-à-dire que $A \cap B = \emptyset$.
- L'événement $\bar{A}$ est dit **événement contraire** de A si les deux événements sont incompatibles et si l'union des deux événements forme la totalité des issues, c'est-à-dire que $A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap B = \emptyset$.

Exemple 1.3. *1. Obtenir un 2 est un événement élémentaire :* $\omega = \{7\}$.
2. Obtenir un nombre pair est un événement : $A = \{2, 4, 6\}$.
3. Obtenir un multiple de trois est un événement : $B = \{3, 6\}$.
4. $A \cap B = \{6\}$.
5. $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$.
6. Si on a :

$$C = \{1\}$$

alors $C \cap A = \emptyset$ *donc C et A sont incompatibles.*
7. Si $\bar{A}$ *est l'événement "Obtenir un nombre impair" on a :*

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$A \cup \bar{A} = \Omega$$

2 Probabilités

2.1 Arbre des possibles

Définition 2.1. L'**arbre des possibles** permet de visualiser les issues d'une expérience aléatoire. On peut y noter la probabilité de chaque issue sur chacune des branches.

Exemple 2.1. *Lorsque l'on fait tourner une roue de la fortune on peut modéliser chacune des issues sur un arbre des possibles.*

2.2 Loi de probabilités sur un univers Ω

Définition 2.2. Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. On définit une loi de probabilité P sur Ω en associant à chaque événement élémentaire ω_i une probabilité $p_i \in [0, 1]$ tel que :

$$\sum_i p_i = 1$$

On peut aussi noter $p_i = P(\omega_i)$.

Proposition 2.1. La probabilité P(E) d'un événement E est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Exemple 2.2. *On joue avec un dé truqué. La probabilité d'apparition de chaque face est donnée ci-dessous :*

Issue ω	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Probabilité $P(\omega)$	*0,05*	*0,2*	α	*0,1*	*0,25*	*0,1*

1. On veut calculer la probabilité de l'événement A : "Obtenir un nombre pair". D'après la définition on a :

$$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = 0,2 + 0,1 + 0,1 = 0,4.$$

2. On veut calculer la probabilité d'obtenir 3. On sait que :

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

On a alors :

$$P(3) = 1-(P(1)+P(2)+P(4)+P(5)+P(6)) = 1-(0,05+0,2+0,1+0,25+0,1) = 0,3.$$

Propriété 2.1. Soient A, B $\subset \Omega$. Alors :
- 1. $P(\Omega) = 1$
- 2. $P(\emptyset) = 0$
- 3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- 4. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
- 5. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- 6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Démonstration 2.1. *1.* $P(\Omega) = P(\bigcup_i \omega_i) = \sum_i P(\omega_i) = \sum_i \frac{1}{n} = 1.$
2. $P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset) \iff P(A) = P(A) + P(\emptyset).$
3. On a : $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$*, de plus* $(A \setminus B)$ *et* $A \cap B$ *sont disjoints donc on peut appliquer la définition :*

$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$$

4. Comme $A \cap \bar{A} = \emptyset$ *et* $A \cup \bar{A} = \Omega$*, on a :*

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) \iff P(\Omega) = P(A) + P(\bar{A})$$

5. $A \subset B \Rightarrow B = (B \cap A) \cup A$ *donc :*

$$P(B) = P(B \setminus A) + P(A) \leq P(A)$$

6. On a :

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$

2.3 Equiprobabilité

Définition 2.3. Si tous les éléments de Ω ont la même probabilité d'apparition alors Ω est dit **équiprobable**. Si $\Omega = \{a_1, ..., a_n\}$ alors :

$$P(\{a_i\}) = \frac{1}{n}, \forall a_i \in \Omega$$

Propriété 2.2. Si Ω est équiprobable, la probabilité d'un événement $A \subset \Omega$ contenant n_A éléments est :

$$P(A) = \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n} = \frac{n_A}{n} = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

Exemple 2.3. *On lance un dé non truqué.*
1. La probabilité d'obtenir 5 est : $P(5) = \frac{1}{6}$.
2. La probabilité d'obtenir un nombre pair est : $P(2) + P(4) + P(6) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

3 Probabilité conditionnelle

3.1 Probabilité conditionnelle

Définition 3.1. Soit A et B deux événements avec $P(A) > 0$ et $A \subset \Omega$, on appelle **probabilité conditionnelle de B sachant A**, la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé. Cette probabilité conditionnelle à A est l'application $P_A(.)$ de l'ensemble des événements $(P(\Omega))$ dans $[0, 1]$ telle que :

$$\begin{array}{lll} P_A : & P(\Omega) & \to [0,1] \\ & B & \mapsto P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \end{array}$$

Exemple 3.1. *On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.*
Soit A l'événement "Le résultat est un pique".
Soit B l'événement "Le résultat est un roi".
Donc $A \cap B$ *est l'événement "Le résultat est le roi de pique".*
Alors : $P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ *et* $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$.
Donc la probabilité que le résultat soit un roi sachant qu'on a tiré une carte pique est :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{8}$$

Propriété 3.1. Soit A et B deux événements avec $P(A) > 0$, on a :

- $0 \leq P_A(B) \leq 1$
- $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$
- $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)$

3.2 Probabilités totales et de Bayes

Propriété 3.2. Formule des probabilités totales. Soit $\{E_1, ..., E_n\}$ une partition de Ω d'événements non vides. Soit $A \subset \Omega$. Alors :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P_{E_i}(A) \times P(E_i)$$

Exemple 3.2. *On considère deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient 6 boules noires et 4 boules blanches. L'urne U_2 contient 3 boules noires et 7 boules blanches. On lance un dé non truqué. S'il indique le chiffre 1, on choisit l'urne U_1 sinon on choisit l'urne U_2. On effectue ensuite deux tirages avec remise. On cherche la probabilité d'avoir tiré deux boules noires en tout. On note :*

$$N = \{\textit{noir au premier tirage}\}$$

$$N' = \{\textit{noir au second tirage}\}$$

$$H_1 = \{\textit{choix de l'urne } U_1\}$$

$$H_2 = \bar{H}_1 = \{\textit{choix de l'urne } U_2\}$$

On a ainsi :

$$P_{H_1}(N) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$P_{H_1}(N \cap N') = (\frac{3}{5})^2$$

$$P_{H_2}(N) = \frac{3}{10}$$

$$P_{H_2}(N \cap N') = (\frac{3}{10})^2$$

La formule nous donne alors :

$$P(N) = P_{H_1}(N) \times P(H_1) + P_{H_2}(N) \times P(H_2)$$

$$P(N) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{5}{6} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{10} + \frac{1}{4} = \frac{7}{20}$$

$$P(N \cap N') = P_{H_1}(N \cap N') \times P(H_1) + P_{H_2}(N \cap N') \times P(H_2)$$

$$P(N) = \frac{1}{6} \times (\frac{3}{5})^2 + \frac{5}{6} \times (\frac{3}{10})^2 = \frac{27}{200}$$

Propriété 3.3. Formule de Bayes. Soit $\{E_1, ..., E_n\}$ une partition de Ω d'événements non vides. Soit $A \subset \Omega$. Alors :

$$P_A(E_i) = \frac{P_{E_i}(A) \times P(E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P_{E_i}(A) \times P(E_i)}$$

3.3 Indépendance

Définition 3.2. Deux événements A et B sont **indépendants** si :

- $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
- $P_A(B) = P(B)$
- $P_B(A) = P(A)$

Exemple 3.3. *On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.*
Soit A l'événement "Le résultat est un trèfle".
Soit B l'événement "Le résultat est un roi".
Donc $A \cap B$ est l'événement "Le résultat est le roi de trèfle".
Alors : $P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$.
On a donc :

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32} = P(A \cap B)$$

Les événements A et B sont indépendants.

Propriété 3.4. Si A et B sont indépendants alors $\bar{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration 3.1.

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B \cap \bar{A})$$
$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) \times P_B(\bar{A})$$
$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) \times (1 - P_B(A))$$
$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) \times (1 - P(A)) car\ A\ et\ B\ sont\ indépendants$$
$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) \times P(\bar{A})$$

Donc $\bar{A}$ et B sont indépendants.

3.4 Schéma de Bernoulli

Définition 3.3. Toute expérience aléatoire conduisant à deux issues possibles S (Succès) et $\bar{S}$ (Echec) est appelée une **épreuve de Bernoulli**.

Exemple 3.4. *Si on appelle Succès lors d'un lancé d'un dé, l'événement noté : $S =$ "Obtenir 6". Le lancer du dé peut alors être considéré comme une épreuve de Bernoulli avec :*

- $S = \{6\}$ *et* $p = P(S) = \frac{1}{6}$.
- $\bar{S} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *et* $q = 1 - p = \frac{5}{6}$.

Définition 3.4. Si on répète n fois et de façon indépendante une épreuve de Bernoulli, on obtient un **schéma de Bernoulli**.

Propriété 3.5. Soit $0 \leq k \leq n$ avec $k, n \in \mathbb{N}$,

$$P(\text{"Obtenir k succès"}) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$