Capes externe – Mathématiques

ÉPREUVE D'ADMISSIBILITÉ 2

DEVOIR N°2

Pierre Burg

CNED, BP 60200, 86980 Futuroscope Chasseneuil Cedex, France

1-2012-DV-WB-02-21

SOMMAIRE

ÉNONCÉ - SUJET ADMISSIBILITÉ 2

1 Probabilités

Loi de durée de vie sans vieillissement.
Soit X une variable aléatoire à densité et valeurs positives, définie sur un espace probabilisé $(\mathbb{R}, \mathscr{B}, \mathrm{P})$ où P est définie par F_X, sa fonction de répartition (qui est en particulier toujours continue pour une variable à densité). On note P la probabilité. Pour alléger les écritures, on peut noter $[\mathrm{X} = x]$ ou $(\mathrm{X} = x)$ l'événement $\{t \in \mathbb{R} \mid \mathrm{X}(t) = x\}$.
On dit que X est une variable aléatoire sans vieillissement si, pour tout réel $u \geqslant 0$ et $t \geqslant 0$:

$$\mathrm{P}_{\mathrm{X}>u}(\mathrm{X} > u + t) = \mathrm{P}(\mathrm{X} > t).$$

On note, pour tout réel x, $g(x) = \mathrm{P}(\mathrm{X} > x)$.

Étude de g

1. Montrer que g est constante sur $]-\infty, 0[$.
2. Montrer que, pour tout x et y réels,

$$g(x + y) = g(x)g(y).$$

3. Énoncer les propriétés de continuité, dérivabilité et la limite de g en $+\infty$.
4. Calculer $g(0)$.
5. Déterminer $g(n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $g(1) < 1$.
6. Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$.
7. Montrer que $g(1) > 0$. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $g(1) = \mathrm{e}^{-\lambda}$.
8. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{Q}_+$, $g(x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}$.
9. Montrer que cette relation est encore vraie pour tout réel $x \geqslant 0$.
10. En déduire F_X.
11. Montrer que la loi obtenue est sans mémoire.

Cas discret

12. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ sans mémoire. Elle vérifie par définition, pour tout u et t dans $\mathbb{N}^*$:

$$P_{(X>u)}(X > u + t) = P(X > t).$$

et $P(X > t) \in]0, 1[$, pour tout entier naturel non nul.

(a) Montrer que X suit une loi géométrique de paramètre p à préciser.

(b) Montrer la réciproque.

(c) Démontrer que $E(X) = \dfrac{1}{p}$.

(d) Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p. On définit la variable aléatoire Y telle que :

$$Y(\omega) = \begin{cases} \dfrac{X(\omega)}{2} & \text{si } X(\omega) \text{ est pair} \\ \dfrac{1-X(\omega)}{2} & \text{si } X(\omega) \text{ est impair} \end{cases}$$

Déterminer la loi de Y et son espérance.

Loi exponentielle

13. (a) On considère maintenant deux variables aléatoires indépendantes X et Y dont les lois sont des loi exponentielles de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. On note $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$

Déterminer E(X) puis V(X).

(b) Montrer que $S = X + Y$ n'est pas une variable aléatoire de loi exponentielle.

14. Les variables aléatoires ci-dessus restent indépendantes et ont même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

On note $Z = \min(X, Y)$.

(a) Déterminer $P(Z \geqslant t)$ pour tout réel t.

(b) En déduire la fonction de répartition de Z.

(c) Quelle est la loi de Z ?

15. Plus généralement,on considère $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On note $Z_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

Déterminer la fonction de répartition F_{Z_n} de Z_n.

16. X désigne dans cette question, une variable aléatoire de loi uniforme sur [0, 1] et Y la variable aléatoire définie par $Y = -\ln(1 - X)$.

(a) Expliquer pourquoi il n'est pas gênant que X prenne la valeur 1.

(b) Déterminer la fonction de répartition de Y. Quelle est la loi de Y.

2 Groupes

2.1

Soit G un sous groupe additif de $\mathbb{R}$

1. Supposons que G contienne un intervalle de $\mathbb{R}$ de cardinal strictement supérieur à 1 (c'est-à-dire non vide est non réduit à un singleton $a = [a,a]$).
   (a) Montrer que G contient un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ de centre 0 et de cardinal strictement supérieur à 1,
   (b) En déduire que G est égal à $\mathbb{R}$.
2. Existe-t-il des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$, qui soient finis et distincts de $\{0\}$?
3. Soit $\mathbb{U}$ la partie de $\mathbb{C}$ dont les éléments sont de module 1.
   Montrer que $(\mathbb{U}, \times)$ est un groupe commutatif.
4. Soit H un sous groupe de $\mathbb{U}$
   (a) Montrer que si H est fini d'ordre $n \geqslant 2$, alors H est égal à $\mathbb{U}_n$, ensemble des complexes vérifiant $z^n = 1$.
   (b) On note $\mathscr{C}$ le cercle unité du plan complexe $\mathscr{P}$ et A, B deux points distincts de $\mathscr{C}$. Montrer que, si H contient l'ensemble des affixes des points de l'un des arcs (A,B) alors il est égal à $\mathbb{U}$.
   (c) Déterminer un sous groupe infini de $\mathbb{U}$ dont l'image dans $\mathscr{P}$ ne contienne aucun arc de cardinal strictement supérieur à 1.

2.2

1. Donner deux exemples, bien distincts, de sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$.

   On note, pour $a \in$ R+, $a\mathbb{Z} = \{na,\ n \in \mathbb{Z}\}$.
2. Montrer que $(a\mathbb{Z}\,;+)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
3. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.
   On considère : $\alpha = \inf\{x \in G,\ x > 0\}$.
   (a) Rappeler la définition et la caractérisation de la borne inférieure.
   (b) Supposons dans un premier temps $\alpha > 0$ et montrons que $\alpha \in G$.
   Supposons par l'absurde que : $\alpha \notin G$.
      i. Montrer l'existence de $x \in G$ tel que : $\alpha < x < 2\alpha$.
      ii. Montrer l'existence de $y \in G$ tel que : $\alpha < y < x$.
      iii. Montrer alors que α n'est pas la borne inférieure de $\{x \in G,\ x > 0\}$.
   (c) En déduire que $\alpha\mathbb{Z} \subset G$.
   (d) Montrer $G \subset \alpha\mathbb{Z}$.
   (e) Supposons maintenant $\alpha = 0$.
      i. A-t-on $\alpha \in G$?
      ii. Montrer que : $\forall \epsilon > 0, \exists g \in G \mid 0 < g < \epsilon$.
      iii. En déduire que G est dense dans $\mathbb{R}$, i.e. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y, \exists t \in G \mid x < t < y$.

4. Donner un exemple de sous-groupe dense de $(\mathbb{R}, +)$.
5. On considère $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) = \left\{p + q\sqrt{2},\ (p,\ q) \in \mathbb{Q}^2\right\}$.
   (a) Montrer que $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\ +\right)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
   (b) Est-il dense ?
   (c) Montrer que : $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\ +,\ \times\right)$ est un corps.

3 Polynômes

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensembles des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n \geqslant 1$ et contenant le polynôme nul. Dans tout le problème, $n \in \mathbb{N}^*$. On admettra que, pour tout polynôme P, on peut identifier le polynôme P(X) et la fonction polynomiale $x \longmapsto \mathrm{P}(x)$ où $x \in \mathbb{R}$.
On considère la relation polynomiale :

$$(1-\mathrm{X})^n \mathrm{F}_n(\mathrm{X}) + \mathrm{X}^n \mathrm{G}_n(\mathrm{X}) = 1 \quad (\mathrm{R})$$

où F_n et G_n sont dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

1. (a) Déterminer les polynômes F_n et G_n pour $n = 1, 2$.
   (b) Pour tout entier n, appliquer la formule du binôme à $((1-\mathrm{X}) + \mathrm{X})^{2n-1}$.
   (c) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'existence des polynômes F_n et G_n.
2. Déterminer en fonction de F_n et G_n tous les couples (A, B) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tel que $(1-\mathrm{X})^n \mathrm{A}(\mathrm{X}) + \mathrm{X}^n \mathrm{B}(\mathrm{X}) = 1$. On fera un raisonnement par analyse et synthèse.
   En déduire l'unicité de F_n et G_n.
3. (a) Montrer que $\mathrm{F}_n(1-\mathrm{X}) = \mathrm{G}_n(\mathrm{X})$ et $\mathrm{G}_n(1-\mathrm{X}) = \mathrm{F}_n(\mathrm{X})$.
   (b) Calculer $\mathrm{F}_n(0)$, $\mathrm{F}_n(1)$ et $\mathrm{F}_n\left(\frac{1}{2}\right)$.
4. Dans ce qui suit, x désigne une variable réelle.
   (a) Pour x tendant vers 0, démontrer que :

$$\mathrm{F}_n(x) = (1-x)^{-n} + o\left(x^{n-1}\right).$$

   (b) En déduire les coefficients de F_n.
   (c) L'équation $\mathrm{F}_n(x) = 0$ peut-elle avoir une racine positive ou nulle ?
5. (a) Établir, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la relation :

$$n\mathrm{F}_n(x) - (1-x)\mathrm{F}_n'(x) = n\binom{2n-1}{n}x^{n-1}.$$

   (b) En déduire que l'équation $\mathrm{F}_n(x) = 0$ ne peut avoir deux racines réelles strictement négatives.
6. Pour tout réel x, on pose $h_n(x) = \displaystyle\int_0^x t^{n-1}(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t$.
   Établir les variations de h_n selon la parité de n.

7. En résolvant sur $]-\infty, 1[$ l'équation différentielle $(1-x)y' - ny = -n\dbinom{2n-1}{n}x^{n-1}$,

   démontrer que, pour tout $x \neq 1$, on a : $\mathrm{F}_n(x) = \dfrac{1 - n\binom{2n-1}{n}h_n(x)}{(1-x)^n}$.
8. Discuter selon n, le nombre de racines dans $]-\infty, 0[$ de l'équation $\mathrm{F}_n(x) = 0$.

Sous la responsabilité de la directrice du site de Vanves
M^{me} Sarah Fayet

Le CNED remercie les nombreuses personnes qui ont contribué à la réussite de ce projet.
Qu'elles trouvent ici l'expression de toute sa reconnaissance.