M. BALVAY
11/20
Travail convenable, mais certaines questions sont parfois mal comprises.

partie I) probabilités	
1	7/8
2	0/4
3	1/4
partie II) groupes	
1	2/4
2	4/6
partie III) polynômes	
	4/8

JEANMOUGIN
Aurélie

Epreuve d'admissibilité 2
Devoir n°2

I Probabilités

1. On sait que la variable aléatoire X a une densité et des valeurs positives. On en déduit que $P(X<0) = 0$.
Cela implique donc que $P(X \geq 0) = 1 - P(X<0) = 1 - 0 = 1$.
La fonction $g(x) = P(X>x)$ vaut donc 1 pour toutes valeurs de x négatives.
On en conclut que g est constante sur $]-\infty, 0[$ et vaut 1.

2. On peut montrer $g(x+y) = g(x)g(y)$ en partant de l'égalité $P_{X>y}(X>x+y) = P(X>x)$.
On sait que pour une probabilité conditionnelle sachant B,
$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ d'où,

$$P_{X>y}(X>x+y) = P(X>x) = \frac{P(\{X>x+y\} \cap \{X>y\})}{P(X>y)}$$

Or $P(\{X>x+y\} \cap \{X>y\}) = P(X>x+y)$ car l'évènement $\{X>y\}$ est inclus dans l'évènement $\{X>x+y\}$,
On a donc $P(X>x) = \dfrac{P(X>x+y)}{P(X>y)}$

$\Rightarrow P(X>x+y) = P(X>x) \times P(X>y)$. On en conclut que

$$g(x+y) = g(x) \times g(y).$$

Cette égalité ne fonctionne pas si x et y sont de signes opposés.
Par exemple pour $x = 2$ et $y = -3$.
$P(X > 2-3) = P(X>-1) = 1$ d'après l'explication dans la question 1. D'un autre côté :
$P(X>2) \times P(X>-3) = P(X>2) \times 1 = P(X>2) < 1$.

3- La fonction g est continue sur $]-\infty, 0[$ puisque nous avons montré qu'elle était constante sur cet intervalle.
P étant définie par F_X, sa fonction de répartition qui est toujours continue pour une variable à densité, la fonction g est donc continue sur $[0, +\infty[$. En ce qui concerne la continuité en 0, X est à valeurs positives donc X ne peut pas valoir 0, alors d'après la question 1 on peut inclure 0 dans l'intervalle $]-\infty, 0]$. Chaque valeur de x n'ayant qu'une valeur associée, la fonction g est continue sur $]-\infty, +\infty[$.
Elle est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ mais pas en 0 car le taux d'accroissement n'est pas le même à gauche et à droite de 0.
Enfin la limite de g en $+\infty$ est 0 car plus x est grand, plus la probabilité que X soit plus grand que x diminue.

g décroissante n'implique pas lim g = 0

4- On sait que $P(X > 0)$ et $P(X \geq 0)$ ont la même valeur car P étant définie par F_X, l'intégration pour $P(X = 0)$ vaut 0. Donc $g(0) = 1$.

5- Si l'on cherche à calculer $g(2)$ on a

$$g(2) = g(1+1) \text{ et d'après la question 2,}$$
$$= g(1)\,g(1) = g(1)^2$$

Pour $g(3)$ on a $g(3) = g(2+1) = g(1)^2\, g(1) = g(1)^3$.
On en déduit une relation de récurrence pour $g(n)$ en fonction de $g(1)$: $g(n) = g(1)^n$ où $g(0) = g(1)^0 = 1$
Si $g(1) > 1$, g tend vers $+\infty$ ce qui contredit la question 3 sur la limite de g. Si $g(1) = 1$ alors g est constante et tend vers 1. Par ces contradiction on en conclut que $g(1) < 1$.

Pour vérifier que la relation $g(n) = g(1)^n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, on démontre par récurrence.
Pour $n = 0$, $g(0) = g(1)^0 = 1$, la relation est vraie.
On suppose la relation vraie pour $k \in \mathbb{N}$, montrons qu'elle est vraie au rang $k+1$.

$$g(k+1) = g(k) \times g(1) = g(1)^k \times g(1) = g(1)^{k+1}.$$

La relation est vraie au rang 0 et est héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6_ D'après la première définition de g, cette fonction est une probabilité. Une probabilité est toujours positive ou nul d'après sa définition donc $g(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.

7_ On sait que $g(1)$ est une probabilité donc $g(1) \geq 0$.
Si $g(1) = 0$, sachant que $g(0) = 1$, on rencontre un problème pour la limite en 0 car

n est entier naturel

$\lim\limits_{n \to \boxed{0}} g(1)^n \Rightarrow 0$ et ensuite 1 ce qui contredit la continuité en 0. Donc $g(1) > 0$.

8_ $g(1) = e^{-\lambda}$

9. On montre par récurrence que $g(x) = e^{-\lambda x}$ pour tout $x \geq 0$.

x est réel et il n'y a pas de raisonnement par récurrence

L'égalité est vraie pour $x = 0$ car $g(0) = e^0 = 1$.
Supposons que l'égalité est vraie au rang, montrons qu'elle est vraie au rang $k+1$.

$$g(k+1) = g(k)\, g(1) = e^{-\lambda k} \times e^{-\lambda}$$ d'après l'hypothèse et la question 8.

$$= e^{-\lambda k - \lambda} = e^{-\lambda(k+1)}.$$

L'égalité est vraie pour $x = 0$ et est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $x \geq 0$.

ne confondez pas F_X et g

10. On en déduit que $\cancel{F_X} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

11. Dans la réponse à la question 2. On indique que

$$P_{X>u}(X > u+t) = \frac{P(\{X>u+t\} \cap \{X>t\})}{P(X>u)}$$

$$= \frac{P(X>u+t)}{P(X>u)} \text{, déduction expliquée dans le 2.}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(u+t)}}{e^{-\lambda u}} \text{, d'après la question 9.}$$

$$= e^{-\lambda(u+t)} \times e^{-\lambda(-u)} = e^{-\lambda(u+t-u)}$$

$$= e^{-\lambda t} = P(X>t).$$

La loi obtenue est bien sans mémoire.

12a. On dit que X suit une loi géométrique si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et si $P(X=k) = p(1-p)^{k+1}$, ce qui implique $P(X>k) = (1-p)^k$.

Si on applique cette loi à l'énoncé on a

raisonnement peu clair

$$P_{X>u}(X>u+t) = \frac{P(X>u+t)}{P(X>u)} = \frac{(1-p)^{u+t}}{(1-p)^u} = (1-p)^{u+t-u}$$

$$= (1-p)^t = P(X>t).$$

Donc X suit une loi géométrique de paramètre p

13a. Comme X suit une loi exponentielle $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

b. Si X+Y suit une loi exponentielle alors $X+Y \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda+\mu)$

Donc la fonction F_{X+Y} de répartition est $F_S = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1-e^{-(\lambda+\mu)x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Or $F_X + F_Y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 2-e^{-\lambda x} - e^{-\mu x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Donc S n'est pas une variable aléatoire de loi exponentielle.

II Groupes

$\boxed{2.1.}$

1.a. Si G est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ alors $G \subseteq \mathbb{R}$

et $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x, y \in G \Rightarrow x + y \in G$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \in G \Rightarrow -x \in G$.

Donc pour tout $x > 0$, $x \in G$, $-x < 0$ et $-x \in G$..

ne confondez pas l'ensemble **R** des réels et l'ensemble **Z** des entiers

Il y a autant de nombres avant et après 0. Donc G contient un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ de centre 0.

raisonnement incomplet

b. Si $x, y \in G \Rightarrow x + y = z \in G$ alors $y + z \in G$ également et ainsi de suite, donc G contient tous les éléments de $\mathbb{R}$.

2. Il n'existe aucun sous-groupe de $\mathbb{R}$ finis distinct de $\{0\}$, car si on applique la règle $x, y \in G \Rightarrow x + y \in G$, comme énoncé dans 1b, l'ensemble n'est pas fini.

3. $\mathbb{U}$ contient tous les éléments $z = a + ib$ où $|z| = 1$.

On montre d'abord que $(\mathbb{U}, \times)$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}$.

$\forall z, z' \in \mathbb{C} \quad |zz'| = |z||z'|$ et $z, z' \in \mathbb{U}$ par définition des opérations sur les modules de nombres complexes.

$|z||z'| = 1 \times 1 = 1$ donc $zz' \in \mathbb{U}$

$\forall z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib \in \mathbb{U}$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{|1|}{|z|} = \frac{1}{1} = 1$.

donc $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$.

On en conclut que $(\mathbb{U}, \times)$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}$.

Montrons qu'il est commutatif.

$\forall z, z' \in \mathbb{U} \quad zz' = (a+ib)(a'+ib')$

$= aa' + aib' + iba' - bb'$ comme

a, b, a', b' sont des réels ils sont commutatifs pour $\times$.

$\Rightarrow z, z' = a'a + a'ib + ib'a - b'b$

$= (a' + ib')(a + ib) = z'z$

Donc $\mathbb{U}$ est commutatif.

raisonnement à compléter

4a. D'après le théorème de Lagrange, si a est un élément d'un groupe fini G d'ordre n, on a $a^n = 1$.
H étant d'ordre fini $n \geqslant 2$, ses éléments vérifie $z^n = 1$.

$\boxed{2.2}$

1. Le premier sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est $\{0\}$ car les règles de sous-groupe s'y appliquent.
Le deuxième est $(\mathbb{R}, +)$ car par définition, G est un sous-groupe de G.

2. On veut montrer que $(a\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
$\forall a \in \mathbb{R}_+$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x, y \in a\mathbb{Z}$ et
$x + y = na + ma = (n+m)a$ et $(n+m) \in \mathbb{Z}$ donc
$x + y \in a\mathbb{Z}$.
$\forall a \in \mathbb{R}_+$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \in a\mathbb{Z}$ et
$-x = -na$ et $-n \in \mathbb{Z}$ donc $-x \in a\mathbb{Z}$.
On en conclut que $(a\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

3a. La borne inférieure de G est le plus grand des minorants m de G tq $m \leqslant x$ $\forall x \in G$.

b. i- On sait que $\alpha = \inf\{x \in G, x > 0\}$ et on suppose que $\alpha \notin G$. mais que $\alpha > 0$.
Si α est la borne inférieure de l'ensemble G mais n'appartient pas à G alors $2\alpha \in G$. 2α n'étant pas la borne inférieure de G, il existe donc un élément x plus petit que 2α et appartenant à l'ensemble tel que $\alpha < x < 2\alpha$.

ii- x n'étant pas la borne inférieure de G, qui est α, il existe donc un élément y plus petit que x, appartenant à G tel que $\alpha < y < x$.

iii - On a $\alpha < x < 2\alpha$ et $\alpha < y < x$ alors $x-y > 0$
et $(x-y) \in G$.
De plus $x < 2\alpha \Rightarrow x - y < 2\alpha - y$ et sachant que
$\alpha < y$ on a $2\alpha - y < \alpha$ et donc $x - y < \alpha$
On en conclut que α n'est pas la borne inférieure de G.

4 - Un exemple de sous-groupe dense de $(\mathbb{R}, +)$ est
$(\mathbb{R}, +)$ car $\mathbb{R}$ est dense et est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.

5.a - On veut montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$
$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et
$$x + y = p + q\sqrt{2} + p' + q'\sqrt{2} = p + p' + (q + q')\sqrt{2}$$
et $(p+p'), (q+q') \in \mathbb{Q}$ donc $x + y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et
$$-x = -(p + q\sqrt{2}) = -p - q\sqrt{2} \text{ et } -p, -q \in \mathbb{Q}$$
donc $-x \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
On en conclut que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

b - $\forall x = p + q\sqrt{2}$, $y = p' + q'\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ on peut écrire
$p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{p}$, $p' = \frac{m'}{n'}$ et $q' = \frac{k'}{p'}$.
Si l'ensemble est dense alors.
$\forall x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, +)$, $x < y$, $\exists t \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, +) \mid x < t < y$.
S'il n'existe pas de rationnel $\frac{a}{b}$ tel que $\frac{m}{n} < \frac{a}{b} < \frac{m'}{n'}$
vérifiant $n < b < n'$ quand $m = a = m'$, on peut toujours
poser $\frac{m \times 10}{n \times 10} < \frac{a}{b} < \frac{m' \times 10}{n' \times 10}$ et on peut trouver un

$\frac{a}{b}$ tel que $a = 10m$ et $b = 10n + 1$.
On en conclut que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, +)$ est dense.

raisonnement peu clair

c - On admet que $\mathbb{R}$ est un corps, on sait que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{R}$,
on en déduit alors que :

- les lois + et x sont associatives et commutatives
- la loi x est distributive par rapport à la loi +.

Pour montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, +, \times)$ est un anneau commutatif, il reste à vérifier que les éléments neutre 0_A et 1_A sont dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, +)$ est un groupe et que l'ensemble est stable pour la multiplication.

- Elements neutres : Soit $x = p+q\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

$$x + 0_A = p+q\sqrt{2} + 0_A = p+q\sqrt{2} = x.$$
$$x \times 1_A = (p+q\sqrt{2})\, 1_A = p+q\sqrt{2} = x.$$

- $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, +)$ est un groupe car c'est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ montré dans 5.a.
- $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est stable pour la multiplication : Soient $x = p+q\sqrt{2}$, $y = p'+q'\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$,

$$\begin{aligned} x \times y &= (p+q\sqrt{2})(p'+q'\sqrt{2}) \\ &= pp' + pq'\sqrt{2} + q\sqrt{2}p' + qq'\sqrt{2}^2 \\ &= (pp'+2qq') + (pq'+qp')\sqrt{2} \end{aligned}$$ et $(pp'+2qq'), (pq'+qp') \in \mathbb{Q}$

donc $x \times y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, +, \times)$ est donc un anneau commutatif.

Il reste à montrer que tous les éléments, excepté 0, de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, +, \times)$ sont inversible, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ on a $x \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Soit $x = p+q\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{p+q\sqrt{2}} = \frac{p-q\sqrt{2}}{(p+q\sqrt{2})(p-q\sqrt{2})} = \frac{p-q\sqrt{2}}{p^2-2q^2}$$

$$= \frac{p}{p^2-2q^2} + \frac{-q}{p^2-2q^2}\sqrt{2}$$ où $\frac{p}{p^2-2q^2}, \frac{-q}{p^2-2q^2} \in \mathbb{Q}$

Donc $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. On a pu multiplier par $(p-q\sqrt{2})$ au dénominateur car il est impossible que $p-q\sqrt{2} = 0$ car si $p - q\sqrt{2} = 0 \Rightarrow \frac{p}{q} = \sqrt{2}$ or $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel.

On en conclut que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \times, +)$ est un corps.

III Polynômes

1a_ Pour $n=1$ $\quad (1-X)F_1(X) + XG_1(X) = 1$

Donc $F_1(X)$ et $G_1(X)$ sont dans $\mathbb{R}_0[X]$ et sont des constantes

Si $X=0$ on trouve $F_1(0) = 1$

Si $X=1$ on trouve $G_1(1) = 1$.

$F_1(X) = a$ et $G_1(X) = b$ avec $a=b=1$.

Pour $n=2$. On pose $F_2(X) = aX+b$ et $G_2(X) = cX+d$

avec $(1-X)^2 F_2(X) + X^2 G_2(X) = 1$.

Si $X=0$: $F_2(0) = 1$ donc $a0+b=1 \iff b=1$

Si $X=1$: $G_2(1) = 1$ donc $c1+d=1 \iff c+d=1$

Si $X=-1$: $4F_2(-1) + G_2(-1) = 1$ donc $-4a+4b-c+d=1$

Si $X=2$: $F_2(2) + 4G_2(2) = 1$ donc $2a+b+8c+4d=1$

On obtient un système que l'on peut résoudre

$$\begin{cases} c+d=1 \\ -4a+4-c+d=1 \\ 2a+1+8c+4d=1 \end{cases} \iff \begin{cases} c=1-d \\ -4a+2d=-2 \\ 2a-4d=-8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c=1-d \\ a=\frac{1+d}{2} \\ d=3 \end{cases}$$ donc $a=2,\ b=1,\ c=-2,\ d=3$

et $F_2(X) = 2X+1$, $G_2(X) = -2X+3$.

b_ On applique la formule du binôme :

$$((1-X)+X)^{2n-1} = \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} (1-X)^k X^{2n-1-k}.$$

c_ D'après le théorème de Bezout : Pour que deux polynômes A, B soient premiers entre eux il faut et il suffit qu'il existe deux polynômes U, V tel que $AU+BV=1$.

Or $(1-X)^n$ et X^n sont premiers entre eux pour tout $n \geqslant 1$ donc $F_n(X)$ et $G_n(X)$ existent.

3a. On part de la relation $(1-X)^n F_n(X) + X^n G_n(X) = 1$

On pose $X = 1-X$ alors

$$(1-(1-X))^n F_n(1-X) + (1-X)^n G_n(1-X) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad X^n F_n(1-X) + (1-X)^n G_n(1-X) = 1$$

Donc $F_n(X) = G_n(1-X)$ et $G_n(X) = F_n(1-X)$

on utilise l'unicité de F_n et G_n

b. D'après la question précédente on a

$F_n(0) = G_n(1)$ et $F_n(1) = G_n(0)$ et $F_n\left(\frac{1}{2}\right) = G_n\left(\frac{1}{2}\right)$

Si on utilise la relation, $F_n(0) = 1$.

Pour $F_n\left(\frac{1}{2}\right)$ on a $\left(\frac{1}{2}\right)^n F_n\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^n G_n\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(F_n\left(\frac{1}{2}\right) + G_n\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2^n} \times 2F_n\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2F_n\left(\frac{1}{2}\right)} \quad \Leftrightarrow \quad 2^n = 2F_n(1/2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^{n-1} = F_n(1/2).$$

Pour $F_n(1) = G_n(0)$ on a $F_n(1) = b_0$ où b_0 est le coefficient de X^0 dans $G_n(X)$.

4a. $(1-x)^n F_n(x) + x^n G_n(x) = 1$

$$\Leftrightarrow \quad F_n(x) = \frac{1 - x^n G_n(x)}{(1-x)^n} = (1-x)^{-n} - (1-x)^{-n} x^n G_n(x).$$

une fraction rationnelle

$(1-x)^{-n} x^n$ est $\boxed{\text{une constante}}$ car elle donne un polynôme de degré 0 et $G_n(x)$ est au mieux de degré $n-1$ donc quand x tend vers 0, $F_n(x) = (1-x)^{-n} + o(x^{n-1})$

b. En utilisant la formule du binome :

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} x^k} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k}$$

Les coefficients de F_n sont de la forme $\frac{1}{\binom{n}{k}} \circ b_k$ où b_k représente le coefficient de X^k pour G_n.

6- $h_n(x) = \int_0^x t^{n-1}(1-t)^{n-1}\,dt$ et par définition
$\int_0^x f(t)\,dt = F(x) - F(0)$. On cherche la dérivée

$$\frac{\int_0^x t^{n-1}(1-t)^{n-1}\,dt}{dx} = \frac{F(x)-F(0)}{dx} = \frac{F(x)}{dx} - \frac{F(0)}{dx} \text{ et}$$

$F(0)$ étant une constante, sa dérivée est nulle donc

$$h_n'(x) = \frac{F(x)}{dx} = x^{n-1}(1-x)^{n-1} = (x \times (1-x))^{n-1} = (x-x^2)^{n-1}$$

donc si on étudie le signe de la dérivée on pourra connaître la variation de $h_n(x)$. On voit que $h_n'(x) = 0$ pour $x = -1$, $x = 0$, et $x = 1$.
On étudie alors 4 intervalles

- $]-\infty, -1[$: si n est paire alors $h_n'(x) < 0$
  si n est impaire alors $h_n'(x) > 0$
- $]-1, 0[$: si n est paire alors $h_n'(x) < 0$
  si n est paire alors $h_n'(x) > 0$
- $]0, 1[$: sur cet intervalle $x - x^2 > 0$ pour tout x
  donc la valeur de n n'influe pas sur le signe de $h_n'(x)$ qui est positif.
- $]1, +\infty[$: si n est paire alors $h_n'(x) < 0$
  si n est impaire alors $h_n'(x) > 0$.

On peut en déduire que si n est paire : $h_n(x)$ est décroissante sur $]-\infty, 0]$, elle est croissante sur $[0, 1]$ et est décroissante sur $[1, +\infty[$
Si n est impaire, alors elle est croissante sur chacun des intervalles et la fonction étant continue, elle est croissante sur $\mathbb{R}$.