CHAPITRE 3 : Démonstrations à connaître

27 avril 2021

1 Les suites

1.1 Unicité de la limite

Propriété 1.1. Si (u_n) converge vers ℓ_1 et si (u_n) converge vers ℓ_2, alors $\ell_1 = \ell_2$.

Démonstration 1.1. *Raisonnons par l'absurde. Si $\ell_1 \neq \ell_2$, il existe un intervalle ouvert I contenant ℓ_1 et un intervalle ouvert J contenant ℓ_2 tel que $I \cap J = \emptyset$. Puisque (u_n) converge vers ℓ_1, il existe un entier n_1 tel que, pour $n_1 \leq n$, $u_n \in I$. Puisque (u_n) converge vers ℓ_2, il existe un entier n_2 tel que, pour $n_2 \leq n$, $u_n \in J$. Posons $n = max(n_1, n_2)$. Alors $u_n \in I \cap J$ ce qui contredit que $I \cap J = \emptyset$.*

1.2 Théorème des gendarmes

Théorème 1.1. *Si (u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites réelles telles que, pour tout entier n assez grand, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si (u_n) et (w_n) convergent vers le même réel ℓ, alors (v_n) converge vers ℓ.*

Démonstration 1.2. *Soit I un intervalle ouvert contenant ℓ. Alors il existe un entier n_1 tel que tous les termes de la suite (u_n), à partir de n_1, sont éléments de I. Il existe un entier n_2 tel que tous les termes de la suite (w_n), à partir de n_2, sont éléments de I. Puisque v_n est compris entre u_n et w_n, à partir du rang $n_0 = max(n_1, n_2)$, tous les termes de la suite (v_n) sont dans I.*

1.3 Limite et ordre

Propriété 1.2. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergeant respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2 et vérifiant, pour tout entier $n \in N$, $u_n \leq v_n$, alors $\ell_1 \leq \ell_2$.

Démonstration 1.3. *Raisonnons par contraposée et prouvons que, si $\ell_1 > \ell_2$, alors il existe un entier n tel que $u_n > v_n$. Si $\ell_1 > \ell_2$, alors il existe un intervalle ouvert $I =]a, b[$ contenant ℓ_1 et un intervalle ouvert $J =]c, d[$ contenant ℓ_2 tel que $d \leq a$ (faire un dessin sur la droite réelle, ou poser $\epsilon = (\ell_1 - \ell_2)/2$ et $I =]\ell_1 - \epsilon, +\infty[$, $J =]-\infty, \ell_2 + \epsilon[$). Il existe* *un rang n_1 tel que, pour tout $n_1 \leq n$, on a $u_n \in I$ et il existe un rang n_2 tel que, pour tout $n_2 \leq n$, on a $v_n \in J$. En particulier, pour $n = max(n_1, n_2)$, on a $v_n < d \leq a < u_n$.*

Propriété 1.3. Si (u_n) est une suite croissante qui converge vers ℓ, alors pour tout entier $n \in N$, on a $u_n \leq \ell$.

Démonstration 1.4. *Raisonnons par l'absurde et supposons que ce ne soit pas le cas. Il existe donc un entier n_0 tel que $u_{n_0} > \ell$. Posons $I =]-\infty, u_{n_0}[$. I est un intervalle ouvert contenant ℓ. Par définition de la limite d'une suite, I contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang. Mais pour tout $n_0 leqn$, on a $u_{n_0} \leq u_n$ et donc $u_n \notin I$. C'est une contradiction.*

Propriété 1.4. Si (u_n) est une suite qui tend vers ℓ avec $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.

Démonstration 1.5. *Posons $I =]\ell/2, +\infty[$. Alors $\ell \in I$ et puisque (u_n) converge vers ℓ, tous les termes de un sont éléments de I à partir d'un certain rang. Ainsi, à partir d'un certain rang, $0 \leq \ell/2 < u_n$.*

1.4 Suite croissante et majorée

Propriété 1.5. Si $(u_n)_{n \in N}$ est une suite croissante et majorée, alors elle est convergente.

Démonstration 1.6. *Ce théorème, sans doute l'un des plus importants de l'analyse, n'est pas accessible à l'aide d'outils de Terminale S. Il reste néanmoins indispensable de connaître sa preuve. Elle est basée sur la propriété suivante : si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, alors A admet une borne supérieure. Rappelons que ℓ est la borne supérieure d'une partie A lorsque les deux propriétés suivantes sont vraies :*

- *Pour tout réel $x \in A$, on a $x \leq \ell$ (ℓ est un majorant de A).*
- *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $\ell - \epsilon \leq x \leq \ell$ (c'est le plus petit).*

Dans notre cas, on va appliquer ceci à l'ensemble $A = u_n; n \in \mathbb{N}$. A est non vide, et A est majoré. Notons ℓ sa borne supérieure et prouvons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ. On va se ramener à la définition d'une suite convergente. Fixons $\epsilon > 0$ et prouvons que tous les termes de la suite, à partir d'un certain rang, sont dans l'intervalle $[\ell - \epsilon, \ell + \epsilon]$. La deuxième partie de la propriété de la borne supérieure nous dit qu'il existe au moins un terme dans cet intervalle : il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\ell - \epsilon \leq u_N \leq \ell$. La croissance de (u_n) nous donne alors que tous les termes à partir de celui de rang N conviennent. En effet, pour $N \leq n$, on a $\ell - \epsilon \leq u_N \leq u_n$ et aussi $u_n \leq \ell$ car ℓ est un majorant de (u_n). On a donc bien, pour tout $n \geq N$, $\ell - \epsilon \leq u_n \leq \ell + \epsilon$ et donc la suite (u_n) converge vers ℓ.

1.5 Suite croissante non majorée

Propriété 1.6. Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Démonstration 1.7. *Soit $A > 0$. Alors, puisque (u_n) n'est pas majorée, il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} \geq A$. Puisque (u_n) est croissante, pour tout entier $n \geq n_0$, on a $u_n \geq u_{n_0} \geq A$. Ceci signifie exactement que (u_n) tend vers $+\infty$.*

1.6 Fonction continue et limite de suites

Propriété 1.7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et (u_n) une suite convergeant vers ℓ. Alors $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.

Démonstration 1.8. *Cette démonstration n'est pas accessible en Terminale, car on ne dispose pas de la notion de continuité et de limite de fonctions avec des quantificateurs. Il s'agit ici d'un problème de "double limite". Soit $\epsilon > 0$. Puisque f est continue en ℓ, il existe un réel $\delta > 0$ tel que $|x-\ell| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(\ell)| < \epsilon$. Puisque (u_n) converge vers ℓ, il existe un entier n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \delta$. Couplant ces deux propriétés, on trouve que $n \geq n_0 \Rightarrow |f(u_n) - f(\ell)| < \epsilon$. C'est exactement l'écriture (avec des quantificateurs) du fait que $(f(u_n))$ converge vers f(ℓ).*

1.7 Inégalité de Bernoulli

Propriété 1.8. Pour tout $x > -1$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Démonstration 1.9. *on fixe $x > -1$ et on considère, pour $n \in \mathbb{N}$, la proposition suivante : $P(n) =$ "$(1+x)^n \geq 1+nx$". Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ cette propriété.*

Initialisation *: On a $(1+x)^0 = 1$ et $1 + 0x = 1$. La propriété $P(0)$ est donc vraie.*

Hérédité *: Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vrai. Alors, on écrit que $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)$ et on utilise l'hypothèse de récurrence. Puisque $1+x > 0$, les inégalités ne changent pas de signe et on obtient donc $(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1 + (n+1)x$. Ceci démontre que $P(n+1)$ est vraie.*

Par le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier n.

1.8 Comportement des suites géométriques

Propriété 1.9. Soit $q \in \mathbb{R}$. Alors la suite (q^n)
- tend vers $+\infty$ si $q > 1$.
- est constante égale à 1 si $q = 1$.
- tend vers 0 si $q \in]-1, 1[$.
- prend successivement les valeurs $+1$ et -1 si $q = -1$. En particulier, elle diverge.

— prend successivement des valeurs positives et négatives si $q < -1$ avec $(|q|^n)$ qui tend vers $+\infty$. En particulier, (q^n) diverge.

Démonstration 1.10. *Remarquons d'abord que l'énoncé est clair si* $q = -1{,}0$ *ou* 1 *et nous exclurons désormais ces trois cas. Supposons ensuite que* $q > 1$*. La preuve s'appuie sur l'inégalité de Bernoulli, en remarquant que* $q^n = (1 + (q-1))^n \geq 1 + n(q-1)$*.*
Puisque $q - 1 > 0$*,* $1 + n(q-1)$ *tend vers* $+\infty$*. Par comparaison, il en est de même de la suite* (q^n)*.*

Supposons maintenant $q \in]-1, 1[$ *avec* $q \neq 0$ *et posons* $\rho = \frac{1}{|q|}$*. Alors* $\rho > 1$ *et* (ρ^n) *tend vers* $+\infty$*. Mais on peut écrire* $|q^n| = \frac{1}{\rho^n}$*.*
Par les opérations sur les limites de suite, ceci entraine que $(|q|^n)$*, et donc que* (q^n)*, tend vers 0.*

Enfin, si $q < -1$*, il est clair que* q^n *est positif si* n *est pair et négatif si* n *est impair. Puisque* $|q| > 1$*, la suite* $(|q^n|)$ *tend vers* $+\infty$*.*

On peut aussi se passer de l'inégalité de Bernoulli en démontrant d'abord que la suite (q^n) *tend vers 0 lorsque* $q \in]0, 1[$*. Notons en effet pour* $n \geq 0$*,* $u_n = q^n$*. Alors* (u_n) *est une suite strictement positive (évident) et décroissante :*

$$u_n + 1 - u_n = q^n(q-1) < 0$$

. Elle est donc décroissante et minorée, donc convergente. Notons ℓ *sa limite. Puisque* $u_{n+1} = qu_n$*,* ℓ *vérifie* $\ell = q\ell$ *ce qui entraine, puisque* $q \neq 1$*,* $\ell = 0$*. On peut alors retrouver le comportement de* (q^n) *pour les autres valeurs de* q *en procédant comme ci-dessus.*

1.9 Monotonie des suites recurrentes

Propriété 1.10. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante, alors toute suite récurrente définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ est monotone. Le sens de monotonie de (u_n) est donné par le signe de $u_0 - u_1$.

Démonstration 1.11. *Sans perte de généralité, on peut supposer que* $u_1 \geq u_0$*. Démontrons par récurrence sur* $n \in \mathbb{N}$ *la propriété* $P(n)$ *suivante :* $P(n) =$ "$u_n + 1 \geq u_n$".
Initialisation *:* $P(0)$ *est vraie.*

Hérédité *: Soit* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $P(n)$ *est vraie. Alors on a* $u_{n+1} \geq u_n$*. Puisque* f *est croissante, on en déduit que* $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$ *c'est-à-dire* $u_{n+2} \geq u_{n+1}$*. La propriété* $P(n+1)$ *est donc vraie.*

Par le principe de récurrence, $P(n)$ *est vraie pour tout entier* n *et on a bien démontré que la suite* (u_n) *est croissante.*

1.10 Suites adjacentes

Propriété 1.11. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors elles convergent vers la même limite.