Capes externe – Mathématiques

ÉPREUVE D'ADMISSIBILITÉ 2

CORRIGÉ DU DEVOIR N°2

Pierre Burg

1-2012-CT-WB-02-21

SOMMAIRE

ÉNONCÉ - SUJET ADMISSIBILITÉ 2

Corrigé

1 Probabilités

Loi de durée de vie sans vieillissement.
Soit X une variable aléatoire,à valeurs positives, définie sur un espace probabilisé $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ définie par F_X, sa fonction de répartition (qui est en particulier toujours continue pour une variable à densité). On note P la probabilité. Pour alléger les écritures, on peut noter $[X = x]$ ou $(X = x)$ l'événement $\{t \in \mathbb{R} \mid X(t) = x\}$
On dit que X est une variable aléatoire sans vieillissement si, pour tout réel $u \geqslant 0$ et $t \geqslant 0$:

$$P_{(X>u)}(X > u + t) = P(X > t).$$

On note, pour tout réel x, $g(x) = P(X > x)$.

Étude de g

1. Montrer que g est constante sur $]-\infty, 0[$.

   On peut se limiter à travailler sur $[0, +\infty[$ en effet, si $x < 0$, $g(x) = P(X > x) = 1$ car l'événement $[X > x]$ est certain puisque la variable aléatoire X prend ses valeurs dans $[0, +\infty[$

2. Montrer que, pour tout x et y réels,

   $$g(x + y) = g(x)g(y). \quad \text{(R)}$$

   Par définition d'une probabilité conditionnelle, on a, sachant que $P(X > u) \neq 0$,

   $$P_{X>u}(X > u + t) = \frac{P\big((X > u + t) \cap (X > t)\big)}{P(X > u)} = P(X > t).$$

   et comme $(X > u + t) \cap (X > t) = (X > u + t)$ il en résulte :

   $$P(X > u + t) = P(X > u)P(X > t)$$

   Il en résulte, que la fonction g à valeurs dans $[0, 1]$ vérifie, compte tenu de 1, où on a vu que $g = 1$ sur $]-\infty, 0[$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$,

   $$g(x + y) = g(x)g(y).$$

3. Énoncer les propriétés de continuité, dérivabilité et la limite de g en $+\infty$.

   - $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \in [0, 1]$
   - g est continue sur $\mathbb{R}$ car F_X l'est ($g(x) = 1 - F_X(x)$).
   - g est dérivable sauf aux points où F_X ne l'est pas.
   - $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

4. Calculer $g(0)$.

   En utilisant la relation (R), on a $g(0) = g(0)^2$ donc $g(0) = 0$ ou $g(0) = 1$. Alors, si $g(0) = 0$, on aurait, pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) = g(x+0) = g(x)g(0) = 0$. Il en résulte que $1 - F_X(x) = 0$ et $\forall x \geqslant 0$, $F_X(x) = 0$. Ce qui contredirait $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$. Donc :

   $$g(0) = 1.$$

5. Déterminer $g(n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $g(1) < 1$.

   On raisonne par récurrence, pour montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(n) = \big(g(1)\big)^n$.
   - Pour $n = 0$, la relation est claire.
   - Admettons que la relation soit établie pour un entier n, et montrons la pour l'entier $n+1$.
     Par la relation (R), on a $g(n+1) = g(n)g(1) = g(1)^{n+1}$.

   On a $g(1) < 1$ sinon la limite de g en $+\infty$ ne pourrait être nulle en $+\infty$.

6. Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$.

   Pour tout $x \geqslant 0$, on a :
   $$g(x) = g\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = g\left(\frac{x}{2}\right)^2$$
   Donc pour tout x, $g(x) \geqslant 0$. Ce qui est cohérent avec les propriétés de F_X.

7. Montrer que $g(1) > 0$. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $g(1) = \mathrm{e}^{-\lambda}$.

   Si on avait $g(1) = 0$ alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on aurait $g\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$. En effet :

   - Pour $n = 0$, la relation est vraie.
   - Supposons la propriété acquise pour un entier n
     $0 = g\left(\frac{1}{2^n}\right) = \left(g\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)^2$, donc $g\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = 0$.
     Donc la relation est vraie pour tout entier n, par le théorème de récurrence.

   Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ et la continuité de g en 0, implique $\lim_{n\to+\infty} g\left(\frac{1}{2^n}\right) = g\left(\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)\right) = g(0) = 0$ ce qui n'est pas.
   Par suite $g(1) > 0$.
   La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ définit une bijection de $[0, +\infty[$ sur $]0, 1]$ donc $g(1) \in]0, 1[$ admet un unique antécédent $\lambda > 0$, vérifiant alors $g(1) = \mathrm{e}^{-\lambda}$.

8. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{Q}_+$, $g(x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

- Soit $t \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $g(nt) = g(t)^n$. On justifie par un raisonnement par récurrence, semblable à ceux vus ci-dessus.
- Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a alors $g(1) = g\left(m\frac{1}{m}\right) = \left(g\left(\frac{1}{m}\right)\right)^m$, donc :

  $g\left(\frac{1}{m}\right) = \left(g(1)\right)^{\frac{1}{m}}$.

  Finalement : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$

$$g\left(\frac{n}{m}\right) = g\left(\frac{1}{m}\right)^n = g(1)^{\frac{n}{m}}.$$

9. Montrer que cette relation est encore vraie pour tout réel $x \geqslant 0$.

   Tout réel x est une limite de rationnels et sachant la continuité de g , on a : en notant (r_n) une suite de rationnels telle que $x = \lim\limits_{n\to+\infty} r_n$ alors

$$\begin{aligned} g(x) = g\left(\lim_{n\to+\infty} r_n\right) &= \lim_{n\to+\infty} g(r_n) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda r_n} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

10. En déduire F_X.

    $g(x) = P(X > x) = \mathrm{e}^{-\lambda x} = 1 - F_X(x)$ pour tout $x \geqslant 0$. Par suite :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

11. Montrer que la loi obtenue est sans mémoire.

    Soit $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ où $\lambda > 0$. Par définition de la probabilité conditionnelle et en se servant de la fonction de répartition de X, on a :

$$\begin{aligned} P_{(X>u)}(X > u + t) &= \frac{P(X > u + t)}{P(X > u)} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(u+t)}}{\mathrm{e}^{-\lambda u}} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda t} \\ &= P(X > t). \end{aligned}$$

Cas discret

12. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ sans mémoire. Elle vérifie par définition, pour tout u et t dans $\mathbb{N}^*$:

$$P_{(X>u)}(X > u + t) = P(X > t).$$

et $P(X > t) \in]0, 1[$, pour tout entier naturel non nul.

(a) Montrer que X suit une loi géométrique de paramètre p à préciser.

Pour $u = 1$ et $t > 1$, on a la relation :

$$P_{(X>1)}(X > t+1) = \frac{P(X > t+1)}{P(X > 1)} = P(X > t).$$

Donc $P(X > t+1) = P(X > 1)P(X > t)$. On est en présence d'une suite géométrique de raison $P(X > 1)$.
Posons $p = 1 - P(X > 1)$. On obtient ainsi :

$$F_X(t) = 1 - P(X > t) = 1 - (1-p)^t.$$

qui est la fonction de répartition d'une loi géométrique de paramètre p.

(b) Montrer la réciproque.

Ce cas est semblable au cas continu.

(c) Démontrer que $E(X) = \dfrac{1}{p}$.

On sait que $P(X = k) = p(1-p)^{k-1} = pq^{k-1}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
On va montrer que la série à termes positifs $\left(\sum kpq^{k-1}\right)_{k\geqslant 1}$ est convergente. Aucun terme n'est nul, et en posant $u_k = kq^{k-1}$ on a, pour tout $k \geqslant 1$, $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} = \dfrac{k+1}{k}q$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{u_{k+1}}{u_k} = q < 1$. Par le critère de d'Alembert, la série converge.

On sait que : La fonction $q \mapsto f(q) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ est convergente sur $[0, 1[$ et dérivable.
Par suite :

$$f'(q) = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}$$

En outre $f(q) = \dfrac{1}{1-q}$, somme géométrique, donc $f'(q) = \dfrac{1}{(1-q)^2}$. Finalement :

$$E(X) = \frac{p}{(1-p)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

(d) Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p. On définit la variable aléatoire Y telle que :

$$Y(\omega) = \begin{cases} \dfrac{X(\omega)}{2} & \text{si } X(\omega) \text{ est pair} \\ \dfrac{1 - X(\omega)}{2} & \text{si } X(\omega) \text{ est impair} \end{cases}$$

Déterminer la loi de Y et son espérance.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
On a $Y(\Omega) = \mathbb{Z}$. Si $X = 2k$ alors $Y = k \in \mathbb{N}^*$. Si $X = 2k+1$ alors $Y = -k \in -\mathbb{N}$.
Ainsi $(Y = 0) = (X = 1)$, $(Y = k) = (X = 2k)$ et $(Y = -k) = (X = 2k+1)$.

Finalement $P(Y=0)=p$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(Y=k)=pq^{2k-1} \quad P(Y=-k)=pq^{2k}.$$

Calculons l'espérance de Y.

On est amené à étudier $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} kP(Y=k)$.

Les deux séries $\left(\sum kq^{2k-1}\right)_{k\geqslant 1}$ et $\left(\sum (-k)q^{2k-1}\right)_{k\geqslant 1}$ sont absolument convergentes par le critère de d'Alembert. Par suite :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} kpq^{2k-1} + \sum_{k=-1}^{-\infty} kpq^{2k}\\
&= pq\sum_{k=1}^{+\infty} k(q^2)^{k-1} - q^2\sum_{k=1}^{+\infty} k(q^2)^{k-1}
\end{aligned}$$

La fonction $f : q \mapsto \sum\limits_{k=0}^{\infty}(q^2)^k$ est une série entière définie sur $[0, 1[$ au moins car de rayon $R=1$. On a $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(q^2)^k = \dfrac{1}{1-q^2}$. En outre, f est dérivable sur $[0, 1[$, donc, sur $[0, 1[$,

$$2q\sum_{k=1}^{\infty} k(q^2)^{k-1} = \frac{2q}{(1-q^2)^2}.$$

Il en résulte que :

$$E(Y) = (pq-q^2)\frac{1}{(1-q^2)^2} = \frac{q(1-2q)}{(1-q^2)^2}.$$

Application, cas exponentiel

13. (a) On considère maintenant deux variables aléatoires indépendantes X et Y dont les lois sont des loi exponentielles de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. On note $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$

Déterminer E(X) puis V(X).

La fonction densité, f de F_X est définie par $f(x)=0$ sur $]-\infty, 0[$ et $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ sur $[0, +\infty[$. On remarque que f est discontinue en 0.

- Nous allons montrer que $E(X) = \lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x tf(t)\,dt = \dfrac{1}{\lambda}$.

  On intègre un produit de fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, donc on peut procéder à une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^x tf(t)\,dt &= \left[-te^{-\lambda t}\right]_0^x + \int_0^x e^{-\lambda t}\,dt\\
&= \left[-te^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]_0^x\\
&= -xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}$$

  Sachant que les fonctions $x \mapsto xe^{-x}$ et $x \mapsto e^{-x}$ tendent vers 0 en $+\infty$, le résultat en découle.

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

- On va montrer que $E(X^2) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x t^2 f(t)\,dt$.
  La encore, une intégration par paries est valide.

$$\int_0^x t^2 f(t)\,dt = \left[-t^2 e^{-\lambda t}\right]_0^x + \int_0^x 2t e^{-\lambda t}\,dt$$
$$= -x^2 e^{-\lambda x} + \frac{2}{\lambda}\int_0^x t f(t)\,dt.$$

  Comme ci-dessus et en utilisant E(X), on obtient :

$$E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

- Finalement :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

(b) Montrer que $S = X + Y$ n'est pas une variable aléatoire de loi exponentielle.

- On a $E(S) = E(X) + E(Y) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$.
  Comme les variables aléatoires sont indépendantes, on a $V(S) = V(X) + V(Y) = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2}$.
- Nous allons raisonner par l'absurde.
  Si la variable aléatoire était exponentielle, on aurait :

$$V(S) = (E(S))^2.$$

  soit $\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2} = \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}\right)^2$. Ce qui est impossible car $\frac{2}{\lambda\mu} \neq 0$.
  Par suite notre hypothèse est fausse et S n'est pas une variable exponentielle.

14. Les variables aléatoires ci-dessus restent indépendantes et ont même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
    On note $Z = \min(X, Y)$.
    (a) Déterminer $P(Z \geqslant t)$ pour tout réel t.

    Soit t un réel. On a :$[Z > t] = [X > t] \cap [Y > t]$.

    - Si $t < 0$, $P(Z < t) = 1$. item Si $t \geqslant 0$. Comme les variables aléatoires X et Y sont indépendantes , on a :

$$P(Z > t) = P([X > t] \cap [Y > t]) = P(X > t)P(Y > t) = e^{-2\lambda t}.$$

    (b) En déduire la fonction de répartition de Z.

    La fonction de répartition est définie, pour tout réel t, par $F_Z(t) = P(Z \leqslant t) = 1 - P(Z > t)$. Donc
    si $t < 0$, $F_Z(t) = 0$.
    si $t \geqslant 0$, $F_Z(t) = 1 - e^{-2\lambda t}$.

(c) Quelle est la loi de Z ?

Il s'agit de la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 2λ . La fonction de répartition caractérise la loi donc Z suit une loi exponentielle de paramètre 2λ.

15. Plus généralement,on considère $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On note $Z_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.
Déterminer la fonction de répartition F_{Z_n} de Z_n.

Comme ci dessus, en utilisant l'indépendance des variables aléatoires, on a, pour tout $t \geqslant 0$:

$$P(Z_n > t) = P((X_1 > t) \cap \dots \cap (X_n > t)) = P(X_1 > t) \dots P(X_n > t) = e^{-n\lambda t}.$$

On en déduit :

$$F_{Z_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-n\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}.$$

La variable aléatoire suit une loi exponentielle de paramètre $n\lambda$.

16. X désigne dans cette question, une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et Y la variable aléatoire définie par $Y = -\ln(1 - X)$.

(a) Expliquer pourquoi il n'est pas gênant que X prenne la valeur 1.

Lorsque $[X = 1]$ se réalise alors Y n'a pas de sens. Mais $P(X = 1) = 0$ car la variable aléatoire est continue. Par suite, Y est définie sauf pour un événement impossible. On convient donc que Y est définie sur l'univers $(X < 1)$.

(b) Déterminer la fonction de répartition de Y. Quelle est la loi de Y.

Comme X prends ses valeurs dans $[0, 1]$, Y prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Soit alors $t \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned}(Y \leqslant t) &= (-\ln(1 - X) \leqslant t) \\ &= (\ln(1 - X) \geqslant -t) \\ &= (1 - X \geqslant e^{-t}) \\ &= (X \leqslant 1 - e^{-t})\end{aligned}$$

Comme $t \geqslant 0$, il en résulte que $1 - e^{-t} \in [0, 1[$. Comme X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, on a :

$$P(Y \leqslant t) = P(X \leqslant 1 - e^{-t}) = 1 - e^{-t}.$$

Soit $t < 0$ alors $1 - e^{-t} < 0$, donc $P(Y \leqslant t) = P(X \leqslant 1 - e^{-t}) = 0$.
On reconnaît la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$.

2 Groupes

2.1

Soit G un sous groupe additif de $\mathbb{R}$

1. Supposons que G contienne un intervalle de $\mathbb{R}$ de cardinal strictement supérieur à 1.

(a) Montrer que G contient un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ de centre 0 et de cardinal strictement supérieur à 1,

Notons J l'intervalle contenu dans $\mathbb{R}$.
Considérons α et β distincts dans J, supposons que $\alpha < \beta$. L'intervalle I de centre $c = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ et de rayon $\delta = \dfrac{\beta-\alpha}{2}$.
On a $\mathrm{I} = [c-\delta, c+\delta] \subset \mathrm{G}$. Comme $c \in \mathrm{G}$ et que G est un groupe , on a $\mathrm{I} - c = \{x - c \mid x \in \mathrm{I}\} = [-\delta, \delta] \subset \mathrm{G}$.

(b) En déduire que G est égal à $\mathbb{R}$.

On clairement $\mathrm{G} \subset \mathbb{R}$, montrons que $\mathbb{R} \subset \mathrm{G}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $n = \left\lfloor \dfrac{x}{\delta} \right\rfloor$ la partie entière de $\dfrac{x}{\delta}$. On a :

$$n \leqslant \frac{x}{\delta} < n+1$$
$$\delta n \leqslant x < \delta n + \delta$$

Posons $r = x - n\delta$. On a $r \in [-\delta, \delta] \subset \mathrm{G}$.
Finalement; comme $g \in \mathrm{G}$, $n\delta \in \mathrm{G}$, car G est un groupe, et $r \in \mathrm{G}$ donc

$$x = \delta n + r \in \mathrm{G}.$$

Donc $\mathrm{G} = \mathbb{R}$.
Il existe des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$, ne contenant aucun intervalle : $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ par exemple.

2. Existe-t-il des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$, qui soient finis et distincts de $\{0\}$?

   Soit G un sous-groupe non réduit à $\{0\}$. Soit $x \neq 0$, $x \in \mathrm{G}$. L'application de $\mathbb{Z}$ dans G, $n \mapsto nx$ est injective donc $\mathrm{Card(G)} > \mathrm{Card}(\mathbb{Z})$.

3. Soit $\mathbb{U}$ la partie de $\mathbb{C}$ dont les éléments sont de module 1.
   Montrer que $(\mathbb{U}, \times)$ est un groupe commutatif.

   $\mathbb{U}$ est un sous-groupe multiplicatif de $(\mathbb{C}^*, \times)$. En effet
   - $1 \in \mathbb{U}$, donc $\mathbb{U}$ est non vide.
   - $\mathbb{U}$ est stable pour le produit : si z et z' sont dans $\mathbb{U}_n$ alors $|zz'| = |z| \cdot |z'| = 1 \times 1 = 1$.
   - $\mathbb{U}$ est stable pour l'inverse. Soit $z \in \mathbb{U}_n$, alors $z \neq 0$ et $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|} = \dfrac{1}{1} = 1$.

4. Soit H un sous groupe de $\mathbb{U}$.

   (a) Montrer que si H est fini d'ordre $n \geqslant 2$, alors H est égal à $\mathbb{U}_n$, ensemble des complexes vérifiant $z^n = 1$.

   Pour tout $z \in \mathrm{H}$, le sous-groupe $< z >$ engendré par z est d'ordre fini $p \in \mathbb{N}^*$, donc $z^p = 1$. Or par le théorème de Lagrange, p divise n, donc $z^n = 1$.
   H étant un sous-groupe de $\mathbb{U}_n$ et ils ont même cardinal donc $\mathrm{H} = \mathbb{U}_n$.

(b) On note $\mathscr{C}$ le cercle unité du plan complexe $\mathscr{P}$ et A, B deux points distincts de $\mathscr{C}$. Montrer que, si H contient l'ensemble des affixes des points de l'un des arcs (A,B) alors il est égal à $\mathbb{U}$.

Soit $\psi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{U}, \times)$ tel que $\theta \mapsto e^{i\theta}$.
ψ est un homomorphisme de groupe, en outre il est surjectif.
H étant un sous-groupe de $\mathbb{U}$, $\psi^{-1}(H)$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ contenant l'intervalle $[\alpha, \beta]$ ensemble des antécédents des points de l'arc (A,B) considéré.
Par suite, par la question 1, $\psi^{-1}(H) = \mathbb{R}$.
Comme ψ est surjective on a $\psi\left(\psi^{-1}(H)\right) = H$. Ainsi $H = \psi(\mathbb{R}) = \mathbb{U}$.

(c) Déterminer un sous groupe infini de $\mathbb{U}$ dont l'image dans $\mathscr{P}$ ne contienne aucun arc de cardinal strictement supérieur à 1.

On reprend l'application ψ vue ci-dessus.

- $\psi(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $\mathbb{U}$, car $(\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ et ψ un homomorphisme.
- $\psi(\mathbb{Z})$ est infini. En effet la restriction de ψ à $\mathbb{Z}$ est injective car, pour tout entier n et n', $e^{in} = e^{in'}$ revient à dire que $n - n' \in 2\pi\mathbb{Z}$, soit $n = n'$. Donc $\mathbb{U}$ contient une infinité d'éléments.
- $\psi(\mathbb{Z}) \neq \mathbb{U}$, car $i \in \mathbb{U}$ n'a aucun antécédent dans $\mathbb{Z}$ sinon, il existerait $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\psi(n) = e^{in} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ce qui signifierait que $n - \dfrac{\pi}{2} \in 2\pi\mathbb{Z}$, ce qui est impossible.
- $\psi(\mathbb{Z})$ ne contient aucun arc de cardinal strictement plus grand que 1, sinon $\psi(\mathbb{Z}) = \mathbb{U}$.

Finalement $\psi(\mathbb{Z})$ répond à la question et convient.

2.2

1. Donner deux exemples, bien distincts, de sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$.

   $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont deux sous-groupes additifs de $(\mathbb{R}, +)$. L'un est discret et l'autre est dense.
   On note, pour $a \in \mathbb{R}_+$, $a\mathbb{Z} = \{na, n \in \mathbb{Z}\}$.

2. Montrer que $(a\mathbb{Z}\,; +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

   - $a\mathbb{Z}$ est non vide car $0 = a \times 0 \in a\mathbb{Z}$.
   - soit $x = ka \in a\mathbb{Z}$, où $k \in \mathbb{Z}$ et $y = k'a \in a\mathbb{Z}$ où $k' \in \mathbb{Z}$.
     On a $x - y = (k - k')a \in a\mathbb{Z}$.

3. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.
   On considère : $\alpha = \inf\{x \in G, x > 0\}$.

   (a) Rappeler la définition et la caractérisation de la borne inférieure.

   α est le plus grand minorant de $G \cap \mathbb{R}_+^*$ soit $\forall x \in G \cap \mathbb{R}_+$, $\alpha \leqslant x$ et $\forall \epsilon > 0$, $\exists x \in G \cap \mathbb{R}_+^* \mid x < \alpha + \epsilon$.

(b) Supposons dans un premier temps $\alpha > 0$ et montrons que $\alpha \in G$.
Supposons par l'absurde que : $\alpha \notin G$.

i. Montrer l'existence de $x \in G$ tel que : $\alpha < x < 2\alpha$.

Prenons $\epsilon = \alpha$. On a $\epsilon > 0$ donc il existe $x \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $\alpha \leqslant x < \alpha + \epsilon = 2\alpha$. Mais $x \neq \alpha$ car $\alpha \notin G$. Ainsi, nous avons $x \in G$ tel que $\alpha < x < 2\alpha$.

ii. Montrer l'existence de $y \in G$ tel que : $\alpha < y < x$.

On prend $\epsilon = x - \alpha$, on a bien $\epsilon > 0$, donc il existe $y \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $\alpha \leqslant y < \alpha + \epsilon = x$. Mais $y \neq \alpha$ car $\alpha \notin G$. Finalement, il existe $y \in G$ tel que $\alpha < y < x < 2\alpha$.

iii. Montrer alors que α n'est pas la borne inférieure de $\{x \in G,\ x > 0\}$.

x et y sont dans G, donc $x - y \in G$. Les inégalités $\alpha < y < x < 2\alpha$ impliquent $0 < x - y < \alpha$. Aussi α ne serait pas la borne inférieure, ce qui est impossible donc :

$$\alpha \in G.$$

(c) En déduire que $\alpha\mathbb{Z} \subset G$.

G étant stable pour + et par passage à l'opposé et que $\alpha \in G$ on a $\alpha\mathbb{Z} \subset G$.

(d) Montrer $G \subset \alpha\mathbb{Z}$. Soit $g \in G$. Posons $n = \left\lfloor \frac{g}{\alpha} \right\rfloor$, alors, comme $n \leqslant \frac{g}{\alpha} < n+1$, $g - n\alpha \in [0, \alpha[$.
On pose $\beta = g - n\alpha$. Comme G est un groupe, $\beta \in G$. Il en résulte que $\beta = 0$ sinon on aurait trouvé un élément positif strictement plus petit à α. Ainsi $g = n\alpha$ et

$$G \subset \alpha\mathbb{Z}.$$

Finalement on a démontré que :

$$G = \alpha\mathbb{Z}.$$

(e) Supposons maintenant $\alpha = 0$.

i. A-t-on $\alpha \in G$?

Puisque G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, $\alpha = 0 \in G$.

ii. Montrer que : $\forall \epsilon > 0, \exists g \in G \mid 0 < g < \epsilon$.

Par définition de la borne inférieure, il existe $g \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $0 = \alpha \leqslant g < \alpha + \epsilon = \epsilon$. Mais $g \in \mathbb{R}_+^*$ donc $g \neq 0$ d'où

$$\forall \epsilon > 0, \exists g \in G \mid 0 < g < \epsilon$$

iii. En déduire que G est dense dans $\mathbb{R}$, i.e. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x < y$, $\exists t \in G \mid x < t < y$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x < y$. D'après la question ci-dessus, il existe $g \in G$ tel que $0 < g < y - x$. Posons $n = \left\lfloor \frac{x}{g} \right\rfloor$. On a :

$$ng \leqslant x < ng + g < ng + y - x \leqslant y.$$

Ainsi $(n+1)g \in G$ et $x < (n+1)g < y$. On a trouvé un élément de g entre les réels x et y, donc G est dense dans $\mathbb{R}$.

4. Donner un exemple de sous-groupe dense de $(\mathbb{R}, +)$.

   $\mathbb{Q}$ est un sous-groupe dense dans $\mathbb{R}$.

5. On considère $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) = \left\{p + q\sqrt{2},\, (p, q) \in \mathbb{Q}^2\right\}$.

   (a) Montrer que $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, +\right)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

   - $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ est non vide, il contient $0 = 0 + 0\sqrt{2}$.
   - $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ est stable pour la soustraction. $p + q\sqrt{2} - \left(p' + q'\sqrt{2}\right) = (p - p') + (q - q')\sqrt{2}$.

   (b) Est-il dense ?

   $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ est dense car $\mathbb{Q}$ est dense et que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$.

   (c) Montrer que : $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\ +,\ \times\right)$ est un corps.

   - On a la stabilité pour la différence, par stabilité de + dans $\mathbb{Q}$.
   - On a la stabilité pour le produit. en effet, pour tout p, q, p', q' dans $\mathbb{Q}$:

   $$\left(p + q\sqrt{2}\right).\left(p' + q'\sqrt{2}\right) = (pp' + 2qq') + (pq' + p'q)\sqrt{2}.$$

   et $(pp' + 2qq')$, $(pq' + p'q)$ sont dans $\mathbb{Q}$.
   - $1 = 1 + 0\sqrt{2} \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$
   - Tout $p + q\sqrt{2} \neq 0$ est inversible. p et q sont dans $\mathbb{Z}$.
   Montrons que $p + q\sqrt{2} = 0$ si et seulement si $p = q = 0$.
   Le sens réciproque est évident.
   Pour le sens direct raisonnons par l'absurde. Supposons p ou q non nuls. Supposons $q \neq 0$ alors $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$. Si $p = 0$ on a une égalité impossible. Si $p \neq 0$, alors écrivons la fraction sous forme irréductible de deux entiers et on la note encore $\dfrac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$.
   On en tire que $p^2 = 2q^2$. D'après la décomposition d'un entier en facteurs premiers, le facteur 2 a un exposant pair dans p^2 alors que l'exposant de 2 est impair dans $2q^2$, ce qui est impossible à cause de l'unicité de la décomposition d'un entier. Donc $p = q = 0$.
   Soit $x = \dfrac{1}{p + q\sqrt{2}}$ l'inverse dans $\mathbb{R}$ d'une élément non nul de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. On a :

   $$x = \frac{1}{p + q\sqrt{2}} = \frac{p}{p^2 - 2q^2} + \frac{-q}{p^2 - 2q^2}\sqrt{2}.$$

   Il est clair que $\dfrac{p}{p^2 - 2q^2} \in \mathbb{Q}$ et $\dfrac{-q}{p^2 - 2q^2} \in \mathbb{Q}$ donc $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

   Finalement $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\ +,\ \times\right)$ est un corps.

3 Polynômes

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensembles des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n \geqslant 1$ et contenant le polynôme nul. Dans tout le problème, $n \in \mathbb{N}^*$. On admettra que, pour tout polynôme P, on peut identifier P[X] et P(x) où $x \in \mathbb{R}$.
On considère la relation polynomiale :

$$(1-X)^n F_n(X) + X^n G_n(X) = 1 \quad (R)$$

où F_n et G_n sont dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

1. (a) Déterminer les polynômes F_n et G_n pour $n = 1$ et 2.

   - $n = 1$. On cherche des polynômes constants non nuls : on trouve directement que $F_1 = 1$ et $G_1 = 1$.
   - $n = 2$.
     Les polynômes $F_2(X) = aX + b$ et $G_2(X) = cX + d$ vérifient : par définition de l'égalité des polynômes
     $$\begin{cases} a + c = 0 \\ -2a + b + d = 0 \\ a - 2b = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$
     On obtient $F_2(X) = 2X + 1$ et $G_2(X) = -2X + 3$.

   (b) Pour tout entier n, développer $((1-X)+X)^{2n-1}$.

   Comme $2n - 1 > 0$, on peut appliquer la formule du binôme :

   $$\begin{aligned} 1 = ((1-X)+X)^{2n-1} &= \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} X^k (1-X)^{2n-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} X^k (1-X)^{2n-1-k} + \sum_{k=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} X^k (1-X)^{2n-1-k} \\ &= (1-X)^n \left(\sum_{k=0}^{2n-1} \binom{n-1}{k} X^k (1-X)^{n-1-k} \right) + X^n \left(\sum_{k=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} X^{k-n} (1-X)^{2n-1-k} \right) \end{aligned}$$

   Par suite , on peut poser :

   $$F_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} X^k (1-X)^{n-1-k}, \; G_n(X) = \sum_{k=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} X^{k-n} (1-X)^{2n-1-k}$$

   On a aussi : $G_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{n+k} X^k (1-X)^{n-1-k}$ par changement d'indice.
   Chaque terme de F_n et de G_n est un produit de polynômes et le degré du produit est $n-1$. Donc par somme on obtient des polynômes de degré au plus $n-1$.
   Par construction ces polynômes conviennent.

(c) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'existence des polynômes F_n et G_n.

On a traité la question ci-dessus.

2. Déterminer en fonction de F_n et G_n tous les couples (A, B) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tel que $(1-X)^n A(X) + X^n B(X) = 1$. On fera un raisonnement par analyse et synthèse.
En déduire l'unicité de F_n et G_n.

- Analyse :
Si $(1-X)^n A(X) + X^n B(X) = 1$, alors $(1-X)^n (A(X) - F_n(X)) = X^n (G_n(X) - B(X))$. Donc 0 est racine d'ordre n au moins de $(1-X)^n (A(X) - F_n(X))$ donc de $A(X) - F_n(X)$; il existe donc un polynôme Q tel que $A(X) - F_n(X) = X^n Q(X)$. On obtient alors $(1-X)^n X^n Q(X) = X^n (G_n(X) - B(X))$. En simplifiant par X^n il vient $B(X) = G_n(X) - (1-X)^n Q(X)$.
- Synthèse.
On vérifie que les expressions conviennent.

$$\begin{aligned}
&(1-X)^n \left(F_n(X) + X^n Q(X)\right) + X^n \left(G_n(X) - (1-X)^n Q(X)\right) \\
&= (1-X)^n F_n(X) + X^n G_n(X) + (1-X)^n X^n Q(X) - X^n (1-X)^n Q(X) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Si $\deg(A) \leqslant n-1$, on a $\deg\left(X^n Q\right) = n + \deg Q = \deg(A - F_n) \leqslant n-1$, donc $\deg Q < 0$ et par suite $Q = 0$.
Il en résulte l'unicité de F_n et G_n.

3. (a) Montrer que $F_n(1-X) = G_n(X)$ et $G_n(1-X) = F_n(X)$.

Si $(1-X)^n F_n(X) + X^n G_n(X) = 1$ alors $X^n F_n(1-X) + (1-X)^n G_n(1-X) = 1$ soit

$$(1-X)^n G_n(1-X) + X^n F_n(1-X) = 1$$

Comme $F_n(1-X)$ et $G_n(1-X)$ sont des polynômes de degré au plus $n-1$, on a d'après l'unicité de F_n et G_n :

$$F_n(1-X) = G_n(X), \quad G_n(1-X) = F_n(X).$$

(b) Calculer $F_n(0)$, $F_n(1)$ et $F_n\left(\frac{1}{2}\right)$.

On a, pour tout réel x : $F_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k}$ donc :

- $F_n(0) = 1$, le seul terme non nul est obtenu pour $k = 0$.
- $F_n(1) = \binom{2n-1}{n-1} = \binom{2n-1}{n}$ terme obtenu pour $k = n-1$.
- Sachant que $F_n(1-x) = G_n(x)$, on a $F_n\left(\frac{1}{2}\right) = G_n\left(\frac{1}{2}\right)$.

  On sait aussi que $(1-x)^n F_n(x) + x^n G_n(x) = 1$, on en tire que : $\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(F_n\left(\frac{1}{2}\right) + G_n\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 1$, donc :
  $F_n\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{n-1}$.

4. Dans ce qui suit, x désigne une variable réelle.
   (a) Pour x tendant vers 0, démontrer que :

$$F_n(x) = (1-x)^{-n} + o\left(x^{n-1}\right).$$

Si $x \neq 1$, en particulier sur $]-1,1[$ on a :

$$F_n(x) = \frac{1}{(1-x)^n} - x^{n-1}\frac{xG_n(x)}{(1-x)^n}$$

or $G_n(x) = \binom{2n-1}{n}(1-X)^{n-1} + \binom{2n-1}{n+1}x^1(1-x)^n + \cdots + \binom{2n-1}{2n-1}x^{n-1}$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} G_n(x) = \binom{2n-1}{n}$, et $\lim\limits_{x\to 0} xG_n(x) = 0$.

Ainsi on a, au voisinage de 0 : $F_n(x) = (1-x)^{n-1} + o\left(x^{n-1}\right)$.

   (b) En déduire les coefficients de F_n.

Comme $F_n(x)$ est un polynôme de degré au plus $n-1$, $F_n(x)$ est la partie principale du développement limité à l'ordre $n-1$ de $(1-x)^{-n}$. On sait que :

$$(1+u)^a = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}u^k + o(u^n)$$

Pour $u = -x$ et $a = -n$, on a :

$$\begin{aligned}(1-x)^{-n} &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{-n(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!}(-1)^k x^k + o(x^{n-1})\\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}x^k + o(x^{n-1})\end{aligned}$$

Par suite :

$$F_n(X) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}x^k$$

   (c) L'équation $F_n(x) = 0$ peut-elle avoir une racine positive ou nulle ?

Les coefficients de F_n sont tous positifs et le coefficient constant vaut 1 donc $\forall x \geqslant 0$, $F_n(x) \geqslant 1$ et F_n n'a pas de racine positive ou nulle.

5. (a) Établir, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la relation :

$$nF_n(x) - (1-x)F'_n(x) = n\binom{2n-1}{n}x^{n-1}.$$

Par dérivation, on obtient :

$$(1-x)^{n-1}\left(nF_n(x) - (1-x)F'_n(x)\right) = -x^{n-1}\left(nG_n(x) + xG'_n(x)\right)$$

$x \mapsto nF_n(x) - (1-x)F'_n(x)$ est une fonction polynôme de degré au plus $n-1$ et admet, d'après la relation ci-dessus, 0 comme racine d'ordre au moins $n-1$, donc il existe un réel k tel que $nF_n(x) - (1-x)F'_n(x) = kx^{n-1}$. Par suite $nF_n(1) = k$. On a $k = n\binom{2n-1}{n}$ La relation cherchée en résulte.

(b) En déduire que l'équation $F_n(x) = 0$ ne peut avoir deux racines réelles strictement négatives.

Supposons que l'équation $F_n(x) = 0$ ait au moins deux racines réelles négatives, notons a et b deux racines *consécutives*, $a < b < 0$, de F_n. en utilisant $nF_n(x) - (1-x)F_n'(x) = n\binom{2n-1}{n}x^{n-1}$,
$F_n'(a) = \dfrac{-n\binom{2n-1}{n}a^{n-1}}{1-a} \neq 0$.
$F_n(a)$ a pour signe $(-1)^n$ et on obtient de même pour $F_n'(b)$.
Traitons le cas n est pair. On a $F_n(a) = 0$ et $F_n'(a) > 0$, par la continuié de F_n' , il existe $\epsilon > 0$ tel que sur $]a,\ a+\epsilon[$ $F_n'(x) > 0$ et donc $F_n(x) > 0$ car F_n est localement croissante. De même, il existe $\epsilon' > 0$ tel que sur $]b-\epsilon',\ b[$, $F_n(x) < 0$ toujours parce que F_n est croissante au voisinage de b. Par le théorème des valeurs intermédiaires, F_n s'annule entre a et b ce qui est contraire à l'hypothèse et F_n ne peut avoir deux racines strictement négatives, elle en admet au plus une. Le cas n impair se traite de la même façon avec le signe opposé.

6. Pour tout réel x, on pose $h_n(x) = \displaystyle\int_0^x t^{n-1}(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t$.

Établir les variations de h_n selon la parité de n.

h_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, on a :

$$h_n'(x) = x^{n-1}(1-x)^{n-1}.$$

h_n est un polynôme de terme dominant $\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$. Par suite, les limites en l'infini sont immédiates et nous résumons dans les tableaux de variations :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
h_{2n+1}'		$+$	0	$+$	0	$+$	
h_{2n+1}	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$h_{2n+1}(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
h_{2n}'		$-$	0	$+$	0	$-$	
h_{2n}	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$h_{2n}(1)$	$\searrow$	$-\infty$

7. Démontrer que, pour tout $x \neq 1$, on a : $F_n(x) = \dfrac{1-n\binom{2n-1}{n}h_n(x)}{(1-x)^n}$.

On a vu que F_n vérifie l'équation différentielle $(1-x)y' - ny = -n\binom{2n-1}{n}x^{n-1}$ et $F_n(0) = 1$.

- On se place sur $]-\infty, 1[$.
  On commence par l'équation sans second membre : $(1-x)y' - ny = 0$.
  Les solutions sont les fonctions $g(x) = \lambda\exp(-n\ln(1-x)) = \dfrac{\lambda}{(1-x)^n}$.

- Déterminons alors les solutions par la méthode de la variation de la constante.

  $x \mapsto \dfrac{\lambda(x)}{(1-x)^n}$ est solution de l'équation différentielle si, et seulement si

  $\lambda'(x) = -n\dbinom{2n-1}{n}x^{n-1}(1-x)^{n-1} = -n\dbinom{2n-1}{n}h_n'(x)$.

  Par suite $\lambda(x) = -n\dbinom{2n-1}{n}h_n(x) + k$, où k est une constante.

- Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in]-\infty, 1[$

$$\mathrm{F}_n(x) = \frac{k - n\binom{2n-1}{n}h_n(x)}{(1-x)^n}.$$

  Or $\mathrm{F}_n(0) = 1$, donc $k = \mathrm{F}_n(0) = 1$.

  Donc pour tout $x \in]-\infty, 1[$, $(1-x)^n\mathrm{F}_n(x) = 1 - n\dbinom{2n-1}{n}h_n(x)$.

  On a une égalité de polynôme sur $]-\infty, 1[$, ensemble infini, donc ces polynômes sont égaux sur $\mathbb{R}$.

- $$\forall x \neq 1,\ \mathrm{F}_n(x) = \frac{1 - n\binom{2n-1}{n}h_n(x)}{(1-x)^n}.$$

8. Discuter selon n, le nombre de racines dans $]-\infty, 0[$ de l'équation $\mathrm{F}_n(x) = 0$.

   Sur $]-\infty, 0[$, $\mathrm{F}_n(x) = 0$ si et seulement si $h_n(x) = \dfrac{1}{n\binom{2n-1}{n}} > 0$.

   En utilisant les variations de h_n, en lien avec le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit :

   - Si n est impair, $\mathrm{F}_n(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]-\infty, 0[$, et donc pas de solution sur $\mathbb{R}$.
   - Si n est pair $\mathrm{F}_n(x) = 0$ a une solution unique sur $]-\infty, 0[$, et donc une unique solution sur $\mathbb{R}$.

CNED

Sous la responsabilité de la directrice du site de Vanves
M^{me} Sarah Fayet

Le CNED remercie les nombreuses personnes qui ont contribué à la réussite de ce projet.
Qu'elles trouvent ici l'expression de toute sa reconnaissance.