Capes externe – Mathématiques

ÉPREUVE D'ADMISSIBILITÉ 1

OPTION MATHÉMATIQUES

EXEMPLE DE SUJET TRAITÉ N°1

Pierre Balvay
Jean-Louis Cornou
Christian Even

ATTENTION :
ce devoir est un exemple de sujet traité,
il n'est **pas** à envoyer à la correction.

1 - 2011 - TC - WB - 01 - 20

SOMMAIRE

SUJET

Exercice 1

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.

1. (a) Montrer que A est diagonalisable.
   (b) Montrer que la matrice P est inversible.
2. Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Montrer que si f et g commutent, les vecteurs propres de f sont des vecteurs propres de g.
3. En déduire que si f et g commutent, alors f et g sont simultanément diagonalisables c'est-à-dire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dont les éléments sont à la fois des vecteurs propres de f et des vecteurs propres de g.
4. On considère l'équation matricielle :

$$(\mathcal{E}) \qquad M^2 - 6M = A$$

d'inconnue M, matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels.

(a) Montrer que si la matrice M est solution de $(\mathcal{E})$, alors M et A commutent.

M est solution de (E)
ssi
D=PMP^-1 est solution de (E').

(b) En déduire que l'équation $(\mathcal{E})$ est équivalente à l'équation $(\mathcal{E}')$ d'inconnue D matrice carrée d'ordre trois diagonale :

$$(\mathcal{E}') \qquad D^2 - 6D = \Delta$$

où $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

(c) Résoudre l'équation $(\mathcal{E}')$, puis déterminer les solutions de $(\mathcal{E})$.

Exercice 2

Soient E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et $\vec{v} = (1, 1, 1)$. Soient

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad J = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme de E canoniquement associé à la matrice J.
On rappelle que si λ est un nombre réel et Λ une matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels, alors

$$\det(\lambda\Lambda) = \lambda^3 \det(\Lambda).$$

1. (a) Démontrer que $f(\vec{v}) = \vec{v}$.
   (b) Déterminer l'ensemble image et le noyau de f.
   (c) Calculer J^2.
   (d) Démontrer que f est une projection orthogonale de E. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Préciser quels sont les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
2. Soient M une matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels et g l'endomorphisme de E canoniquement associé à la matrice M. On considère l'équation (A) d'inconnue le réel x :

   $$(A) \qquad\qquad \det(M + xJ) = 0.$$

   On note $\mathcal{S}_{(A)}$ l'ensemble des solutions de l'équation (A).
   (a) Lorsque $M = 0$, la matrice nulle, déterminer $\mathcal{S}_{(A)}$.
   (b) Lorsque $M = I$, la matrice unité, montrer que $\mathcal{S}_{(A)}$ est réduit à un unique élément. Préciser cet élément.
3. On suppose que M est inversible. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Démontrer que si un vecteur $\vec{u}$ de E appartient au noyau de l'endomorphisme $g + xf$, alors $\vec{u}$ est colinéaire au vecteur $g^{-1}(\vec{v})$.
   (b) Soient $\vec{w} = g^{-1}(\vec{v})$ et σ la somme des coordonnées du vecteur $\vec{w}$. Démontrer que $\det(M+xJ) = 0$ si et seulement si $(g+xf)(\vec{w}) = \vec{0}$ si et seulement si $1 + x\dfrac{\sigma}{3} = 0$. Déterminer, en fonction de σ, l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_{(A)}$ de l'équation (A).
4. On se propose de déterminer $\mathcal{S}_{(A)}$ lorsque la matrice M est non inversible.

(a) Démontrer que $\mathcal{S}_{(A)}$ est non vide.

(b) Soit $b \in \mathbb{R}$. Établir une bijection entre $\mathcal{S}_{(A)}$ et l'ensemble $\mathcal{S}_{(B)}$ des solutions de l'équation (B) d'inconnue x, définie par :

$$(B) \qquad \det(M + bJ + xJ) = 0.$$

(c) Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_{(A)}$, en distinguant les deux cas suivants :
- Pour tout $b \in \mathbb{R}$, la matrice $M + bJ$ est non inversible.
- Il existe au moins un $b \in \mathbb{R}$ tel que la matrice $M + bJ$ est inversible.

Exercice 3

Les deux parties de cet exercice sont largement indépendantes.

Partie I

Soient p et q deux nombres réels. On note N la matrice définie par

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On rappelle qu'un polynôme P à coefficients réels admet une racine double $\alpha \in \mathbb{R}$ si et seulement si il existe un polynôme Q à coefficients réels tel que

$$P = (X - \alpha)^2 Q \qquad \text{et} \qquad Q(\alpha) \neq 0.$$

1. Montrer que si α est une racine double de P, alors α est aussi une racine du polynôme dérivé P'.
2. Calculer le polynôme caractéristique P_N de la matrice N.
3. On suppose que le polynôme caractéristique P_N admet une racine double $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que nécessairement p et q doivent vérifier la relation
$$4p^3 = 27q^2.$$
4. On note
$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} \quad 4x^3 = 27y^2\}.$$
Déterminer les trois plus petits éléments de l'ensemble $\mathcal{S}$.

Partie II

Dans cette partie, on suppose que $p = 3$ et $q = 2$. On a donc

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique P_N de cette matrice N.
2. Déterminer les racines λ_1 et λ_2 du polynôme P_N, λ_1 étant la racine négative. Préciser leurs multiplicités.
3. On note E_1 le sous-espace propre de N associé à la valeur propre λ_1. Déterminer une base de E_1.
4. On note E_2 le sous-espace propre de N associé à la valeur propre λ_2. Déterminer une base de E_2.
5. Quelles sont les dimensions des sous-espaces propres E_1 et E_2 ? La matrice N est-elle diagonalisable ? On précisera pourquoi.
6. On note I la matrice unité et $M = \frac{2}{9}(N + I)^2 - I$.
   (a) Calculer la matrice M.
   (b) Calculer les valeurs propres et une base des sous-espaces propres de M.
   (c) Montrer que M est la matrice d'une symétrie.
   (d) Préciser par rapport et parallèlement à quels sous-espaces s'effectue la symétrie M.
   (e) M est-elle la matrice d'une symétrie orthogonale ?

Exercice 4

Notons $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $\vec{u} = (a, b, c)$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$. On a donc $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.
Notons $\mathcal{D}$ la droite de vecteur directeur $\vec{u}$. Notons p le projecteur orthogonal sur $\mathcal{D}$ et q le projecteur orthogonal sur $\mathcal{D}^\perp$.
Notons Id l'application identique de $\mathbb{R}^3$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Que vaut $p + q$?
2. Soit $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Exprimer $p(\vec{v})$ à l'aide de $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ et de $\vec{u}$.
   Calculer alors $p(\vec{\imath})$, $p(\vec{\jmath})$ et $p(\vec{k})$.
   En déduire les matrices P et Q de p et q dans la base $\mathcal{B}$.

3. Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

   (a) Démontrer que $M^2 = -Q$.

   (b) Calculer $f(\vec{u})$.
   En déduire que $\operatorname{rg}(f) \leqslant 2$.
   Déterminer l'ensemble image et le noyau de f et les exprimer en fonction de $\mathcal{D}$.

   (c) Déduire de la question précédente la valeur de $f \circ p$.
   Démontrer que $X + X^3$ est un polynôme annulateur de f.

   (d) Quelles sont les valeurs propres de f ?
   f est-il diagonalisable ?

4. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note g_θ l'endomorphisme défini par

$$g_\theta = \operatorname{Id} + (\sin\theta) f + (1 - \cos\theta) f^2$$

   où $f^2 = f \circ f$.

   (a) Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$. Calculer $g_\theta \circ g_{\theta'}$ et démontrer qu'il s'écrit sous la forme $g_{\theta''}$ avec $\theta'' \in \mathbb{R}$.

   (b) En déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, l'endomorphisme g_θ est inversible et déterminer son inverse.

FIN DE L'ÉNONCÉ

CORRIGÉ

Exercice 1

1. (a) Calculons le polynôme caractéristique de la matrice A.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}2-\lambda & 3 & -2\\ -1 & -2-\lambda & 2\\ 1 & 3 & -4-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda=-\lambda(\lambda-1)(\lambda+5).$$

La matrice A admet trois valeurs propres réelles deux à deux distinctes. Donc A est diagonalisable.

(b) Pour démontrer que la matrice P est inversible, il suffit de vérifier que les vecteurs colonnes de P forment une base de vecteurs propres de A. Notons $X_1=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$ la première colonne de P. On a $AX_1=X_1$. Donc X_1 est un vecteur propre non nul de A, associé à la valeur propre $\lambda=1$. Notons de même $X_0=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$ la deuxième colonne de P. On a $AX_0=0$. Donc X_0 est un vecteur propre non nul de A, associé à la valeur propre $\lambda=0$. Notons enfin $X_{-5}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ la troisième colonne de P. On a $AX_{-5}=-5X_{-5}$. Donc X_{-5} est un vecteur propre non nul de A, associé à la valeur propre $\lambda=-5$. Ainsi X_1, X_0 et X_{-5} sont trois vecteurs propres non nuls de la matrice A, associés chacun à l'une des valeurs propres de A. Donc (X_1,X_0,X_{-5}) est une base de $\mathbb{R}^3$. Donc la matrice P est inversible.

2. Pour tout $\lambda \in \{1, 0, -5\}$, notons E_λ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ. On suppose que f et g commutent, c'est-à-dire $g \circ f = f \circ g$. On veut démontrer que si $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ est un vecteur propre de f, alors $\vec{u}$ est un vecteur propre de g. Notons $\lambda \in \{1, 0, -5\}$. Supposons que $\vec{u} \in E_\lambda$ c'est-à-dire $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$. On a $g(f(\vec{u})) = \lambda g(\vec{u})$ c'est-à-dire $f(g(\vec{u})) = \lambda g(\vec{u})$. Donc $g(\vec{u}) \in E_\lambda$. On a donc $\forall \vec{u} \in E_\lambda,\ g(\vec{u}) \in E_\lambda$. De plus $\dim E_\lambda = 1$. Si on suppose que $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors $\exists k \in \mathbb{R},\ g(\vec{u}) = k\vec{u}$. Donc $\vec{u}$ est un vecteur propre de g, associé à la valeur propre k. Si on suppose que $\vec{u} = \vec{0}$, alors $\vec{u}$ est aussi un vecteur propre de g. On obtient ainsi le résultat cherché : $\forall \lambda \in \{1, 0, -5\},\ \forall \vec{u} \in E_\lambda$,

$$\vec{u} \in E_\lambda \quad \Longrightarrow \quad \vec{u} \text{ est un vecteur propre de } g.$$

3. On sait que f est diagonalisable. Notons

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_{-5} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On sait que $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_0, \vec{u}_{-5})$ est une base de vecteurs propres de f. Si g commute avec f, alors $\vec{u}_1$, $\vec{u}_0$, $\vec{u}_{-5}$ sont des vecteurs propres de g. Donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ dont les éléments sont à la fois des vecteurs propres de f et des vecteurs propres de g. Donc f et g sont simultanément diagonalisables.

4. (a) Notons M une matrice carrée. On sait que M commute avec M et avec M^2. Donc M commute avec $M^2 - 6M$. Si M est une solution de $(\mathcal{E})$, alors $M^2 - 6M = A$. Donc M commute avec A.

   (b) On sait que $\Delta = P^{-1}AP$. Notons M une matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels et $D = P^{-1}MP$. On vérifie facilement que M est une solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si D est une solution de $(\mathcal{E}')$. De plus, l'hypothèse que M est une solution de $(\mathcal{E})$ implique que M et A commutent, donc, d'après la question 3., M et A sont simultanément diagonalisables, donc D est diagonale.
   Conclusion : M est une solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si D est une solution de $(\mathcal{E}')$ et D est diagonale.

   (c) Résolvons l'équation $(\mathcal{E}')$. Notons $D = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}$ l'inconnue.

   On a :

   $$(\mathcal{E}') \qquad\qquad D^2 - 6D = \Delta$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} k_1^2 - 6k_1 & = & 1 & (e_1) \\ k_2^2 - 6k_2 & = & 0 & (e_2) \\ k_3^2 - 6k_3 & = & -5 & (e_3) \end{array}\right.$$

Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, notons $\mathcal{S}_i$ l'ensemble des solutions de l'équation (e_i). On a $\mathcal{S}_1 = \{3 - \sqrt{10}, 3 + \sqrt{10}\}$, $\mathcal{S}_2 = \{0, 6\}$ et $\mathcal{S}_3 = \{1, 5\}$. Donc l'équation $(\mathcal{E}')$ admet huit solutions, obtenues en remplaçant dans la matrice D, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, chaque k_i par l'un des deux éléments de $\mathcal{S}_i$. L'équation $(\mathcal{E})$ admet également huit solutions, qui sont les huit matrices $M = PDP^{-1}$ obtenues en remplaçant D par une solution de $(\mathcal{E}')$.

Exercice 2

1. (a) Notons V la matrice du vecteur $\vec{v}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En calculant le produit JV, on obtient $JV = V$. Donc $f(\vec{v}) = \vec{v}$.

(b) i. L'ensemble image de l'application linéaire f est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs colonnes de la matrice J. Ces trois vecteurs colonnes sont égaux et proportionnels au vecteur $\vec{v}$. Donc l'ensemble image de f est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ de vecteur directeur $\vec{v}$.

ii. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notons

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

On a

$$JX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

si et seulement si $x + y + z = 0$. Donc le noyau de f est le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + y + z = 0$.

(c) On obtient $J^2 = J$.

(d) i. On a vu que $J^2 = J$. Donc f est un endomorphisme de E satisfaisant l'égalité $f \circ f = f$. Donc f est la projection vectorielle de E sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$. De plus le vecteur directeur de $\operatorname{Im} f$, $\vec{v} = (1,1,1)$, est un vecteur normal du plan $\operatorname{Ker} f$ d'équation $x + y + z = 0$. Donc l'ensemble image et le noyau de f sont orthogonaux. Donc f est une projection orthogonale.

ii. Comme f est une projection vectorielle de E, alors f est diagonalisable. Les valeurs propres de f sont 0 et 1. Le sous-espace propre de f associé à la valenr propre 0 est $\operatorname{Ker} f$. Le sous-espace propre de f associé à la valenr propre 1 est $\operatorname{Im} f$.

2. (a) Supposons que $M = 0$. L'équation (A) s'écrit $\det(xJ) = 0$ c'est-à-dire $x^3 \det(J) = 0$. On a vu à la question 1.b) que l'ensemble image de f est une droite vectorielle. Donc le rang de la matrice J est égal à 1. Donc $\det(J) = 0$. Donc l'équation (A) s'écrit $0 = 0$. Elle est satisfaite quel que soit le nombre réel x. En conclusion $\mathcal{S}_{(A)} = \mathbb{R}$.

(b) Supposons que $M = I$. L'équation (A) s'écrit $\det(I + xJ) = 0$. On remarque que $x = 0$ n'est pas solution de cette équation. Supposons que $x \neq 0$. L'équation (A) s'écrit $\det\big(x(\frac{1}{x}I + J)\big) = 0$ c'est-à-dire $x^3 \det(\frac{1}{x}I + J) = 0$ c'est-à-dire $\det(\frac{1}{x}I + J) = 0$. Le nombre réel non nul x est solution de cette équation si et seulement si $-\frac{1}{x}$ est une valeur propre de la matrice J si et seulement si $-\frac{1}{x} = 0$ ou $-\frac{1}{x} = 1$. En conclusion $\mathcal{S}_{(A)} = \{-1\}$.

3. (a) Soit $\vec{u} \in E$. Supposons que $\vec{u}$ appartient au noyau de l'endomorphisme $g + xf$. On a $g(\vec{u}) + xf(\vec{u}) = \vec{0}$. Le vecteur $f(\vec{u})$ appartient à l'ensemble image de l'application f. Donc il existe un nombre réel λ tel que $f(\vec{u}) = \lambda\vec{v}$. On a donc $g(\vec{u}) + x\lambda\vec{v} = \vec{0}$. Donc $g(\vec{u}) = -x\lambda\vec{v}$. Donc $\vec{u} = -x\lambda g^{-1}(\vec{v})$. Donc $\vec{u}$ est colinéaire au vecteur $g^{-1}(\vec{v})$.

(b) i. Démontrons que si $\det(M + xJ) = 0$, alors $(g + xf)(\vec{w}) = \vec{0}$. Supposons que $\det(M + xJ) = 0$. Donc le noyau de l'endomorphisme $g + xf$ contient au moins un vecteur non nul $\vec{u}$. D'après la question précédente, il existe un nombre réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{w}$. Comme $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors $\lambda \neq 0$. Donc $\vec{w} = \frac{1}{\lambda}\vec{u}$. Donc $\vec{w}$ appartient au noyau de $g + xf$. Donc $(g + xf)(\vec{w}) = \vec{0}$.

ii. Démontrons la réciproque. Supposons que $(g + xf)(\vec{w}) = \vec{0}$. Donc $\vec{w}$ appartient au noyau de $g + xf$. Comme $\vec{v}$ est non nul et g^{-1} est une bijection, alors $\vec{w} = g^{-1}(\vec{v})$ est non nul. Donc $\vec{w}$ est un vecteur non nul appartenant au noyau de $g + xf$. Donc

$$\det(M + xJ) = 0.$$

iii. Démontrons que $(g+xf)(\vec{w}) = \vec{0}$ si et seulement si $1+x\frac{\sigma}{3} = 0$. On a $(g + xf)(\vec{w}) = \vec{0}$ si et seulement si $g(\vec{w}) + xf(\vec{w}) = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{v} + xf(\vec{w}) = \vec{0}$. Notons $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que $\vec{w} = (\alpha, \beta, \gamma)$. On a $\sigma = \alpha+\beta+\gamma$. En utilisant la matrice J, on obtient $f(\vec{w}) = \frac{\sigma}{3}\vec{v}$. Donc $(g+xf)(\vec{w}) = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{v} + x\frac{\sigma}{3}\vec{v} = \vec{0}$ si et seulement si $1 + x\frac{\sigma}{3} = 0$.

iv. On a vu que l'équation (A) est équivalente à l'équation

$$1 + x\frac{\sigma}{3} = 0.$$

- Si $\sigma = 0$, alors cette équation s'écrit $1 = 0$. Donc $\mathcal{S}_{(A)} = \emptyset$.
- Si $\sigma \neq 0$, alors $1 + x\frac{\sigma}{3} = 0$ si et seulement si $x = -\frac{3}{\sigma}\cdot$ Donc $\mathcal{S}_{(A)} = \{-\frac{3}{\sigma}\}$.

4. (a) Supposons que la matrice M est non inversible. Donc $\det(M) = 0$. Donc $x = 0$ est une solution de l'équation (A). Donc l'ensemble $\mathcal{S}_{(A)}$ est non vide.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, x est une solution de l'équation (B) si et seulement si $b+x$ est une solution de l'équation (A). Notons $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application qui à x associe $x + b$. L'ensemble image de $\mathcal{S}_{(B)}$ par l'application φ est égal à $\mathcal{S}_{(A)}$. Notons $\bar{\varphi} : \mathcal{S}_{(B)} \longrightarrow \mathcal{S}_{(A)}$ la restriction de φ. L'application $\bar{\varphi}$ est une bijection entre les deux ensembles $\mathcal{S}_{(B)}$ et $\mathcal{S}_{(A)}$.

(c) i. Supposons que pour tout $b \in \mathbb{R}$, la matrice $M + bJ$ est non inversible. Dans ce cas $\mathcal{S}_{(A)} = \mathbb{R}$.

ii. Supposons qu'il existe au moins un $b \in \mathbb{R}$ tel que la matrice $M+bJ$ est inversible. Supposons choisi un tel b. En appliquant à l'équation (B) le résultat de la question 3.b), on a $\mathcal{S}_{(B)}$ est l'ensemble vide ou $\mathcal{S}_{(B)}$ possède un élément et un seul. Comme $\mathcal{S}_{(A)}$ et $\mathcal{S}_{(B)}$ sont en bijection, alors $\mathcal{S}_{(A)}$ possède le même nombre d'éléments que $\mathcal{S}_{(B)}$. Enfin on a vu à la question 4.a) que 0 appartient à $\mathcal{S}_{(A)}$. Donc $\mathcal{S}_{(A)} = \{0\}$.

Exercice 3

Partie I

1. Supposons que α est une racine double du polynôme P. On sait qu'il existe un polynôme Q tel que

$$P = (X-\alpha)^2 Q \qquad \text{et} \qquad Q(\alpha) \neq 0.$$

Donc

$$P' = 2(X-\alpha)Q + (X-\alpha)^2 Q' = (X-\alpha)\big(2Q + (X-\alpha)Q'\big).$$

Donc α est une racine du polynôme P'.

2. Notons I la matrice unité. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$P_N(\lambda) = \det(N - \lambda I)$$
$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & q \\ 1 & -\lambda & p \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + p\lambda + q.$$

Donc $P_N = -X^3 + pX + q$.

3. Soit α une racine double du polynôme P_N. D'après la question 1), on sait que α est à la fois racine de P_N et racine de P'_N. Donc

$$P_N(\alpha) = 0 \qquad \text{et} \qquad P'_N(\alpha) = 0.$$

Comme $P'_N = -3X^2 + p$, alors $P'_N(\alpha) = 0$ s'écrit $\alpha^2 = \frac{p}{3}\cdot$ Donc

$$P_N(\alpha) = \alpha(-\alpha^2 + p) + q = \alpha\frac{2p}{3} + q.$$

Donc $P_N(\alpha) = 0$ s'écrit $\alpha\frac{2p}{3} = -q$. En élevant cette dernière égalité au carré, on obtient $\alpha^2\frac{4p^2}{9} = q^2$. En remplaçant α^2 par $\frac{p}{3}$, on obtient $\frac{4p^3}{27} = q^2$ c'est-à-dire $4p^3 = 27q^2$.

4. (a) Soit $(x,y) \in \mathbb{N}^2$. Si $4x^3 = 27y^2$, alors x est multiple de 3 et y est multiple de 2. Donc $\exists (k,\ell) \in \mathbb{N}^2$ tel que $x = 3k$ et $y = 2\ell$. De plus les troir conditions $4x^3 = 27y^2$ et $x = 3k$ et $y = 2\ell$ impliquent l'égalité $k^3 = \ell^2$. Donc $\exists (k,\ell) \in \mathbb{N}^2$ tel que $x = 3k$ et $y = 2\ell$ et $k^3 = \ell^2$.

(b) Réciproquement si $\exists(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$ tel que $x = 3k$ et $y = 2\ell$ et $k^3 = \ell^2$, alors $4x^3 = 27y^2$. Donc l'étude de l'équation $4x^3 = 27y^2$ est équivalente à l'étude de l'équation $k^3 = \ell^2$.

(c) Les trois plus petites valeurs de $k \in \mathbb{N}$ telles que $\exists \ell \in \mathbb{N}$ tel que $k^3 = \ell^2$ sont $(k = 0, \ell = 0)$, $(k = 1, \ell = 1)$ et $(k = 4, \ell = 8)$. Donc les trois plus petits éléments de $\mathcal{S}$ sont $x = 0$, $x = 3$ et $x = 12$.

Partie II

1. On a $P_N = -X^3 + 3X + 2$.
2. On remarque que -1 est une racine de P_N. On obtient ensuite

$$P_N = (X+1)(-X^2 + X + 2).$$

Donc $P_N = -(X+1)^2(X-2)$. En conclusion $\lambda_1 = -1$ est une racine double de P_N et $\lambda_2 = 2$ est une racine simple de P_N.

3. Notons g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice N. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $\vec{u} = (x,y,z)$. On a $\vec{u} \in E_1$ si et seulement si $g(\vec{u}) = -\vec{u}$ si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2z & = & -x \\ x + 3z & = & -y \\ y & = & -z \end{array} \right.$$

si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -2z \\ y & = & -z \end{array} \right.$$

si et seulement si $\vec{u} = z(-2,-1,1)$. Notons $\vec{a} = (-2,-1,1)$. Le sous-espace propre E_1 est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ de vecteur directeur $\vec{a}$.

4. Notons $\vec{u} = (x,y,z)$. On a $\vec{u} \in E_2$ si et seulement si $g(\vec{u}) = 2\vec{u}$ si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2z & = & 2x \\ x + 3z & = & 2y \\ y & = & 2z \end{array} \right.$$

si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & 2z \end{array} \right.$$

si et seulement si $\vec{u} = z(1,2,1)$. Notons $\vec{b} = (1,2,1)$. Le sous-espace propre E_2 est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ de vecteur directeur $\vec{b}$.

5. On a $\dim E_1 = \dim E_2 = 1$. La matrice N n'est pas diagonalisable, car $\dim E_1 + \dim E_2$ n'est pas égal à 3.

6. (a) On obtient

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{16}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

(b) i. Notons P_M le polynôme caractéristique de M. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} P_M(\lambda) &= \det(M - \lambda I) \\ &= \begin{vmatrix} -\frac{7}{9} - \lambda & \frac{4}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} - \lambda & \frac{16}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 \\ &= -(\lambda + 1)(\lambda^2 - 1) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 1). \end{aligned}$$

La matrice M admet deux valeurs propres $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 1$.

ii. Notons F_1 le sous-espace propre de M associé à la valeur propre λ_1. Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice M. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $\vec{u} = (x, y, z)$. On a $\vec{u} \in F_1$ si et seulement si $f(\vec{u}) = -\vec{u}$ si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\frac{7}{9}x + \frac{4}{9}y + \frac{8}{9}z & = & -x \\ \frac{4}{9}x - \frac{1}{9}y + \frac{16}{9}z & = & -y \\ \frac{2}{9}x + \frac{4}{9}y - \frac{1}{9}z & = & -z \end{array} \right.$$

si et seulement si $x + 2y + 4z = 0$. Donc le sous-espace propre F_1 est le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + 2y + 4z = 0$. Notons $\vec{c}_1 = (-2, 1, 0)$ et $\vec{c}_2 = (-4, 0, 1)$. La famille $(\vec{c}_1, \vec{c}_2)$ est une base du plan F_1.

iii. Notons F_2 le sous-espace propre de M associé à la valeur propre λ_2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $\vec{u} = (x, y, z)$. On a $\vec{u} \in F_2$ si et seulement si $f(\vec{u}) = \vec{u}$ si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\frac{7}{9}x + \frac{4}{9}y + \frac{8}{9}z & = & x \\ \frac{4}{9}x - \frac{1}{9}y + \frac{16}{9}z & = & y \\ \frac{2}{9}x + \frac{4}{9}y - \frac{1}{9}z & = & z \end{array} \right.$$

si et seulement si
$$\begin{cases} x &= z \\ y &= 2z \end{cases}$$
On retrouve le sous-espace vectoriel E_2 obtenu à la question 4). Donc F_2 est une droite vectorielle et $\vec{b} = (1, 2, 1)$ est un vecteur directeur de la droite F_2.

(c) D'après la question précédente, on a $\dim F_1 = 2$ et $\dim F_2 = 1$. Comme $\dim F_1 + \dim F_2 = 3$, alors M est diagonalisable. Comme M est diagonalisable et les seules valeurs propres de M sont 1 et -1, alors M est la matrice d'une symétrie.

(d) La symétrie M s'effectue par rapport au sous-espace propre F_2 associé à la valeur propre 1 et parallèlement au sous-espace propre F_1 associé à la valeur propre -1.

(e) La matrice M est la matrice d'une symétrie orthogonale si et seulement si les deux sous-espaces propres F_1 et F_2 sont orthogonaux. Comme le plan F_1 admet $x + 2y + 4z = 0$ pour équation cartésienne, alors $\vec{c}_3 = (1, 2, 4)$ est un vecteur normal du plan F_1. Comme les deux vecteurs $\vec{c}_3$ et $\vec{b}$ ne sont pas colinéaires, alors la droite F_2 n'est pas orthogonale au plan F_1. En conclusion, M n'est pas la matrice d'une symétrie orthogonale.

Exercice 4

1. On sait que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}^\perp$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. On a $p + q = \mathrm{Id}$.

2. Comme $\vec{u}$ est un vecteur unitaire, alors $p(\vec{v}) = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \vec{u}$.
On a $p(\vec{\imath}) = \langle \vec{\imath}, \vec{u} \rangle \vec{u} = a\vec{u}$. De même $p(\vec{\jmath}) = b\vec{u}$ et $p(\vec{k}) = c\vec{u}$.
La matrice du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On a donc $P = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$ et $Q = I - P = \begin{pmatrix} 1-a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1-b^2 & -bc \\ -ac & -bc & 1-c^2 \end{pmatrix}$.

3. (a) D'après l'expression de M, on a
$$M^2 = \begin{pmatrix} -b^2 - c^2 & ab & ac \\ ab & -a^2 - c^2 & bc \\ ac & bc & -a^2 - b^2 \end{pmatrix}.$$

Comme $a^2+b^2+c^2=1$, alors on obtient $M^2=-Q$.

(b) On obtient $f(\vec{u})=\vec{0}$. Donc $\dim \operatorname{Ker} f \geqslant 1$. Comme $\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f = 3$, alors $\operatorname{rg} f \leqslant 2$.
Comme les vecteurs colonnes de M ne sont pas tous les trois proportionnels, alors le rang de f n'est égal ni à 0 ni à 1. Donc $\operatorname{rg} f = 2$ et $\dim \operatorname{Ker} f = 1$. Il en résulte que $\operatorname{Ker} f = \mathcal{D}$. Par ailleurs on remarque que $\langle f(\vec{\imath}), \vec{u}\rangle = \langle f(\vec{\jmath}), \vec{u}\rangle = \langle f(\vec{k}), \vec{u}\rangle = 0$. Donc $\operatorname{Im} f \subset \mathcal{D}^{\perp}$. De plus $\operatorname{Im} f$ et $\mathcal{D}^{\perp}$ ont même dimension. Donc $\operatorname{Im} f = \mathcal{D}^{\perp}$.

(c) Comme p est le projecteur orthogonal sur $\mathcal{D}$, alors $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, on a $p(\vec{v}) \in \mathcal{D}$. Comme $\mathcal{D} = \operatorname{Ker} f$, alors $f \circ p = 0$.
Comme $f \circ p = 0$, alors $MP = 0$. On a aussi $P = I - Q = I + M^2$. Donc $M(I+M^2) = M + M^3 = 0$. Donc $X + X^3$ est un polynôme annulateur de f.

(d) Comme $X + X^3$ est un polynôme annulateur de f, alors toutes les valeurs propres de f sont des racines de $X+X^3$. Réciproquement démontrons que les trois racines 0, i et $-i$ de $X+X^3$ sont des valeurs propres de f. Comme $\dim \operatorname{Ker} f = 1$, alors 0 est une valeur propore de f. Démontrons que 0 n'est pas la seule valeur propre de f. Si 0 était la seule valeur propre de f, alors 0 serait la seule racine du polynôme caractéristique de f. Donc le polynôme caractéristique de f serait X^3. Donc X^3 serait un polynôme annulateur de f. On aurait $f + f^3 = 0$ et $f^3 = 0$. Donc $f = 0$. Donc $\dim \operatorname{Ker} f = 3$, ce qui n'est pas vrai. Donc 0 n'est pas la seule valeur propre de f. Comme f admet au moins une valeur propre non nulle, alors i ou $-i$ est une valeur propre de f. Comme de plus la matrice de f est à coefficients réels, alors les deux nombres complexes conjugués i et $-i$ sont des valeurs propres de f. En conclusion l'ensemble des valeurs propres de f est l'ensemble à trois éléments $\{0, i, -i\}$.
Comme les trois valeurs propres 0, i et $-i$ de f sont deux à deux distinctes, alors f est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Comme certaines des valeurs propres de f ne sont pas des nombres réels, alors f n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

4. (a) On a $g_\theta \circ g_{\theta'}$

$$\begin{aligned} &= \left[\mathrm{Id} + (\sin\theta) f + (1-\cos\theta) f^2\right] \circ \left[\mathrm{Id} + (\sin\theta') f + (1-\cos\theta') f^2\right] \\ &= \mathrm{Id} + (\sin\theta + \sin\theta') f + (2 - \cos\theta - \cos\theta' + \sin\theta\sin\theta') f^2 \\ &+ \big(\sin\theta(1-\cos\theta') + \sin\theta'(1-\cos\theta)\big) f^3 \\ &+ (1-\cos\theta)(1-\cos\theta') f^4. \end{aligned}$$

En utilisant les deux égalités $f^3 = -f$ et $f^4 = -f^2$, on obtient $g_\theta \circ g_{\theta'} = g_{\theta+\theta'}$. Donc $g_\theta \circ g_{\theta'}$ s'écrit sous la forme $g_{\theta''}$ avec $\theta'' = \theta + \theta'$.

(b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Si $\theta = 0$, alors $g_\theta = \mathrm{Id}$. Donc

$$g_\theta \circ g_{-\theta} = g_{-\theta} \circ g_\theta = \mathrm{Id}\,.$$

Donc l'endomorphisme g_θ est inversible et $(g_\theta)^{-1} = g_{-\theta}$.

Fin du corrigé

Sous la responsabilité de la directrice du site de Vanves
M^{me} Sarah Fayet

Le CNED remercie les nombreuses personnes qui ont contribué à la réussite de ce projet.

Qu'elles trouvent ici l'expression de toute sa reconnaissance.