CNED

Capes externe de mathématiques

ÉPREUVE D'ADMISSIBILITÉ 2

EXEMPLE DE SUJET CORRIGÉ N°1

Virginie Le Men

CNED, BP 60200, 86980 Futuroscope Chasseneuil Cedex, France

1-2012-TC-WB-01-21

Exemple de sujet corrigé n°1

Épreuve d'admissibilité 2

Sommaire

Énoncé 2
Corrigé 5

Préparation au CAPES Concours externe de mathématiques et CAFEP. Seconde épreuve d'admissibilité

Cette épreuve est composée de deux problèmes indépendants.

PROBLEME 1 : triplets pythagoriciens

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, si un triangle a des côtés de longueurs 3, 4 et 5 alors il est rectangle.
L'objectif de ce problème est de déterminer les dimensions des triangles rectangles dont les longueurs des côtés sont des entiers.

Première partie : exemples de triangles rectangles

1. Soit ABC un triangle rectangle en A.
   (a) On suppose que $AB = 1$ et $AC = \sqrt{p}$ où p est un entier strictement positif. Déterminer BC.
   (b) En déduire une méthode de construction d'un segment de longueur $\sqrt{3}$ avec une règle **non graduée** et un compas, à partir d'un segment donné de longueur 1.
2. Démontrer qu'il n'existe pas de triangle rectangle ayant pour dimensions trois entiers et dont l'un vaut 1.
3. (a) Déterminer tous les triangles rectangles ayant pour dimensionstrois entiers consécutifs.
   (b) Soit un triangle rectangle dont les dimensions a, b, c (avec $a \leqslant b \leqslant c$) sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique.
   Montrer que le triplet (a, b, c) est proportionnel au triplet (3,4,5).

Deuxième partie : quelques propriétés des triplets pythagoriciens

On appelle triplet pythagoricien tout triplet $(x, y, z) \in (\mathbf{N}^3)$ tel que $x \leqslant y \leqslant z$ et $x^2 + y^2 = z^2$.
On appelle triplet pythagoricien primitif tout triplet pythagoricien (x, y, z) tel que le PCGD de x, y et z est égal à 1.

Énoncé

Exercice

On se place dans le plan euclidien.

1. Au collège.

   a) Démontrer à des élèves de quatrième le théorème de Thalès pour la configuration triangulaire usuelle :

   > ABC est un triangle. M est un point de]A, B[et N est un point de]A, C[.
   > Si (MN) est parallèle à (BC) alors :
   > $$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

   b) Démontrer, sans utiliser le théorème de Thalès, le théorème des milieux dans un triangle.

2. Au lycée. Dans le plan muni d'un repère $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, on considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ où $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$.

   La droite $\mathcal{D}$ partage le plan en trois sous ensembles non vides et deux à deux disjoints : l'ensemble E_1 défini par les points $M(x,\ y)$ tels que $ax + by + c > 0$, l'ensemble E_2 défini par les points $M(x,\ y)$ tels que $ax+by+c < 0$ et l'ensemble $\mathcal{D}$

   - Montrer que, si A et B sont deux points d'un même sous-ensemble alors le segment $[AB]$ est contenu dans le même sous-ensemble.

- Montrer que, si A et B sont deux points de deux des trois sous-ensembles alors l'intersection du segment $[AB]$ et de la droite $\mathcal{D}$ est formée d'un unique point.

3. Soit ABC un triangle. La bissectrice intérieure issue de A coupe le segment [BC] en un point I. Démontrer, en utilisant le théorème de Thalès que :

$$\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}.$$

4. Application :
Soit ABC un triangle non isocèle. On note D le point d'intersection de la bissectrice intérieure issue de A avec la médiatrice de [BC]. On note A' le milieu de [BC]. Le point D se projette orthogonalement sur (AC) en E et sur (AB) en F.
   a) Montrer que D est extérieur au segment [AI].
   b) Démontrer que les projections orthogonales E et F respectivement sur (AC) et (AB) ne peuvent être simultanément sur les segments [AB] et [AC].

Problème

Partie 1

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on considère le produit scalaire défini par

$$\forall A,\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad (A \mid B) = \operatorname{tr}\left({}^tAB\right)$$

On notera $\|\cdot\|$ la norme associée.
Soit $F = (f_{i,j})$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\begin{cases} f_{i,i} = 1 & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant n \\ f_{i,1} = 1 & \text{si } 2 \leqslant i \leqslant n \\ f_{i,n} = 1 & \text{si } 2 \leqslant i \leqslant n-1 \\ f_{i,j} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note H l'ensemble des matrices X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $(F \mid X) = 0$.

1. Montrer que H est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Si on note $x_{i,j}$ le terme général de la matrice X, exprimer $(F \mid X)$ en fonction des $x_{i,j}$.

On rappelle que la distance d'une matrice M à un hyperplan H est définie par :

$$d(M,\ H) = \inf_{U \in H} \|U - H\|.$$

3. Montrer que la distance d'une matrice M à H est :

$$d\left(M,\ H\right) = \frac{|(F \mid M)|}{\|F\|}.$$

4. Calculer $\|F\|$ en fonction de n.
5. On note $B = F - I_n$.
   a) Déterminer le rang de B.
   b) Montrer que B^2 et B ont même rang.
   c) On appelle g l'endomorphisme de R^n canoniquement associé à B.
   Montrer que $\operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Im} g = \mathbb{R}^n$.
   d) Montrer alors que la matrice B est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$ où $B' \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$.
   e) Expliquer pourquoi B est diagonalisable. Montrer que B' est diagonalisable.
   f) Calculer $\operatorname{tr} B$ et $\operatorname{tr} B^2$ si on admet que B' est diagonalisable et on note λ et μ ses valeurs propres.
   Calculer λ et μ.
   g) On note $E_\nu(F) = \operatorname{Ker}(F - \nu I_n)$. Montrer que : $E_0(F)$; $E_1(F)$ et $E_2(F)$ sont $\neq \{0\}$. Montrer que ces sous-espaces vectoriels sont de dimensions respectives 1, $n-2$ et 1.
6. Soit $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_i X^k$ un polynôme à coefficients réels de degré k. On définit la matrice $P\left({}^tF\right)$ par :

$$P\left({}^tF\right) = a_0 I_n + \sum_{i=1}^{k} a_i \left({}^tF\right)^i.$$

   Calculer la distance de la matrice $P\left({}^tF\right)$ à l'hyperplan H en fonction de P.
   On pourra calculer $S\left({}^tF\right)$ où $S = XP(X)$.

Partie 2

H est ici un hyperplan d'un espace vectoriel réel E et h une forme linéaire non nulle de noyau H.

1. Dans cette question E est de dimension finie. Soit x_0 un vecteur de E.
   a) Montrer qu'il existe une suite (y_n) d'éléments de H telle que :
   $$\lim_{n\to+\infty} \|x_0 - y_n\| = d(x_0,\ H).$$
   b) Montrer qu'il existe une suite $(y_{\varphi(n)})$ de (y_n) qui converge vers un élément de H.
   c) En déduire qu'il existe un vecteur de H, que l'on notera y_0 tel que :
   $$d(x_0,\ H) = \|x_0 - y_0\|.$$
   La distance de x_0 à H est ainsi atteinte.
2. Dans cette question E est de dimension quelconque.
   a) Montrer que le noyau d'une forme linéaire h, continue sur E, est fermée dans E.
   b) Montrer, réciproquement, que si le noyau de h est fermé alors h est continue.
   On pourra montrer que si h n'est pas continue, il existe une suite (t_n) de E telle que $\lim_{n\to+\infty} t_n = 0$ avec $\forall n \in \mathbb{N},\ h(t_n) = 1$. Puis on utilisera la suite $(t_n - t_0)$ pour obtenir une contradiction.
   c) Montrer que si H est un hyperplan de E, alors son adhérence $\overline{H}$ est un sous-espace vectoriel de E.
   d) En déduire que tout hyperplan de E est soit dense soit fermé dans E.

Corrigé

Exercice

On se place dans le plan euclidien.

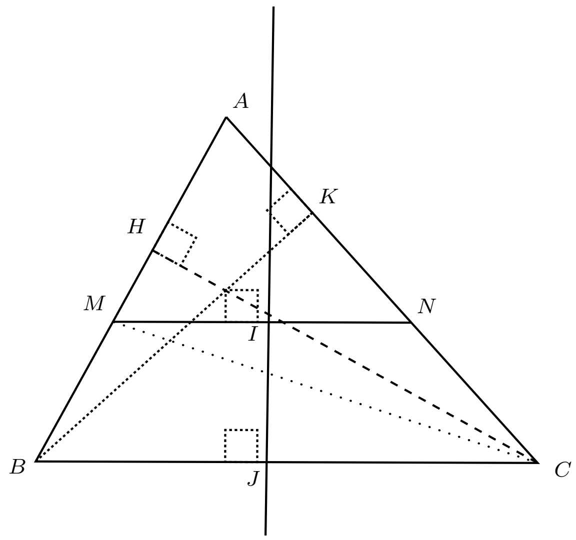
1. Au collège.

   a) Démontrer à des élèves de quatrième le théorème de Thalès pour la configuration triangulaire usuelle.

   Théorème

   ABC est un triangle. M est un point de]A, B[et N est un point de]A, C[.
   Si (MN) est parallèle à (BC) alors :

   $$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$



- On a : Aire(AMC)=Aire(ANB) en remarquant que Aire(MNC)=Aire(MNB).
- En utilisant les hauteurs issues respectivement de C, soit CH et de B soit CK, on obtient :

$$\frac{\text{Aire}(AMC)}{\text{Aire}(ABC)} = \frac{AM}{AB}$$

et

$$\frac{\text{Aire}(ANB)}{\text{Aire}(ABC)} = \frac{AN}{AC}$$

- Il en découle que :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}.$$

- Pour l'égalité complémentaire. On considère la perpendiculaire issue de A qui coupe (MN) en I et (BC) en J. On va se placer dans le cas où le triangle est sans angle obtus.
- On obtient comme ci-dessus que :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AI}{AJ}, \quad \frac{AN}{AC} = \frac{AI}{AJ}$$

- Le triangle AIB a la même aire que le triangle AMJ. Or $\text{Aire}(AIB) = AI \times BJ/2$ et $\text{Aire}(AMJ) = MI \times AJ/2$, on en déduit donc que

$$\frac{AI}{AJ} = \frac{MI}{BJ},$$

et de même on montre que :

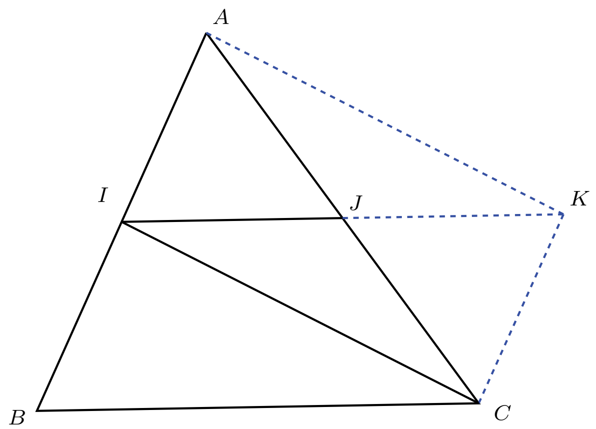
$$\frac{AI}{AJ} = \frac{IN}{JC},$$

- On montre que, si $a,\ b,\ c,\ d$ sont des réels>0 tels que $bd \neq 0$ et $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ alors
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$
avec $b \neq d$ pour la dernière égalité.
La preuve résulte de la définition des rapports égaux : $ad = bc$.
- On a alors, avec la configuration sans angle obtus, et sachant que les points N, I, M sont alignés et pareil pour les points B, J, C :
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MI}{BJ} = \frac{IN}{JC} = \frac{MI+IN}{BJ+JC} = \frac{MN}{BC}.$$
- Si le triangle a un angle obtus, on utilise la différence.

b) Démontrer, sans utiliser le théorème de Thalès, le théorème des milieux dans un triangle.

Théorème

Si un segment joint les milieux de deux côtés d'un triangle alors il est parallèle au troisième côté et mesure la moitié du troisième côté de ce triangle.



- On construit le point K symétrique de I par rapport à J. Ces points sont alignés.

- AKCI est alors un parallélogramme car ses diagonales sont concourantes en leur milieu commun J.
- Le quadrilatère KCBI est convexe (non croisé pour les élèves) car I et K sont du même coté par rapport à (BC). En outre (IB) est parallèle à (KC) et IB=IA=KC. Par suite KCBI est un parallélogramme.
- Il en découle que (IJ) est parallèle à (BC) et $IJ = \frac{1}{2}KI = \frac{1}{2}BC$.

2. Au lycée. Dans le plan muni d'un repère $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, on considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ où $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$.

   La droite $\mathcal{D}$ partage le plan en trois sous-ensembles non vides et deux à deux disjoints : l'ensemble E_1 défini par les points $M(x,\ y)$ tels que $ax + by + c > 0$, l'ensemble E_2 défini par les points $M(x,\ y)$ tels que $ax+by+c < 0$ et l'ensemble $\mathcal{D}$.

   - Montrer que, si A et B sont deux points d'un même sous-ensemble alors le segment $[AB]$ est contenu dans le même sous-ensemble.

     Tout point M du segment [AB] est caractérisé $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ où $t \in [0,\ 1]$. Les coordonnées du point M sont alors :

     $$((1-t)x_A + tx_B,\ (1-t)y_A + ty_B)$$

     On a alors :

     $$\begin{aligned} f(t) &= a\left((1-t)x_A + tx_B\right) + b\left((1-t)y_A + ty_B\right) + c \\ &= (1-t)\left(ax_A + by_A + c\right) + t\left(ax_B + by_B + c\right) \end{aligned}$$

     or, ax_A+by_A+c et ax_B+by_B+c ont le même signe ou sont simultanément nuls. Il en résulte que $f(t)$ a le même signe que ces réels ou est nul, puisque $1-t \geqslant 0$ et $t \geqslant 0$.

     Il en résulte que M est dans le même sous-ensemble que A et B.

     On a reconnu que nous avons démontré que $E_1,\ E_2,\ \mathcal{D}$ sont convexes.

   - Montrer que, si A et B sont deux points de deux des trois sous-ensembles alors l'intersection du segment $[AB]$ et de la droite $\mathcal{D}$ est formée d'un unique point.

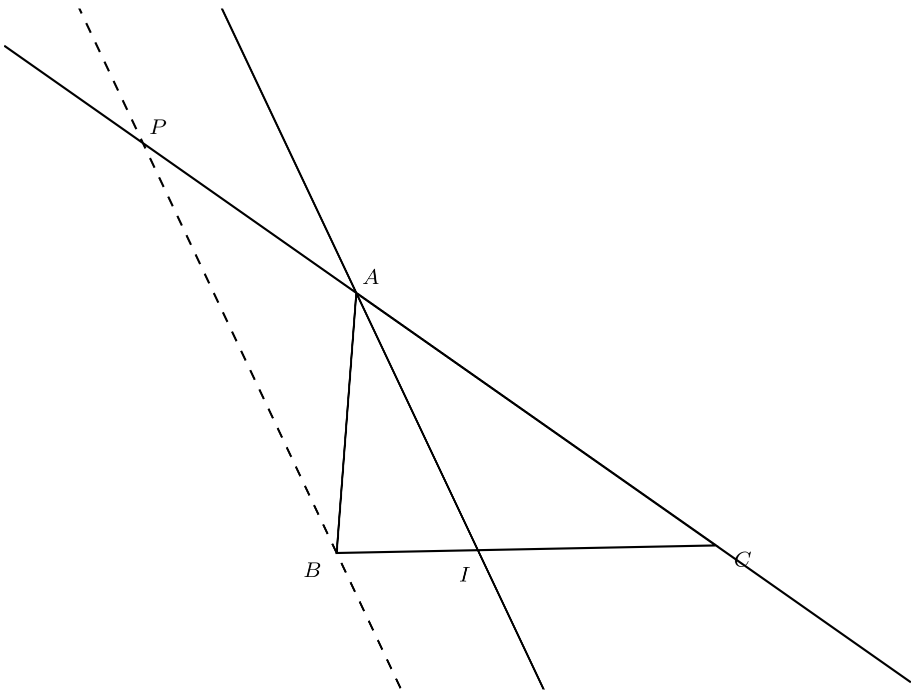
     C'est clair si $\mathcal{D}$ est l'un des sous-ensembles.

     On reprend les notations ci-dessus et la fonction f. Si $A \in E_1$ et $B \in E_2$ alors $f(1) < 0$ et $f(0) > 0$. Or f est une fonction polynomiale donc continue sur $[0,\ 1]$ et le théorème des valeurs intermédiaires nous assure qu'il existe au moins un réel $t \in]0,\ 1[$ tel que $f(t) = 0$. Ce réel est unique car une droite qui contient deux points distincts contient la droite toute entière.

Si on veut utiliser la notion de restriction de fonction affine, la discussion est moins immédiate !

3. Soit ABC un triangle. La bissectrice intérieure issue de A coupe le segment [BC] en un point I. Démontrer, en utilisant le théorème de Thalès que :

$$\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}.$$



Traçons par B la parallèle à la bissectrice (AI), elle coupe la droite (AC) en P. Par le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{IB}{IC} = \frac{AP}{AC}.$$

Le triangle PAB est isocèle de sommet A. En effet, on les égalités d'angles suivantes :

$$\left(\overrightarrow{PB},\, \overrightarrow{PC}\right) = \left(\overrightarrow{AI},\, \overrightarrow{AC}\right)$$
$$\left(\overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AI}\right) = \left(\overrightarrow{BA},\, \overrightarrow{IA}\right) = \left(\overrightarrow{BA},\, \overrightarrow{BP}\right)$$

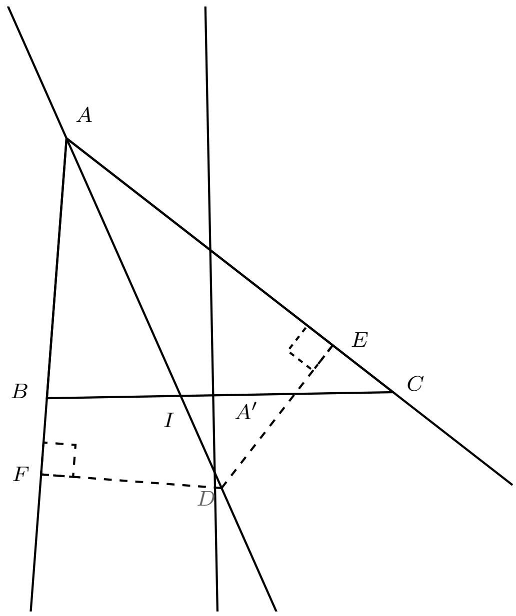
Et comme (AI) est la bissectrice intérieure issue de A, il en résulte que :

$$\left(\overrightarrow{PB},\, \overrightarrow{PC}\right) = \left(\overrightarrow{BA},\, \overrightarrow{BP}\right).$$

Ainsi $AP = AB$ et $\dfrac{IB}{IC} = \dfrac{AB}{AC}$.

4. Application :

Soit ABC un triangle non isocèle. On note D le point d'intersection de la bissectrice intérieure issue de A avec la médiatrice de [BC]. On note A' le milieu de [BC]. Le point D se projette orthogonalement sur (AC) en E et sur (AB) en F.



a) Montrer que D est extérieur au segment [AI].

On prend les notations de la figure ci-dessus. Comme le triangle est non isocèle, on a par exemple $\dfrac{IB}{IC} < 1$, donc I appartient au segment ouvert]BA'[. Si D appartenait à [AI], alors la médiatrice serait la droite issue de D et perpendiculaire à (BC) et D se projette sur un point de [BI], ce qui est impossible.

b) Démontrer que les projections orthogonales E et F ne peuvent être simultanément sur les segments [AB] et [AC].

Si E est sur [AC] et F sur [AB] alors le triangle ABC est isocèle, ce qui est impossible. En effet :

- On a : DF=DE car tout point de la bissectrice est équidistante des côtés de l'angle.
- Comme les triangles DFA et DEA sont rectangles, il en découle que FA=EA.
- On a DB=DC car D est sur la médiatrice de [BC].

- Comme les triangles DFB et DEC sont rectangles, il en découle que FB=EC

Comme $F \in [AB]$ et $E \in [AC]$ il en découle que :

$$AB = FA + FB = EA + EC = AC.$$

Problème

Partie 1

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on considère le produit scalaire défini par

$$\forall A,\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad (A \mid B) = \operatorname{tr}\left({}^tAB\right)$$

On notera $\|\cdot\|$ la norme associée.

Soit $F = (f_{i,j})$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\begin{cases} f_{i,i} = 1 & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant n \\ f_{i,1} = 1 & \text{si } 2 \leqslant i \leqslant n \\ f_{i,n} = 1 & \text{si } 2 \leqslant i \leqslant n-1 \\ f_{i,j} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note H l'ensemble des matrices X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $(F \mid X) = 0$.

1. Montrer que H est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   $X \mapsto (F \mid X)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et elle est non nulle car $(F \mid F) = 3n - 2 \neq 0$ donc son noyau est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et, ainsi, H est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Si on note $x_{i,j}$ le terme général de la matrice X, exprimer $(F \mid X)$ en fonction des $x_{i,j}$.

   Posons $Y = {}^tFX$. On a :

   $$\forall i \in [\![1,\ n]\!],\ y_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} f_{k,i}x_{k,i}$$

   donc

   $$(X \mid F) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f_{k,i}x_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} x_{k,k} + \sum_{k=2}^{n} x_{k,1} + \sum_{k=1}^{n-1} x_{k,n}.$$

On rappelle que la distance d'une matrice M à un hyperplan H est définie par :

$$d(M,\ H) = \inf_{U \in H} \|U - H\|.$$

3. Montrer que la distance d'une matrice M à H est :

$$d\,(M,\ H) = \frac{|(F \mid M)|}{\|F\|}.$$

Par définition de H, on a $F \notin H$, et comme H est un hyperplan on a :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = H \oplus \mathbb{R}F.$$

Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $N \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = N + \lambda F$. On détermine le projeté orthogonal de M sur H. On détermine donc λ tel que $(M - \lambda F \mid F) = 0$. Par suite :

$$\lambda = \frac{(F \mid M)}{\|F\|^2}.$$

On a donc, pour tout $U \in H$,

$$\|M - U\|^2 = \|N - U\|^2 + \lambda^2\|F\|^2 \geqslant \lambda^2\|F\|^2 = \frac{(F \mid M)^2}{\|F\|^2}.$$

Par suite

$$d(M,\ H) = \frac{|(F \mid M)|}{\|F\|}.$$

4. Calculer $\|F\|$ en fonction de n.

On a déjà vu que $(F \mid F) = \sum_{i,k} f_{k,i}^2 = 3n - 2$ et donc $\|F\| = \sqrt{3n-2}$.

5. On note $B = F - I_n$.

a) Déterminer le rang de B.

La matrice de B s'écrit :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\operatorname{rg} B = 2$.

b) Montrer que B^2 et B ont même rang.

Si on note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et g l'endomorphisme associé à B, on a $g^2(e_1) = e_n,\ g^2(e_n) = e_1,\ \forall i \in [\![2,\ n-1]\!],\ g^2(e_i) = 0$. Par suite $\operatorname{rg} B^2 = 2$.

c) On appelle g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B. Montrer que $\operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Im} g = \mathbb{R}^n$.

Par le théorème du rang on a :

$$\dim \operatorname{Ker} g + \dim \operatorname{Im} g = n.$$

Soit $x \in \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} g$, alors il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = g(y)$ et $g(x) = 0$. Donc $g^2(y) = 0$. Ainsi $y \in \operatorname{Ker} g^2$. Mais $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} g^2$ et $\dim \operatorname{Ker} g = n-2$ et $\dim \operatorname{Ker} g^2 = n-2$ puisque g et g^2 ont le même rang. Par conséquent $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} g^2$ et donc $y \in \operatorname{Ker} g$, ce qui implique $x = g(y) = 0$. On a :

$$\operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Im} g = \mathbb{R}^n.$$

d) Montrer alors que la matrice B est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$ où $B' \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$.

Prenons une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ adaptée à la somme directe ci-dessus telle que $(e_1, \ldots, e_{n-2})$ soit une base de $\operatorname{Ker} g$ et $(e_{n-1},\ e_n)$ une base de $\operatorname{Im} g$. On a alors

$$\forall k \in [\![1,\ n-2]\!],\ g(e_k) = 0,$$

et

$$\forall k \in [\![n-1,\ n]\!], g(e_k) \in \operatorname{Im} g = \operatorname{Vect}(e_{n-1},\ e_n)$$

donc

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix},\quad \text{où}\quad B' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

De plus, comme

$2 = \operatorname{rg} g = \operatorname{rg} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} O \\ B' \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} O & {}^tB' \end{pmatrix} = \operatorname{rg} {}^tB' = \operatorname{rg} B'$. Il en découle que B' est inversible.

e) Expliquer pourquoi B est diagonalisable.

On vérifie que $B^3 = B$. Notons $(v_1, \ldots, v_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Posons $v = \sum_{k=2}^{n} v_k$ et $v' = \sum_{k=1}^{n-1} v_k$.

- Pour tout $i \in [\![2,\ n-1]\!]$, et pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $g^k(e_i) = 0$.

- $g(v_1) = v,\ g^2(v_1) = v',\ g^3(v_1) = v,$
- $g(v_n) = v',\ g^2(v_n) = v,\ g^3(v_n) = v',$

ainsi $P = X^3 - X$ est un polynôme annulateur scindé de g, donc g et bien sûr B sont diagonalisables et les valeurs propres sont dans $\{0,\ -1,\ 1\}$.
La restriction de g au sous-espace engendré par v et v' est stable par g, donc la restriction de g et aussi B' sont diagonalisables.

f) Calculer $\operatorname{tr} B$ et $\operatorname{tr} B^2$. On note λ et μ les valeurs propres de B'.
Calculer λ et μ.

On a $\operatorname{tr} B = 0$ et $\operatorname{tr} B^2 = 2$.
B' étant diagonalisable, elle est semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à $\operatorname{diag}(\lambda,\ \mu)$ et donc B^2 est semblable à $\operatorname{diag}\left(\lambda^2,\ \mu^2\right)$.
Or, $\operatorname{tr}(B') = \operatorname{tr}(B) = \lambda + \mu = 0$. Comme 0 ne peut pas être valeur propre de B'— sinon le rang de B est $n-1$ car $B \neq 0$— on a $\lambda = 1$ et $\mu = -1$.
Si on admet que B' est diagonalisable, avec la condition $\operatorname{tr} B' = \lambda^2 + \mu^2 = 2$, on aboutit à la même conclusion.

g) On note $E_\nu(F) = \operatorname{Ker}(F - \nu I_n)$. Montrer que : $E_0(F)$; $E_1(F)$ et $E_2(F)$ sont $\neq \{0\}$. Montrer que ces sous-espaces vectoriels sont de dimensions respectives 1, $n-2$ et 1.

Comme B est diagonalisable, il en est de même pour $F = I_n + B$. En effet : si x est un vecteur non nul et α un réel,

$$Fx = \alpha x \Leftrightarrow (I_n + B)x = \alpha x$$

et donc

$$Fx = \alpha x \Leftrightarrow Bx = (\alpha - 1)x$$

par suite

$$E_\alpha(F) = E_{\alpha-1}(B).$$

En particulier, on a $E_0(B) = E_1(F)$ qui est de dimension $n-2$, qui est le rang de g.
Or $\dim E_{-1}(B) = \dim E_1(B) = 1$ d'où

$$\dim E_0(F) = \dim E_2(F) = 1.$$

6. Soit $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_i X^k$ un polynôme à coefficients réels de degré k. On définit la matrice $P\left({}^tF\right)$ par :

$$P\left({}^tF\right) = a_0 I_n + \sum_{i=1}^{k} a_i \left({}^tF\right)^i.$$

Calculer la distance de la matrice $P\left({}^tF\right)$ à l'hyperplan H en fonction de P. On pourra calculer $S\left({}^tF\right)$ où $S = XP(X)$.

En utilisant la question 3, il suffit de calculer

$$\left(F \mid P({}^tF)\right) = \operatorname{tr}\left({}^tFP({}^tF)\right) = \operatorname{tr}\left(S({}^tF)\right).$$

On a vu que F est semblable à une matrice diagonale dans la base associée aux sous-espaces propres $E_0(F),\ E_2(F),\ E_1(F)$ donc ${}^tF$ également. Ainsi $S\left({}^tF\right)$ est semblable à la matrice diagonale

$$\operatorname{diag}\left(S(1),\ \cdots,\ S(1),\ S(0),\ S(2)\right)$$

donc $\operatorname{tr} S({}^tF) = (n-2)S(1)+S(0)+S(2) = (n-2)P(1)+2P(2)$. On obtient :

$$d\left(P\left({}^tF\right),\ H\right) = \frac{|(n-2)P(1)+2P(2)|}{\sqrt{3n-2}}.$$

Partie 2

H est ici un hyperplan d'un espace vectoriel réel E et h une forme linéaire non nulle de noyau H.

1. Dans cette question E est de dimension finie. Soit x_0 un vecteur de E.
   a) Montrer qu'il existe une suite (y_n) d'éléments de H telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_0 - y_n\| = d(x_0,\ H).$$

Par la caractérisation de la borne inférieure, on sait que :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists y \in H,\ d(x_0,\ H) \leqslant \|x_0 - y\| < d(x_0,\ H) + \epsilon.$$

En choisissant $\epsilon = \dfrac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, donc, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a un $y_n \in H$ vérifiant la caractérisation. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists y_n \in H,\ d(x_0,\ H) \leqslant \|x_0 - y_n\| < d(x_0,\ H) + \frac{1}{n+1}.$$

Par suite, il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_0 - y_n\| = d\left(x_0,\ H\right)$.

b) Montrer qu'il existe une suite $(y_{\varphi(n)})$ de (y_n) qui converge vers un élément de H.

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ = \|y_n - x_0 + x_0\| \leqslant \|y_n - x_0\| + \|x_0\|$$

or la suite $(\|y_n - x_0\|)_n$ est bornée car elle est convergente, donc la suite $(\|y_n\|)_n$ est aussi bornée.

Le théorème de Bolzano-Weierstrass nous assure alors l'existence d'une suite extraite qui converge dans E.

Les sous-espaces vectoriels d'un espace de dimension finie sont fermés, donc H est fermé. Par conséquent, comme $\left(y_{\varphi(n)}\right)_n$ est une suite convergente d'éléments de H, sa limite ℓ est dans H.

c) En déduire qu'il existe un vecteur de H, que l'on notera y_0 tel que :

$$d(x_0,\ H) = \|x_0 - y_0\|.$$

La distance de x_0 à H est ainsi atteinte.

La suite $\left(\|x_0 - y_{\varphi(n)}\|\right)_n$ est extraite de la suite $(\|x_0 - y_n\|)_n$ qui est convergente vers $d(x_0,\ H)$, par conséquent, elle converge vers la même limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_0 - y_{\varphi(n)}\| = d(x_0,\ H)$.

Par continuité de la norme, on a alors $\|x_0 - \ell\| = d\left(x_0,\ H\right)$. Finalement, en notant $\ell = y_0 \in H$, on a montré que :

$$\exists y_0 \in H,\ \|x_0 - y_0\| = d\left(x_0,\ H\right).$$

2. Dans cette question E est de dimension quelconque.

a) Montrer que le noyau d'une forme linéaire h, continue sur E, est fermée dans E.

Par définition on sait que $\operatorname{Ker} h = h^{-1}\left(\{0\}\right)$, et $\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. En outre, l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé donc :

Si h est continue alors $\operatorname{Ker} h$ est fermé dans $\mathbb{R}$.

b) Montrer, réciproquement, que si le noyau de h est fermé alors h est continue.

On pourra montrer que si h n'est pas continue, il existe une suite (t_n) de E telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$ avec $\forall n \in \mathbb{N},\ h(t_n) = 1$. Puis on utilisera la suite $(t_n - t_0)$ pour obtenir une contradiction.

On sait que si une application linéaire f, d'un espace vectoriel normé dans un espace vectoriel normé, est continue alors :

$$\exists K > 0,\ \forall x \in E,\ \|f(x)\| \leqslant K\|x\|.$$

Si h est une forme linéaire non continue on a :

$$\forall K > 0,\ \exists x \in E,\ |h(x)| > K\|x\|.$$

En particularisant $K = n + 1,\ n \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists x_n \in E,\ |h(x_n)| > (n+1)\|x_n\|.$$

Cette relation montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ h(x_n) \neq 0$ et on pose $t_n = \dfrac{x_n}{h(x_n)}$.

On a alors :

$$h(t_n) = 1 \quad \text{et} \quad \|t_n\| = \frac{\|x_n\|}{|h(x_n)|} < \frac{1}{n+1}$$

La suite $(t_n)_n$ tend vers 0_E.
Finalement, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ h(t_n - t_0) = h(t_n) - h(t_0) = 0$, donc $t_n - t_0 \in H$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n - t_0 = -t_0$ et, comme H est fermé, $-t_0 \in H$, ce qui est impossible car $h(-t_0) = -1$. En conclusion :

Si $\operatorname{Ker} h$ est fermé dans E alors h est continue.

c) Montrer que si H est un hyperplan de E, alors son adhérence $\overline{H}$ est un sev de E.

On sait que $H \subset \overline{H}$ donc $\overline{H} \neq \emptyset$.
Soit $(x,\ y) \in \overline{H}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
La caractérisation séquentielle de l'adhérence nous assure de l'existence de deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ de H telles que :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x, \quad \lim_{n\to+\infty} y_n = y$$

par linéarité, on a

$$x + \lambda y = \lim_{n\to+\infty} (x_n + \lambda y_n)$$

or $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n + \lambda y_n \in H$, par conséquent $x + \lambda y \in \overline{H}$.

d) En déduire que tout hyperplan de E est soit dense soit fermé dans E.

Comme $H \subset \overline{H}$, on a l'alternative suivante :

- $H = \overline{H}$ et, dans ce cas H est fermé.

- $H \subsetneq \overline{H}$ et, dans ce cas, prenons $a \in \overline{H} \setminus H$ et soit x quelconque dans E. Comme $h(a) \neq 0$, on peut écrire

$$x = \frac{h(x)}{h(a)}a + \left(x - \frac{h(x)}{h(a)}a\right)$$

par suite

$$h\left(x - \frac{h(x)}{h(a)}a\right) = 0$$

et donc, $x - \dfrac{h(x)}{h(a)}a \in H \subset \overline{H}$.

Comme $\overline{H}$ est un sous-espace vectoriel de E, il en découle que $x \in \overline{H}$. On a démontré que $E \subset \overline{H}$ et par suite $E = \overline{H}$, ce qui prouve que H est dense dans E.