Institut Mines-Télécom
Business School

RISQUES ET VOLATILITÉ SUR LES MARCHÉS FINANCIERS

AURÉLIEN ALBA

SOMMAIRE

SOMMAIRE

5.
LES OPTIONS

LES OPTIONS
Le modèle de Black-Scholes

Black et Scholes ont développé des formules fermées de pricing pour les options européennes

Hypothèses

- Volatilité constante
- Taux d'intérêt constants
- Les prix suivent une loi log-normale
- Dividendes constants

LES OPTIONS
Pricing sous mesure risque neutre

Le concept de **prix sous la mesure risque neutre** est au **cœur** du modèle de **Black Scholes**

Mesure risque neutre

- **Investisseurs** sont indifférents au risque, **exigent** un **rendement** équivalent au **taux** d'intérêts **sans risque**
- Les cashflows sont discountés au taux sans risque
- Utilisée pour la **valorisation** des **options**

Mesure « real world »

- Tient compte des préférences des investisseurs pour le risque, coûts de transaction, incertitude, …
- Utilisée dans des contextes plus larges comme la **modélisation économique** ou **rendement** de **portefeuille** (avec prise en compte des coûts associés)

LES OPTIONS
Pricing sous mesure risque neutre

- Pour calculer le **prix** d'un actif on « **discount** » les **cashflows futurs attendus**

- Le **prix** d'une option est appelé « **premium** »

- Prix d'une option est exprimé par action sachant que la plupart des contrats représentent 100 actions du sous-jacent.

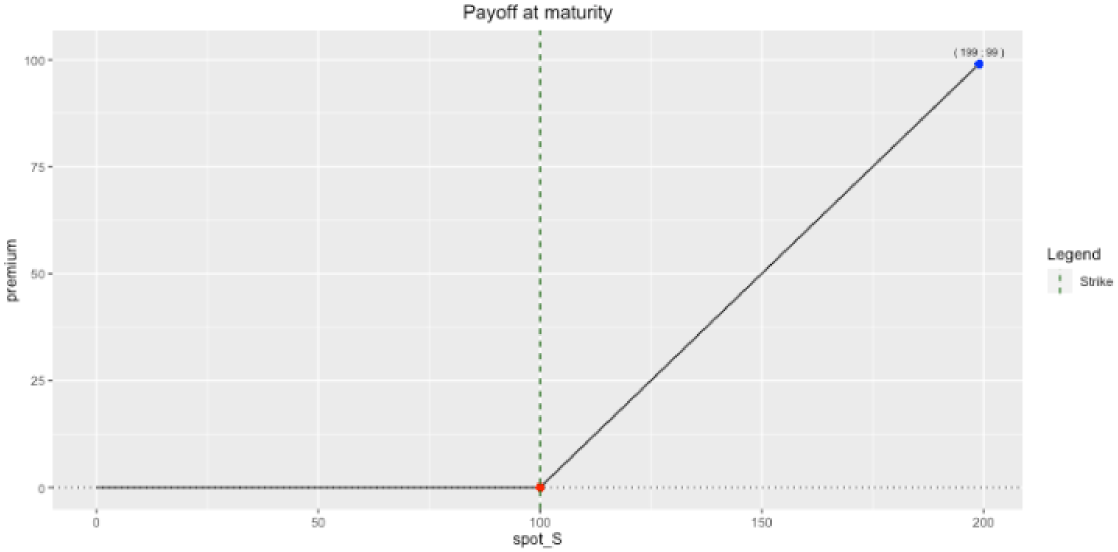
- Quotation 1.1€ => Prix = 110€

LES OPTIONS
Call Européen

Contrat financier qui donne le **droit** au détenteur mais **pas l'obligation**, d'acheter pour un montant défini (**nominal** = N) un actif **sous-jacent** (S) à un certain prix (**strike** = K) à un horizon de temps donné (**maturité** = T)

LES OPTIONS
Call Européen

Contrat financier qui donne le **droit** au détenteur mais **pas l'obligation**, d'acheter pour un montant défini (**nominal** = N) un actif **sous-jacent** (S) à un certain prix (**strike** = K) à un horizon de temps donné (**maturité** = T)



Payoff

$$C_T = Max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+$$
$$= 1_{\{S_T > K\}} (S_T - K)$$

LES OPTIONS
Call Européen

EN ACHETANT UNE OPTION CALL

On ne perd rien à maturité.

Les pertes sont limitées à la prime payée pour acheter le produit

EN VENDANT LE PRODUIT

Les pertes sont **illimitées** !

LES OPTIONS
Call Européen

Formule de Black-Scholes :

$$C = Se^{-dt}N(d_1) - Ke^{-rt}N(d_2)$$

Avec:

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S}{k}\right)+\left(r-q+\frac{\sigma^2}{t}\right)t}{\sigma\sqrt{t}} \text{ et } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t} = \frac{ln\left(\frac{S}{k}\right)+\left(r-q-\frac{\sigma^2}{t}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dx$$

LES OPTIONS
Call Européen

Payoff :

$$C_T = Max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+ = 1_{\{S_T > K\}}\ (S_T - K)$$
$$C_T = C_T^1 + C_T^2$$

LES OPTIONS
Call Européen

Payoff :

$$C_T = Max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+ = 1_{\{S_T > K\}}\ (S_T - K)$$
$$C_T = C_T^1 + C_T^2$$

$$C_T^1 = -K * 1_{\{S_T > K\}}$$

Prix = paiement future espéré sous la mesure risque neutre, discounté au taux sans risque

$$\mathbb{E}[C_T^1] = -K * P\{S_T > K\}$$

$$C_0^1 = -K * e^{-rT} * P\{S_T > K\}$$

$$P\{S_T > K\} = N(d2)$$

LES OPTIONS
Call Européen

Payoff :

$$C_T = Max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+ = 1_{\{S_T > K\}}\ (S_T - K)$$
$$C_T = C_T^1 + C_T^2$$

$$C_T^1 = -K * 1_{\{S_T > K\}}$$

Prix = paiement future espéré sous la mesure risque neutre, discounté au taux sans risque

$$\mathbb{E}[C_T^1] = -K * P\{S_T > K\}$$

$$C_0^1 = -K * e^{-rT} * P\{S_T > K\}$$

$$P\{S_T > K\} = N(d2)$$

$$C_T^2 = S * 1_{\{S_T > K\}}$$

Prix = paiement future espéré (sachant que l'option doit être exercée) sous la mesure risque neutre, discounté au taux sans risque

$$\mathbb{E}[C_T^2] = \mathbb{E}[S_T | S_T > K] * P\{S_T > K\}$$

Plus complexe car S_T n'est pas une constante

$$\mathbb{E}[C_T^2] = \mathbb{E}[S_T | S_T > K] * P\{S_T > K\} = e^{rT} SN(d1)$$
$$C_0^2 = SN(d1)$$

LES OPTIONS

Call Européen

Pourquoi $C_T^2 \neq SN(d_2)$ **=>** $\mathbb{E}[C_T^2] \neq Se^{rT}N(d_2)$ **?**

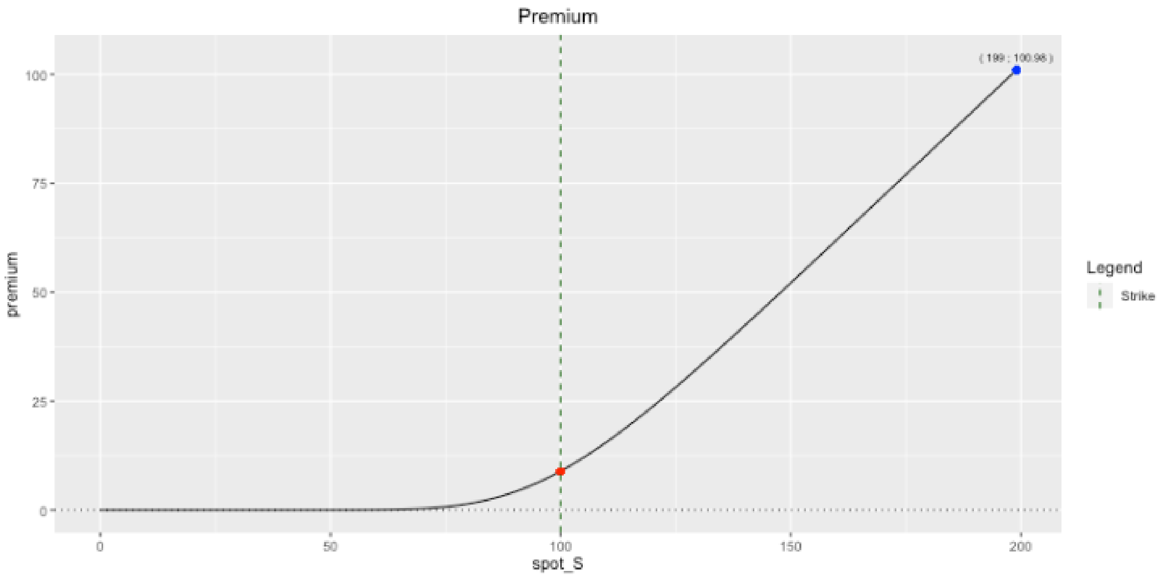
LES OPTIONS
Call Européen

Pourquoi $C_T^2 \neq SN(d_2)$ **=>** $\mathbb{E}[C_T^2] \neq Se^{rT}N(d_2)$ **?**

- Si c'était le cas, on aurait: $C = (S - Ke^{-rt})N(d_2)$ => prix négatifs quand call est « OTM »
- Evènement d'exercer l'option n'est pas indépendant de S_T. Si l'exercice était complètement aléatoire et non corrélé au prix => $\mathbb{E}[C_T^2] = SN(d_2)$
- Exercice dépend du futur prix de l'actif donc $Se^{rT}N(d_2)$ sous-estime la valeur attendue
- $\mathbb{E}[S_T|S_T > K] * P\{S_T > K\} = \mathbb{E}[S_T|S_T > K] * N(d_2) > Se^{rT}N(d_2)$
car corrélation entre S_T et la décision d'exercer implique que $\mathbb{E}[S_T|S_T > K] > Se^{rT}N(d_2)$

LES OPTIONS
Call Européen

Si pas de taux d'intérêt et pas de dividendes, prix call ATM: $C_T = 0.4\sigma\sqrt{T}S_0$



Courbe <u>ascendante</u> :
- **delta** positif

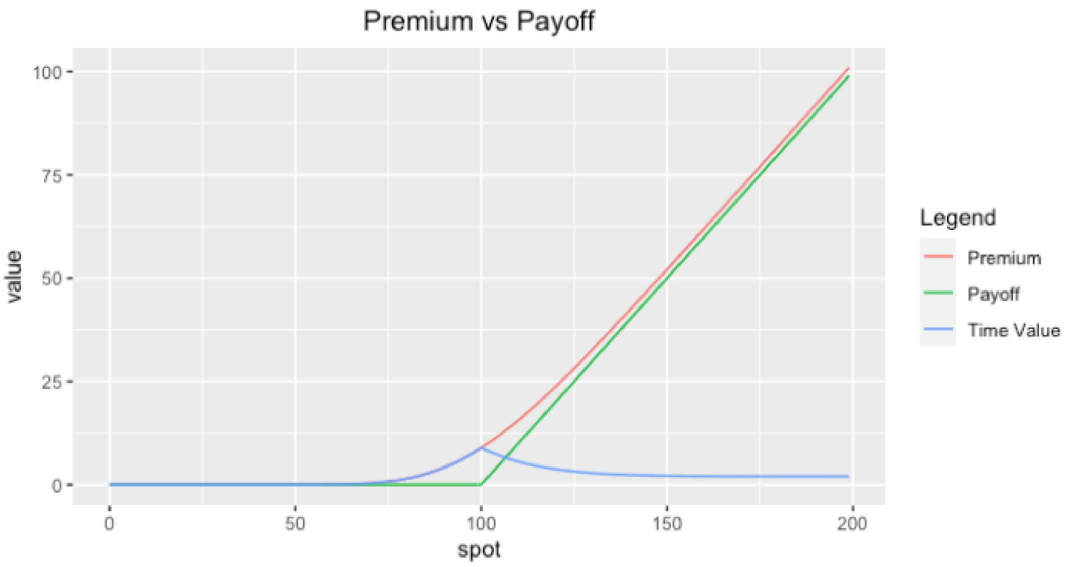
Courbe <u>convexe</u> :
- **gamma** positif

LES OPTIONS
Call Européen

MONEYNESS

- In-The-Money (ITM) si prix spot > prix strike
- At-The-Money (ATM) si prix spot = prix strike
- Out-of-The-Money (OTM) si prix spot < prix strike

LES OPTIONS
Call Européen



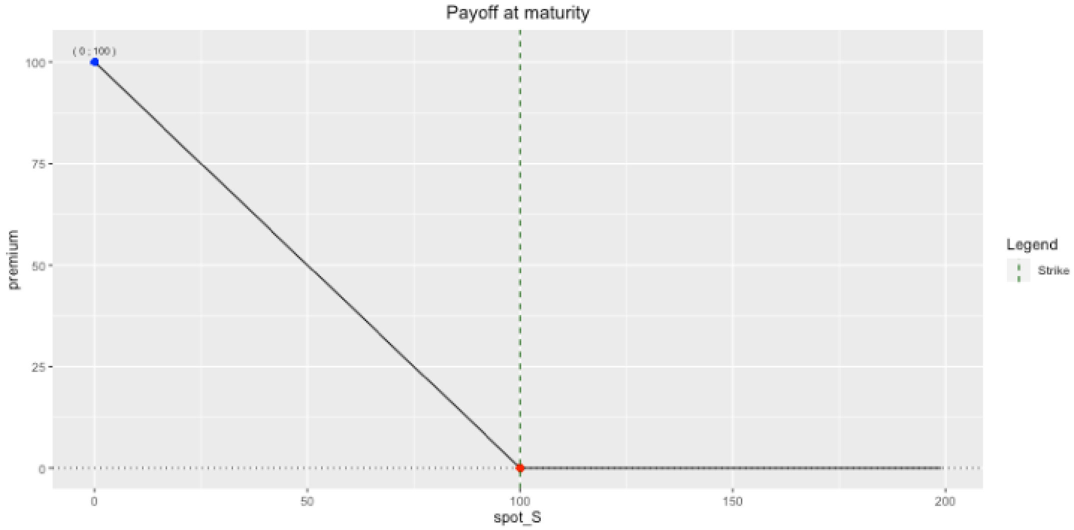
- Le prix du call est **toujours plus grand** que la valeur intrinsèque de l'option (**payoff**)
- La **différence** est la **valeur temps** → mesure **l'incertitude** que **l'option finisse ITM**
- **Valeur temps** est presque **toujours positive** pour un **call.** Max quand **S=K**
- **Valeur temps** diminue au fur et à mesure et est égale à 0 à T

LES OPTIONS
Put Européen

Contrat financier qui donne le **droit** au détenteur mais **pas l'obligation**, de vendre pour un montant défini (**nominal** = N) un actif **sous-jacent** (S) à un certain prix (**strike** = K) à un horizon de temps donné (**maturité** = T)

LES OPTIONS
Put Européen

Contrat financier qui donne le **droit** au détenteur mais **pas l'obligation**, de vendre pour un montant défini (**nominal** = N) un actif **sous-jacent** (S) à un certain prix (**strike** = K) à un horizon de temps donné (**maturité** = T)



Payoff :

$$C_T = Max(K - S_T, 0) = (K - S_T)^+$$
$$= 1_{\{S_T < K)} (K - S_T)$$

LES OPTIONS
Put Européen

EN ACHETANT UNE OPTION PUT

On ne perd rien à maturité.

Les pertes sont limitées à la prime payée pour acheter le produit

EN VENDANT LE PRODUIT

Les pertes sont **limitées** contrairement aux options call

LES OPTIONS
Put Européen

Formule de Black-Scholes:

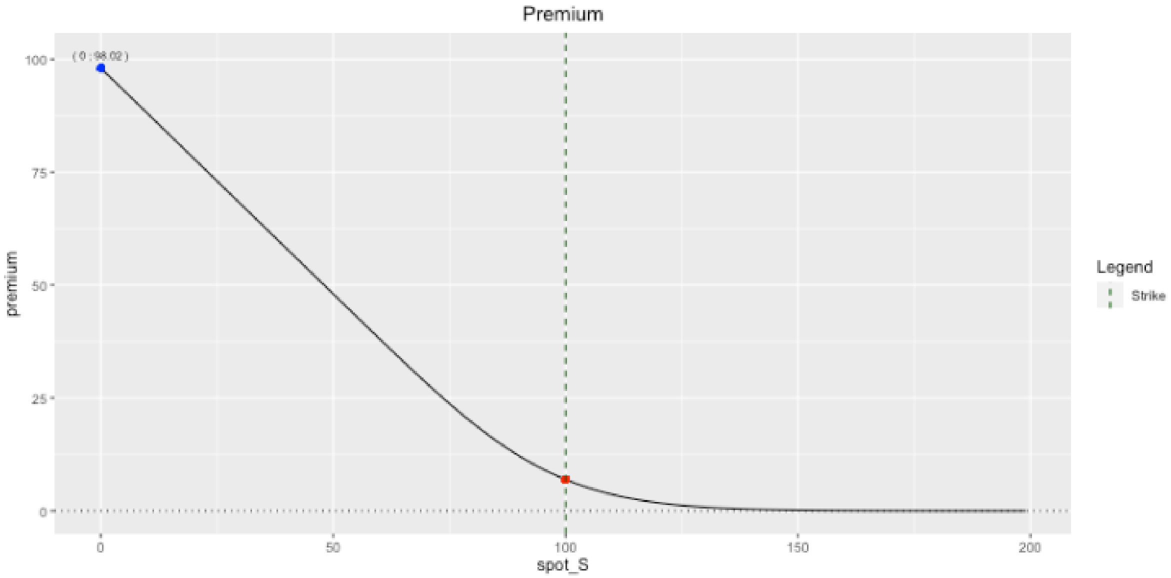
$$C = Ke^{-rt}N(-d_2) - Se^{-qt}N(-d_1)$$

Avec:

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S}{k}\right)+\left(r-q+\frac{\sigma^2}{t}\right)t}{\sigma\sqrt{t}} \text{ et } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t} = \frac{ln\left(\frac{S}{k}\right)+\left(r-q-\frac{\sigma^2}{t}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dx$$

LES OPTIONS
Put Européen



Courbe <u>descendante</u> :
- **delta** négatif

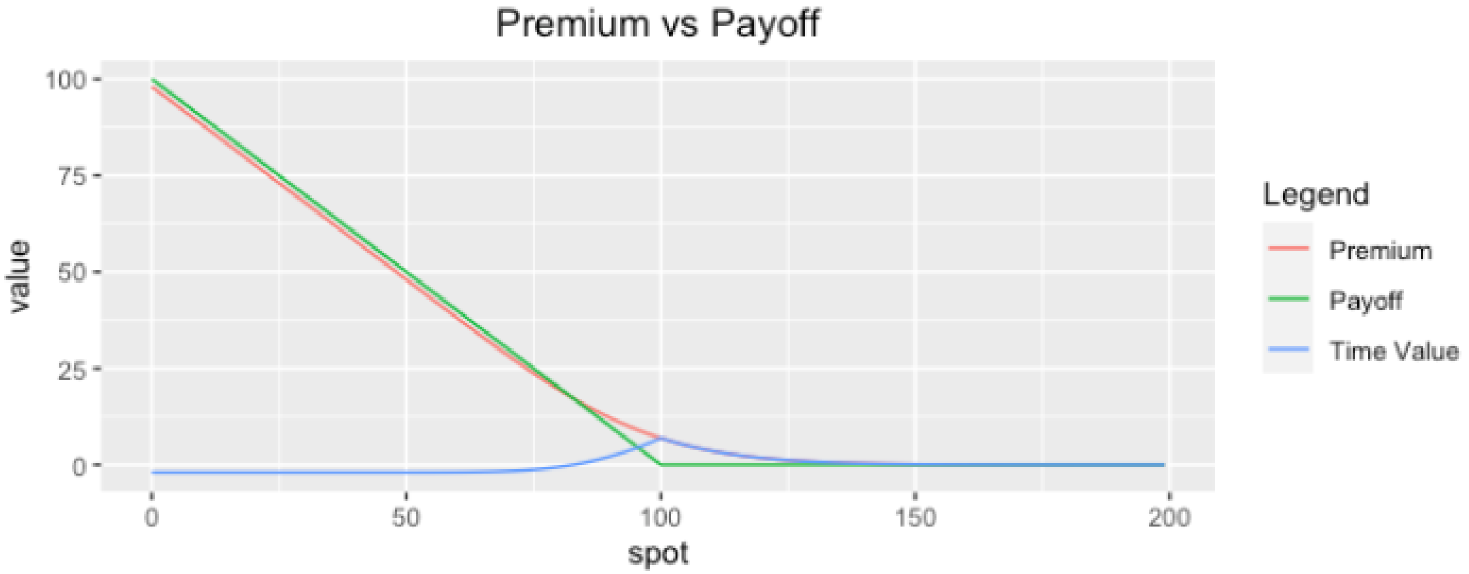
Courbe <u>convexe</u> :
- **gamma** positif

LES OPTIONS
Put Européen

MONEYNESS

- In-The-Money (ITM) si prix spot < prix strike
- At-The-Money (ATM) si prix spot = prix strike
- Out-of-The-Money (OTM) si prix spot > prix strike

LES OPTIONS
Put Européen



La **valeur temps** d'un put n'est pas toujours positive

LES OPTIONS
Valeur intrinsèque et valeur temps

La valeur intrinsèque est la valeur de l'option **si elle était exercée aujourd'hui**

La valeur temps de l'option : **la composante du prix de l'option** qui **tient compte du temps restant jusqu'à l'expiration**

LES OPTIONS
Valeur intrinsèque et valeur temps

La valeur intrinsèque est la valeur de l'option **si elle était exercée aujourd'hui**

+

La valeur temps de l'option : **la composante du prix de l'option** qui **tient compte du temps restant jusqu'à l'expiration**

Prix option = Valeur **intrinsèque** + Valeur **temps**

LES OPTIONS
Valeur intrinsèque et valeur temps

- Valeur intrinsèque du call: Max (0, S-K)
- Valeur intrinsèque du put: Max (0, K-S)

OTM options → valeur intrinsèque = 0 mais prix différent de 0 → on s'attend à ce que la valeur temps soit positive mais ce n'est pas toujours le cas

LES OPTIONS
Parité Call-Put

LES OPTIONS
Parité Call-Put

- Relation entre les **prix des options call** et **put européens** qui ont le même strike et la même maturité

- Doit être **vérifiée tout le temps**, indépendamment du modèle utilisé

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

LES OPTIONS
Parité Call-Put

- Relation entre les **prix des options call** et **put européens** qui ont le même strike et la même maturité

- Doit être **vérifiée tout le temps**, indépendamment du modèle utilisé

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

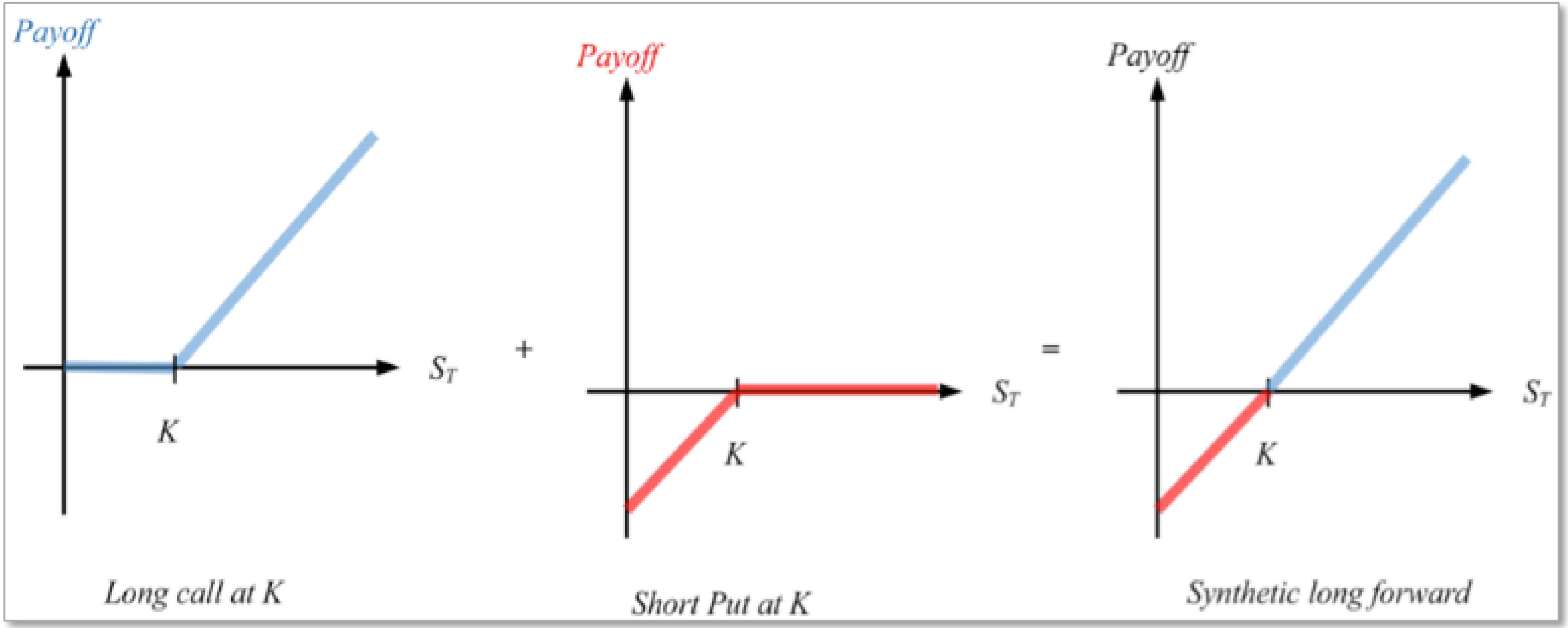
Portefeuille A

Achat call et achat ZC bond qui paie K à maturité

Portefeuille B

Achat put option et achat du sous-jacent

LES OPTIONS
Parité Call-Put



LES OPTIONS
Les séries de Taylor

- Permettent de comprendre le concept de sensibilité

LES OPTIONS
Les séries de Taylor

- Permettent de comprendre le concept de sensibilité
- **Toute fonction peut être approchée par une fonction polynomiale**

$$\boldsymbol{\Delta V} = \frac{\partial V}{\partial S} * \Delta \boldsymbol{S} + \frac{\partial V}{\partial \sigma} * \Delta \boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial V}{\partial t} * \Delta \boldsymbol{t} + \frac{\partial V}{\partial r} * \Delta \boldsymbol{r} + \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial S^2} * (\Delta \boldsymbol{S})^2 + \boldsymbol{Other}$$

- Plus on rajoute de terme, meilleure l'approximation est

LES OPTIONS
Les séries de Taylor

- Permettent de comprendre le concept de sensibilité
- **Toute fonction peut être approchée par une fonction polynomiale**

$$\boldsymbol{\Delta V} = \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{S}} * \Delta \boldsymbol{S} + \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} * \Delta \boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{t}} * \Delta \boldsymbol{t} + \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{r}} * \Delta \boldsymbol{r} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{S}^{\boldsymbol{2}}} * (\Delta \boldsymbol{S})^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{Other}$$

- Plus on rajoute de terme, meilleure l’approximation est

- **Meilleure alternative** lorsqu’on n’a **pas de formule fermée** pour pricer des <u>options exotiques</u>

LES OPTIONS

Hedge statique et dynamique

HEDGE

investissement qui a pour but **d’annuler/réduire le risque** lié à un actif financier

LES OPTIONS
Hedge statique et dynamique

HEDGE
investissement qui a pour but **d'annuler/réduire le risque** lié à un actif financier

Hedge statique

- Hedge qui **ne bouge pas** une fois qu'il est initié
- On ne change pas le hedge quels que soient les mouvements de marché
- L'existence d'un hedge statique nous donne à la fois le prix d'un produit financier et le hedge

LES OPTIONS
Hedge statique et dynamique

HEDGE
investissement qui a pour but **d'annuler/réduire le risque** lié à un actif financier

Hedge statique

- Hedge qui **ne bouge pas** une fois qu'il est initié
- On ne change pas le hedge quels que soient les mouvements de marché
- L'existence d'un hedge statique nous donne à la fois le prix d'un produit financier et le hedge

Hedge dynamique

- Hedge qui est **réajusté après chaque mouvement** de marché
- **Fréquence** de réajustement **dépend** de la **nature** des **sensibilités** et leurs **impacts** sur le prix

LES OPTIONS

Les grecques

Greek	Symbol	Measures	Definition
Delta	$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$	Equity Exposure	Change in option price due to spot
Gamma	$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$	Payout Convexity	Change in delta due to spot
Theta	$\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$	Time Decay	Change in option price due to time passing
Vega	$\upsilon = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$	Volatility Exposure	Change in option price due to volatility
Rho	$\rho = \frac{\partial V}{\partial r}$	Interest Rate Exposure	Change in option price due to interest rates
Volga	$\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2}$	Vol of Vol Exposure	Change in vega due to volatility
Vanna	$\frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma}$	Skew	Change in vega due to spot OR change in delta due to volatility
Charm	$\frac{\partial^2 V}{\partial S \partial t}$		Change in delta due to time passing

LES OPTIONS
Delta Call

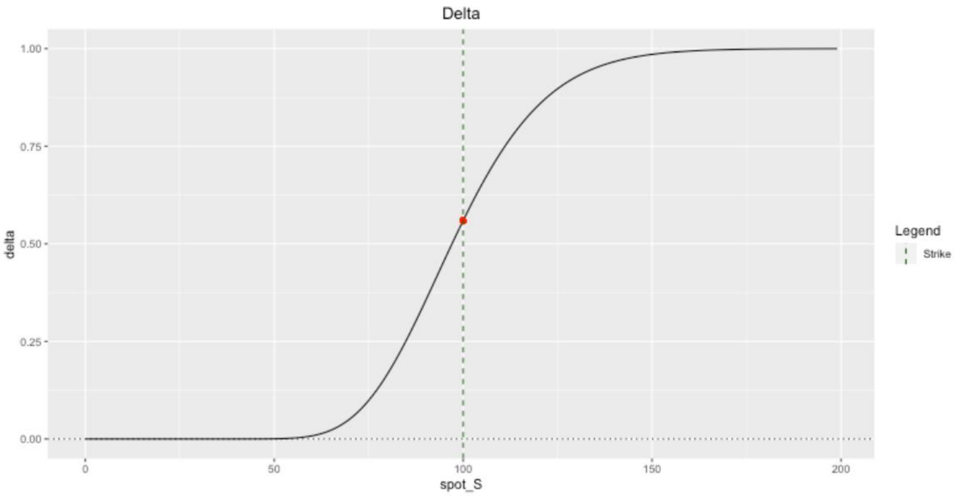
Sensibilité de **premier ordre du prix** à un **mouvement du sous-jacent S**

Donnée en % → donne la **quantité du sous-jacent** nécessaire pour **hedger l’option**

LES OPTIONS
Delta Call

Sensibilité de **premier ordre du prix** à un **mouvement du sous-jacent S**

Donnée en % → donne la **quantité du sous-jacent** nécessaire pour **hedger l'option**



- Calls très **OTM** → peu de sensibilité
- Calls très **ITM** → équivaut au sous-jacent
- Calls **ATM** → delta environ 50%

LES OPTIONS
Delta Put

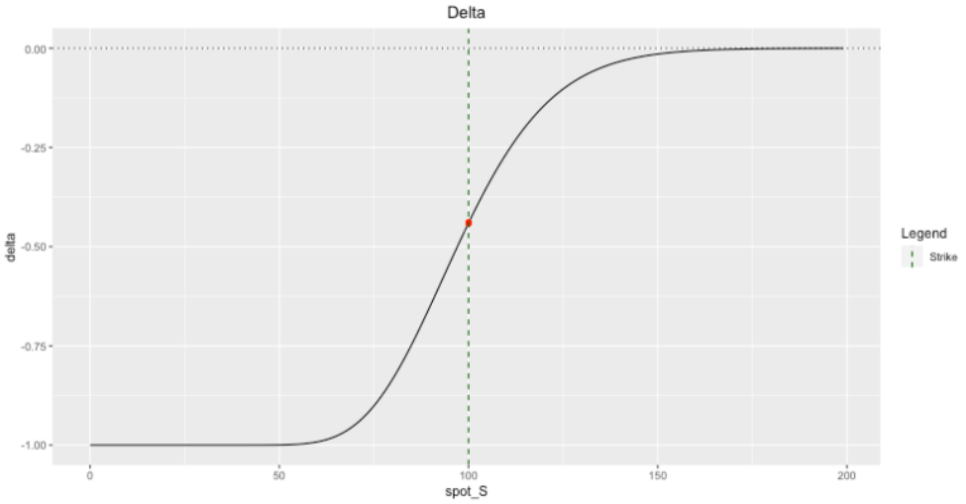
Sensibilité de **premier ordre du prix** à un **mouvement du sous-jacent S**

Donnée en % → donne la **quantité du sous-jacent** nécessaire pour **hedger l'option**

LES OPTIONS
Delta Put

Sensibilité de **premier ordre du prix** à un **mouvement du sous-jacent S**

Donnée en % → donne la **quantité du sous-jacent** nécessaire pour **hedger l'option**



- Puts très **OTM** → peu de sensibilité
- Puts Très **ITM** → équivaut à un short du sous-jacent
- Puts **ATM** → delta environ -50%

LES OPTIONS

Delta Put

- **Même forme** pour Delta call et delta put → conséquence de la parité **call-put**
- Les deux Delta sont **croissants** quand le prix du sous-jacent **augmente**
- Le **Delta** d'un book est la **somme des deltas de chaque option**

LES OPTIONS
Delta Put

- **Même forme** pour Delta call et delta put → conséquence de la parité **call-put**
- Les deux Delta sont **croissants** quand le prix du sous-jacent **augmente**
- Le **Delta** d'un book est la **somme des deltas de chaque option**

Exemple:

Si un delta = 0.5635 => si le sous-jacent bouge de 1, la valeur du dérivé va bouger de 0.5635*1

- Pour delta hedger une option => utilise le sous-jacent, le forward ou futures sur le sous-jacent ou un autre actif corrélé

LES OPTIONS
Delta Call et Put sous Black-Scholes

LES OPTIONS
Delta Call et Put sous Black-Scholes

$$Call\ Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1)$$

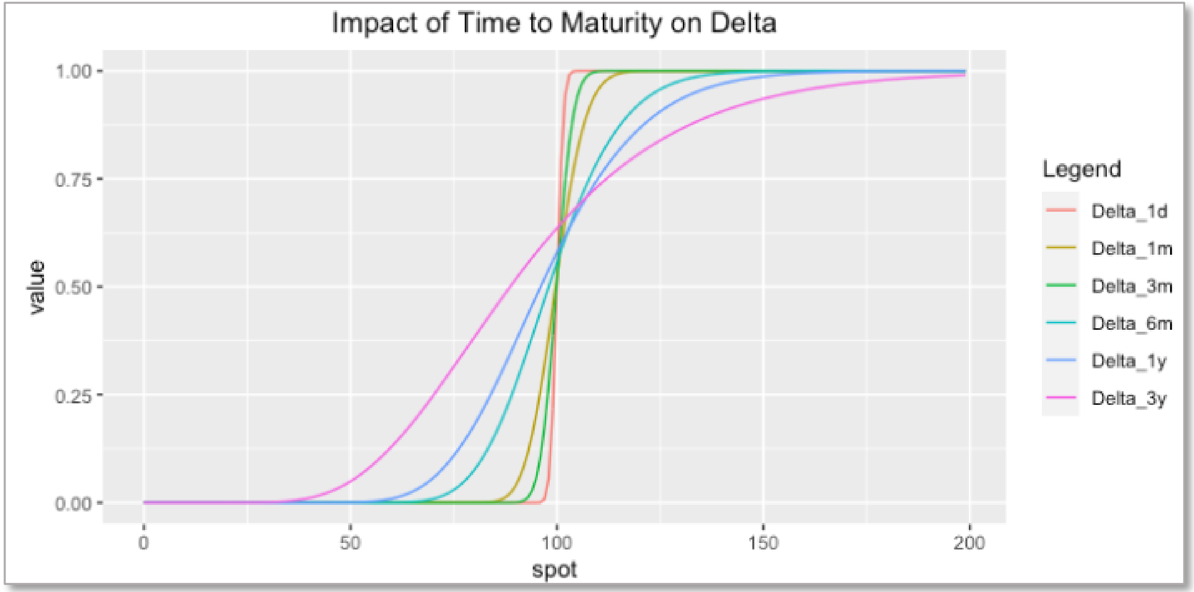
$$Call\ Put = \frac{\partial P}{\partial S} = N(d_1) - 1$$

Avec:

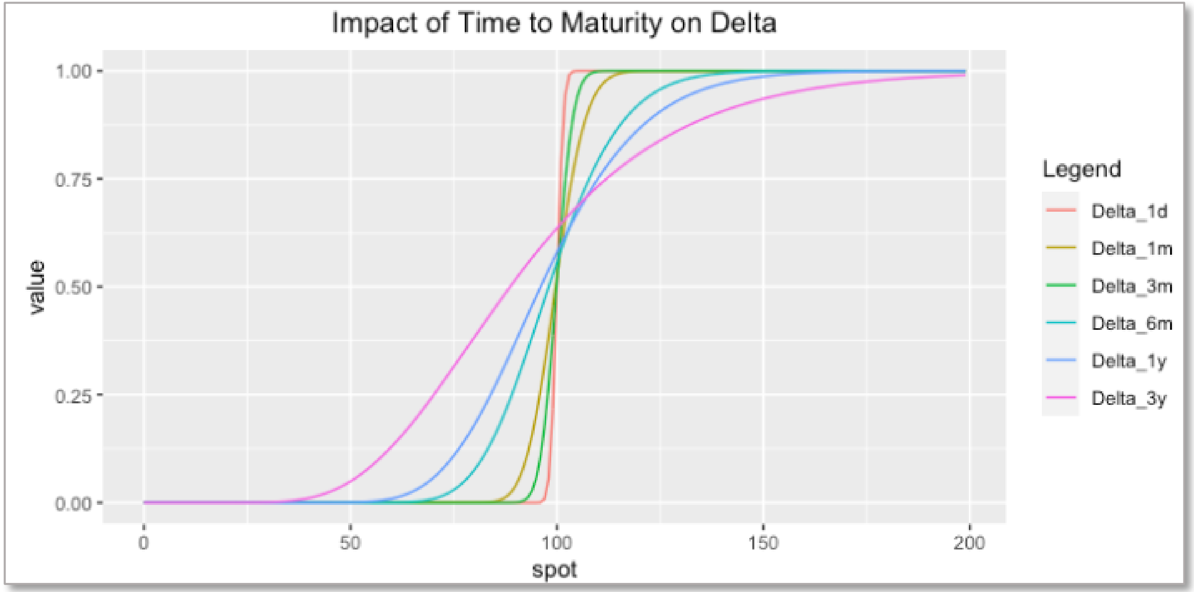
$N()$ qui est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S}{k}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{t}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

LES OPTIONS
Sensibilités du delta

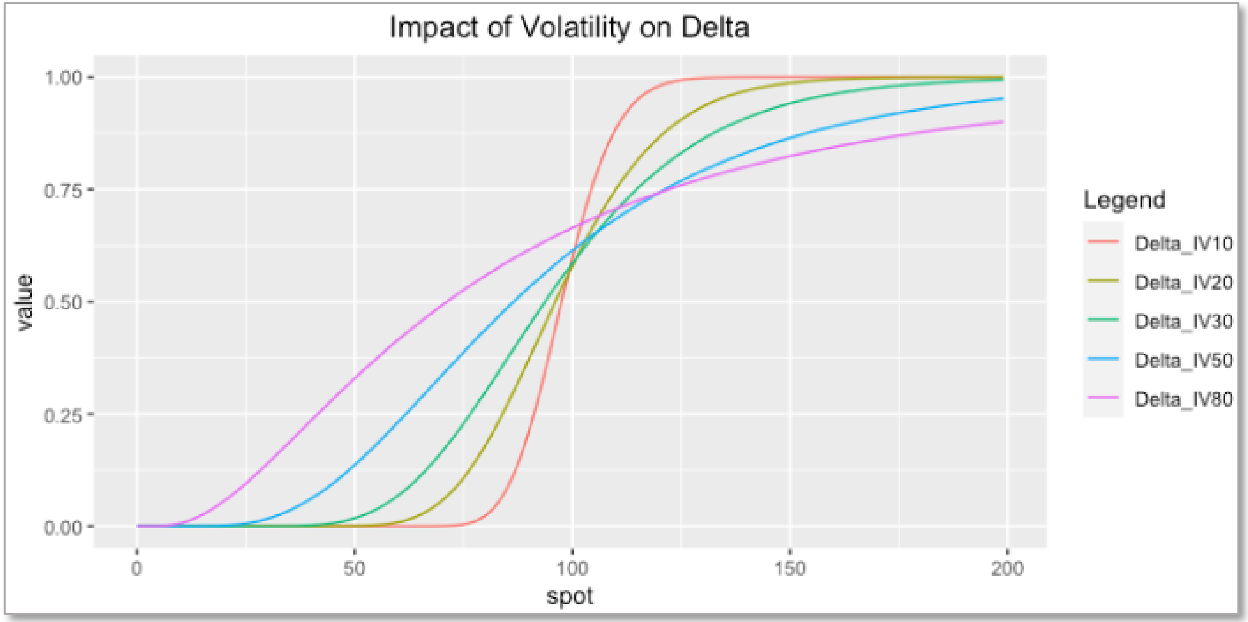


LES OPTIONS
Sensibilités du delta

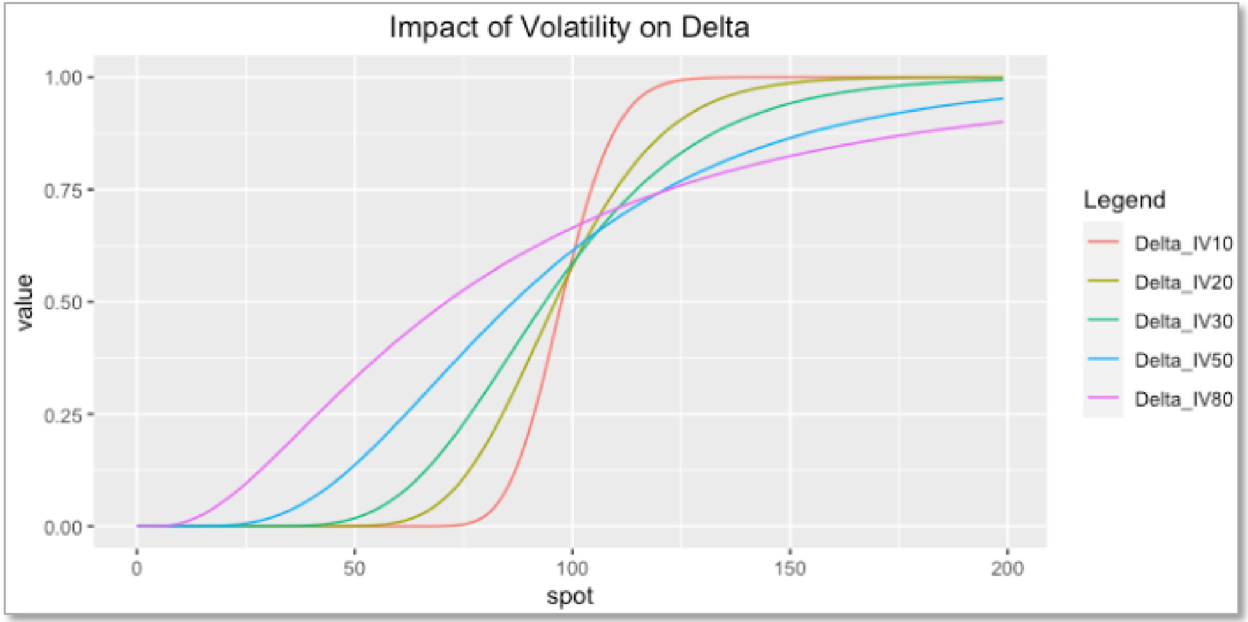


- Variations principales localisées **autour du strike**
- Plus on **se rapproche de la maturité**, plus on peut passer rapidement **de 0 à 1**
- Coûts de transaction => **delta hedge daily**
- Effet du temps sur le delta est représenté par le **« Charm »**

LES OPTIONS
Sensibilités du delta



LES OPTIONS
Sensibilités du delta



- **Forte volatilité** <u>augmente</u> **<u>le delta</u>** pour les <u>options OTM</u>
- **Forte volatilité** <u>baisse le delta</u> pour les options ITM
- **Les actions volatiles** ont un <u>delta plus petit</u>

LES OPTIONS
Gamma

- Le Gamma mesure un **changement du delta** par rapport au prix du sous-jacent
- Sensibilité du **second ordre du prix de l'option** par rapport au prix du sous-jacent
- Plus le gamma est **grand**, plus le prix est **convexe**

LES OPTIONS
Gamma

- Le Gamma mesure un **changement du delta** par rapport au prix du sous-jacent
- Sensibilité du **second ordre du prix de l’option** par rapport au prix du sous-jacent
- Plus le gamma est **grand**, plus le prix est **convexe**

- Un portefeuille **delta-hedgé** => **petit mouvements** du sous-jacent
- Un portefeuille **gamma-hedgé** => **gros mouvements** du sous-jacent
- Une position **long** de l’option est convexe → gamma **positif**
- Une position **short** de l’option est convexe → gamma **négatif**

LES OPTIONS

Gamma

- Le Gamma mesure un **changement du delta** par rapport au prix du sous-jacent
- Sensibilité du **second ordre du prix de l'option** par rapport au prix du sous-jacent
- Plus le gamma est **grand**, plus le prix est **convexe**

- Un portefeuille **delta-hedgé** => **petit mouvements** du sous-jacent
- Un portefeuille **gamma-hedgé** => **gros mouvements** du sous-jacent
- Une position **long** de l'option est convexe → gamma **positif**
- Une position **short** de l'option est convexe → gamma **négatif**

Pour **gamma hedger** → instruments **convexes** tels que les **options européennes**

Petit gamma → moins besoin de réhedger de façon fréquente et pour des gros montants le delta

LES OPTIONS

Gamma Call et Put sous Black-Scholes

$$Call\ Gamma = Put\ Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial N(d_1)}{\partial S} = \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{t}}$$

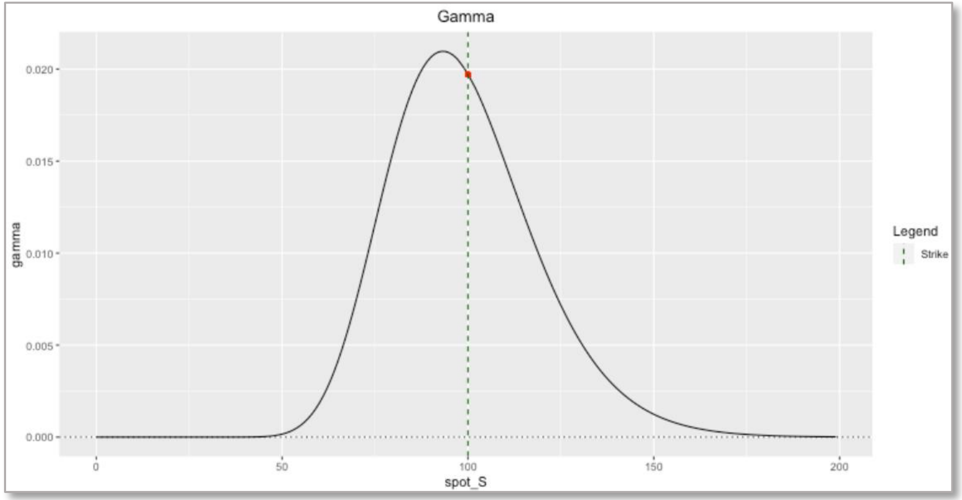
Les options call et put augmentent avec la valeur du sous-jacent → gamma toujours positif

LES OPTIONS

Gamma Call et Put sous Black-Scholes

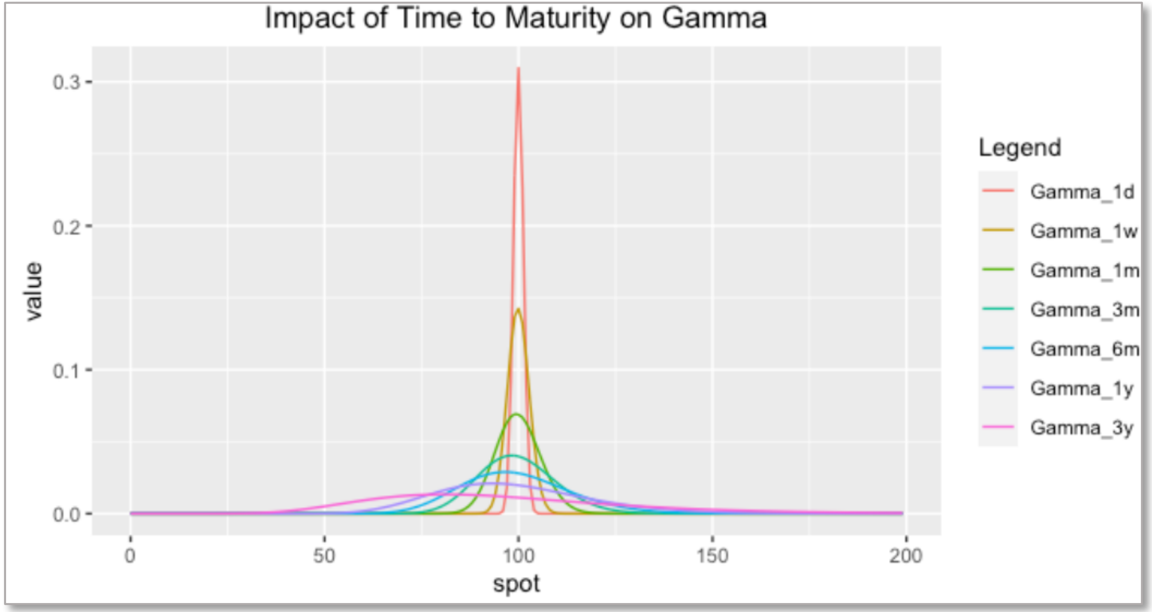
$$Call\ Gamma = Put\ Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial N(d_1)}{\partial S} = \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{t}}$$

Les options call et put augmentent avec la valeur du sous-jacent → gamma toujours positif



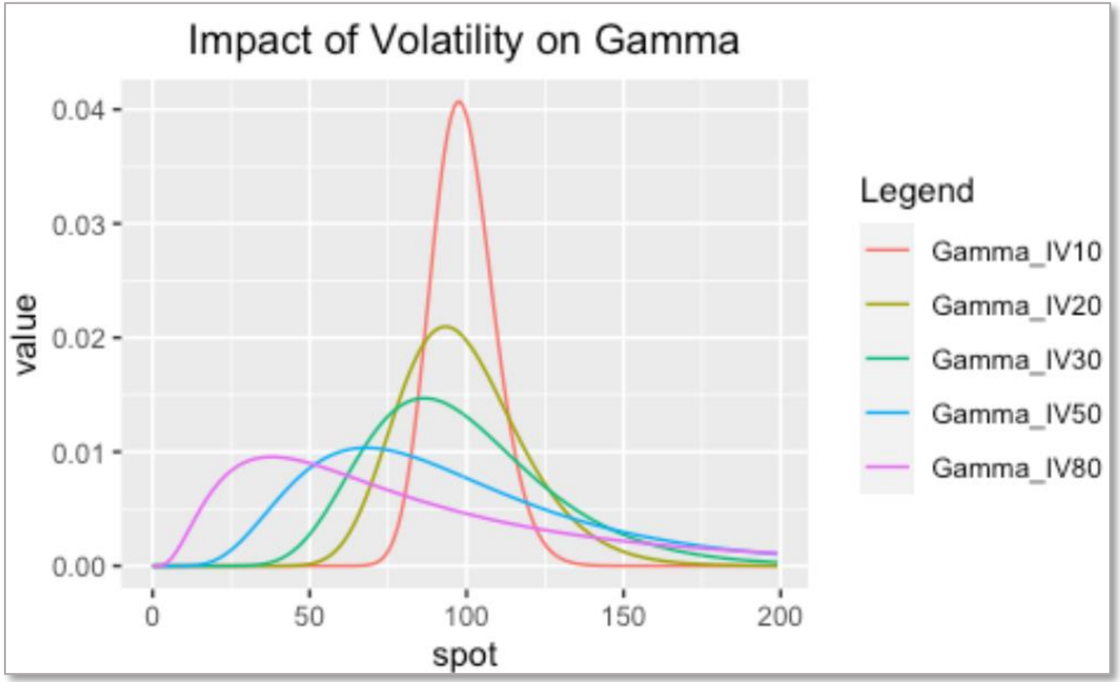
- Quand le prix **s'éloigne du strike**, $N'(d_1)$ devient **plus petit** → gamma <u>décroit rapidement</u>
- Courbe ressemble à la courbe **en forme de cloche** de la distribution **d'une loi normale**
- Gamma **portefeuille** = somme des **gamma des options**

LES OPTIONS
Sensibilités du gamma



- Delta devient **plus lisse** plus le temps restant est **grand** → idem pour le gamma
- Plus on se rapproche de la **maturité** →gamma ATM options **augmente** et gamma ITM/OTM options **décroît**

LES OPTIONS
Sensibilités du gamma



- Comme pour le delta, vol implicite **augmente** → diminue le gamma
- Une grande volatilité **diminue le gamma** pour les options ATM et **augmente le gamma** ITM/OTM

LES OPTIONS

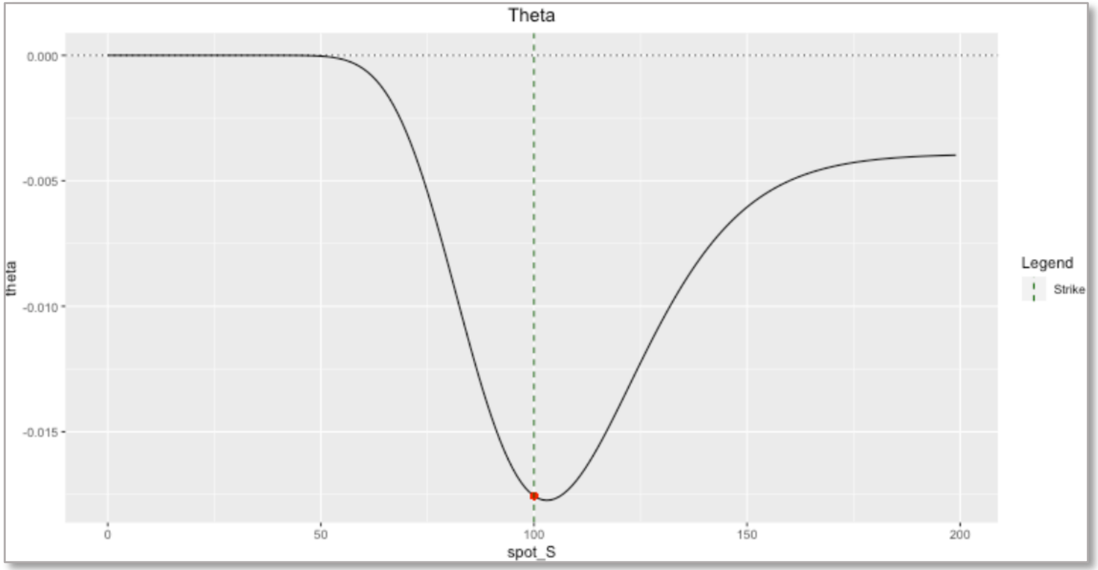
Theta

Le Theta mesure un **changement du prix** par rapport au temps qui passe

$$Theta = \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial t}$$

$$Call\ Theta = -\frac{S\sigma}{2\sqrt{T}}N'(d1) - rKe^{-rT}N(d_2)$$

LES OPTIONS
Theta



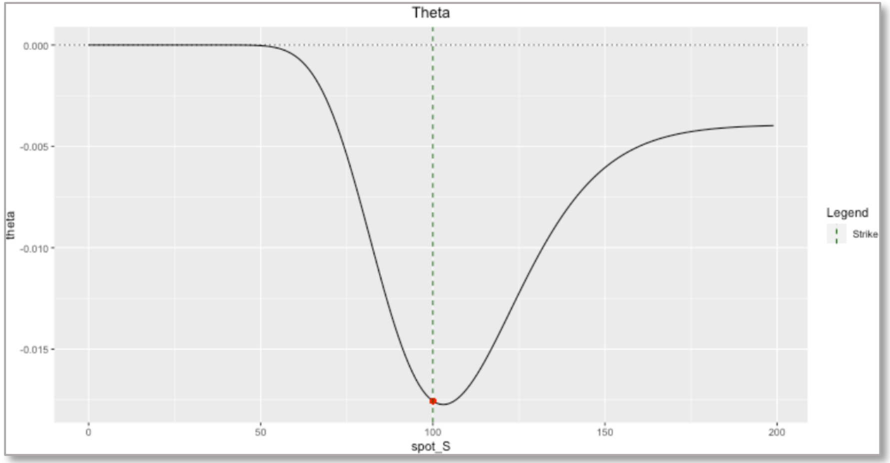
- Le theta **“perd de la vitesse”** plus on se **rapproche** de la **maturité**
- Le theta **dépend** de la **moneyness**
- **Plus** il y a de **volatilité**, plus le **theta** est **grand**

LES OPTIONS
Sensibilité du théta

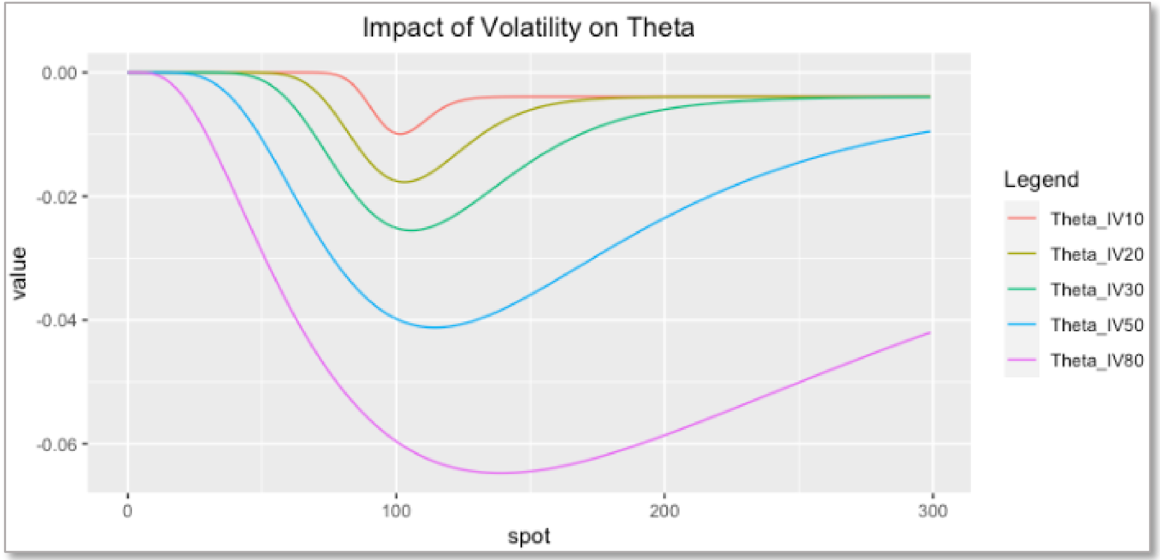
Le théta est négatif mais peut être positif dans 2 situations:

Put très ITM → valeur temps put ITM peut être négative

Call très ITM → si dividendes est plus grand que les intérêts → Foward > niveau du spot actuel (sur le graph, pas de dividendes)



LES OPTIONS
Sensibilités du Theta



Plus la volatilité est grande

- plus le **prix de l'option** et sa **valeur** temps sont grands
- plus la **valeur absolue** du theta est grande

LES OPTIONS

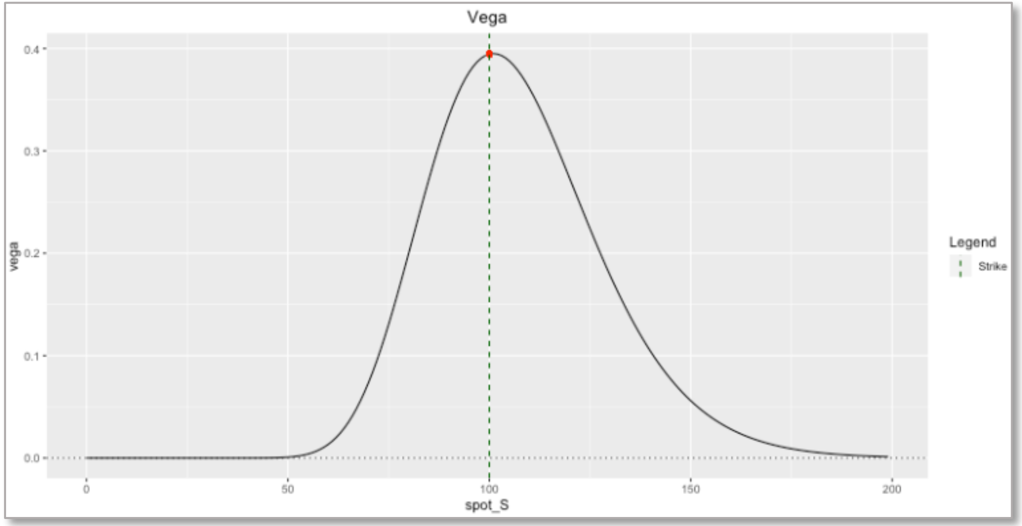
Vega

Le Vega mesure un **changement du prix** par rapport à **la volatilité du sous-jacent**

LES OPTIONS

Vega

Le Vega mesure un **changement du prix** par rapport à **la volatilité du sous-jacent**

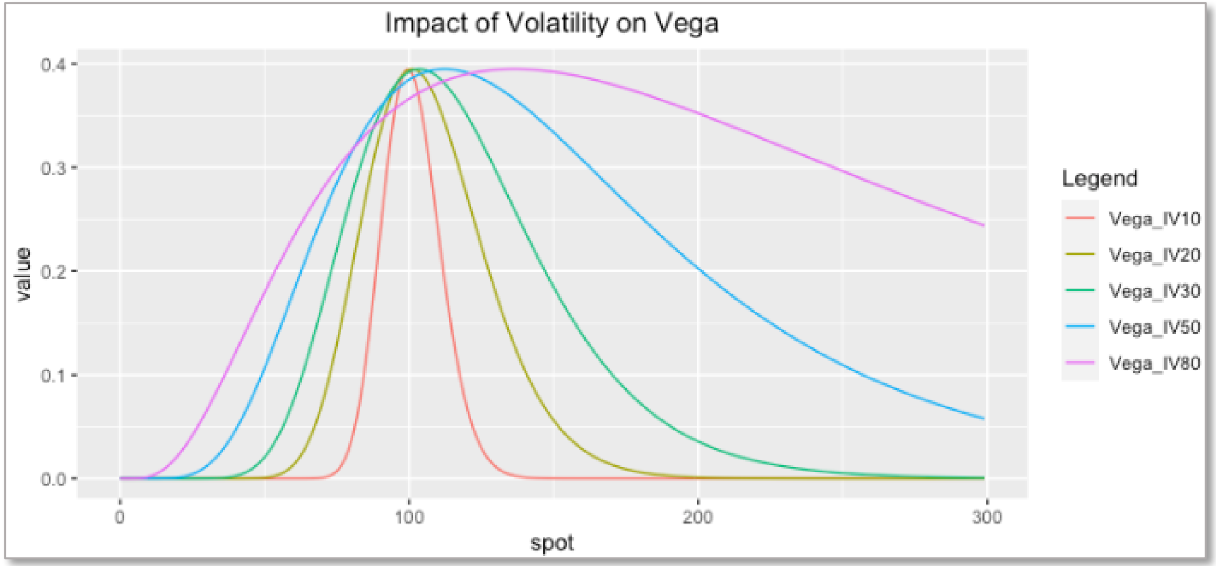


- Parité Call-Put → vega C/P identique

$$Vega = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = S\sqrt{T}N'(d_1)$$

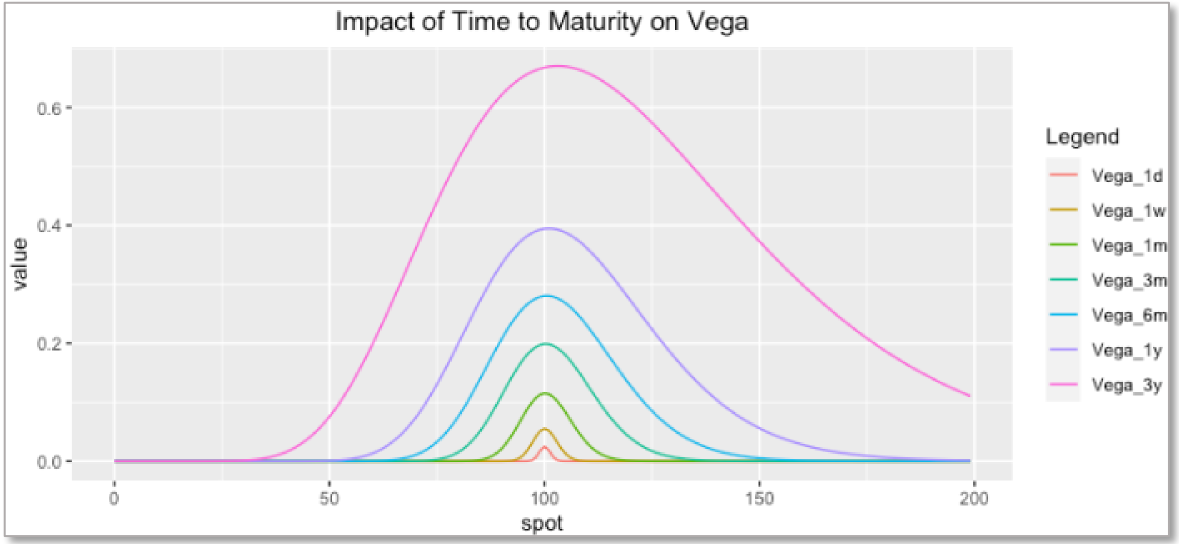
- Même forme que le gamma
- ATM →volatilité peut envoyer le prix ITM/OTM → gros impact sur le prix
- Très ITM/ très OTM → peu d'impact sur le prix de l'option

LES OPTIONS
Sensibilités du Vega



- Forte volatilité → courbe plus large → Vega plus plat
- Forte volatilité ≠ Vega plus grand

LES OPTIONS
Sensibilités du Vega



- Les options perdent de la valeur en s’approchant de la maturité → faible vega attendu
- Vega/Gamma ont les mêmes formes → Grand ATM et petit ITM/OTM
- Mais comportements opposés à l’approche de la maturité

LES OPTIONS
Rho

Le Rho mesure un **changement du prix** par rapport aux **taux d’intérêts**

LES OPTIONS
Rho

Le Rho mesure un **changement du prix** par rapport aux **taux d'intérêts**

Call

- Delta hedger → achat du sous-jacent → emprunt pour financer

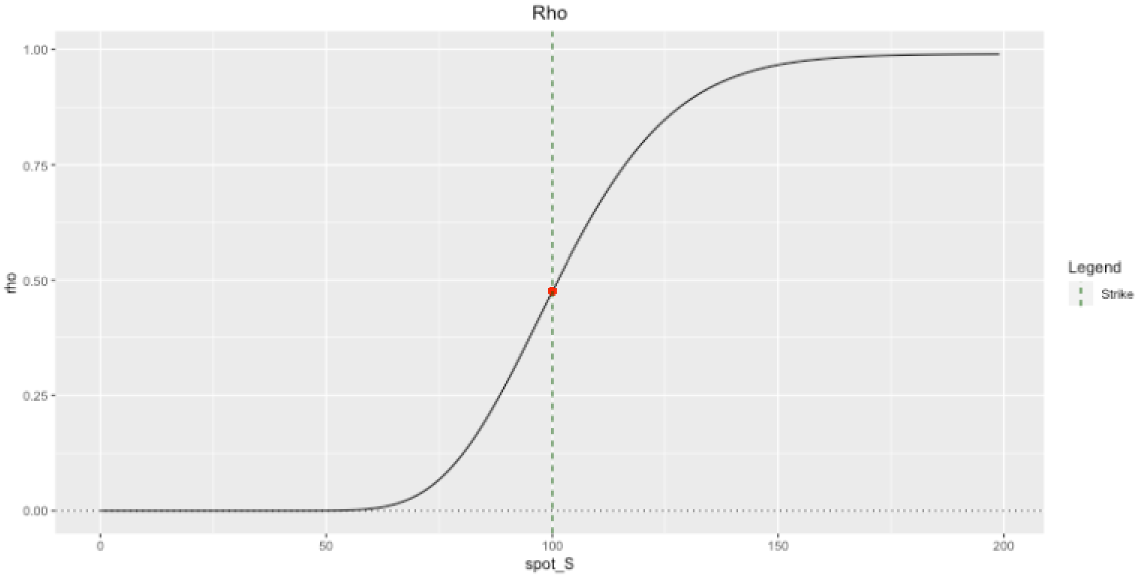
- **Plus** les **taux** sont **hauts** → plus on paie d'intérêts → **plus** le **hedge** coûte **cher** → plus le prix du call est cher → **rho positif**

Put

- Delta hedger → vente du sous-jacent → dépôt pour se faire rémunérer

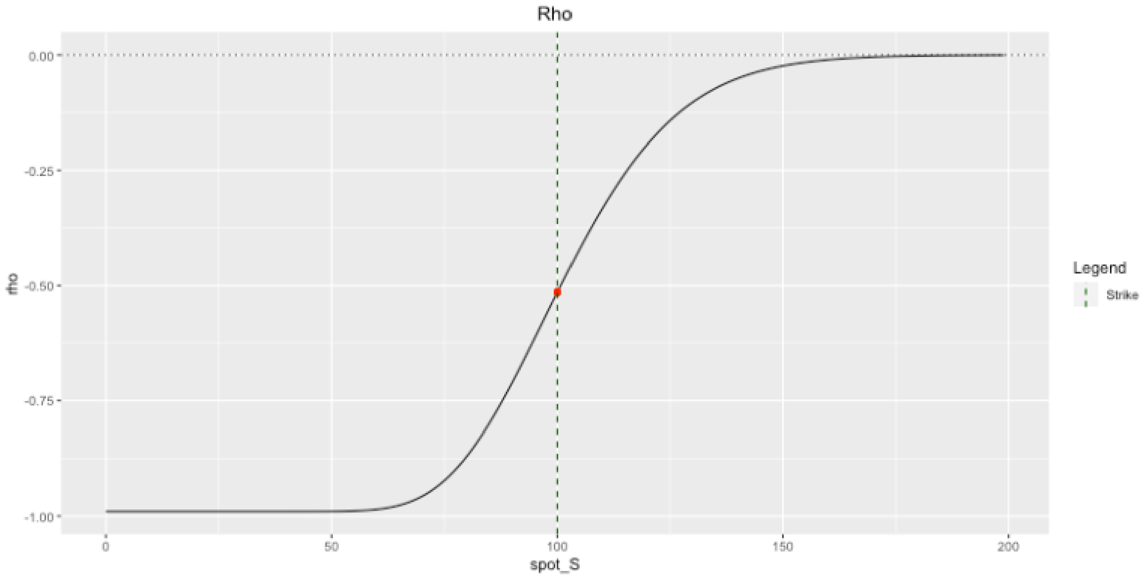
- **Plus** les **taux** sont **hauts** → plus on reçoie d'intérêts → **moins** le **hedge** coûte **cher** → moins le prix du put est cher → **rho négatif**

LES OPTIONS
Rho Call



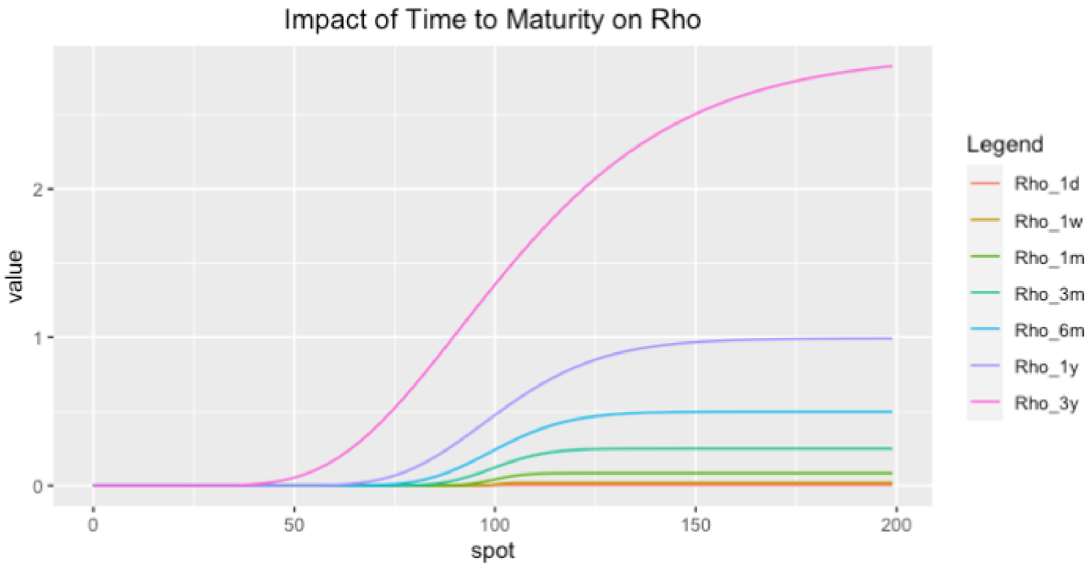
$$Rho\ Call = \rho = \frac{\partial C}{\partial r} = Kte^{-rt}N(d2)$$

LES OPTIONS
Rho Put



$$Rho\ Put = \rho = \frac{\partial P}{\partial r} = -Kte^{-rt}N(-d2)$$

LES OPTIONS
Sensibilités du Rho



- Rho **augmente** plus on **s'éloigne** de la **maturité**
- Options de **longue maturité** sont **plus sensibles** aux taux d'intérêts que les options de courte maturité
- **Peu d'impact** sur le **prix** d'une **option** → grecque la moins importante

LES OPTIONS
Example

Portefeuille:

- Delta = 300 000
- Gamma = 2 500
- Theta -500 000
- Vega = 750 000

Paramètres de marché:

- Prix de l’actif = 1 500
- Taux d’intérêt = 2.5%
- Dividende = -0%
- Volatilité = 25%

LES OPTIONS
Example

Portefeuille:

- Delta = 300 000
- Gamma = 2 500
- Theta -500 000
- Vega = 750 000

Paramètres de marché:

- Prix de l’actif = 1 500
- Taux d’intérêt = 2.5%
- Dividende = -0%
- Volatilité = 25%

Peut-on construire un portefeuille qui annule toutes les grecques ?

LES OPTIONS
Example

	OTM PUT	*ATM CALL*	*OTM CALL*
Strike	1200	1500	1800
Time to Maturity	1	1.5	0.5
Premium	27.85	207.98	25.95
Delta	-0.13	0.61	0.19
Gamma	0.0006	0.0008	0.001
Theta	-0.09	-0.21	-0.22
Vega	3.2	7.05	2.90

LES OPTIONS
Exemple

	OTM PUT	ATM CALL	OTM CALL
Strike	1200	1500	1800
Time to Maturity	1	1.5	0.5
Premium	27.85	207.98	25.95
Delta	-0.13	0.61	0.19
Gamma	0.0006	0.0008	0.001
Theta	-0.09	-0.21	-0.22
Vega	3.2	7.05	2.90

	OTM Puts	ATM Calls	OTM Calls	Stocks
Volume	-542,270	-1,157,791	3,673,006	227,891
Position	Short	Short	Long	Long

LES OPTIONS
Example

On définit les poids de chaque actif: w_1, w_2, w_3, w_4

Il faut que:

$$w_1\Delta_1 + w_2\Delta_2 + w_3\Delta_3 + w_4 = \Delta_V$$
$$w_1\Gamma_1 + w_2\Gamma_2 + w_3\Gamma_3 = \Gamma_V$$
$$w_1\Theta_1 + w_2\Theta_2 + w_3\Theta_3 = \Theta_V$$
$$w_1 \upsilon_1 + w_2 \upsilon_2 + w_3 \upsilon_3 = \upsilon_V$$

- On utilise des options qui ont des **caractéristiques différentes → grecques différentes**
- Avec une bonne **variété** des **strikes** et des **maturités** on arrive à résoudre le problème

LES OPTIONS

Approximation par différence finie

- Une des méthodes de calcul répandues

- On calcule le prix pour une valeur du paramètre et on recalcule le prix en bougeant légèrement le paramètre.

- $\Delta = \frac{f(\theta+\varepsilon)-f(\theta)}{\varepsilon}$

- $\Delta = \frac{f(\theta)-f(\theta-\varepsilon)}{\varepsilon}$

- $\Delta = \frac{f(\theta+\varepsilon)-f(\theta-\varepsilon)}{2\varepsilon}$

Avantages

- Facile à implémenter
- On peut utiliser Monte Carlo

Inconvénient

- Problème avec les payoffs discontinus

LES OPTIONS

Quelle interprétation est correcte pour le delta d'une option call ?

a) La probabilité que l'option soit exercée

b) La sensibilité du prix de l'option par rapport aux variations du prix de l'actif sous-jacent

c) Le coût de détention de l'option

d) La sensibilité du prix de l'option par rapport au temps qui passe

LES OPTIONS
Que signifie un gamma élevé pour une option ?

a) La probabilité élevée d'exercice de l'option

b) Une faible sensibilité du delta aux variations du prix de l'actif sous-jacent

c) Une forte sensibilité du delta aux variations du prix de l'actif sous-jacent

d) Une faible volatilité du marché

LES OPTIONS

Quel impact un theta négatif a-t-il sur une option call ?

a) Le prix de l'option call augmentera à mesure que le temps passe

b) Le prix de l'option call diminuera à mesure que le temps passe

c) Le theta n'a pas d'impact sur le prix de l'option call

LES OPTIONS

Si le rho d'une option call est élevée, que cela indique-t-il ?

a) Forte sensibilité du prix de l'option par rapport aux variations du prix de l'actif sous-jacent

b) Forte sensibilité du prix de l'option par rapport au temps qui passe

c) Forte sensibilité du prix de l'option par rapport à la volatilité implicite

d) Forte sensibilité du prix de l'option par rapport aux variations des taux d'intérêt

LES OPTIONS

Si une option a une vega élevée, comment cela affecte-t-il sa sensibilité au temps qui passe (theta) ?

a) La sensibilité au temps qui passe (theta) est réduite

b) La sensibilité au temps qui passe (theta) est augmentée

c) Le vega n'a pas d'impact sur la sensibilité au temps qui passe (theta)