Institut Mines-Télécom
Business School

# RISQUES ET VOLATILITÉ SUR LES MARCHÉS FINANCIERS

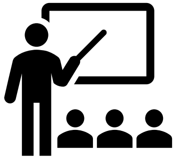
AURÉLIEN ALBA

# SOMMAIRE

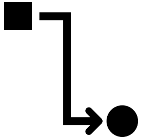
# SOMMAIRE

# 6.
# LA VOLATILITÉ

# LA VOLATILITÉ
## Définition

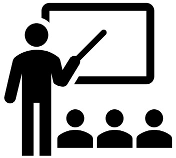


Mesure la **variabilité** des **prix** des actifs financiers sur une **période donnée**

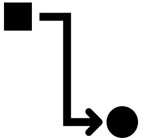


Les mouvements du marché sont **déclenchés** par divers facteurs (**événements économiques** majeurs, **annonces d'entreprises**)

# LA VOLATILITÉ
## Définition



Mesure la **variabilité** des **prix** des actifs financiers sur une **période donnée**



Les mouvements du marché sont **déclenchés** par divers facteurs (**événements économiques** majeurs, **annonces d'entreprises**)

Une **compréhension** approfondie de cette notion est **cruciale** pour **anticiper** les **mouvements** du **marché**, évaluer les risques et prendre des décisions

**Comprendre** ces causes permet de **connaître** les principales **forces** derrière les **fluctuations** du **marché**

# LA VOLATILITÉ
## Historique et Implicite

### HISTORIQUE

se base sur l'analyse des **données passées**

### IMPLICITE

utilise les **prix** des **options** pour projeter la **volatilité future**

# LA VOLATILITÉ

## Définition statistique de la volatilité historique

**Mesure de l'amplitude de variation d'un actif**

**Volatilité =** Ecart type de la variance annualisé

**Variance =** Vraie mesure du risque. Somme des carrés des rendements

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} Variance_{0 \to T}\left(\frac{dS}{S}\right) = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{dS}{S}\right)^2 dt$$

$$Variance \sim \sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{\Delta S_k}{S_k}\right)^2 - \left(\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{\Delta S_k}{S_k}\right)\right)^2$$

# LA VOLATILITÉ

## La volatilité présente des opportunités

La volatilité n'est pas simplement synonyme de **risque**; elle présente également des **opportunités**

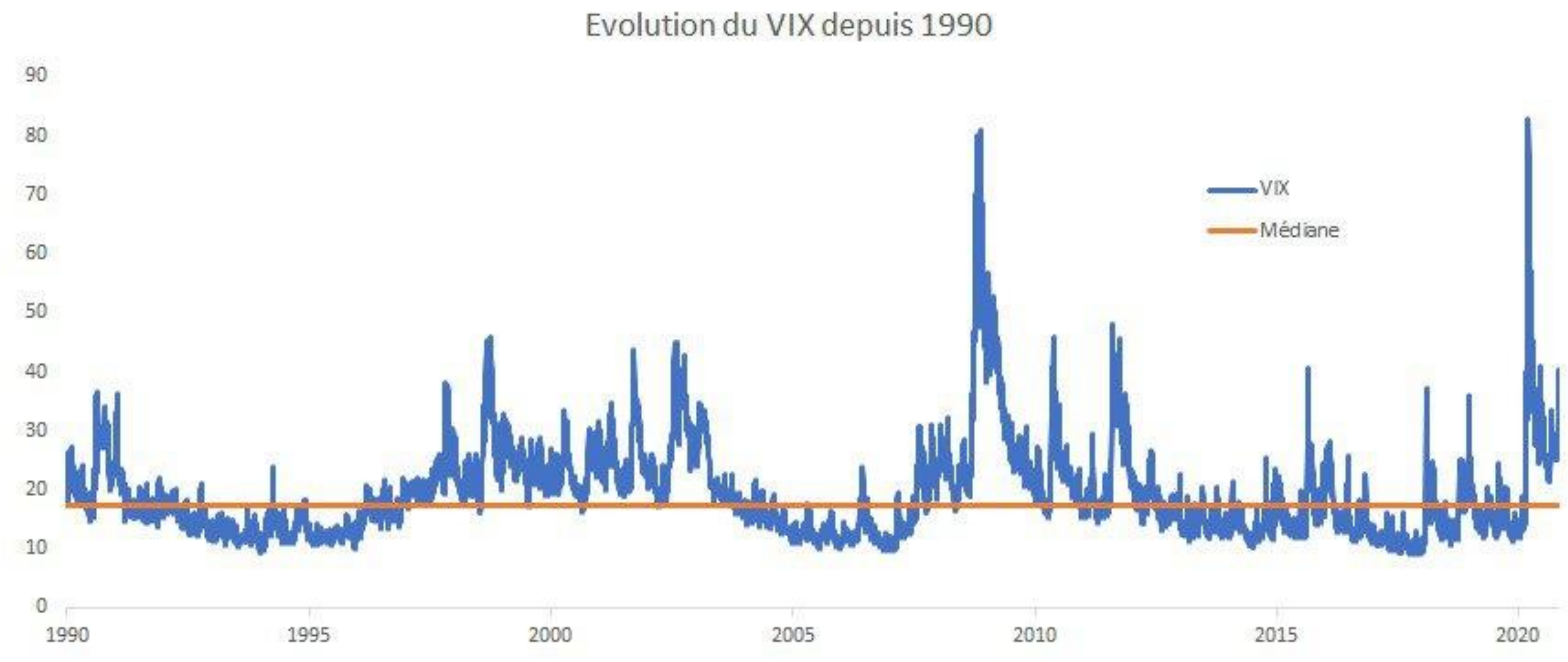
Les investisseurs avertis peuvent utiliser ces **fluctuations** pour prendre des **positions avantageuses**

# LA VOLATILITÉ
## Les indices de volatilités

Pour **évaluer la volatilité**, des **indices** tels que le **VIX** aux États-Unis servent de **baromètres** essentiels

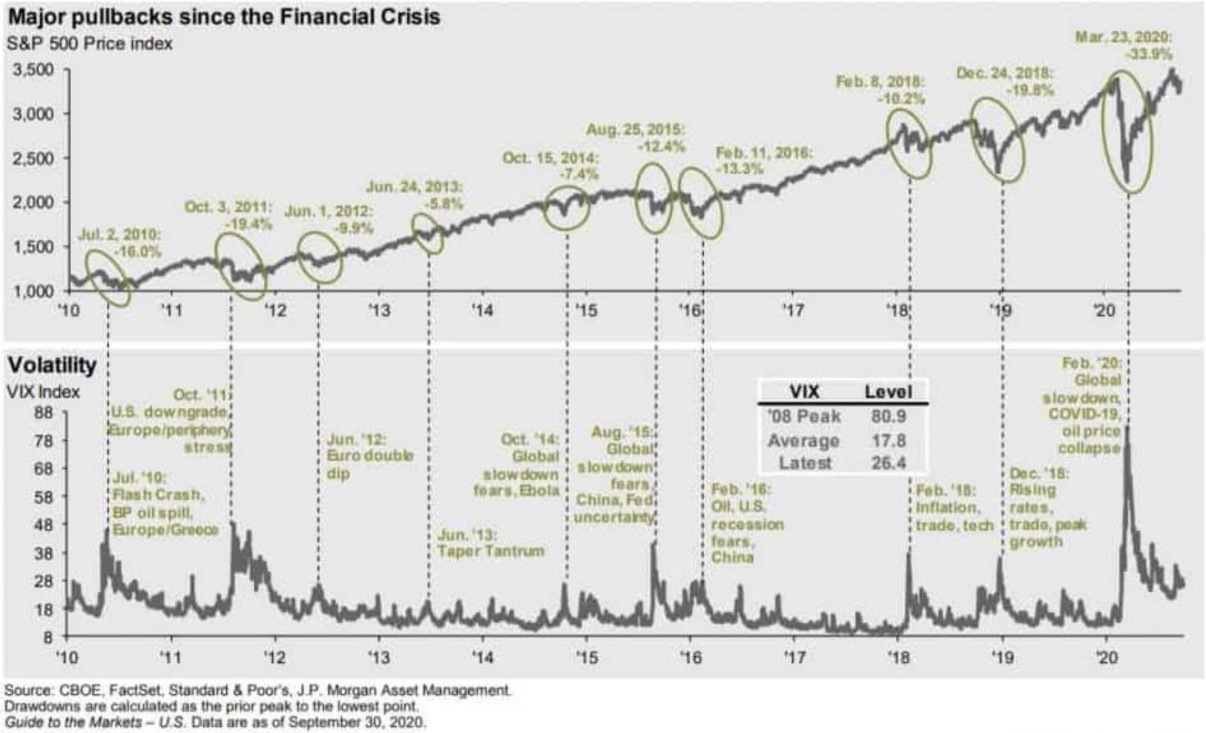
Offrent une perspective **quantifiable** de la **volatilité**, permettant aux **investisseurs** de prendre des **décisions** éclairées

# LA VOLATILITÉ
## Les indices de volatilités



# LA VOLATILITÉ

## Les indices de volatilités



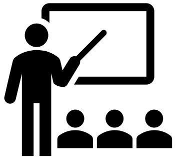

J.P.Morgan Asset Management

# LA VOLATILITÉ
## Gestion

La **gestion** de la volatilité est une **compétence clé** pour les investisseurs.

Utilisation **d'options**, qui permettent **d'atténuer** les **risques** et de **protéger** les **portefeuilles** pendant des périodes de volatilité accrue.

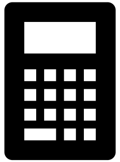
# LA VOLATILITÉ
## Focus sur la volatilité implicite



**Mesure** de la **volatilité future** anticipée par les participants au marché

La volatilité implicite est **dérivée** des **prix** des **options**

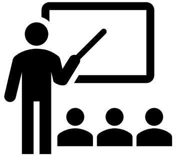
**Exprime** les **attentes** du **marché** concernant la **future fluctuation** des prix d'un actif financier



Calculée à l'aide des **modèles d'évaluation** des **options**

Prise en compte **plusieurs facteurs** :
- prix de l'option
- prix actuel de l'actif sous-jacent
- temps restant avant l'expiration de l'option
- le taux d'intérêt sans risque

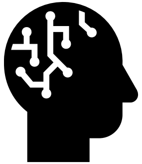
# LA VOLATILITÉ
## Focus sur la volatilité implicite



Les **options** donnent aux investisseurs le **droit**, mais **non l'obligation**, **d'acheter** ou de **vendre** un actif à un prix prédéfini avant une date d'expiration.

**Sensibilité** des **options** aux variations de **volatilité**.

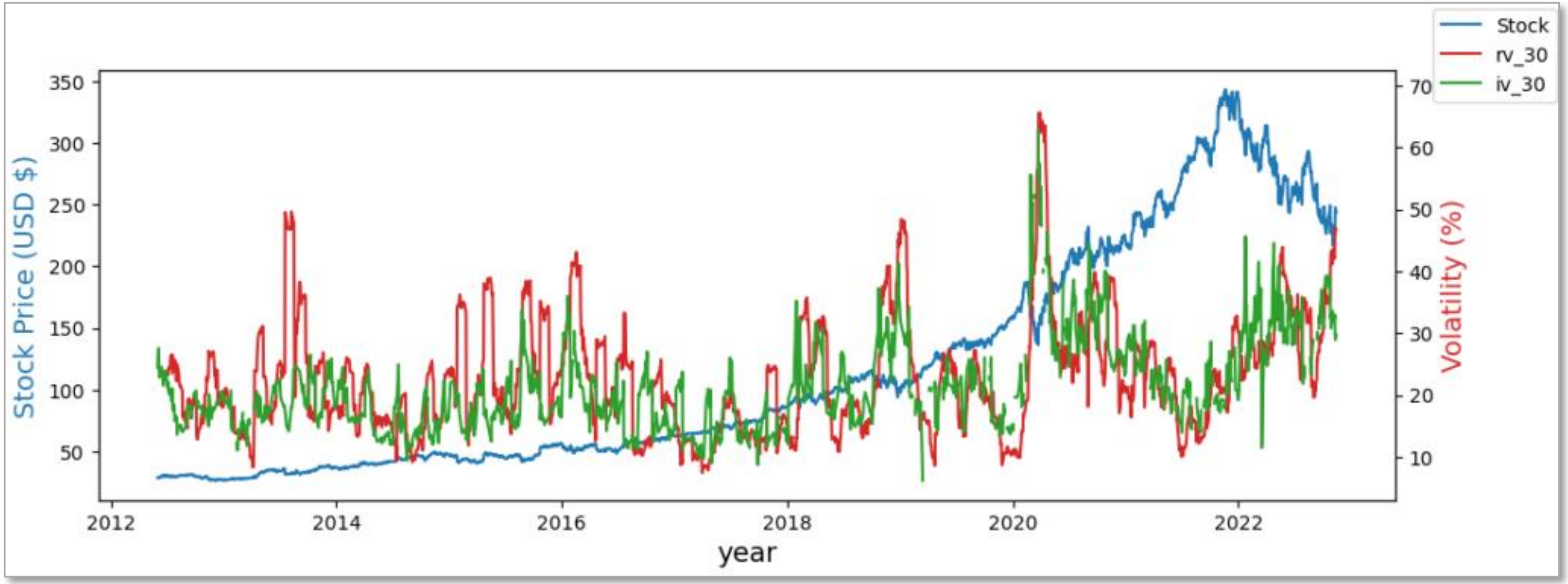
Une **volatilité implicite** plus **élevée** se traduit par des **primes** d'option plus **élevées**.



Une **volatilité implicite élevée** :
- anticipation de **mouvements importants** des prix dans le futur
- indique souvent une période **d'incertitude** ou d'événements économiques majeurs

À l'inverse, une **volatilité implicite** plus **basse** pourrait signaler une période de **stabilité** attendue sur les marchés.

# LA VOLATILITÉ
## Focus sur la volatilité implicite



# LA VOLATILITÉ
## Focus sur la volatilité implicite

Peut également servir d'indicateur de **sentiment du marché**

Une **augmentation soudaine** de la volatilité implicite => **réévaluation rapide des risques** par les investisseurs

<u>Ajuster leurs positions et gérer le risque</u>

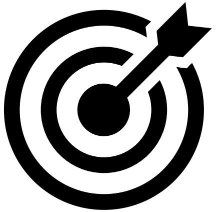
# LA VOLATILITÉ
## Focus sur la volatilité implicite

Les investisseurs utilisent la **volatilité implicite** pour élaborer des **stratégies**

Une volatilité implicite **élevée** → stratégies de **protection**

Une volatilité implicite **basse** peut encourager des stratégies de **vente d'options**

# LA VOLATILITÉ
## Focus sur la volatilité implicite



Offre un **aperçu unique** des **anticipations** du marché.

Outil puissant pour **évaluer** le **sentiment** du **marché**, **gérer** le **risque** et **élaborer** des **stratégies** d'investissement.

Reconnaître ses **limites** et de **l'incorporer judicieusement** dans le processus de **prise** de **décision**.

# LA VOLATILITÉ
## Calcul de la volatilité réalisée

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

En posant $f(S_t, t) = ln(S_t)$ et en appliquant itô

$$dlog(S_t) = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW_t$$

- Le **logarithme du prix** du stock suit une **distribution normale**
- Le terme de **drift** est **proportionnel** à la **période** pendant laquelle le changement a eu lieu
- Le terme de **volatilité** est **déterminé** par le **bruit** (mouvement Brownien)

Pour estimer la volatilité, on utilise les **log rendements** sur 1 jour et on calcule l'**écart-type** dessus. On obtient la volatilité sur un jour: $\sigma\sqrt{dt}$

# LA VOLATILITÉ

## Calcul de la volatilité implicite

Calculée à partir des **prix de marché d'options vanille** et en utilisant un modèle de pricing (B&S par ex.)

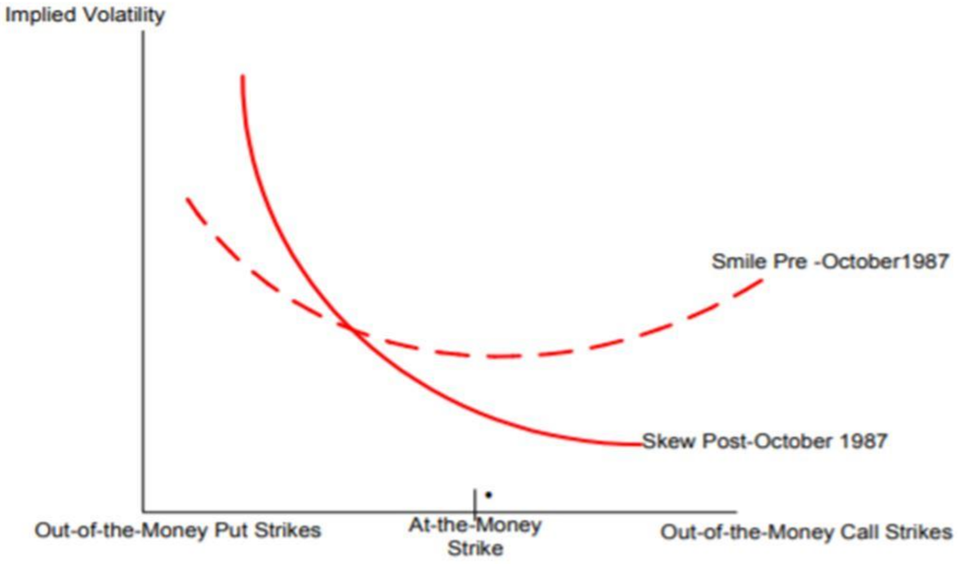
$$Prix_{BS} = f(\sigma_{BS}, K, T)$$

$$\sigma_{BS}(K,T) = f^{-1}(Prix\ de\ marché(K,T))$$

La volatilité implicite **n'est pas une constante.**

Elle dépend du **strike K** et de la **maturité T**

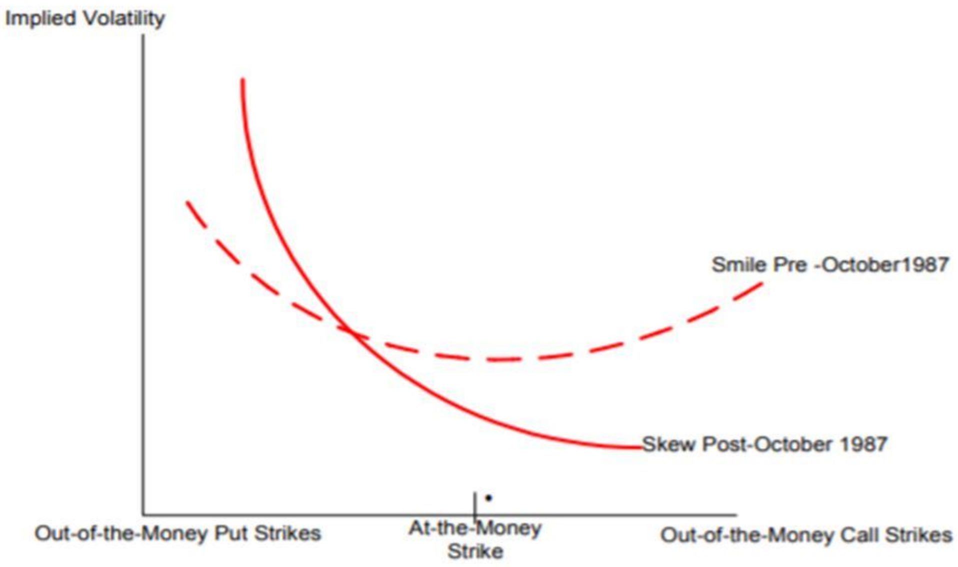
# LA VOLATILITÉ
## Calcul de la volatilité implicite




Source: CBOE

**Pourquoi un smile ou un skew ?**

# LA VOLATILITÉ
## Calcul de la volatilité implicite



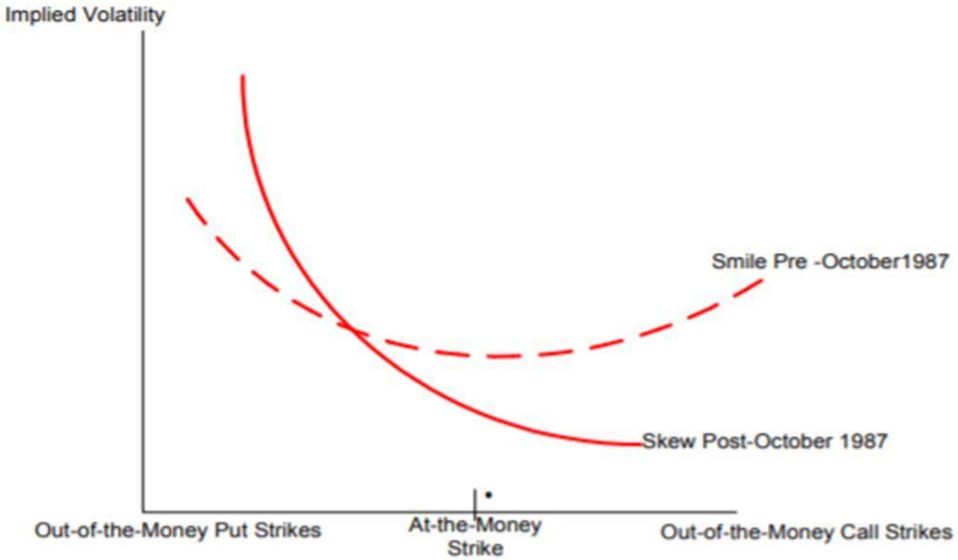
Source: CBOE

### Pourquoi un smile ou un skew ?

- FX: smile car le marché est « symétrique » → EURUSD, investisseur EUR voit le marché de façon inverse à un investisseur USD.
  Vol plus grande OTM/ITM car plus grande demande des acheteurs que des vendeurs → prix plus grand qu'attendu → vol plus grande

- EQ: skew car les investisseurs veulent se couvrir contre les baisses plutôt que les hausses. Plus probable d'avoir un gros mouvement baissier que haussier

# LA VOLATILITÉ
## Calcul de la volatilité implicite




Source: CBOE

### Pourquoi un smile ou un skew ?

- Raisonnement en terme de gamma P&L
- Marché fortement baissier → gamma sur petit strike augmente + plus grande volatilité réalisée → vendeur d'option rebalance son delta plus souvent → plus grande perte pour le vendeur d'option.
- Compensation de ces frais →le vendeur price ses options avec une plus grande volatilité implicite

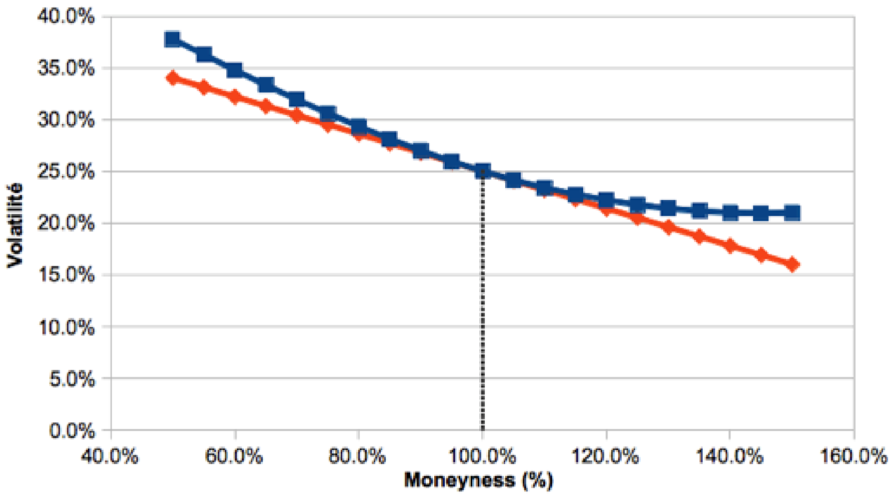
# LA VOLATILITÉ
## Calcul de la volatilité implicite

### Structure par terme

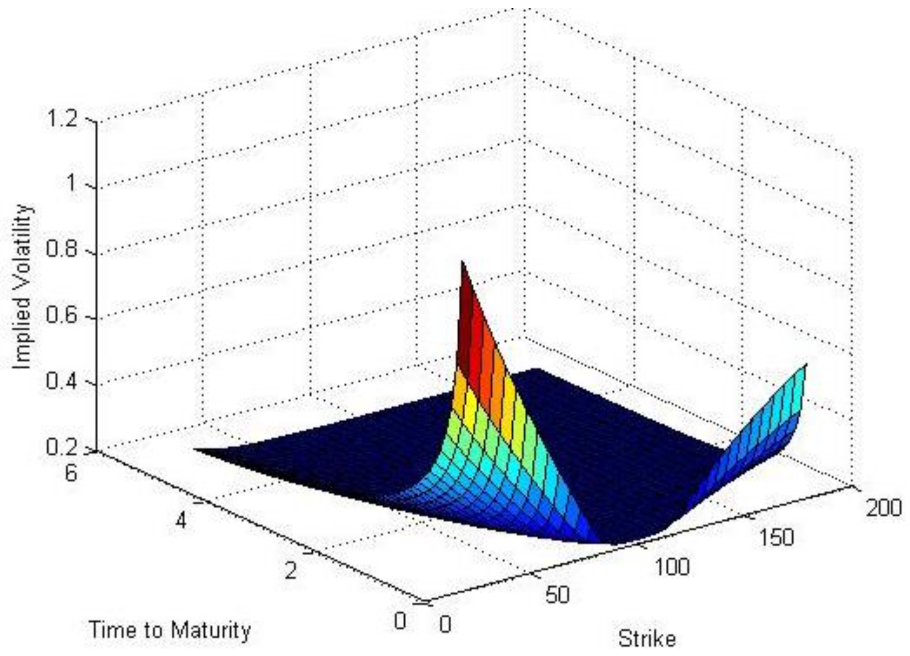
Vol, skew et curve sont dépendants de la maturité

$Skew = \frac{\partial \sigma}{\partial K}$ = Pente de la surface de la volatilité

$Curve = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial K^2}$ = Convexité de la surface de volatilité



# LA VOLATILITÉ
## Surface de volatilité



# LA VOLATILITÉ
## Autres types de volatilités

### Volatilité locale (Modèle de Dupire)

On modélise une volatilité qui dépend du cours du sous-jacent $\sigma = f(t, S_t)$

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma_{local}(t, S_t) dW_t$$

$$\sigma(K,T) = \sqrt{2\frac{\frac{\partial C}{\partial T} + (r-q)K\frac{\partial C}{\partial K} + qC}{K^2\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}}}$$

On calibre les volatilités $\sigma_{local}(t, S_t)$ de telle sorte que le modèle « match » les prix donnés par le marché

### Volatilité stochastique (Modèle de Heston)

On modélise la volatilité comme une variable aléatoire

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sqrt{v_t} dZ_S$$
$$dv_t = \kappa(\theta_v - v_t)dt + \sigma_v \sqrt{v_t} dZ_v$$
$$\langle dZ_s, dZ_v \rangle = \rho_{S,v} dt$$

# LA VOLATILITÉ
## Autres types de volatilités

### Volatilité terminale

Pour (S, T), la volatilité terminale est la moyenne quadratique de la volatilité entre 0 et T

$$\sum_{T} \sqrt{E\left(\frac{1}{T}\int_0^T \sigma_t^2 \, dt\right)}$$

# LA VOLATILITÉ

## Est-elle importante pour les investisseurs ?

a) Elle n'a pas d'impact significatif sur les décisions d'investissement

b) Elle permet d'anticiper les mouvements du marché et offre des opportunités d'investissement

c) Elle est principalement utile pour les investisseurs à court terme

# LA VOLATILITÉ
## Comment les investisseurs peuvent-ils la gérer de manière proactive ?

a) En ignorant les fluctuations du marché

b) En utilisant des techniques de gestion des risques, y compris des instruments financiers tels que les options

c) En évitant complètement les marchés volatils

# LA VOLATILITÉ

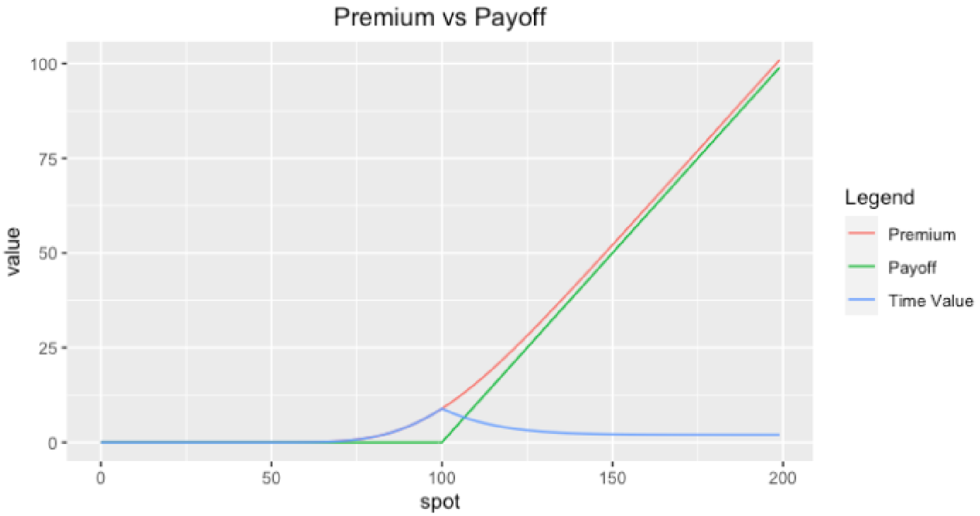
## Pourquoi les investisseurs pourraient-ils la considérer comme une opportunité ?

a) Parce que la volatilité ne présente jamais d'opportunités

b) Car elle crée des mouvements de marché prévisibles

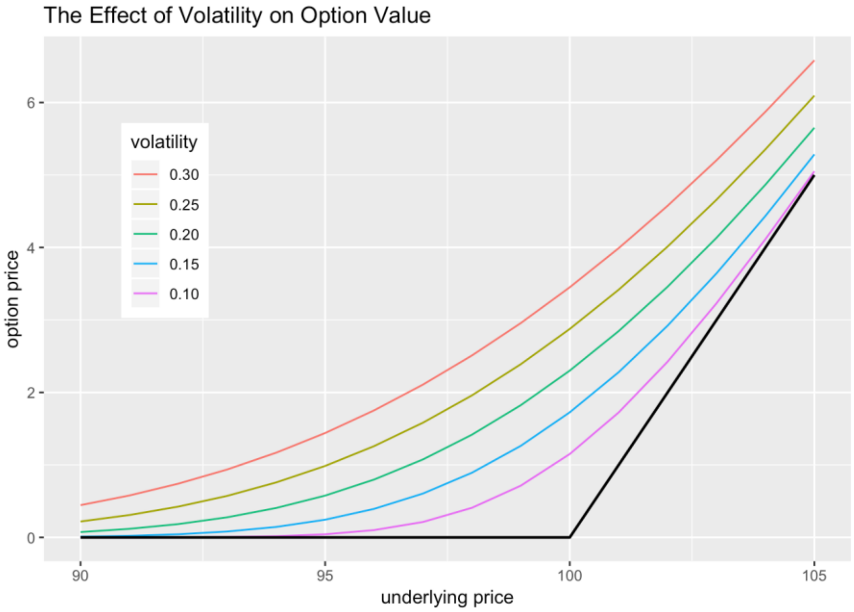
c) Elle peut permettre aux investisseurs de prendre des positions avantageuses lorsque les prix sont volatiles

# LA VOLATILITÉ
## Stratégie de trading de la volatilité




- La **volatilité** encapsule l'aspect **risque** du marché
- La **perception** de ce **risque** est traduite dans la « **valeur temps** » de la prime de l'option

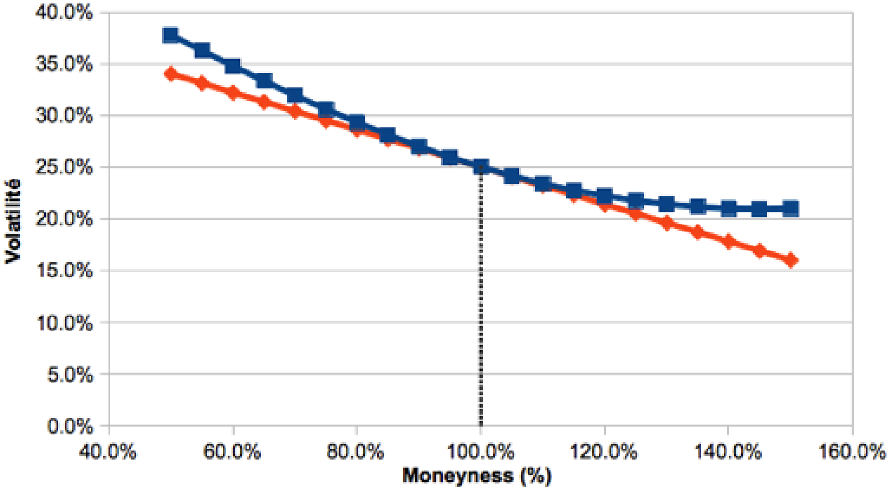
# LA VOLATILITÉ
## Stratégie de trading de la volatilité




- Le **prix** des options vanilles sont des **fonctions croissantes** de la **volatilité**

- Une positions acheteuse d'un Call (**long Call**) → position **long volatilité**

# LA VOLATILITÉ
## Stratégie de trading de la volatilité




### Augmentation du skew

- **Renchérissement** des **Calls** et **Puts** de **strike < 100%** du forward
- **Baisse prime** des options pour **strike > 100%** du forward

### Augmentation de la curve

- **Renchérissement** des **Calls** et **Puts** en dehors de la monnaie

# LA VOLATILITÉ

## Stratégie de trading de la volatilité


| | Calls | | | | | | | | Strike | | Puts | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Ticker | 1D% | Bid | Ask | Last | IVM | DM | Volm | 25 | | Ticker | 1D% | Bid | Ask | Last | IVM | DM | Volm |
| | 24-Nov-23 (2d); CSize 100; R 5.56; IFwd 483.15 | | | | | | | | | | 24-Nov-23 (2d); CSize 100; R 5.56; IFwd 483.15 | | | | | | | |
| 1) | NVDA 11/24/23 C452.5 | -40.43% | 30.30 | 30.80 | 29.25 | 48.89 | 1.00 | 15 | 452.50 | 76) | NVDA 11/24/23 P452.5 | -94.55% | .13 | .14 | .15 | 47.81 | -.02 | 2437 |
| 2) | NVDA 11/24/23 C455 | -41.58% | 27.90 | 28.30 | 28.19 | 38.38 | .99 | 2241 | 455.00 | 77) | NVDA 11/24/23 P455 | -94.53% | .16 | .17 | .17 | 46.06 | -.03 | 5802 |
| 3) | NVDA 11/24/23 C457.5 | -44.32% | 25.35 | 25.90 | 25.63 | 44.86 | .96 | 84 | 457.50 | 78) | NVDA 11/24/23 P457.5 | -93.62% | .20 | .22 | .22 | 44.37 | -.04 | 2593 |
| 4) | NVDA 11/24/23 C460 | -46.14% | 23.00 | 23.40 | 23.64 | 43.49 | .95 | 2247 | 460.00 | 79) | NVDA 11/24/23 P460 | -92.89% | .27 | .28 | .27 | 42.68 | -.05 | 16740 |
| 5) | NVDA 11/24/23 C462.5 | -51.39% | 20.50 | 21.05 | 20.28 | 41.45 | .94 | 43 | 462.50 | 80) | NVDA 11/24/23 P462.5 | -91.76% | .35 | .37 | .35 | 41.11 | -.06 | 4475 |
| 6) | NVDA 11/24/23 C465 | -55.32% | 18.20 | 18.60 | 17.90 | 37.14 | .93 | 620 | 465.00 | 101) | NVDA 11/24/23 P465 | -90.06% | .47 | .49 | .47 | 39.82 | -.08 | 10023 |
| 7) | NVDA 11/24/23 C467.5 | -57.66% | 15.95 | 16.25 | 16.00 | 36.93 | .90 | 351 | 467.50 | 102) | NVDA 11/24/23 P467.5 | -87.43% | .64 | .67 | .66 | 38.73 | -.10 | 5106 |
| 8) | NVDA 11/24/23 C470 | -61.08% | 13.70 | 13.95 | 14.01 | 36.20 | .87 | 2859 | 470.00 | 103) | NVDA 11/24/23 P470 | -84.35% | .89 | .90 | .90 | 37.22 | -.14 | 24402 |
| 9) | NVDA 11/24/23 C472.5 | -65.58% | 11.55 | 11.80 | 11.70 | 35.08 | .83 | 583 | 472.50 | 104) | NVDA 11/24/23 P472.5 | -80.78% | 1.23 | 1.27 | 1.24 | 36.71 | -.19 | 5704 |
| 10) | NVDA 11/24/23 C475 | -69.00% | 9.55 | 9.85 | 10.00 | 35.99 | .75 | 3791 | 475.00 | 105) | NVDA 11/24/23 P475 | -75.64% | 1.72 | 1.77 | 1.71 | 36.09 | -.24 | 17092 |
| 11) | NVDA 11/24/23 C477.5 | -72.73% | 7.75 | 8.00 | 8.30 | 34.92 | .70 | 7222 | 477.50 | 106) | NVDA 11/24/23 P477.5 | -68.98% | 2.39 | 2.45 | 2.41 | 35.71 | -.31 | 10527 |
| 12) | NVDA 11/24/23 C480 | -78.40% | 6.20 | 6.35 | 6.20 | 35.09 | .61 | 20886 | 480.00 | 107) | NVDA 11/24/23 P480 | -61.28% | 3.30 | 3.35 | 3.33 | 35.66 | -.39 | 47777 |
| 13) | NVDA 11/24/23 C482.5 | -81.74% | 4.85 | 5.00 | 4.90 | 35.25 | .52 | 16507 | 482.50 | 108) | NVDA 11/24/23 P482.5 | -52.91% | 4.40 | 4.50 | 4.45 | 35.29 | -.48 | 11161 |
| 14) | NVDA 11/24/23 C485 | -85.15% | 3.75 | 3.85 | 3.78 | 36.14 | .44 | 35382 | 485.00 | 109) | NVDA 11/24/23 P485 | -43.92% | 5.75 | 5.90 | 5.81 | 36.51 | -.56 | 14660 |
| 15) | NVDA 11/24/23 C487.5 | -87.92% | 2.88 | 2.94 | 2.90 | 36.38 | .36 | 9382 | 487.50 | 110) | NVDA 11/24/23 P487.5 | -35.63% | 7.40 | 7.55 | 7.30 | 37.00 | -.64 | 6638 |
| 16) | NVDA 11/24/23 C490 | -90.13% | 2.19 | 2.24 | 2.21 | 37.07 | .29 | 41359 | 490.00 | 111) | NVDA 11/24/23 P490 | -22.98% | 9.15 | 9.40 | 9.52 | 38.24 | -.71 | 15755 |
| 17) | NVDA 11/24/23 C492.5 | -91.92% | 1.66 | 1.71 | 1.72 | 37.98 | .23 | 10255 | 492.50 | 112) | NVDA 11/24/23 P492.5 | -18.18% | 11.10 | 11.35 | 10.98 | 39.05 | -.77 | 3273 |
| 18) | NVDA 11/24/23 C495 | -93.49% | 1.26 | 1.30 | 1.29 | 38.99 | .19 | 20020 | 495.00 | 113) | NVDA 11/24/23 P495 | -8.37% | 13.20 | 13.45 | 13.35 | 40.06 | -.81 | 6174 |
| 19) | NVDA 11/24/23 C497.5 | -94.71% | .97 | 1.00 | .98 | 40.17 | .14 | 10076 | 497.50 | 114) | NVDA 11/24/23 P497.5 | .69% | 15.35 | 15.70 | 15.95 | 39.87 | -.86 | 2985 |
| 20) | NVDA 11/24/23 C500 | -95.58% | .74 | .77 | .76 | 41.67 | .11 | 82797 | 500.00 | 115) | NVDA 11/24/23 P500 | 5.74% | 17.65 | 17.95 | 18.25 | 42.94 | -.88 | 7380 |
| 21) | NVDA 11/24/23 C502.5 | -96.31% | .59 | .60 | .59 | 42.87 | .09 | 9985 | 502.50 | 116) | NVDA 11/24/23 P502.5 | 8.52% | 19.95 | 20.35 | 20.00 | 44.19 | -.91 | 767 |
| 22) | NVDA 11/24/23 C505 | -96.86% | .45 | .48 | .47 | 44.33 | .07 | 24005 | 505.00 | 117) | NVDA 11/24/23 P505 | 15.37% | 22.30 | 22.75 | 22.90 | 45.61 | -.92 | 802 |
| 23) | NVDA 11/24/23 C507.5 | -97.34% | .36 | .38 | .37 | 45.70 | .06 | 5696 | 507.50 | 118) | NVDA 11/24/23 P507.5 | 15.30% | 24.65 | 25.20 | 25.02 | 43.02 | -.96 | 218 |
| 24) | NVDA 11/24/23 C510 | -97.67% | .30 | .31 | .30 | 47.34 | .05 | 37382 | 510.00 | 119) | NVDA 11/24/23 P510 | 26.87% | 27.10 | 27.55 | 28.80 | 46.37 | -.96 | 342 |
| 25) | NVDA 11/24/23 C512.5 | -97.91% | .24 | .26 | .25 | 48.84 | .04 | 5227 | 512.50 | 120) | NVDA 11/24/23 P512.5 | 17.24% | 29.50 | 30.05 | 29.10 | 47.19 | -.97 | 61 |

# LA VOLATILITÉ
## Call-spread / Put-spread

# LA VOLATILITÉ
## Call-spread / Put-spread

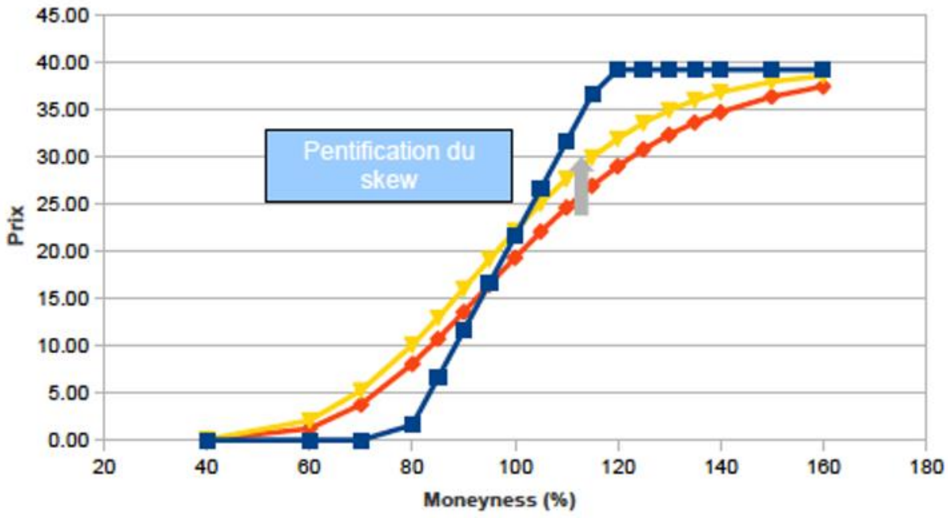
### Construction

- **Achat + vente** de **deux Calls** (ou deux Puts) de **même maturité** et de **strikes différents**

### Intérêt

- Permet d'avoir une **exposition au skew**

# LA VOLATILITÉ
## Call-spread / Put-spread




Profil d'un call-spread

### Construction

- **Achat + vente** de **deux Calls** (ou deux Puts) de **même maturité** et de **strikes différents**

### Intérêt

- Permet d’avoir une **exposition au skew**

# LA VOLATILITÉ
## Straddle

# LA VOLATILITÉ
## Straddle

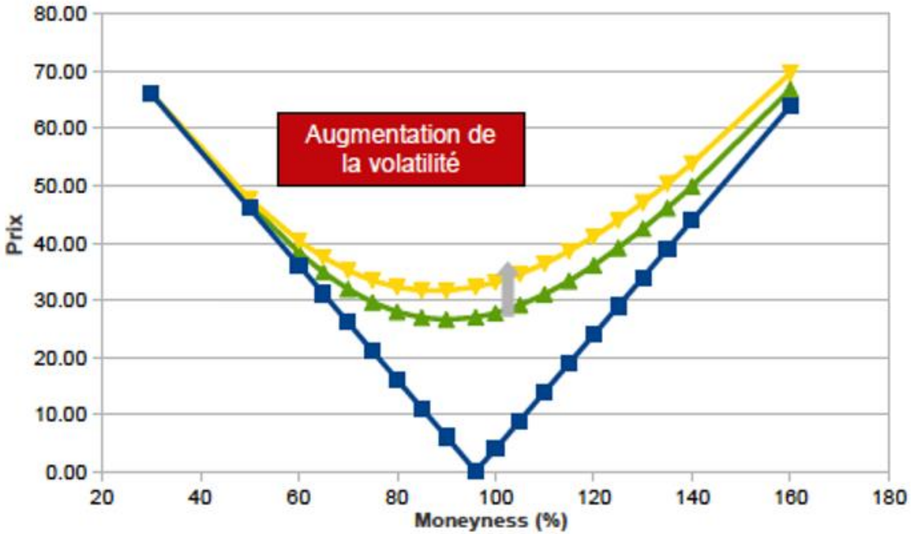
### Construction

- **Achat** d'un **Call** et d'un **Put** de **même maturité** et de **même strikes**

### Intérêt

- Extrêmement **sensible à la volatilité**

# LA VOLATILITÉ
## Straddle




Profil d'un straddle

### Construction

- **Achat** d'un **Call** et d'un **Put** de **même maturité** et de **même strikes**

### Intérêt

- Extrêmement **sensible à la volatilité**

# LA VOLATILITÉ

## Strangle

# LA VOLATILITÉ
## Strangle

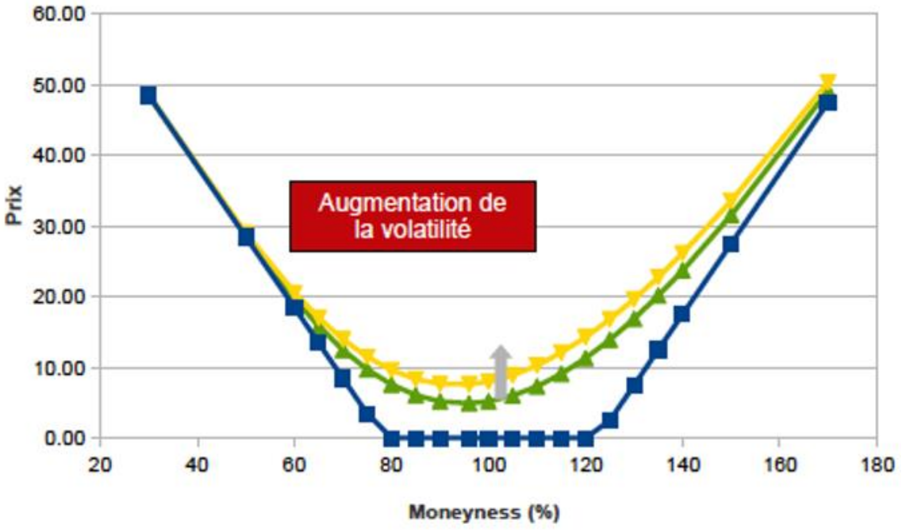
### Construction

- **Achat** d'un **Call** et d'un **Put** de **même maturité** et de **strikes différents**

### Intérêt

- Extrêmement **sensible à la volatilité**

# LA VOLATILITÉ
## Strangle




Profil d'un strangle

### Construction

- **Achat** d’un **Call** et d’un **Put** de **même maturité** et de **strikes différents**

### Intérêt

- Extrêmement **sensible à la volatilité**

# LA VOLATILITÉ
## PnL d'une pose de volatilité

### PnL d'une position hedgée en delta

En utilisant un développement limité à l'ordre 2:

$$dPnL = \theta . dt + \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{dS}{S}\right)^2 + \upsilon . d\sigma$$

En dehors des mouvements de volatilité, la position est gagnante seulement si:

$$S > \sqrt{\frac{-2\theta}{\Gamma}}$$

Sous les hypothèses de B&S, on peut écrire:

$$dPnL = \frac{1}{2}\Gamma\left(\left(\frac{dS}{S}\right)^2 - \sigma^2 S^2 dt\right) + \upsilon . d\sigma \text{ car } \theta = \frac{1}{2}\sigma^2\Gamma$$

# LA VOLATILITÉ
## PnL d'une pose de volatilité

### Dynamique de volatilité

Etant donnée une fonction de volatilité, il est important de définir comment celle-ci varie si la valeur du sous-jacent change.

**Sticky strike**: On suppose que la volatilité implicite d'une option reste inchangée suite à la variation du cours du sous-jacent

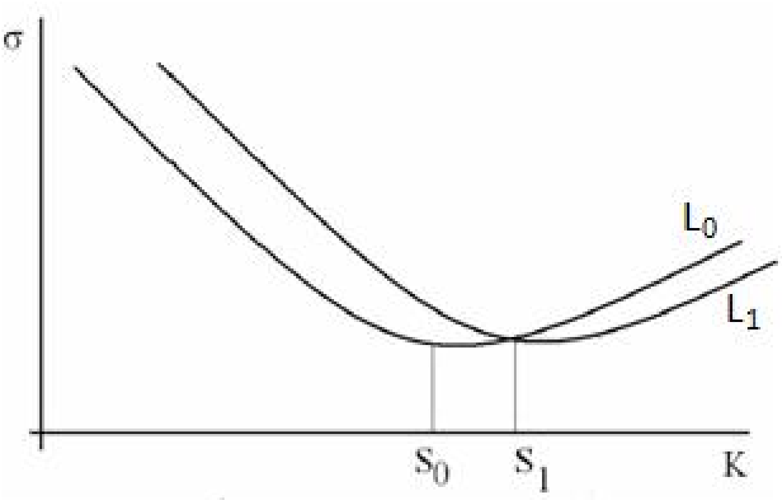
$$\sigma_{S+\delta S}^{BS}(K,T) \equiv \sigma_S^{BS}(K,T)$$
$$\Delta = \Delta^{BS}$$

**Sticky delta**: Le niveau de la volatilité à la monnaie (volatilité de l'option la plus liquide) doit rester invariante même si la valeur du spot change

$$\sigma_{S+\delta S}^{BS}(K = S + \delta S, T) = \sigma_S^{BS}(K = S, T)$$
$$\Delta = \Delta^{BS} + \upsilon \frac{\partial \sigma_S^{BS}}{\partial S}$$

# LA VOLATILITÉ
## PnL d'une pose de volatilité

### Dynamique de volatilité




### Sticky strike
- Le skew **reste le même**

### Sticky delta
- Le skew est **« déplacé »** dans le **sens** du mouvement **du sous-jacent**

- Ces deux règles entrainent des **opportunités d'arbitrage** mais elles permettent de **comprendre** les **risques** associés aux produits traités

# 7.

# LA CORRÉLATION ET RISQUE DE COVARIANCE

# LA CORRÉLATION ET RISQUE DE COVARIANCE

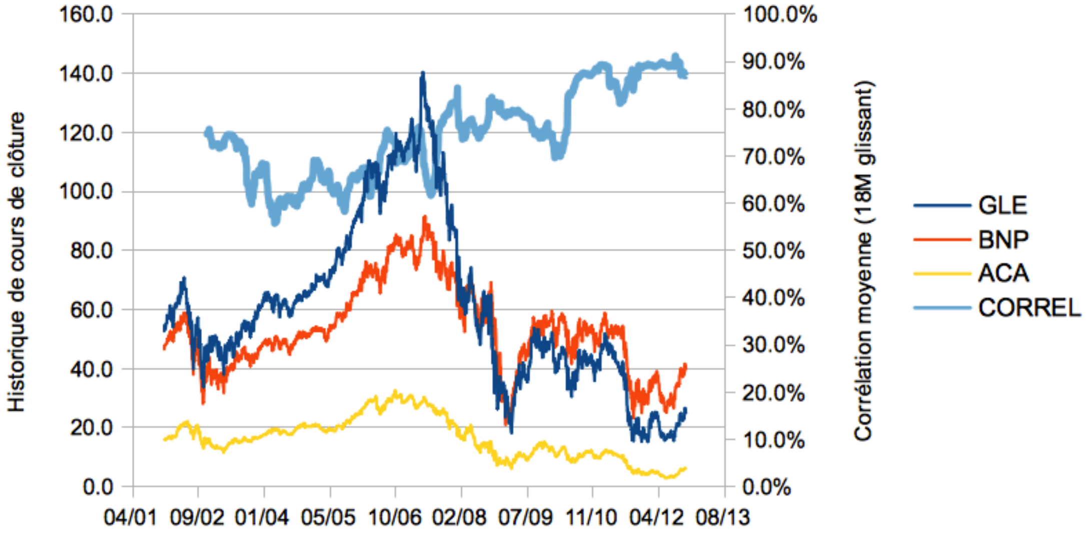
## Question de l'investisseur

Quelle est la probabilité que **deux données de marchés** évoluent **simultanément dans le même sens ?**

# LA CORRÉLATION ET RISQUE DE COVARIANCE
## La corrélation

### Définition économique

Quantification des facteurs communs qui impactent la variation des sous-jacent




**Evolution de la corrélation moyenne GLE/BNP/ACA**

# LA CORRÉLATION ET RISQUE DE COVARIANCE
## La corrélation

### Définition statistique

Mesure de la co-dépendance de la variation de deux actifs sous-jacents.

### Cas multi-sous-jacent : Covariance :

La notion de covariance est la généralisation de la variance dans le cas multi-sous-jacent

$$VAR(A+B) = VAR(A) + VAR(B) + 2COV(A,B)$$

Corrélation : Covariance normalisée par les niveaux de variance

$$\rho = \frac{COV(A,B)}{\sqrt{VAR(A)VAR(B)}} \text{ et } \sigma_{A+B}^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2\sigma_A\sigma_B\rho(A,B)$$

Rappel: $VAR(X) = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right]$

# LA CORRÉLATION ET RISQUE DE COVARIANCE
## La corrélation

### Terminologie

- Corrélation **historique**
- Corrélation **terminale**
- Corrélation **implicite**

# LA CORRÉLATION ET RISQUE DE COVARIANCE
## Produit dépendant de la corrélation

### Option sur la moyenne d’un panier

Panier contenant deux sous-jacents S1 et S2:

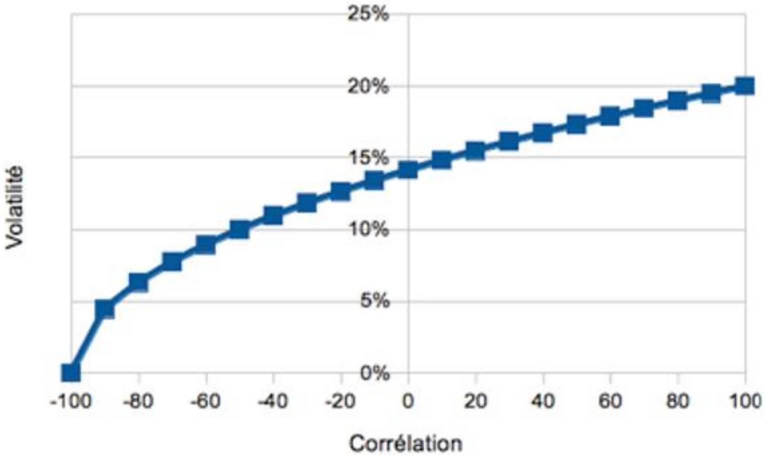
$$P = \frac{1}{2}\left(\frac{S_1}{S_1^0} + \frac{S_2}{S_2^0}\right)$$

$$\sigma_P^2 = \frac{1}{4}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho_{1,2}\right)$$

**Exemple : σ1=σ2=20%**

$\sigma_P < \sigma_1$

→ Diversification, Réduction du risque



# LA CORRÉLATION ET RISQUE DE COVARIANCE
## Produit dépendant de la corrélation

### Cas général

Panier contenant n sous-jacents

$$P = \sum \omega_i S_i$$

Volatilité moyenne des composants du panier: $\sigma$

Corrélation moyenne: $\rho$

$$\sigma_p = \sigma\sqrt{\rho}$$

### Exemple: Volatilité d'un Indice

Indice SX5E
Corrélation moyenne: 60%
Volatilité de l'indice = 77% de la volatilité moyenne des actions

# LA CORRÉLATION ET RISQUE DE COVARIANCE
## Produit dépendant de la corrélation

### Option sur WorstOf

Option sur le minimum des performances d'un panier

$$WorstOf = Min_i\left(\frac{S_i}{S_i^0}\right)$$

### WorstOf de deux sous-jacents

$$Min(S_1, S_2) = S_1 - Max(S_1 - S_2, 0)$$

=> Espérance du WorstOf < Espérance S1

### WorstOf de plusieurs sous-jacents

$$Min(S_1, S_2, S_3) = Min(Min(S_1, S_2), S_3)$$

# LA CORRÉLATION ET RISQUE DE COVARIANCE
## Produit dépendant de la corrélation

### Option sur WorstOf

$$WO\ Put = Max(0, K - Min(S_1(T), S_2(T), \dots, S_n(T))$$

- Plus cher qu'une option vanille

- Quand un actif baisse → devient WO → delta augmente en valeur absolue et le delta des autres diminue. Quand un mouvement d'un sous-jacent impacte le delta des autres → cross-gamma. Cross-gamma sensi est plus grande quand le fwd des stocks sont proches (incertitude sur le WO)

# LA CORRÉLATION ET RISQUE DE COVARIANCE

## Produit dépendant de la corrélation

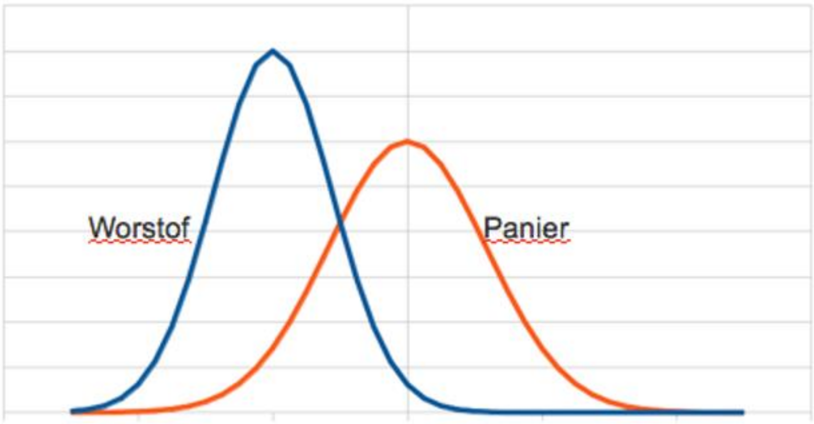
### Option sur WorstOf

$$WO\ Put = Max(0, K - Min(S_1(T), S_2(T), \dots, S_n(T))$$

- Plus cher qu'une option vanille
- Quand un actif baisse → devient WO → delta augmente en valeur absolue et le delta des autres diminue. Quand un mouvement d'un sous-jacent impacte le delta des autres → cross-gamma. Cross-gamma sensi est plus grande quand le fwd des stocks sont proches (incertitude sur le WO)
- Long put → long volatilité. Plus la volatilité est grande → plus de dispersion → prix du WO augmente. Acheteur WO put option → long volatilité.
- Plus grande dispersion → plus grand payoff. Petite corrélation → rendements plus dispersés → plus grand payoff. Acheteur WO put option → short correlation.

# LA CORRÉLATION ET RISQUE DE COVARIANCE
## Produit dépendant de la corrélation

### Fonction de distribution du  WorstOf

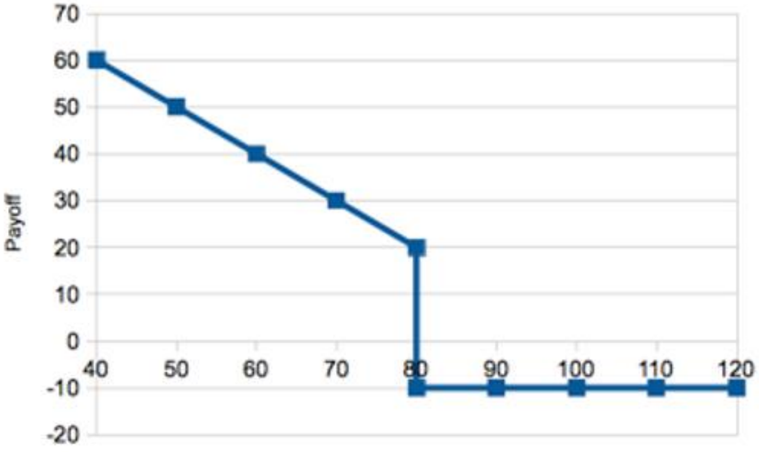



**Fonction de distribution**

**L'utilisation du WorstOf renchérit le Put**

# LA CORRÉLATION ET RISQUE DE COVARIANCE
## Produit dépendant de la corrélation

### Put Down & In sur WorstOf




**Payoff**

- **A l’émission le client paye un nominal X**
- **A la fin du contrat:**
  - Si la barrière est activée, le client perd une partie de son capital
  - Sinon, le client reçoit X + coupon

**Intérêt:** Coupon plus élevé que les taux de placement sans risque

**Deux versions:** Barrière européenne ou américaine

L’utilisation d’un panier sur WorstOf **optimise le coupon** que le client espère **recevoir** à **l’échéance**

# LA CORRÉLATION ET RISQUE DE COVARIANCE

## Véhicule de trading de la corrélation

### Le Call VS Calls

### Principe

Vendre un call sur panier et acheter des Calls sur les sous-jacents individuels

$$Payoff = \frac{1}{N}\sum_i Max\left(\frac{S_i^T}{S_i^0} - K, 0\right) - Max\left(\frac{1}{N}\sum_i \frac{S_i^T}{S_i^0} - K, 0\right)$$

### Composants du panier

- Généralement entre 8 et 12 stocks
- Choisis en « bespoke » par les traders

### Gammas croisés

- Gamma **diagonal positif**
- Gamma **extra-diagonal négatif**

# LA CORRÉLATION ET RISQUE DE COVARIANCE
## Véhicule de trading de la corrélation

### Le Straddle de dispersion

### Principe

Vendre un Straddle sur un indice et acheter des Straddles sur les sous-jacents composant l'indice

$$Indice: I = \sum_i \omega_i S_i$$

$$Payoff = \sum_i \omega_i . Straddle_i - Straddle_I$$

### Caractéristiques

- Pose sur la volatilité de l'indice (direct) et les volatilités des composants (indirect)
- Indirectement, position sur la corrélation implicite

# LA CORRÉLATION ET RISQUE DE COVARIANCE

## Véhicule de trading de la corrélation

### Le Swap de corrélation réalisée

### Payoff

$$Payoff = \rho^R(T) - K_{rho}$$

Avec:

$$\rho^R(T) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \rho_{i,j}^R(T) \text{ et } \rho_{i,j}^R(T) = \frac{COV_{i,j}^R}{\sqrt{VAR_i^R VAR_j^R}}$$

### Caractéristiques

- Non linéarité
- Pur risque de corrélation. Ne hedge pas très bien le risque de covariance

# LA CORRÉLATION ET RISQUE DE COVARIANCE
## Indice de corrélation

# LA CORRÉLATION ET RISQUE DE COVARIANCE
## Estimation de la corrélation historique

On considère deux séries de spots: $S_0^0 \dots S_N^0$ et $S_0^1 \dots S_N^1$

Estimateur de la corrélation historique:

$$\rho_N = \frac{COV}{\sqrt{VAR_1 VAR_2}}$$

Avec:

$$COV = \frac{1}{n}\sum\left(ln\frac{S_i^0}{S_{i-1}^0} - ln\frac{S_N^0}{S_0^0}\right)\left(ln\frac{S_i^1}{S_{i-1}^1} - ln\frac{S_N^1}{S_0^1}\right)$$

$$VAR_i = \frac{1}{n}\sum\left(ln\frac{S_i^0}{S_{i-1}^0} - ln\frac{S_N^0}{S_0^0}\right)^2$$

# LA CORRÉLATION ET RISQUE DE COVARIANCE

## Asynchronicité

### Heures de clôture différentes : Quel cours de clôture utiliser ?


Solution <u>la plus courante</u>: **rendements hebdomadaires**

# LA CORRÉLATION ET RISQUE DE COVARIANCE
## Gestion d'un portefeuille de produit multi sous-jacents

### PnL d'une pose Mono Sous-jacent

Variation du spot: S0 -> S1, développement limité à l'ordre 1:

$$PnL = \Delta.(S_1 - S_0) + \frac{1}{2}.\Gamma.(S_1 - S_0)^2$$
$$\Delta_1 - \Delta_0 = \Gamma.(S_1 - S_0)$$

Avec:

- $\Delta = \frac{\partial PnL}{\partial S}$ le delta du portefeuille = dérivée du PnL par rapport au spot
- $\Gamma = \frac{\partial^2 PnL}{\partial S^2}$ le gamma du portefeuille = dérivée seconde du PnL par rapport au spot

# LA CORRÉLATION ET RISQUE DE COVARIANCE
## Gestion d’un portefeuille de produit multi sous-jacents

### PnL d’une pose Mono Sous-jacent

# LA CORRÉLATION ET RISQUE DE COVARIANCE

## Gestion d'un portefeuille de produit multi sous-jacents

### PnL d'une pose Mono Sous-jacent

- Le gamma mesure la convexité d'une option. La convexité est toujours favorable aux positions long option

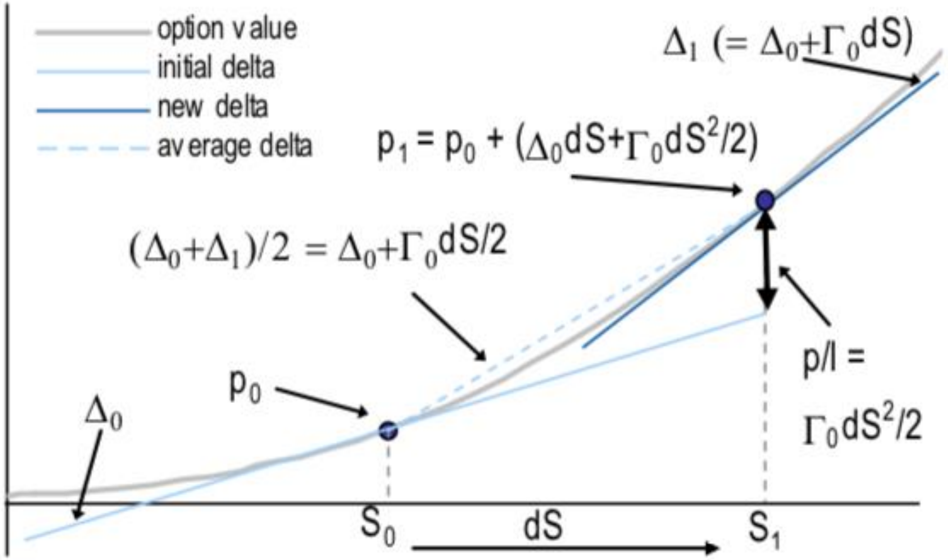
- Un hedge en delta est fait uniquement pour des petits mouvements du sous-jacent. Pour les gros mouvements, un position long option surperforme toujours the portefeuille de hedge dans les deux directions.

- Pour une option delta-hedgée, le gamma P&L correspond à la surperformance de l'option par rapport au portefeuille de hedge. Plus le sous-jacent va bouger, plus le portefeuille de delta-hedge va sous performer la position long option.

# LA CORRÉLATION ET RISQUE DE COVARIANCE

## Gestion d'un portefeuille de produit multi sous-jacents

### PnL d'une pose Mono Sous-jacent

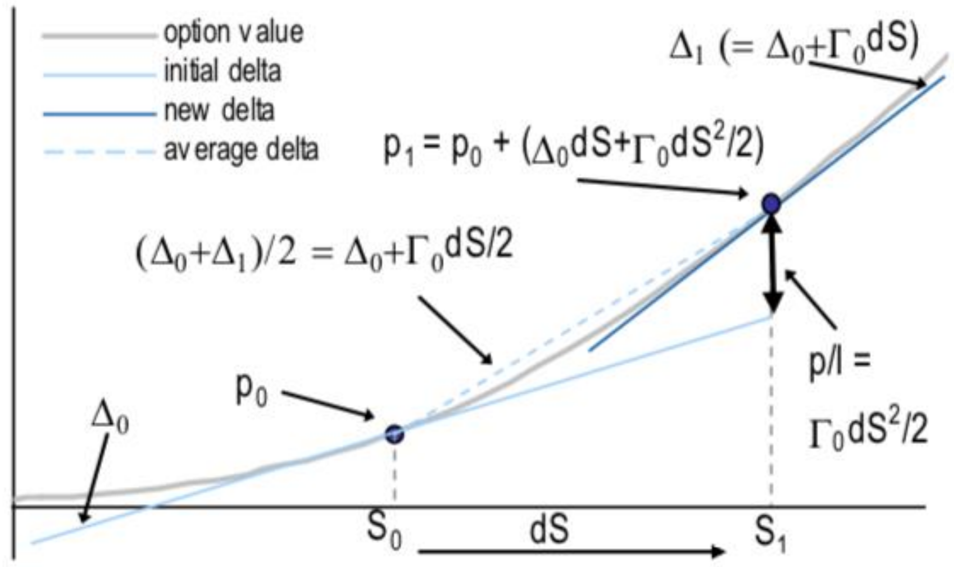



Source : JPMorgan

# LA CORRÉLATION ET RISQUE DE COVARIANCE

## Gestion d'un portefeuille de produit multi sous-jacents

### PnL d'une pose Mono Sous-jacent




Source : JPMorgan

- A t0, le sous-jacent vaut $S_0$, l'option vaut $p_0$, le delta et le gamma valent $\Delta_0$ et $\Gamma_0$
- Le stock augmente de $dS$ à $S_1$
- Le nouveau prix de l'option est $p_1 = p_0 + \Delta_0 dS + \frac{1}{2}\Gamma_0(dS)^2$
- Le P&L de la position long option est $p_1 - p_0 = \Delta_0 dS + \frac{1}{2}\Gamma_0(dS)^2$
- Le P&L de la position short delta hedge vaut $-\Delta_0 dS$
- Le P&L total est donc $\frac{1}{2}\Gamma_0(dS)^2$

# LA CORRÉLATION ET RISQUE DE COVARIANCE

## Gestion d'un portefeuille de produit multi sous-jacents

### PnL d'une pose Multi Sous-jacent

**Variation des spots: $S_{i,0}$-> $S_{i,1}$**, développement limité à l'ordre 1:

$$PnL = \sum \Delta_i.(S_{i,1} - S_{i,0}) + \frac{1}{2}\sum \Gamma_{i,j}\,(S_{i,1} - S_{i,0})(S_{j,1} - S_{j,0})$$

$$\Delta_1 - \Delta_0 = \Gamma.(S_1 - S_0)$$

Avec:

- $\Delta_i = \frac{\partial PnL}{\partial S_i}$ le delta du portefeuille = dérivée du PnL par rapport au spot $S_i$
- $\Gamma_{i,j} = \frac{\partial^2 PnL}{\partial S_i S_j}$ le gamma du portefeuille = dérivée seconde du PnL par rapport aux spots $S_i$ et $S_j$

# LA CORRÉLATION ET RISQUE DE COVARIANCE

## Gestion d’un portefeuille de produit multi sous-jacents

### Question

On part d’un portefeuille delta-hedgé sur deux stocks A et B avec:

$$\Gamma_A = \Gamma_B = -\Gamma_{A,B}$$

**Les cours des deux sous-jacents dispersent de 100%. Combien vaut le PnL ?**

# LA CORRÉLATION ET RISQUE DE COVARIANCE
## Gestion d'un portefeuille de produit multi sous-jacents

### PnL d'une pose Multi Sous-jacent

**Développement limité sur le delta**

$$\Delta_{i,1} - \Delta_{i,0} = \sum \Gamma_{i,j} . (S_{j,1} - S_{j,0})$$

Création de delta sur un sous-jacent i quand les autres sous-jacents bougent

# LA CORRÉLATION ET RISQUE DE COVARIANCE

## Gestion d'un portefeuille de produit multi sous-jacents

### Estimation de la pose de delta en temps réel sur chaque sous-jacent

**FEUILLE DE GESTION**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| TOTAL | -8,414 | | | TOTAL | 0 |

| | | | DERNIER CALCUL | | | TEMPS REEL | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nom Entreprise | Code SJ | Devise | Cours | Delta #Titres | Delta EUR | Cours | Delta #Titres | Delta EUR |
| DEUTSCHE TELECOM | DTEGn.DE | EUR | 8.84 | 200 | 1,768 | 9.75 | | |
| BNP PARIBAS | BNPP.PA | EUR | 39.12 | -100 | -3,912 | 38.50 | | |
| YAHOO | YHOO.OQ | USD | 16.79 | 156 | 2,023 | 16.50 | | |
| APPLE | AAPL.OQ | USD | 604.00 | 10 | 4,665 | 605.00 | | |
| TOYOTA MOTOR CORP | 7203.T | JPY | 3,080.00 | -150 | -4,481 | 3,100.00 | | |
| SAMSUNG ELECTRONICS | 00830.KS | KRW | 60,200.00 | -200 | -8,476 | 60,000.00 | | |
| USD/EUR | USDEUR=R | USD | 0.772300 | | | 0.772400 | | |
| JPY/EUR | JPYEUR=R | JPY | 0.009700 | | | 0.009800 | | |
| KRW/EUR | KRWEUR=R | KRW | 0.000704 | | | 0.000700 | | |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

$$\Delta_i^{TR} = \Delta_i^0 = \sum \Gamma_{i,j}(S_j^{TR} - S_j^0)$$

Le delta qui se créé sur chaque stock dépend:

- De **l'évolution** des **autres stocks**
- Des **taux** de **change**

Delta qui se créé **avant l'ouverture** d'un marché par la variation des $S_j$ des **autres marchés** ou des **taux** de **change**

# LA CORRÉLATION ET RISQUE DE COVARIANCE
## Gestion d'un portefeuille de produit multi sous-jacents

**Exemple:**

**Position sur un panier contenant TOYOTA et APPLE**

1) A l'instant initial, on part d'une position delta-hedgée $\Delta^0_{TOYOTA} = \Delta^0_{APPLE} = 0$

Gamma du portefeuille: $\Gamma_{TOYOTA}$, $\Gamma_{APPLE}$ et $\Gamma_{CROSS}$

2) Le marché japonais est ouvert (US fermé). TOYOTA augmente de 1%

$$PNL_{JP} = \frac{1}{2}\Gamma_{TOYOTA}.(0{,}01)^2$$

→ Un delta se créé sur APPLE: $\Delta_{APPLE} = \Gamma_{CROSS}.(0{,}01)$

# LA CORRÉLATION ET RISQUE DE COVARIANCE
## Gestion d'un portefeuille de produit multi sous-jacents

3) Impacté par les marchés asiatique et européen, le marché US ouvre à +1%

$$PNL_{US} = \Delta_{APPLE}.(0{,}01) + \frac{1}{2}\Gamma_{APPLE}.(0{,}01)^2 = \Gamma_{CROSS}.(0{,}01)^2 + \frac{1}{2}\Gamma_{APPLE}.(0{,}01)^2$$

Peut être négatif si $\Gamma_{CROSS} < 0$ (usuel pour les produits asiatiques)

**PnL total de la position:** $\boldsymbol{PNL_{US} + PNL_{JP} = \frac{1}{2}(\Gamma_{APPLE} + \Gamma_{TOYOTA} + 2\Gamma_{CROSS})\,.(0,01)^2}$

# LA CORRÉLATION ET RISQUE DE COVARIANCE
## Gestion d'un portefeuille de produit multi sous-jacents

### Grecques à surveiller:

- **Gamma Beta 1**: Le Gamma du portefeuille quand tous les sous-jacents varient de la même façon

$$\Gamma_{Beta1} = \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}$$

- **Gamme Beta « Histo »:** Le Gamma du portefeuille quand tous les sous-jacents varient proportionnellement à leur Beta historique

$$\Gamma_{Beta\ H} = \sum_{i,j} \beta_i \beta_j \Gamma_{i,j} \text{ avec } \beta_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_I} \rho_{i,I}$$

« I » est l'indice de référence du marché. On répond à la question «de combien varie le stock i quand l'indice de référence (ex: SX5E) varie de 1%

# LA CORRÉLATION ET RISQUE DE COVARIANCE

## Le forward d'un panier de type ‘Worstof’ est inférieur au forward d'un panier de type 'moyenne des sous-jacents’ ?

a) Vrai

b) Faux

# LA CORRÉLATION ET RISQUE DE COVARIANCE

## Pour calculer la corrélation entre un stock japonais et un stock chinois, il vaut mieux utiliser ?

a) Les rendements journaliers

b) Les rendements hebdomadaires

c) Les rendements mensuels

# LA CORRÉLATION ET RISQUE DE COVARIANCE

**On essaye de structurer un certificat avec Put Down &In pour un client . Toute chose égale par ailleurs, lesquels de ces paniers peuvent maximiser le coupon final du client ?**

a) TOTAL / CITIGROUP / NINTENDO

b) FRANCE TELECOM / DEUTSCHE TELECOM / TELEFONICA

c) SOCIETE GENERALE / CARREFOUR / DANONE

# LA CORRÉLATION ET RISQUE DE COVARIANCE

## La volatilité d'un indice est :

a) Egale à la volatilité moyenne de ses composants

b) Supérieure à la volatilité moyenne de ses composants

c) Inférieure à la volatilité moyenne de ses composants

# LA CORRÉLATION ET RISQUE DE COVARIANCE

## On valorise un CALL sur un panier de 10 sous-jacents. Les 10 sous-jacents ont la même devise, qui est aussi celle du CALL. Combien de valeurs de corrélation faut-il calibrer ?

a) 10

b) 45

c) 90

# LA CORRÉLATION ET RISQUE DE COVARIANCE

## Pour valoriser un Straddle de dispersion sur l'indice SX5E, on a besoin de connaître :

a) La volatilité de l'indice et de ses composants

b) Les niveaux de corrélation

c) La volatilité et les niveaux de corrélation

# LA CORRÉLATION ET RISQUE DE COVARIANCE

## Dans le cadre de ses stress-tests, l'équipe de « contrôle des risques » constate que si le marché varie uniformément de 5% la banque perd de l'argent. Pour hedger ce risque, la banque peut :

a) Acheter un call sur un panier représentatif de la pose globale

b) Acheter un Straddle de dispersion sur indice

c) Acheter un swap de corrélation réalisée

d) Ces trois solutions peuvent convenir