Irrationnalité de la racine de 2

$$\boxed{\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}}$$

Arc-Pintade

La démonstration de l'irrationalité de la racine de 2 est dù à Aristote et consiste en un raisonnement par l'absurde. C'est-à-dire que nous allons montrer que si $\sqrt{2}$ est rationnel (scriptible comme une fraction de deux entiers) alors émergera une contradiction. Pour éviter toute incohérence mathématiquement cette racine devra être admise comme irrationnelle.

Table des matières

1 Pré-requis

1.1 Tables de parité

Tout d'abord, il est à noter qu'en arithmétique les nombres suivent, pour les opérations de bases, les lois de parités suivantes :

$+/-$	pair	impair
pair	pair	impair
impair	impair	pair

$\times$	pair	impair
pair	pair	pair
impair	pair	impair

1.2 Parité de la racine

Lemme 1. *Soit n un nombre entier. Si n^2 est pair alors n est pair.*

Démonstration. Soit k, ℓ et m trois entiers :

- ▷ Si n impair alors $n = 2k + 1$. Ce qui implique :

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + k) + 1 \\ &= 2\ell + 1. \end{aligned}$$

  Si n impair alors n^2 est impair.

- ▷ Si n pair alors $n = 2k$. Ce qui implique :

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k)^2 \\ &= 4k^2 \\ &= 2(2k^2) \\ &= 2m. \end{aligned}$$

  Si n pair alors n^2 est pair.

Pour un n^2 donné, sa parité indiquera la parité de sa racine n. □

2 La démonstration

Posons comme principe que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. Si $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ alors on peut réécrire :

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \qquad \text{avec} \qquad a, b \in \mathbb{N}^* \text{ et premiers entre eux.} \tag{1}$$

a et b étant premier entre eux alors $\frac{a}{b}$ n'est pas simplifiable.
Chaque membre au carré nous donne :

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \qquad \Rightarrow \qquad a^2 = 2b^2. \tag{2}$$

On en conclue que a^2 est pair. Or si a^2 est pair alors a est pair (lemme 1). La réécriture suivante est donc possible :

$$a = 2p \qquad \text{avec} \qquad p \in \mathbb{N}^*. \tag{3}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} a^2 &= 2b^2 \\ (2p)^2 &= 2b^2 \\ 4p^2 &= 2b^2 \\ 2p^2 &= b^2 \end{aligned} \tag{4}$$

De la même manière, le lemme 1 nous indique que b est pair car b^2 l'est.La réécriture suivante est donc possible :

$$b = 2q \qquad \text{avec} \qquad q \in \mathbb{N}^*. \tag{5}$$

Ainsi :

$$\frac{a}{b} = \frac{2p}{2q}. \tag{6}$$

On peut simplifier la fraction (non simplifiable) $\frac{a}{b}$. Avec l'hypothèse de départ : a et b sont à la fois premiers entre eux et pas premiers entre eux, en même temps. Nous avons à faire là à une contradiction. Il n'y a pas d'autre choix, pour ôter toute incohérence : $\sqrt{2}$ ne peut pas être rationnel.

3 Philosophie

Cette démonstration a été sujet à une querelle philosophie chez les mathématiciens. En effet, le monde des mathématiques fut coupée en deux camps les constructivistes et les intuitionnistes. Si ces derniers représentent la quasi totalité du monde mathématique, c'est aux constructivistes que l'on doit la contestation de cette démonstration. Pour faire simple, les constructiviste considère que tout objet ou propriété mathématique que l'on veut utiliser doit être construit de tout pièce.
Dans cette démonstration nous postulons que $\sqrt{2}$ est irrationnel car nous avons prouver qu'il ne pouvait pas être rationnel. Un constructiviste ne se permet pas se raisonnement. Pour un constructiviste cette démonstration est la preuve que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnelle mais en aucun cas la preuve qu'elle soit irrationnelle.
Énoncer que pour un concept binaire : si quelque chose n'est pas l'un alors il est forcement l'autre est un principe logique nommé le principe du tiers exclue. Les constructivistes ne reconnaissent pas ce principe.