Problème de Bâle

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Arc-Pintade

Table des matières

1 Series de Fourier

Toutes fonctions *T-périodique* peut se décomposer en sommes infini d'ondes planes.

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n(f) e^{i2\pi \frac{n}{T} x} \tag{1}$$

Avec $C_n(f)$ les coefficients de Fourier répondant à :

$$C_n(f) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-i2\pi \frac{n}{T} t} dt \tag{2}$$

Finalement on peut invoquer le théorème de Parseval que l'on doit au mathématicien français Marc-Antoine Parseval des Chênes (1755-1836).

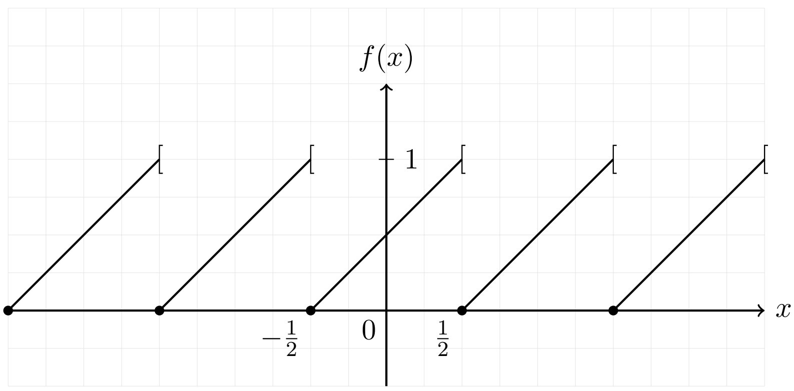
$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |C_n(f)|^2 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt \tag{3}$$

2 Les outils de calculs

2.1 Fonction affine *1-périodique*

Pour la démonstration du problème de Bâle nous allons construire un fonction affine périodique.

$$f(x) = x + \frac{1}{2} \qquad\qquad x \in \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right[\tag{4}$$



2.2 Calcule des coefficients de Fourier

Commençons par les $C_n(f)$ pour $n \neq 0$:

$$
\begin{aligned}
C_n(f) &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)e^{-i2\pi\frac{n}{T}t}dt \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \left(x+\frac{1}{2}\right) e^{-i2\pi nx}dx \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} xe^{-i2\pi nx}dx + \frac{1}{2}\cancel{\left[\frac{e^{-i2\pi nx}}{-i2\pi n}\right]_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}} \\
&= \left[\frac{xe^{-i2\pi nx}}{-i2\pi n}\right]_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} - \frac{1}{(-i2\pi n)}\cancel{\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} e^{-i2\pi nx}dx} \\
&= \frac{1}{(-i2\pi n)}\left(\frac{e^{-i\pi n}}{2} + \frac{e^{+i\pi n}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{(-i2\pi n)}\cos(n\pi)
\end{aligned}
$$

Finalement on obtient pour $n \neq 0$:

$$
C_n(f) = \frac{i}{(2\pi n)}(-1)^n \tag{5}
$$

Calculons maintenant $C_0(f)$:

$$
\begin{aligned}
C_0(f) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \left(x+\frac{1}{2}\right) dx \\
&= \cancel{\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}\left[x\right]_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]
\end{aligned}
$$

Finalement on obtient pour $n \neq 0$:

$$
C_0(f) = \frac{1}{2} \tag{6}
$$

2.3 Calcul des deux membres du théorème de Parseval

Pour le premier membre de la relation de Parseval et grâce aux équation (5) et (6) on a :

$$
\begin{aligned}
\sum_{-\infty}^{+\infty} |C_n(f)|^2 &= |C_0(f)|^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}|C_n(f)|^2 \\
&= \frac{1}{4} + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4\pi^2n^2} \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Sachant que :

$$
|C_n(f)|^2 = |C_{-n}(f)|^2 \tag{8}
$$

Pour le second membre de la relation de Parseval on a :

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} |f(t)|^2 dt &= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \left| \left(t + \frac{1}{2} \right) \right|^2 dt \\
&= \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} + \cancel{\left[\frac{t^2}{2} \right]_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4} [t]_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] \\
&= \frac{1}{12} + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Ainsi on obtient :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \left| \left(t + \frac{1}{2} \right) \right|^2 dt = \frac{1}{3} \tag{9}$$

3 Théorème de Parseval

A partir des éléments précédents on peut invoquer le théorème de Parceval (3), Ainsi :

$$\frac{1}{4} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4\pi^2 n^2} = \frac{1}{3} \tag{10}$$

$$\frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2\pi^2}{12}$$

On obtient finalement la solution du problème de Bâle :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}} \tag{11}$$