M2 : QED

Auré

Sale Histoire !

Inspiré du cours de notre très cher Stef.

Table des matières

1 Fermions libres

Alors il va falloir, à ce stade, comprendre que les particules vont contrôler ta vie. Les particules les plus importantes composant la matière sont les fermions. Ces petites bêtes, doté d'un spin $\frac{1}{2}$, sont décrites par l'équation de Dirac :

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi = 0. \tag{1}$$

Les matrices γ^μ, elles, répondent à la condition de l'algèbre de Clifford [1] :

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}. \tag{2}$$

De la construction de l'équation de Dirac on en déduit que l'algèbre de Clifford est la seule condition nécessaire à la pertinence physique de l'équation de Dirac. Il n'y a donc, *a priori*, pas de façon préférentielle d'expliciter ces matrices. Leurs représentations dépendra du choix de notre bi-spineur. Tu comprends pas ? Parlons un peu de ces matrices.

2 Fermions en interaction

2.1 Équation de Dirac avec potentiel

Soit le Lagrangien de Dirac

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}\,(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi. \tag{3}$$

Voila comme ça, sans coup de semonce ! Dans un premier temps il est noté que ce doux Lagrangien a l'extrême amabilité d'être invariant sous toute transformation appartenant au groupe $U(1)$. C'est à dire aux transformations de type :

$$\psi \to e^{i\alpha}\psi \qquad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Mais nos très chers physiciens du début du siècle et notamment Weyl, ont eu l'idée de voir ce qu'il en était si la transformation $U(1)$ n'était plus globale mais locale ($\alpha \to \alpha(x)$). Cette transformation, dite de jauge, ne laisse plus le Lagrangien invariant. En effet :

$$\mathcal{L}' = \overline{\psi}\,(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi - \overline{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \alpha(x)\psi. \tag{5}$$

Ce petit appendice à la con pourrait nous faire rendre le tablier et générer un suicide collectif chez tous les théoriciens des groupes. Mais c'est sans compter sur l'indomptable acharnement des physiciens à persister dans leur mauvaise fois. "Grand bien leur fassent" crièrent ces derniers. Ils changèrent donc le Lagrangien, ni une ni deux, t'as rien vu c'est magique, et rajoutèrent un contre terme au niveau du $4-$gradient, par la transformation :

$$\partial_\mu \to \partial_\mu - iqA_\mu \tag{6}$$

Ainsi après dérivations des équations de mouvements, on a notre nouvelle équation de Dirac, dite covariante sous la transformation de jauge $U(1)$:

$$(i\gamma^\mu(\partial_\mu - iqA_\mu) - m)\,\psi = 0 \tag{7}$$

Et au passage le Lagrangien de l'électrodynamique quantique s'écrit avec le fameux contre-terme :

$$\mathcal{L}_{QED} = \overline{\psi}\,(i\gamma^\mu(\partial_\mu - iqA_\mu) - m)\,\psi. \tag{8}$$

1. Une algèbre étant un espace vectoriel auquel on ajoute une loi de composition interne supplémentaire (la condition).

Mais cet impitoyable acharnement de cette bande de couillons a-t-il apporté quelque chose ? Et bien oui ! Car en moins de temps qu'il n'en faut pour dire "watch and learn, ptit con", surgit de ce contre-terme (pour préserver l'invariance de jauge, je rappelle) une formulation absolument parfaite d'un Hamiltonien d'interaction électromagnétique. Mais pour me faire passer pour un con jusqu'au bout, il va s'avérer que le champ A^μ jonchant le contre-terme, en plus d'avoir les propriétés adéquates pour être assimilé au potentiel vecteur va aussi permettre d'interpréter l'interaction électromagnétique comme un échange, par propagation, de photons entre deux particules chargées.

$$\begin{aligned}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\psi &= -q\gamma^\mu A_\mu\psi \\ &= -q\gamma^0\gamma^0\gamma^\mu A_\mu\psi \\ &= \gamma^0\mathcal{H}_{D,int}\psi \end{aligned} \tag{9}$$

On a rajouté une paire de γ^0 pour assurer l'herméticité de l'Hamiltonien d'interaction.

2.2 Matrice S

L'opérateur $\mathcal{S}$ est la matrice de passage qui définit la probabilité d'arriver à l'état final $|f\rangle$, sachant qu'on est parti d'un état initial $|i\rangle$. Autrement dit, elle s'exprime par l'objet $\langle f|\,\mathcal{S}\,|i\rangle$. Il existe une manière fort commode (attention je ne parle pas de meuble) d'exprimer $\mathcal{S}$ seulement avec la partie interaction d'un Hamiltonien. On va pour cela introduire différentes représentations des équations de la méca cul.

De manière standard, en mécanique quantique, on représente les opérateurs et les états selon la représentation de Schrödinger. Cela signifie que l'on postule la fonction d'onde dépendante du temps et les opérateurs indépendants du temps, en général. Autrement dit :

$$\left|\psi^S\right\rangle \equiv \left|\psi^S(t)\right\rangle. \tag{10}$$

L'on peut cependant et cela sera le cas pour toute la théorie quantique des champs, se placer dans une autre représentation, la représentation de Heisenberg. Cette dernière voit la fonction d'onde comme indépendante du temps et les opérateurs comme systématiquement dépendant du temps. On peut lier les deux précédentes représentations grâce à un opérateur unitaire de translation temporelle $e^{i\mathcal{H}(t-t_0)}$.

$$\left|\psi^S(t)\right\rangle = e^{i\mathcal{H}(t-t_0)}\left|\psi^H(t_0)\right\rangle \tag{11}$$

$$\hat{A}^H(t) = e^{i\mathcal{H}(t-t_0)}\hat{A}^S(t_0)e^{-i\mathcal{H}(t-t_0)}. \tag{12}$$

En TQC, les champs sont élevés au grade d'opérateurs. Les champs étant dépendants des coordonnées d'espace-temps, il est pertinent de choisir une représentation dans laquelle les opérateurs puissent dépendre intégralement du temps.

Mais ce n'est pas tout, en présence d'interaction on peut avoir recours à une tierce représentation : la représentation de Dirac. En effet si l'on distingue la partie libre de la partie interaction d'un Hamiltonien ($H^S = H_0^S + H_{int}^S$), on peut construire une similaire représentation :

$$\left|\psi^D(t)\right\rangle = e^{iH_0t}\left|\psi^S(t)\right\rangle \tag{13}$$

$$\hat{A}^D = e^{iH_0t}\hat{A}^Se^{-iH_0t}. \tag{14}$$

Cet état est solution de l'équation de Schrödinger :

$$i\partial_t\left|\psi^D(t)\right\rangle = H_{int}^S\left|\psi^D(t)\right\rangle. \tag{15}$$

Comme en TQC les champs sont représenté selon Heisenberg, il nous faut un lien avec les opérateurs représentés selon Dirac. En prenant un champ quelconque $\phi(\vec{x},t)$, on a :

$$\begin{aligned}\phi^H(\vec{x},t) &= e^{iH(t-t_o)}\phi^S(\vec{x},t_0)e^{-iH(t-t_o)} \\ &= e^{iH(t-t_o)}e^{-iH_0(t-t_o)}\phi^D(\vec{x},t)e^{iH_0(t-t_o)}e^{-iH(t-t_o)} \\ &= U^\dagger(t,t_0)\phi^D(\vec{x},t)U(t,t_0) \qquad (16)\end{aligned}$$

On a, ici, introduit un nouvel opérateur de propagation dans le temps. Mais quel intérêt ? Bah en fait, cet opérateur répond à une équation de Schrödinger, dont la solution analytique s'écrit :

$$U(t,t_0) = 1 - i\int_{t_0}^{t} dt' H_{D,int}(t')U(t',t_0). \qquad (17)$$

Ce qui après implémentation récursive et décalage de bornes par produit de Cauchy (dont la démonstration sera laissée comme exercice au lecteur, loooooooool) nous donne :

$$U(t,t_0) = T\left[\exp\left(-i\int_{t_0}^{t} H_{D,int}(t')\right)\right] \qquad (18)$$

où $T[\circ]$ est l'opération de "time ordering".

Bon alors, effectivement y'a pas de quoi s'en taper le cul par terre de plaisir, mais en fait si ! Comme l'opérateur de propagation dans le temps est construit sur un hamiltonien d'interaction alors il est candidat idéal pour décrire la matrice $\mathcal{S}$ introduite plus tôt. En partant du principe que pour éviter toute ambiguïté au niveau de l'interaction, on considère l'état initial et final comme se trouvant infiniment loin dans le temps de l'interaction, on peut postuler sans trop se casser les dents que :

$$\mathcal{S} = \lim_{t_1\to\infty}\lim_{t_2\to-\infty} U(t_1,t_2). \qquad (19)$$

Ce qui, après passage à la densité hamiltonienne, donne :

$$\mathcal{S} = T\left[\exp\left(-i\int \mathcal{H}_{D,int}d^4x\right)\right]. \qquad (20)$$

L'idée maintenant est de séparer $\mathcal{S}$ en une contribution sans interaction (propagation pure) et en une contribution d'interaction noté $\mathcal{T}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \mathbb{I} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{T\left[-i\int \mathcal{H}_{D,int}d^4x\right]^n}{n!} \\ &= \mathbb{I} + i\mathcal{T}. \qquad (21)\end{aligned}$$

La présence de l'unité imaginaire est purement arbitraire.

Pour illustrer ce merdier on va se limiter au premier ordre de l'interaction d'électrodynamique quantique. On fait cela en considérant un développement perturbatif (bah donc à l'ordre 1) du terme d'interaction.

$$\mathcal{S} = \mathbb{I} + iT\left[-\int \mathcal{H}_{D,int}d^4x\right] \qquad (22)$$

Tout l'intérêt va venir après sandwichification de l'opérateur $\mathcal{T}$ par les états initiaux et finaux du système étudié. En utilisant l'Hamiltonien de QED (9), on développe :

$$\begin{aligned}\langle f|\,\mathcal{T}\,|i\rangle = T_{fi} &= -\int \langle f|\,\mathcal{H}_{D,int}\,|i\rangle\, d^4x \\ &= -\int \psi_f^\dagger(x)(-q\gamma^0\gamma^\mu A_\mu(x))\psi_i(x)d^4x \\ &= \int e^{ip_fx}u_f^\dagger(p_f)(q\gamma^0\gamma^\mu A_\mu(x))u_i(p_i)e^{-ip_ix}d^4x \\ &= i\overline{u}_f(p_f)(-iq\gamma^\mu)u_i(p_i)\int e^{i(p_f-p_i)x}A_\mu(x)d^4x \qquad (23)\end{aligned}$$

Comme le 4−vecteur (A^μ) représente le photon, alors il doit répondre aux équation de Maxwell qui pour le potentiel vecteur se manifestent par :

$$\partial^\nu F_{\nu\mu} = \partial^\nu(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) = (\Box A_\mu - \partial_\mu \partial^\nu A_\nu) = j_\mu \tag{24}$$

En prenant la jauge de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$ on en déduit :

$$\Box A_\mu(x) = j_\mu(x) \tag{25}$$

$$A_\mu(x) = g_{\mu\nu} A^\nu(x) = \frac{-g_{\mu\nu}}{(p'_f - p'_i)^2} j^\nu(x) \tag{26}$$

(à détailler) Nous sommes en QED cela implique que le courant va être fermionique, donc :

$$j^\nu(x) = q\overline{\psi}\gamma^\nu\psi \tag{27}$$

On reprend le calcul, nom de nom :

$$\begin{aligned}
\langle f|\,\mathcal{T}\,|i\rangle &= i\overline{u}_f(p_f)(-iq\gamma^\mu)u_i(p_i)\int e^{i(p_f-p_i)x}\frac{-g_{\mu\nu}}{(p'_f - p'_i)^2} j'^\nu(x) d^4x \\
&= i\overline{u}_f(p_f)(-iq\gamma^\mu)u_i(p_i)\frac{-g_{\mu\nu}}{(p'_f - p'_i)^2}\int e^{i(p_f-p_i)x}e^{ip'_f x}\overline{u'}_f(p'_f)(q'\gamma^\mu)u'_i(p'_i)e^{-ip'_i x}d^4x \\
&= -\overline{u}_f(p_f)(-iq\gamma^\mu)u_i(p_i)\frac{-g_{\mu\nu}}{(p'_f - p'_i)^2}\overline{u'}_f(p'_f)(-iq'\gamma^\mu)u'_i(p'_i)\int e^{i(p_f+p'_f-p_i-p'_i)x}d^4x \\
&= \underbrace{\overline{u}_f(p_f)(-iq\gamma^\mu)u_i(p_i)\frac{g_{\mu\nu}}{(p'_f - p'_i)^2}\overline{u'}_f(p'_f)(-iq'\gamma^\mu)u'_i(p'_i)(2\pi)^4}_{\mathcal{M}}\ \underbrace{\delta^{(4)}\left(p_f + p'_f - p_i - p'_i\right)}_{\text{conservation de la 4-impulsion}}
\end{aligned}$$

Il y donc deux informations à retenir, la conservation de la 4−impulsion et l'élément $\mathcal{M}$ qui peut être également construit par diagramme de Feynman.

3 Weak

4 Masse des bosons

La masse ds bosons de jauge proviens de la partie cinétique du champs de Higgs. La dérivée covariante du champ scalaire est donnée par :

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - i\frac{g_W}{\sqrt{2}}\phi^\dagger\vec{\tau}\cdot\vec{W}_\mu + i\frac{g_B}{\sqrt{2}}YB_\mu\phi \tag{28}$$

avec Y l'hypercharge faible qui vaut −1 pour le doublet left neutrino/électron. On développe donc la partie cinétique :

$$\begin{aligned}
D_\mu\phi^\dagger D^\mu\phi &= \left(\partial_\mu\phi^\dagger - i\frac{g_W}{\sqrt{2}}\phi^\dagger\vec{\tau}\cdot\vec{W}_\mu - i\frac{g_B}{\sqrt{2}}B_\mu\phi^\dagger\right)\left(\partial^\mu\phi + i\frac{g_W}{\sqrt{2}}\vec{\tau}\cdot\vec{W}^\mu\phi + i\frac{g_B}{\sqrt{2}}B^\mu\phi\right) \\
&= \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi + i\frac{g_W}{\sqrt{2}}\partial_\mu\phi^\dagger\vec{\tau}\cdot\vec{W}^\mu\phi + i\frac{g_B}{\sqrt{2}}\partial_\mu\phi^\dagger B^\mu\phi \\
&- i\frac{g_W}{\sqrt{2}}\phi^\dagger\vec{\tau}\cdot\vec{W}_\mu\partial^\mu\phi + \frac{g_W^2}{2}\phi^\dagger\vec{\tau}\cdot\vec{W}_\mu\vec{\tau}\cdot\vec{W}^\mu\phi + \frac{g_W g_B}{2}\phi^\dagger\vec{\tau}\cdot\vec{W}_\mu B^\mu\phi \\
&- i\frac{g_B}{\sqrt{2}}B_\mu\phi\dagger\partial^\mu\phi + \frac{g_B g_W}{2}B_\mu\phi\dagger\vec{\tau}\cdot\vec{W}^\mu\phi + \frac{g_B^2}{2}B_\mu\phi\dagger B^\mu\phi.
\end{aligned} \tag{29}$$

$$\vec{\tau} \cdot \vec{W}^{\mu} = \begin{pmatrix} W_3^{\mu} & W_1^{\mu} - iW_2^{\mu} \\ W_1^{\mu} + iW_2^{\mu} & -W_3^{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_3^{\mu} & W^{-\mu} \\ W^{+\mu} & -W_3^{\mu} \end{pmatrix}. \tag{30}$$

$$\vec{\tau} \cdot \vec{W}_{\mu} \vec{\tau} \cdot \vec{W}^{\mu} = \begin{pmatrix} W_{3\mu} W_3^{\mu} + W_{\mu}^{-} W^{+\mu} & 0 \\ 0 & W_{3\mu} W_3^{\mu} + W_{\mu}^{-} W^{+\mu} \end{pmatrix} \tag{31}$$

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ v + \frac{h}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad \partial_{\mu}\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_{\mu} h \end{pmatrix} \tag{32}$$

où v est la valeur non nulle du vide et h le boson de Higgs.

$$\begin{aligned} D_{\mu}\phi^{\dagger} D^{\mu}\phi = {} & \frac{1}{2}\partial_{\mu}h\partial^{\mu}h \cancel{- i\frac{g_W}{2}\partial_{\mu}hW_3^{\mu}\left(v + \frac{h}{\sqrt{2}}\right)} \cancel{+ i\frac{g_B}{2}\partial_{\mu}hB^{\mu}\left(v + \frac{h}{\sqrt{2}}\right)} \\ & \cancel{+ i\frac{g_W}{2}\left(v + \frac{h}{\sqrt{2}}\right)W_{3\mu}\partial^{\mu}h} + \frac{g_W^2}{2}\left(W_{3\mu}W_3^{\mu} + W_{\mu}^{-}W^{+\mu}\right)\left(v + \frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ & - \frac{g_W g_B}{2}W_{3\mu}B^{\mu}\left(v + \frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 \cancel{- i\frac{g_B}{2}B_{\mu}\left(v + \frac{h}{\sqrt{2}}\right)\partial^{\mu}h} - \frac{g_W g_B}{2}W_{3\mu}B^{\mu}\left(v + \frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ & + \frac{g_B^2}{2}B_{\mu}B^{\mu}\left(v + \frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 \end{aligned} \tag{33}$$

On ne va s'intéresser maintenant qu'à la partie de masse c'est à dire celle qui n'est pas un terme d'interaction avec le Higgs.

$$D_{\mu}\phi^{\dagger} D^{\mu}\phi = \frac{g_W^2}{2}W_{\mu}^{-}W^{+\mu}v^2 + \frac{g_W^2}{2}W_{3\mu}W_3^{\mu}v^2 - g_W g_B W_{3\mu}B^{\mu}v^2 + \frac{g_B^2}{2}B_{\mu}B^{\mu}v^2 \tag{34}$$

Il existe une manière de faire disparaître les termes croisés en opérant une rotation abstraite, dite rotation de Wienberg.

$$\begin{pmatrix} B^{\mu} \\ W_3^{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_W) & -\sin(\theta_W) \\ \sin(\theta_W) & \cos(\theta_W) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{\mu} \\ Z^{\mu} \end{pmatrix} \tag{35}$$

En remplaçant on trouve :

$$\begin{aligned} D_{\mu}\phi^{\dagger} D^{\mu}\phi = {} & \frac{g_W^2}{2}v^2 W_{\mu}^{-}W^{+\mu} \\ & + \frac{g_W^2}{2}v^2\sin^2(\theta_W)A_{\mu}A^{\mu} + \frac{g_W^2}{2}v^2\cos^2(\theta_W)Z_{\mu}Z^{\mu} + g_W^2 v^2\cos(\theta_W)\sin(\theta_W)A_{\mu}Z^{\mu} \\ & + \frac{g_B^2}{2}v^2\cos^2(\theta_W)A_{\mu}A^{\mu} - g_B^2 v^2\sin(\theta_W)\cos(\theta_W)A_{\mu}Z^{\mu} + \frac{g_B^2}{2}v^2\sin^2(\theta_W)Z_{\mu}Z^{\mu} \\ & - g_W g_B v^2\sin(\theta_W)\cos(\theta_W)A_{\mu}A^{\mu} + g_W g_B v^2\sin^2(\theta_W)A_{\mu}Z^{\mu} \\ & - g_W g_B v^2\cos^2(\theta_W)A_{\mu}Z^{\mu} + g_W g_B v^2\sin(\theta_W)\cos(\theta_W)Z_{\mu}Z^{\mu}. \end{aligned} \tag{36}$$

On se sert de la relation de Weinberg :

$$\sin(\theta_W)g_W = \cos(\theta_W)g_B. \tag{37}$$

En remplaçant :

$$\begin{aligned}
D_\mu\phi^\dagger D^\mu\phi = &\frac{g_W^2}{2}v^2 W_\mu^- W^{+\mu}\\
&+ \cancel{\frac{g_W^2}{2}v^2\sin^2(\theta_W)A_\mu A^\mu} + \frac{g_W^2}{2}v^2\cos^2(\theta_W)Z_\mu Z^\mu + \cancel{g_W g_B v^2\cos^2(\theta_W)A_\mu Z^\mu}\\
&+ \cancel{\frac{g_W^2}{2}v^2\sin^2(\theta_W)A_\mu A^\mu} - \cancel{g_B g_W v^2\sin^2(\theta_W)A_\mu Z^\mu} + \frac{g_B^2}{2}v^2\sin^2(\theta_W)Z_\mu Z^\mu\\
&- \cancel{g_W^2 v^2\sin^2(\theta_W)A_\mu A^\mu} + \cancel{g_W g_B v^2\sin^2(\theta_W)A_\mu Z^\mu}\\
&- \cancel{g_W g_B v^2\cos^2(\theta_W)A_\mu Z^\mu} + g_W^2 v^2\sin^2(\theta_W)Z_\mu Z^\mu\\
= &\frac{g_W^2}{2}v^2 W_\mu^- W^{+\mu} + 0\times A_\mu A^\mu + \frac{g_B^2}{2}v^2 Z_\mu Z^\mu + \frac{g_W^2}{2}v^2 Z_\mu Z^\mu\\
= &\frac{g_W^2}{2}v^2 W_\mu^- W^{+\mu} + 0\times A_\mu A^\mu + \frac{(g_W^2+g_B^2)}{2}v^2 Z_\mu Z^\mu \qquad (38)
\end{aligned}$$

On remarque que l'on a pas pour le champ A_μ pas de masse, il est donc idéal pour décrire le photon.