MDI341 Machine Learning Avancé

Modèles de Markov Cachés
Mars 2018

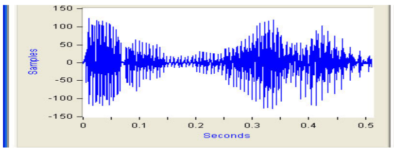
Laurence Likforman-Sulem
Telecom ParisTech/IDS
likforman@telecom-paristech.fr

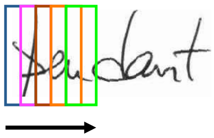
Plan

- Chaînes de Markov
  - modèles stochastiques, paramètres
- Modèles de Markov Cachés
  - discrets/continus
  - Modèles génératifs
  - décodage : Viterbi, Baum-Welch
  - apprentissage: Viterbi, forward-backward

applications

- HMMs
  - reconnaissance de la parole
  - reconnaissance de l'écriture
  - reconnaissance d'objets, de visages dans les videos,…
  - Natural Language Processing (NLP): étiquetage morpho-syntaxique, correction orthographique





THE→ TGE

PARTIE I: CHAINES DE MARKOV

Modèle stochastique

- processus aléatoire à temps discret
  - ensemble de variables aléatoires $q_1, q_2, \ldots, q_T$
  - indexées aux instants entiers t=1, 2, ….T
- notation
  - q_t: variable aléatoire d'état observé au temps t
    - notée q(t) ou q_t
    - q(t) prend ses valeurs dans espace fini d'états S
      S={1,2, ….Q}
  - $P(q_t=i)$: probabilité d'observer l'état i au temps t

exemples états: indices de pollution, météo (beau, pluie, nuageux), fonction des mots d'un texte (verbe,nom, pronom;….)(NLP)

Modèle stochastique

- évolution du processus
  - état initial q_1
  - suite (chaîne) de transitions entre états
    - $q_1 \rightarrow q_2 \ldots \rightarrow q_t \quad t <= T$
- calcul probabilité d'une séquence d'états

  $P(q_1, q_2, \ldots q_T) = P(q_T / q_1, q_2, \ldots q_{T-1}) P(q_1, q_2, \ldots q_{T-1})$

  $= P(q_T | q_1, q_2, \ldots q_{T-1}) P(q_{T-1} | q_1, q_2, \ldots q_{T-2}) P(q_1, q_2, \ldots q_{T-2})$

  $= P(q_1) P(q_2 / q_1) P(q_3 / q_1, q_2) \ldots P(q_T | q_1, q_2, \ldots q_{T-1})$
- modèle: connaître la probabilité de chaque transition+proba initiale $P(q_1)$

Chaîne de Markov à temps discret

- propriété de Markov d'ordre k : dépendance limitée
  - $P(q_t | q_1, q_2, \ldots q_{t-1}) = P(q_t | q_{t-k} \ldots q_{t-1})$
  - k=1 ou 2 en pratique

- *cas k=1*
  - $P(q_t | q_1, q_2, \ldots q_{t-1}) = P(q_t | q_{t-1})$
  - $P(q_1, q_2, \ldots q_T) = P(q_1)P(q_2 / q_1)P(q_3 / q_2) \ldots\ldots P(q_T | q_{T-1})$
  - → probabilités de transition entre états

Chaîne de Markov stationnaire

- probabilités de transition ne dépendent pas du temps
  - $P(q_t = j \mid q_{t-1} = i) = P(q_{t+k} = j \mid q_{t+k-1} = i) = a_{ij}$
  - a_{ij}= probabilité de passer de l'état i à l'état *j*

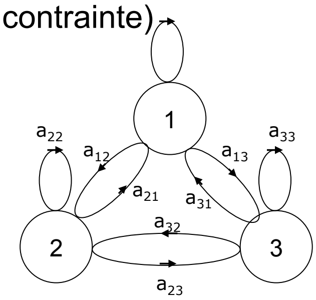
- modèle d'une chaîne de Markov stationnaire
  - matrice des probabilités de transitions
    - $A=[a_{ij}]$ $i=1,\ldots Q, j=1,\ldots.Q$
  - vecteur des probabilités initiales
    - $\Pi = [\pi_i]$ $i=1,\ldots Q$
    - $\pi_i = P(q_1 = i)$
  - contraintes : $0 <= \pi_i <= 1$ $0 <= a_{ij} <= 1$

$$\sum_{i=1}^{Q} \pi_i = 1 \qquad \sum_{j=1}^{Q} a_{ij} = 1$$

topologie du modèle: ergodique / gauche droite

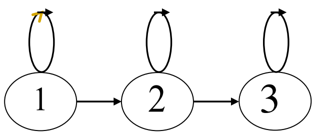
- modèle ergodique (sans contrainte)

$$A=\begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$$



- modèle gauche droite (contrainte: transitions i→ j ≥ i)

$$A=\begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

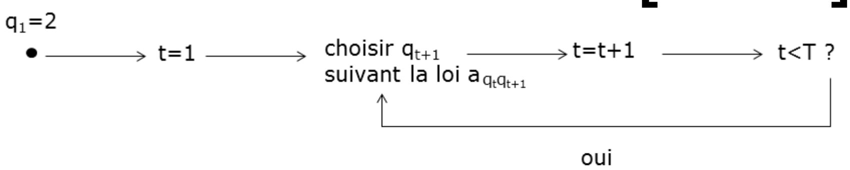


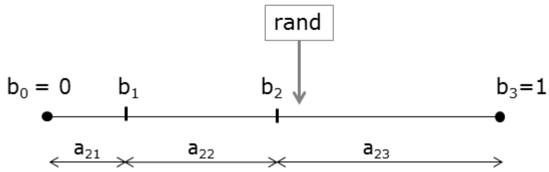
Générer une séquence d'états

- on part de l'état q_1= 2
- générer séquence d'états de longueur T

suivant chaîne de Markov (matrice A)

$$A=\begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$$

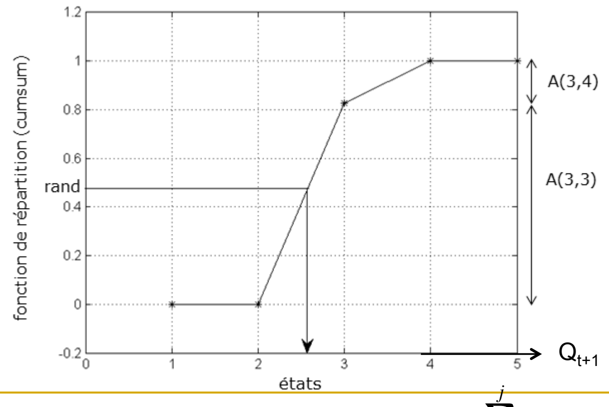




$$F_{Q_{t+1}|q_t=i}(j) = P(Q_{t+1} \le j | q_t = i, \lambda) = \sum^{j} a_{ik}$$

Méthode d'inversion de la fonction de répartition

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0.85 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

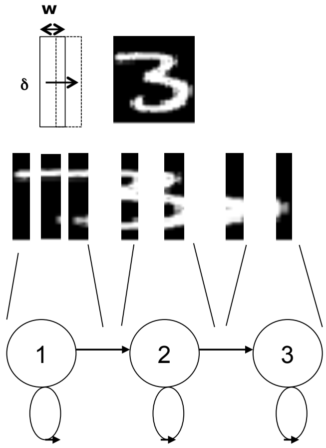


$$F_{Q_{t+1}|q_t=i}(j) = P(Q_{t+1} \le j | q_t = i, \lambda) = \sum_{k=1}^{j} a_{ik}$$

PARTIE II: MODÈLES DE MARKOV CACHÉS

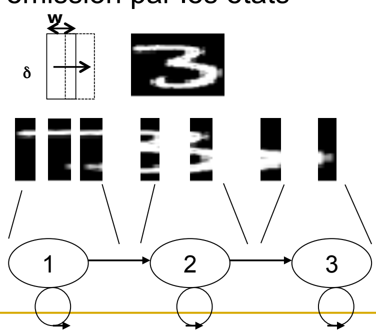
Modèles de Markov Cachés

- une classe de forme
  - modèle λ
- combinaison de 2 processus stochastiques
  - un observé
  - un caché
- on n'observe pas la séquence d'états
  $q= q_1\, q_2 \ldots q_T$
- on observe la séquence d'observations
  $o=o_1\, o_2 \ldots o_T$
- les observations sont générées (émises) par les états



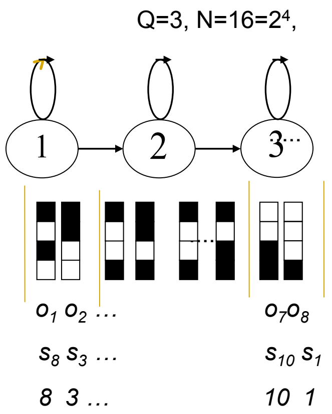
Processus stochastiques

- variables d'états
  - q_t prend ses valeurs dans {1,2, ….Q} (nombre fini d'états)
  - évolution: probabilités de transition
- variables d'observations
  - discrètes ou continues
  - évolution: émission par les états



HMMs discrets

- ensemble de Q états discrets {1,2,..Q}
- ensemble de N symboles discrets
  - $\{s_1, s_2, s_3, \ldots s_N\} \rightarrow \{1,2,3,..,N\}$
- on observe $o = o_1\ o_2\ o_t \ldots o_T$
  - $o = s_8\ s_3\ s_{13}\ s_6\ s_8\ s_5\ s_{10}\ s_1$
  - o = 8 3 13 6 8 5 10 1
- o correspond à séquence d'états (cachés)
  - $q = q_1\ q_2\ q_t \ldots q_T$
  - q= 1 1 2 2 2 2 3 3



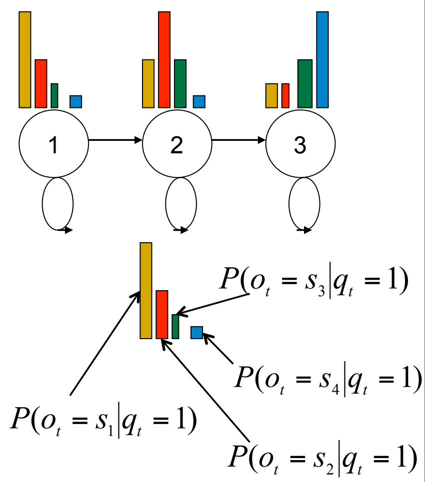
HMMs discrets

- HMM λ discret est défini par
  - π vecteur probabilités initiales
  - A: matrice transition
  - B : matrice des probabilités d'observation des symboles (dans les états)

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_Q) \quad \pi_i = P(q_1 = i)$$

$$A = \{a_{ij}\} = P(q_t = j \mid q_{t-1} = i)$$

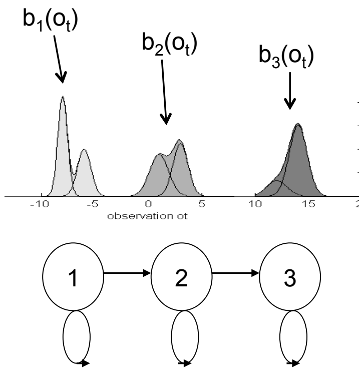
$$B = \{b_{ki}\} = P(o_t = s_k \mid q_t = i)$$



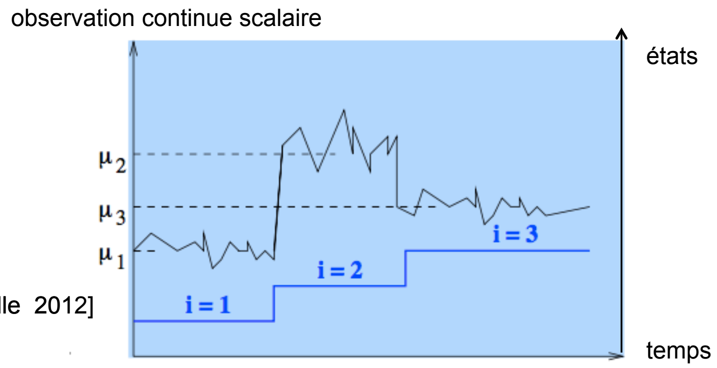
modèles de Markov cachés continus

- HMM λ continu défini par :
- π vecteur de probabilités initiales
- A: matrice de transition entre états
- $b_i(o_t)$: densité de probabilité des observations dans état i, i=1,..Q

→ gaussienne ou mélange gaussiennes



modèle d'observations Gaussien



[Sigelle 2012]

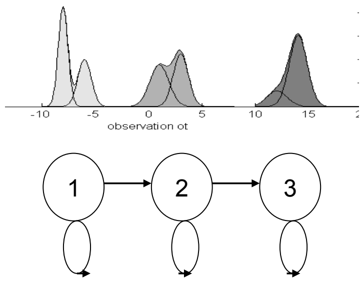
$$P(o_t \;/\; q_t = i,\; \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp - \frac{(o_t - \mu_i)^2}{2{\sigma_i}^2}$$

modèle: inclut μi et σi, i=1,2, 3

mélange de gaussiennes

$$b_i(o_t) = \sum_{k=1}^{M} c_{ik}\mathcal{N}(o_t;\Sigma_{ik},\mu_{ik}) \qquad \forall i = 1,...Q.$$

observations continues (scalaires ou vectorielles)

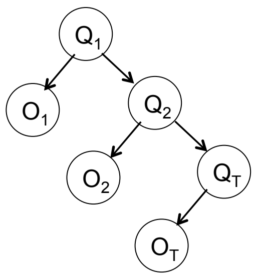


c_{ik}: poids de la kième loi gausssienne du mélange de M gaussiennes, associée à l'état i

modèle λ: inclut c_{ik}, μ_{ik} et Σ_{ik}, i=1,2, 3 et k=1,..M

hypothèses fondamentales

- indépendance des observations conditionnellement aux états



$$P(o_1,..o_t...o_T|q_1...q_t...q_T,\lambda) = \prod_{t=1}^{T} P(o_t|q_t,\lambda)$$

- chaîne de Markov stationnaire (transitions entre états)

$$P(q_1, q_2, ...q_T)= P(q_1)P(q_2/q_1)P(q_3/q_2) \;..... P(q_T / q_{T-1})$$

hypothèses fondamentales

- probabilité jointe pour une séquence d'observations et un chemin d'états

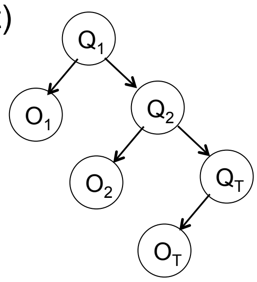
$$P(o_1,..o_t...o_T,q_1...q_t...q_T\,|\lambda)=\pi_{q_1}b_{q_1}(o_1)\prod_{t=2}^{T}a_{q_{t-1},q_t}\,P(o_t\,|q_t,\lambda)$$

$$=\pi_{q_1}b_{q_1}(o_1)\prod_{t=2}^{T}a_{q_{t-1},q_t}\,b_{q_t}(o_t)$$

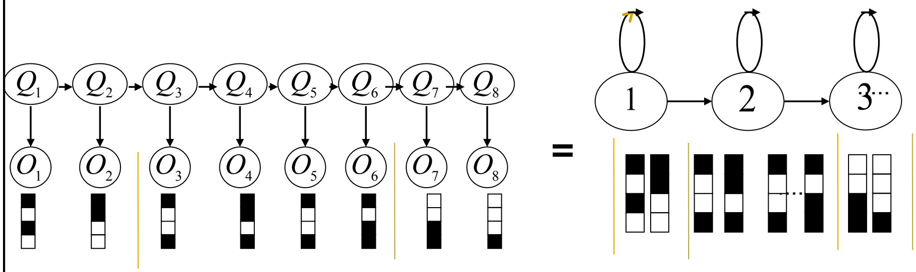
$$=P(o_1,..o_t...o_T\,|q_1...q_t...q_T,\lambda)P(q_1...q_t...q_T)$$

HMM / réseau bayésien

- un HMM est un cas particulier de réseau Bayésien (modèle graphique)
- les variables d'observations sont indépendantes connaissant leur variable parent (état)



HMM= cas particulier de DBN



- HMM: Hidden Markov Model
- RBD: réseau Bayésien Dynamique de type arbre
- 1 state variable + 1 observation variable at each time step t

$(Q_t)_{1 \le t \le T}$: variable d'état (cachée)

$(O_t)_{1 \le t \le T}$: variable observée « générée » par variable d'état

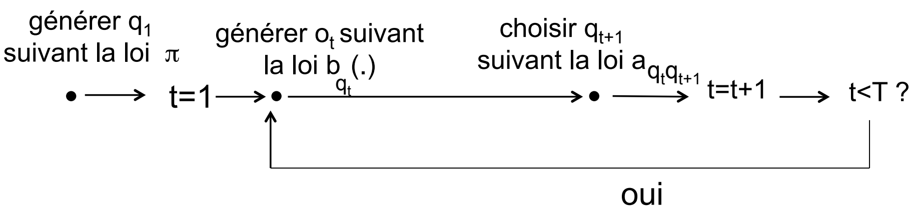
23

PARTIE III. MODELE GENERATIF

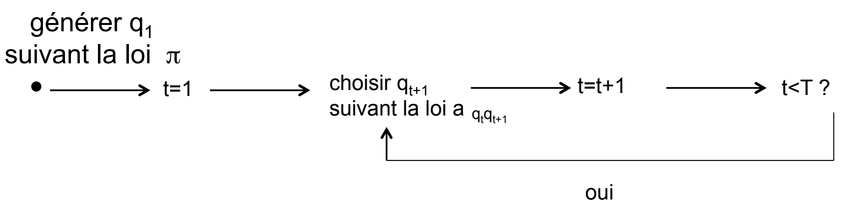
24

générer une séquence d'observations

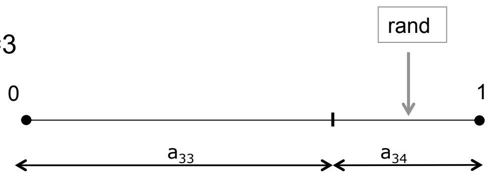
- générer la séquence d'états q1,….qT, puis générer la séquence observations à partir de chaque état
- ou générer q1 puis o1 (q1→ o1); générer q2 à partir de q1 (q1→ q2), puis o2 (q2→ o2), etc…



étape 1 : générer une séquence d'états



ex: $q_6=3$



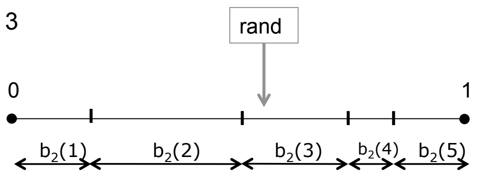
$a_{31}=0$; $a_{32}=0$;

→ $q_7=4$

$$\pi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0.85 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

étape 2 : générer les observations (discrètes)

- séquence états
  - $q1= 1; q_2= 1; q_3= 1; q_4= 2; q_5=2; q_6=3;\ldots\ldots$
- générer l'observation à t=4
  - $q_4=2;$
  - → $o_4= 3$



PARTIE IV : DÉCODAGE

HMM pour la reconnaissance des formes

- chaque clase m est modélisée par un modèle λ_m
- calcul de la vraisemblance du modèle λ_m pour une séquence d'observations $o=o_1.....o_T$ extraite d'une forme

$$P(o_1,..o_t...o_T|\lambda_m)$$

- attribution de la forme à la classe $\hat{m}$ telle que :

$$\hat{m} = \arg\max_m P(o_1,..o_t...o_T|\lambda_m)$$

29

HMM pour étiquetage morpho-syntaxique

- observations: mots
- séquence d'observation : suite de mots
- états cachés: Nom, pronom, verbe, etc.…
- modèle
  - probabilités de transitions entre éléments grammaticaux, bi-grams (tags)
  - probabilités d'observer les mots pour un élément grammatical donné (tag)

    P(« le » I verbe) , P(« le » I pronom) etc.…

30

algorithme de décodage de Viterbi

- vraisemblance pour séquence observations $o=o_1,\ldots o_T$

$$P(o|\lambda) = \sum_q P(o,q|\lambda)$$

- au lieu de sommer sur toutes les séquences d'états, recherche de la séquence optimale :

$$\hat{q} = \arg\max_q P(q,o|\lambda)$$

- puis estimer la vraisemblance par :

$$P(o|\lambda) \approx P(o,\hat{q}|\lambda)$$

- segmentation en états obtenue implicitement

algorithme de Viterbi

- $\delta_t(i)$: proba. (jointe) meilleure séquence partielle d'états aboutissant à l'état i au temps t et correspondant à la séquence partielle d'observations $o_1\ldots o_t$.

$$\delta_t(i) = \max_{q_1 q_2 \cdots q_{t-1}} P(q_1 q_2 \ldots q_t = i, o_1 o_2 \ldots o_t | \lambda)$$

- récurrence

$$P(q_1 q_2 \ldots q_t = i, q_{t+1} = j, o_1 o_2 \ldots o_t o_{t+1} | \lambda)$$

$$= P(o_{t+1}, q_{t+1} = j | o_1 \ldots o_t, q_1 .. q_{t-1} q_t = i, \lambda) P(o_1 \ldots o_t, q_1 .. q_{t-1} q_t = i | \lambda)$$

$$= P(o_{t+1} | q_{t+1} = j, \lambda) P(q_{t+1} = j | q_t = i, \lambda) P(o_1 \ldots o_t, q_1 .. q_{t-1} q_t = i | \lambda)$$

$$\max_{q1q2..qt} P(q_1 q_2 \ldots q_t = i, q_{t+1} = j, o_1 o_2 \ldots o_t o_{t+1} | \lambda) = \max_i b_j(o_{t+1}) a_{ij} \delta_t(i)$$

$$\boxed{\delta_{t+1}(j) = \max_i b_j(o_{t+1}) a_{ij} \delta_t(i) = b_j(o_{t+1}) \max_i a_{ij} \delta_t(i)}$$

$$P(o,\hat{q}) = \max_j \delta_T(j)$$

algorithme de décodage de Viterbi

- 1ere colonne: Initialisation

$$\delta_1(i) = P(q_1 = i, o_1) = b_i(o_1)\pi_i \quad i = 1,...Q$$

- colonnes 2 à T : récursion

$$\delta_{t+1}(j) = b_j(o_{t+1}) \max_i a_{ij}\delta_t(i) \qquad t = 1,...\mathrm{T}-1, \mathrm{j} = 1,...\mathrm{Q}$$

$$\varphi_{t+1}(j) = \arg\max_i a_{ij}\delta_t(i)$$ sauvegarde meilleur chemin (état précédent)

- terminaison

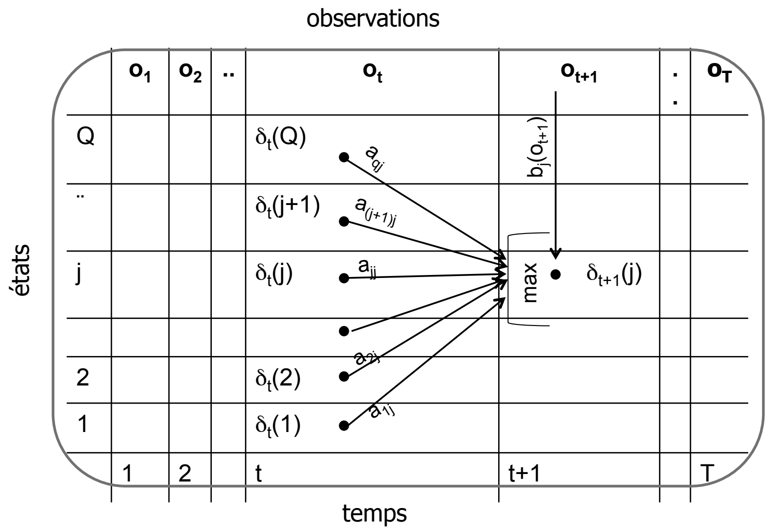
$$P(o,\hat{q}) = \max_j \delta_T(j)$$

$$\hat{q}_T = \arg\max_j \delta_T(j)$$

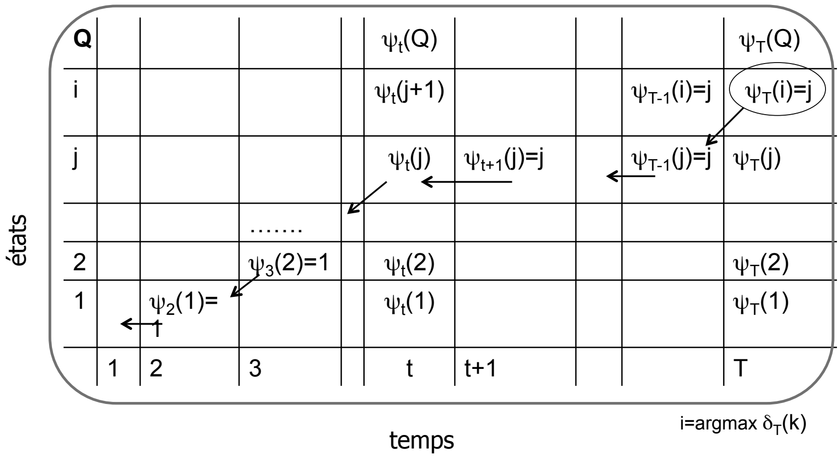
- backtrack

$$\hat{q}_t = \varphi(\hat{q}_{t+1}) \qquad t = T-1, T-2,...1$$

calcul des deltas



backtrack



application décodage Viterbi

- POS tagging (Part of Speech)
- « Bob mange la pomme »
  → ‘Nom propre’ ‘Verbe’ ‘déterminant’ ‘Nom’
- connaître la séquence états cachés optimale

variables forward-backward

$$P(o|\lambda) = \sum_i P(o, q_t = i|\lambda)$$

$$P(o, q_t = i|\lambda) = P(o_1 \ldots o_t, q_t = i, o_{t+1} \ldots o_T|\lambda)$$

$$= P(o_{t+1} \ldots o_T | o_1 \ldots o_t, q_t = i, \lambda) P(o_1 \ldots o_t, q_t = i|\lambda)$$

$$= \underbrace{P(o_{t+1} \ldots o_T | q_t = i, \lambda)}_{\beta_t(i)} \underbrace{P(o_1 \ldots o_t, q_t = i|\lambda)}_{\alpha_t(i)}$$

$$= \beta_t(i)\alpha_t(i)$$

$\beta_t(i)$: variable backward

$\alpha_t(i)$: variable forward

$$P(o|\lambda) = \sum_{i=1}^{Q} \alpha_t(i)\beta_t(i)$$

on prend généralement t=1 ou t=T

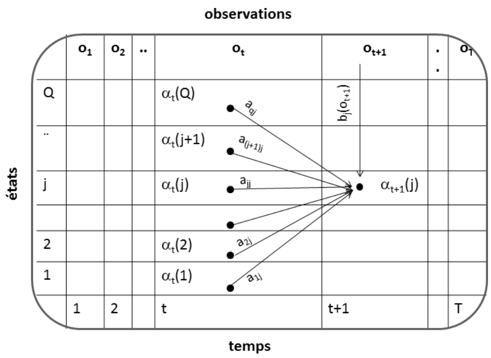
décodage forward-backward : algorithme forward

- calcul exact de la vraisemblance P(o| modele): Baum-Welch

$$\alpha_1(j) = b_j(o_1)\pi_j$$

$$\alpha_{t+1}(j) = b_j(o_{t+1}) \sum_{i=1}^{Q} \alpha_t(i) a_{ij}$$

$$P(o|\lambda) = \sum_{j=1}^{Q} \alpha_T(j)$$



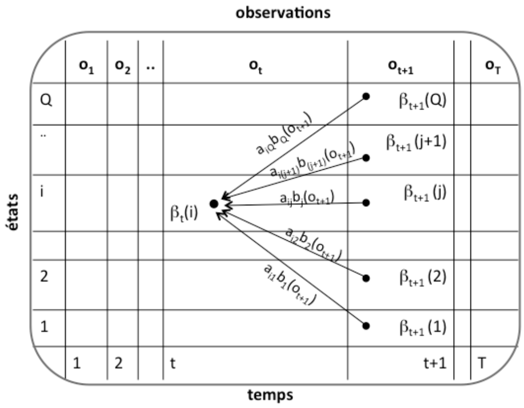
décodage forward-backward : algorithme backward

- calcul exact de la vraisemblance P(o| modele): Baum-Welch

$$\beta_T(i) = 1$$

$$\beta_t(i) = \sum_{j=1}^{Q} a_{ij} b_j(o_{t+1}) \beta_{t+1}(j)$$

$$P(O|\lambda) = \sum_{j=1}^{Q} \beta_1(j) \pi_j b_j(o_1)$$



autres variables: γ et ξ

$$\gamma_t(i) = P(q_t = i | O) = \frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{P(O)} \qquad i = 1, \ldots, Q$$

$$\gamma_t(i) = \frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{\sum_{j=1}^{Q} \alpha_t(j)\beta_t(j)}$$

- $\gamma_t(i)$: probabilité a posteriori que l'observation o_t soit dans l'etat i.
- peut servir aussi pour décodage local: $\hat{q}_t = \arg\max_j \gamma_t(j)$
- réalise un alignement 'soft' de la séquence d'observations O sur les états
- permet de calculer le taux d'occupation des états
  - state occupation probabilities (=occupation counts)

autres variables: γ et ξ

$$\xi_t(i,j) = P(q_t = i, q_{t+1} = j | o, \lambda) = \frac{P(o, q_t = i, q_{t+1} = j|\lambda)}{P(o|\lambda)}$$

- $\xi_t(i,j)$: probabilité que l'observation o_t soit dans l'etat i, et l'observation o_{t+1} soit dans l'etat j, connaissant toute la séquence o.

$$\xi_t(i,j) = P(q_t = i, q_{t+1} = j | o, \lambda) = \frac{\beta_{t+1}(j) b_j(o_{t+1}) a_{ij} \alpha_t(i)}{\sum_{k=1}^{Q} \alpha_t(k)\beta_t(k)}$$

PARTIE III: ESTIMATION DES PARAMETRES

Apprentissage en données complètes

- pour chaque modèle λ, estimer les paramètres
- base d'apprentissage
  - L séquences d'observation $o^{(l)}$, l=1….L
  - + séquences d'états associées
- séquence $o=o_1 \ldots o_T$ associée à séquence d'états $q=q_1 \ldots q_T$

$$\hat{a}_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} 1_{\{q_t=i, q_{t+1}=j\}}}{\sum_{t=1}^{T-1} 1_{\{q_t=i\}}} \quad \hat{b}_i(s_k) = \frac{\sum_{t=1}^{T} 1_{\{o_t=s_k, q_t=i\}}}{\sum_{t=1}^{T} 1_{\{q_t=i\}}}$$

Apprentissage en données complètes

- sur la base d'apprentissage totale

$$\hat{a}_{ij} = \frac{\sum_{l=1}^{L} \sum_{t=1}^{T(l)-1} 1_{\{q_t^{(l)}=i, q_{t+1}^{(l)}=j\}}}{\sum_{l=1}^{L} \sum_{t=1}^{T(l)-1} 1_{\{q_t^{(l)}=i\}}}$$

$$\hat{b}_i(s_k) = \frac{\sum_{l=1}^{L} \sum_{t=1}^{T(l)} 1_{\{o_t^{(l)}=s_k, q_t^{(l)}=i\}}}{\sum_{l=1}^{L} \sum_{t=1}^{T(l)} 1_{\{q_t^{(l)}=i\}}}$$

apprentissage données complètes

HMM continu, gaussienne mono-variee,

$$\widehat{\mu_i} = \frac{\sum_{l=1}^{L}\sum_{t=1}^{T^{(l)}} o_t^{(l)} \ \mathbb{1}_{q_t^{(l)}=i}}{\sum_{l=1}^{L}\sum_{t=1}^{T^{(l)}} \mathbb{1}_{q_t^{(l)}=i}}$$

$$\widehat{(\sigma_i)^2} = \frac{\sum_{l=1}^{L}\sum_{t=1}^{T^{(l)}} \left(o_t^{(l)} - \widehat{\mu_i}\right)^2 \ \mathbb{1}_{q_t^{(l)}=i}}{\sum_{l=1}^{L}\sum_{t=1}^{T^{(l)}} \mathbb{1}_{q_t^{(l)}=i}}$$

Apprentissage en données incomplètes

- estimer les paramètres, modèle λ
- on a une base d'apprentissage
  - L séquences d'observation $o^{(l)}$, l=1…L
- pas connaissance des états cachés
  - plus difficile
- algorithme apprentissage
  - Baum-Welch
  - Viterbi

Apprentissage en données incomplètes

- apprentissage Viterbi
  - décodage par Viterbi
  - → séquence états optimale
  - on est ramené au cas « données complètes »

apprentissage Baum-Welch

$$\hat{\pi}_i = \frac{\sum_{l=1}^{L} \gamma_1^{(l)}(i)}{L}$$

$$\hat{a}_{ij} = \frac{\sum_{l=1}^{L} \sum_{t=1}^{T(l)-1} \xi_t^{(l)}(i,j)}{\sum_{l=1}^{L} \sum_{t=1}^{T(l)-1} \gamma_t^{(l)}(i)}$$

$$\hat{b}_i(s_k) = \frac{\sum_{l=1}^{L} \sum_{t=1 \;\, et \;\, o_t^{(l)}=s_k}^{T(l)} \gamma_t^{(l)}(i)}{\sum_{l=1}^{L} \sum_{t=1}^{T(l)} \gamma_t^{(l)}(i)}$$

HMM discret

apprentissage Baum-Welch

gaussienne mono-variee,

$$\widehat{\mu_i} = \frac{\sum_{t=1}^{T} o_t \gamma_t(i)}{\sum_{t=1}^{T} \gamma_t(i)}$$

$$\widehat{(\sigma_i)^2} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \left(o_t - \widehat{\mu_i}\right)^2 \gamma_t(i)}{\sum_{t=1}^{T} \gamma_t(i)}$$

49

algorithme EM: expectation maximization

algorithme itératif
1) initialisation
2) calcul des variables α, β, γ, ξ,
3) mise à jour des paramètres

$$a_{ij}{}^{(\mathbf{n+1})} = \frac{\displaystyle\sum_{l=1}^{L} \sum_{t=1}^{T^{(l)}-1} P(q_t^{(l)} = i,\ q_{t+1}^{(l)} = j \ / \ o^{(l)}, \lambda^{(\mathbf{n})})}{\displaystyle\sum_{l=1}^{L} \sum_{t=1}^{T^{(l)}-1} P(q_t^{(l)} = i \ / \ o^{(l)}, \lambda^{(\mathbf{n})})}$$

$$\mu_i{}^{(\mathbf{n+1})} = \frac{\displaystyle\sum_{l=1}^{L} \sum_{t=1}^{T^{(l)}} o_t^{(l)}\ P(q_t^{(l)} = i \ / \ o^{(l)}, \lambda^{(\mathbf{n})})}{\displaystyle\sum_{l=1}^{L} \sum_{t=1}^{T^{(l)}} P(q_t^{(l)} = i \ / \ o^{(l)}, \lambda^{(\mathbf{n})})}$$

50

conclusion

- chaînes de Markov
  - modèle de Markov observé
- modèles de Markov Cachés
  - approche générative pour la modélisation de séquences
    - modèle caché : émet des observations
  - lien entre réseaux bayésiens dynamiques et HMMs
- décodage
  - décodage de Viterbi
  - décodage Baum-Welch
- apprentissage
  - apprentissage en données complètes
  - apprentissage en données incomplètes
    - algorithme EM (Viterbi, Baum-Welch)

références

- M. Sigelle, Bases de la Reconnaissance des Formes: Chaînes de Markov et Modèles de Markov Cachés, chapitre 7, Polycopié Telecom ParisTech, 2012.
- L. Likforman-Sulem, E. Barney Smith, Reconnaissance des Formes: théorie et pratique sous matlab, Ellipses, TechnoSup, 2013.
- L. Rabiner, A tutorial on Hidden Markov Models and selected applications in Speech Recognition, proc. of the IEEE, 1989.