

Rapport présenté pour l'UE séminaire d'évaluation de stage.

Master DUAS

Rapport de synthèse

Modélisation de la mortalité par les lois de type phase.

PAR : Aurélien Perez

Encadrant Entreprise: PIERRE MONTESINOS

Encadrant Université: JEAN BERARD

MEMBRES DU JURY:

Examinateur : Pierre-Olivier GOFFARD, Université de Strasbourg

Date de soutenance : septembre 2023

Table des matières

1 Comparaison des exercices de projection INSEE	5
1.1 Description des données	5
1.2 Comparaison des espérances de vie	6
1.2.1 Espérance de vie du moment	6
1.2.2 Espérance de vie générationnelle	6
1.2.3 Calcul des espérances de vie	7
1.3 Visualisation par carte de chaleur	10
1.3.1 Taux de croissance entre deux exercices de projection	11
1.3.2 Taux de croissance entre deux années consécutives	12
2 Modélisation de la mortalité par lois de type phase	14
2.1 Définition	14
2.1.1 Chaîne de Markov en temps continu	14
2.1.2 Loi de type phase	16
2.2 Propriétés	16
2.3 Exemples	18
2.3.1 Loi exponentielle	18
2.3.2 Loi d'Erlang	19
2.3.3 Loi coxienne	19
2.4 Application à l'étude de la mortalité	20
2.4.1 Calcul des engagements d'assurance-vie	21
2.5 Ajustement par une loi <i>phase-type</i>	21
2.5.1 Maximum de vraisemblance	22
2.5.2 Algorithme EM	22
2.6 Problème d'identifiabilité	25
2.7 Lois <i>phase-type</i> inhomogènes	25
2.8 Application sur données INSEE	26
3 Régression à intensités proportionnelles	28
3.1 Incertitude sur les paramètres	28
3.2 Qualité de l'ajustement	29
3.3 Application sur données réelles	29
A Calcul de l'exponentielle de matrice	32

B Gradient de la fonction de coût	33
C Cartes de chaleur pour les exercices 2016 et 2010	36
D Figures	39

Introduction

Ce rapport de stage présente mon expérience en tant que stagiaire en actuariat chez SPAC Actuaires.

SPAC Actuaires est une société de conseil en actuariat, créée en 1989, qui propose des services dans les domaines de la retraite, de la prévoyance, de la santé et des passifs sociaux.

Pendant le stage, des travaux d'analyse comparative des projections de mortalité de l'INSEE et de modélisation de la mortalité par loi *phase-type* ont été effectués.

L'analyse comparative des scénarios démographiques de l'INSEE a été entreprise pour une meilleure compréhension des tables de mortalité, avec une distinction entre les tables du moment et générationnelles, ainsi que les notions d'âge atteint et révolu. Les résultats ont mis en évidence des différences notables dans les espérances de vie entre les exercices de projection de mortalité de l'INSEE. Ces disparités, davantage liées à des changements structurels qu'à un choc global de mortalité, ont suscité une réflexion quant à la création d'un modèle pour prendre en compte ces évolutions.

L'exploration de divers modèles de mortalité a conduit à un intérêt particulier pour les lois *phase-type* en tant qu'approche de modélisation prometteuse pour tenir compte de "phases" dans le chemin de vie.

Un modèle de régression a été développé puis appliqué à nos données de mortalité, en mettant en œuvre une régression basée sur le sexe. cette première approche nous permet de nous familiariser avec l'intégration de covariables dans l'estimation des paramètres des lois phase type.

En ce qui concerne les perspectives futures, une voie d'exploration se profile : intégrer des covariables de type climatique dans l'estimation de la mortalité afin d'être en mesure de proposer un modèle de mortalité "climato-sensible" lors de certaines phases de vie et/ou pour certaines générations.

Sur cette base, il pourrait alors être envisageable de choquer les projections INSEE à partir de différents scénarios climatiques.

Les sections à venir de ce rapport détailleront les différentes étapes de modélisation ainsi que les résultats obtenus.

Chapitre 1

Comparaison des exercices de projection INSEE

Tous les cinq ans environ, l'INSEE (Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques) publie une étude prospective de la démographie française. Les premiers travaux menés dans ce document ont porté sur une comparaison entre 3 exercices de projection de la mortalité afin de mettre en évidence les tendances de la mortalité française. Ces exercices correspondent aux projections de l'INSEE élaborés en 2010, 2016 et 2021. Pour mener à bien cette comparaison, différents calculs d'espérance de vie et de taux de croissance entre quotients de mortalité ont été effectués. Pour faciliter l'analyse des résultats, nous présentons les variations sous forme de carte de chaleur.

1.1 Description des données

Les données manipulées se présentent sous la forme de quotients de mortalité par âge et par année calendaire. Ces quotients de mortalité sont disponibles sur le site internet de l'INSEE¹ en âge atteint (par opposition à en age révolu).

L'âge atteint correspond à la différence entre la date de référence utilisée et la date de naissance d'une personne.

L'âge révolu quant à lui désigne le nombre d'années entières écoulées entre la date de naissance d'un individu et la date de référence utilisée.

Les données en âge révolu sont plus précises, ainsi ces dernières ont été obtenues en utilisant les données disponibles ainsi que la proportion de décès avant anniversaire par âge.

Les projections réalisées par l'INSEE sont basées sur la méthode des composantes. Cette méthode repose sur des hypothèses concernant trois éléments clés pour l'évolution de la population : la fécondité, la mortalité et la migration.

Pour chaque composante, l'INSEE retient trois hypothèses distinctes : une hypothèse « centrale » qui représente le scénario le plus probable, une hypothèse « basse » qui envisage des conditions plus pessimistes, et une hypothèse « haute » qui envisage des conditions plus

1. [Exercice 2021](#) [Exercice 2016](#) [Exercice 2010](#)

optimistes.

Ainsi, la combinaison de ces hypothèses conduit à proposer 27 scénarios de projection de population.

Dans le contexte présent, nous nous intéressons uniquement aux trois scénarios qui utilisent l'hypothèse « centrale » pour les composantes fécondité et migration et où varie seulement l'hypothèse de mortalité. Ces trois scénarios sont l'espérance de vie « haute », l'espérance de vie « basse » et l'espérance de vie « centrale ».

On dispose de données entre 1962 et 2070 pour l'exercice de 2021, entre 2013 et 2070 pour l'exercice de 2016 et entre 2007 et 2060 pour l'exercice de 2010. Afin de ne considérer que des années de projection, seules les données entre 2022 et 2060 ont été conservées.

1.2 Comparaison des espérances de vie

Une première comparaison est réalisée sur les espérances de vie. D'une manière générale, l'espérance de vie est une mesure de la durée de vie moyenne d'une population.

On distingue dans la suite l'espérance de vie du moment de l'espérance de vie générationnelle.

1.2.1 Espérance de vie du moment

L'espérance de vie du moment est l'espérance de vie la plus couramment utilisée. Il s'agit de la durée de vie moyenne d'une population fictive qui serait soumise toute sa vie aux conditions de mortalité d'une année en particulier. Cette espérance décrit les évolutions conjoncturelles de la mortalité i.e. les variations ponctuelles de la mortalité influencées par des facteurs, tels que les conditions économiques, les crises sanitaires, les catastrophes naturelles ou les conflits. Néanmoins cette dernière ne permet pas de refléter les conditions de mortalité réellement connues par les individus.

1.2.2 Espérance de vie générationnelle

L'espérance de vie générationnelle correspond à la durée de vie moyenne d'une génération soumise aux conditions de mortalité qu'elle a effectivement connue. Cette mesure fournit une estimation plus précise de l'espérance de vie réelle d'un individu, car elle se base sur les données historiques de mortalité propres à cette génération. Cependant, le calcul de l'espérance de vie générationnelle présente un inconvénient majeur : il requiert des données sur les conditions de mortalité à la fois rétrospectives et prospectives, couvrant une longue période. Il est nécessaire de disposer de données historiques sur la mortalité de la génération en question, ainsi que des projections de mortalité pour les années ultérieures afin d'estimer la durée de vie moyenne de la génération. Lorsque les données recoupées dépassent l'horizon de la table de mortalité utilisée, il devient nécessaire d'utiliser des données projetées.

La figure 1.1 illustre la différence entre les espérances de vie générationnelle et espérance de vie du moment.

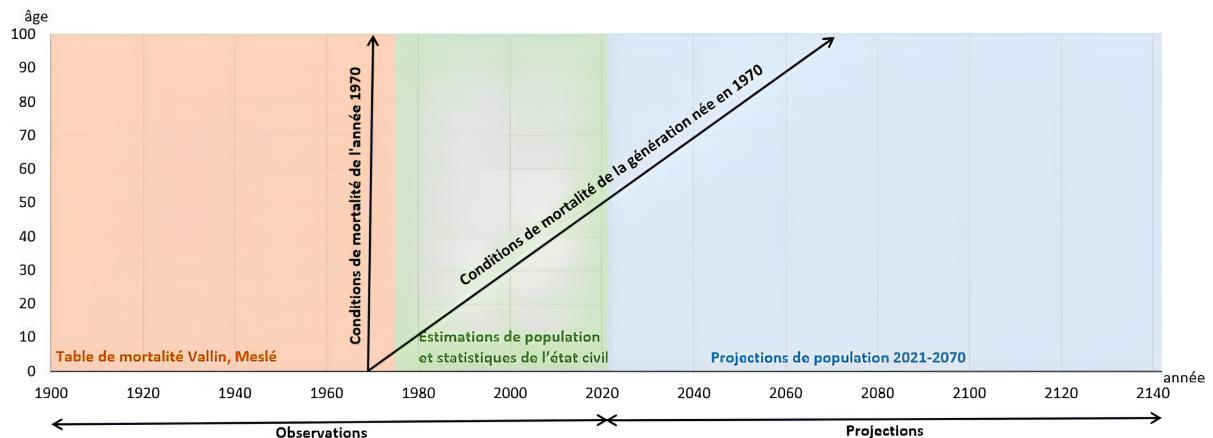


FIGURE 1.1 – Conditions de mortalité d'une année ou d'une génération, [Blanpain \(2022\)](#).

1.2.3 Calcul des espérances de vie

Dans cette section, nous allons maintenant détailler la façon de calculer ces espérances de vie. Notons T la variable aléatoire représentant l'âge du décès d'un individu. En notant e_x l'espérance de vie résiduelle à l'âge x , tp_x la probabilité de ne pas décéder entre l'âge x et $x + t$ sachant que l'individu est en vie à l'âge x , q_x la probabilité de décéder entre l'âge x et $x + 1$ sachant que l'individu est en vie à l'âge x , et l_x le nombre de survivants à l'âge x nous avons :

$$\begin{aligned} e_x &= \mathbb{E}[T - x | T \geq x] \\ &= \sum_{t=1}^{120-x} \mathbb{P}(T > x + t | T \geq x) \\ &= \sum_{t=1}^{120-x} tp_x. \end{aligned}$$

On aboutit alors à deux formules équivalentes :

- Comme $tp_x = \prod_{s=0}^{t-1} p_{x+s}$, on a :

$$e_x = \sum_{t=1}^{120-x} \prod_{s=0}^{t-1} p_{x+s} = \sum_{t=1}^{120-x} \prod_{s=0}^{t-1} (1 - q_{x+s}) = (1 - q_x) + (1 - q_x)(1 - q_{x+1}) + \dots$$

- Comme $tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}$, on a :

$$e_x = \sum_{t=1}^{120-x} \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{1}{l_x} \sum_{t=1}^{120-x} l_{x+t} = \frac{1}{l_x} \sum_{k=x+1}^{120} l_k.$$

Ainsi pour une année calendaire c donnée, l'espérance de vie résiduelle à l'âge x du moment est donnée par :

$$e_{x,c} = \frac{1}{l_{x,c}} \sum_{k=x+1}^{120} l_{k,c} = \sum_{t=1}^{120-x} \prod_{s=0}^{t-1} (1 - q_{x+s,c}).$$

Pour une génération g donnée, l'espérance de vie résiduelle à l'âge x par génération est obtenue en considérant les quotients de mortalités sur la diagonale de la génération concernée :

$$e_{x,g} = \sum_{t=1}^{120-x} \prod_{s=0}^{t-1} (1 - q_{x+s,g+s}) = \sum_{t=1}^{120-x} \prod_{s=0}^{t-1} \frac{l_{x+s+1,g+s}}{l_{x+s,g+s}}.$$

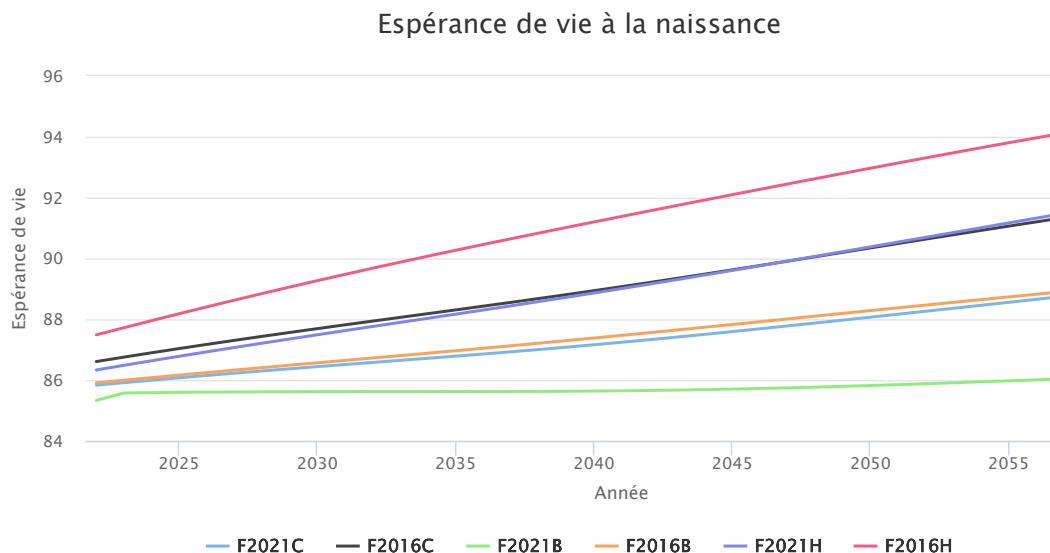


FIGURE 1.2 – Espérance de vie à la naissance des femmes pour les exercices 2016 et 2021 selon 3 scénarios de l'INSEE.

La figure 1.2 représente l'espérance de vie du moment à la naissance des femmes dans les scénarios espérance de vie haute, centrale et basse des exercices de projections de l'INSEE. La légende se lit de la manière suivante, la première lettre H ou F désigne le sexe, la date désigne l'exercice de projection et la dernière lettre le scénario, C pour central, B pour bas et H pour haut.

Sur la figure 1.2, le scénario central de 2021 coïncide globalement avec le scénario bas de 2016 et le scénario haut de 2021 coïncide globalement avec le scénario central de 2016.

Ce constat est vrai également pour les hommes et bien qu'il ne se vérifie pas pour tous les âges, on observe que les projections en termes d'espérance de vie sont plus pessimistes dans les projections de 2021 que celles de 2016 (voir annexe D.1, D.2, D.3, D.4, D.5).

Même constat entre les exercices 2010 et 2016 pour les hommes tandis que les scénarios sont similaires pour les femmes (annexe D.7, D.8, D.9, D.10, D.11).

Dans la suite seuls les scénarios centraux des exercices de projection de l'INSEE sont comparés.

Les figures 1.3 et 1.4 représentent respectivement les espérances de vie générationnelles résiduelles à 65 ans et à 85 ans pour les scénarios centraux des 3 exercices de projection.

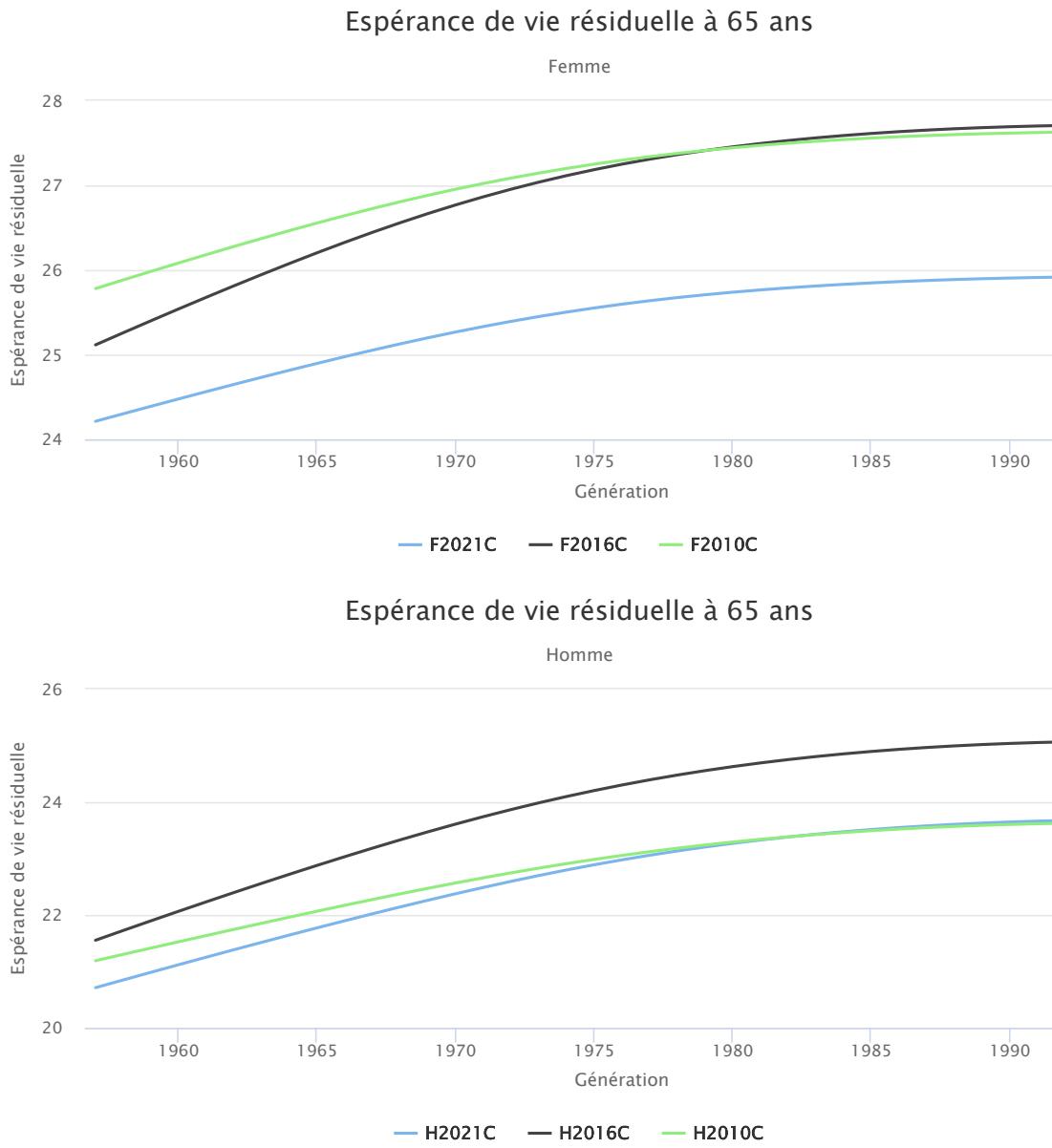


FIGURE 1.3 – Espérance de vie résiduelle à 65 ans pour les exercices 2010, 2016 et 2021 selon 3 scénarios de l'INSEE.

L'examen des figures 1.3 et 1.4 révèle que l'augmentation de l'espérance de vie à 65 ans entre l'exercice de projection de 2010 et celui de 2016 est plus favorable aux hommes qu'aux femmes.

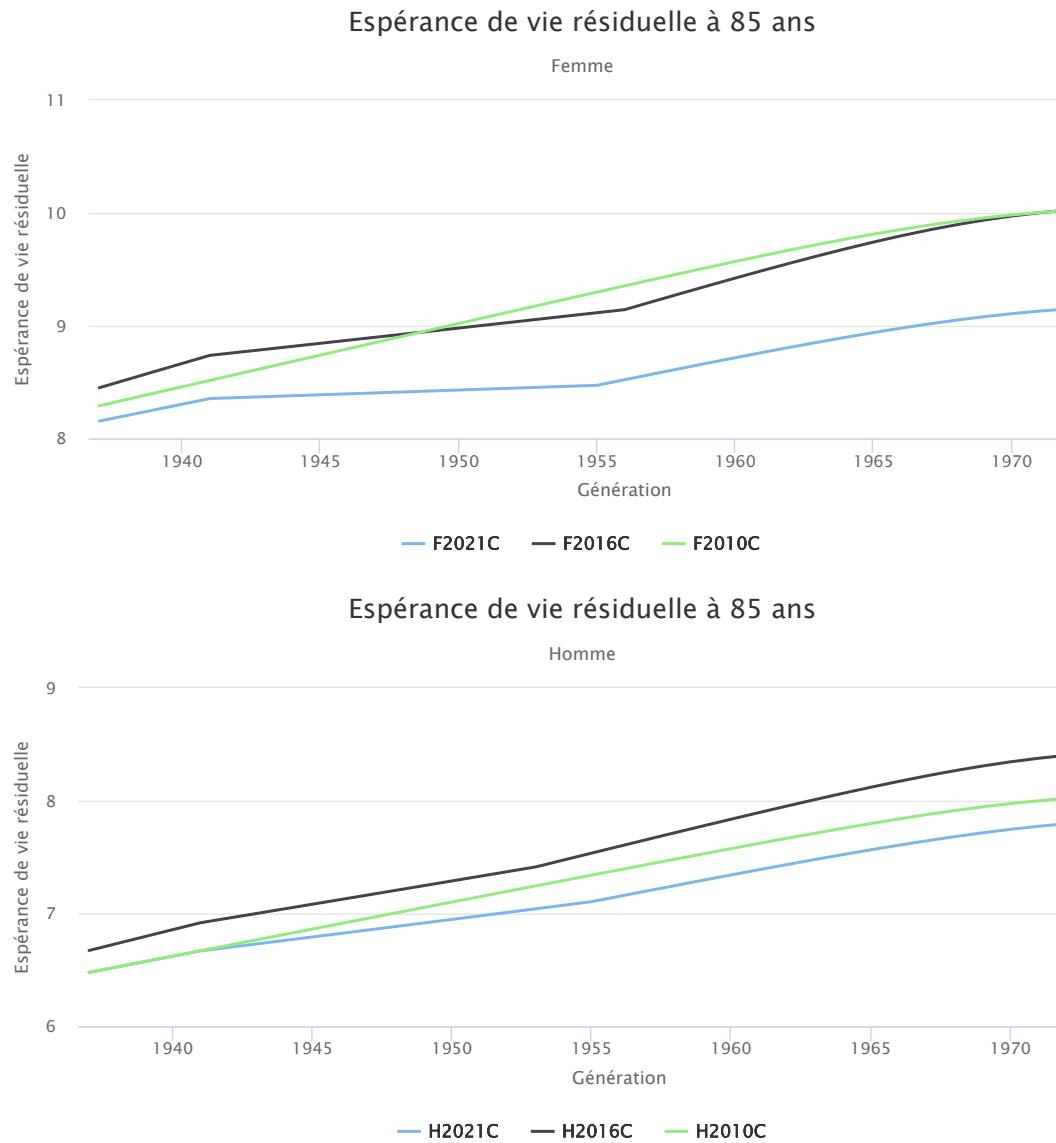


FIGURE 1.4 – Espérance de vie résiduelle à 85 ans pour les exercices 2010, 2016 et 2021 selon 3 scénarios de l'INSEE.

Par ailleurs, la figure 1.4 met en évidence un effet générationnel pour les exercices de projection de 2016 et 2021. Cet effet peut s'expliquer par une augmentation des accidents de la route et des suicides ainsi qu'à la consommation de tabac et d'alcool pour les générations concernées (voir Blanpain (2020)).

1.3 Visualisation par carte de chaleur

Il est intéressant de se demander quels changements ont été opérés dans la structure des quotients de mortalité pour aboutir à ces espérances de vie.

Pour repérer ces changements, deux types de taux de croissance entre quotients de mortalité ont été calculés.

1.3.1 Taux de croissance entre deux exercices de projection

Afin de comparer directement les quotients de mortalité d'un exercice de projection à un autre, les taux de croissance des quotients de mortalité entre deux exercices de projection (notés Ex1 et Ex2) ont été calculés. Il s'agit de la différence normalisée entre les quotients de mortalité de deux années de projection :

$$\text{Taux}_{x,t,\text{Ex1,Ex2}} = \frac{q_{x,t,\text{Ex1}} - q_{x,t,\text{Ex2}}}{q_{x,t,\text{Ex2}}}.$$

Les figures 1.5 et 1.6 sont les cartes de chaleur représentant les taux de croissance des exercices de projection de 2016 à 2021 et de 2010 à 2016 respectivement.

L'avantage de cette représentation par carte de chaleur est que la structure de la mortalité par âge et par année est directement visualisable.

Sur cette carte, les couleurs se rapprochant du rouge foncé indiquent une augmentation de la mortalité par rapport à l'exercice précédent. À l'inverse, les couleurs se rapprochant du bleu foncé témoignent d'une diminution de la mortalité par rapport à l'exercice précédent.

La figure 1.5 met en évidence une augmentation substantielle de la mortalité pour l'exercice 2021 par rapport à 2016, principalement observée chez les tranches d'âge jeunes et les années les plus éloignées dans le futur, avec une mortalité jusqu'à quatre fois supérieure.

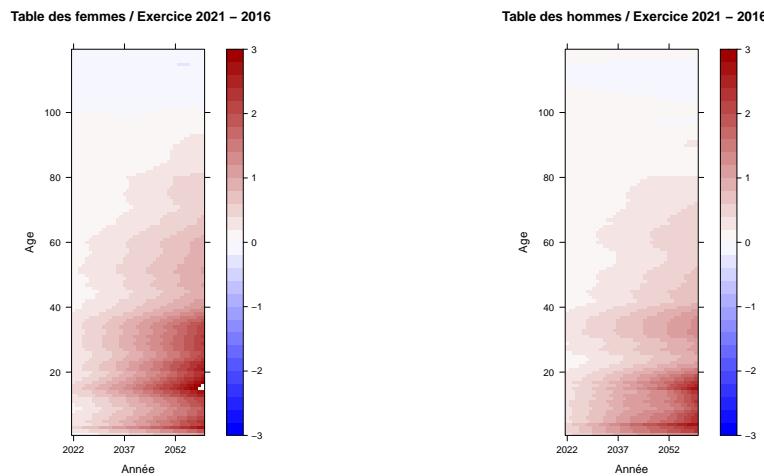


FIGURE 1.5 – Carte de chaleur | Taux de croissance entre les exercices 2021-2016.

La figure 1.6, quant à elle, révèle une diminution de la mortalité pour l'exercice 2016 par rapport à 2010, à l'exception des tranches d'âge jeunes et de certaines générations chez les femmes, où la mortalité demeure élevée.

Ces variations entre exercices de projection proviennent de la mortalité effectivement observée durant la période de référence utilisée pour la projection. Ces variations ne sont pas totalement expliquées mais le ralentissement de la baisse de mortalité observé pendant la période de référence de l'exercice 2021 (2013 - 2019) est en partie dû à l'arrivée aux âges élevés des générations à mortalité défavorable de 1941-1955 (Algava et Blanpain, 2021).

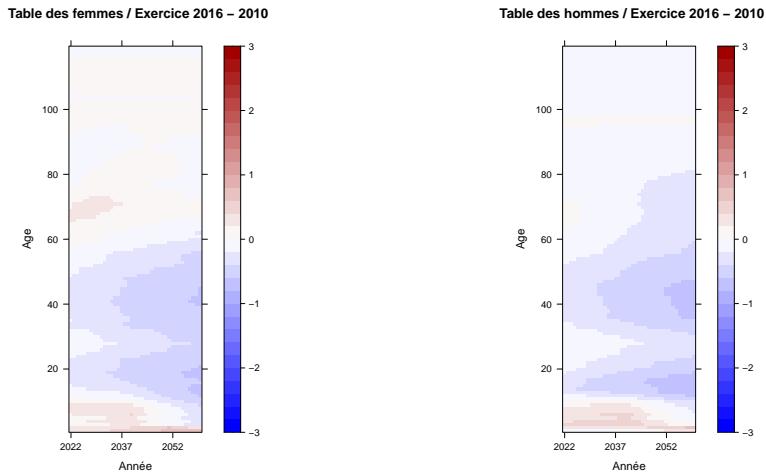


FIGURE 1.6 – Carte de chaleur | Taux de croissance entre les exercices 2016-2010.

1.3.2 Taux de croissance entre deux années consécutives

Pour observer l'évolution des quotients de mortalité d'année en année, les taux de croissance des quotients de mortalité au fil des années ont été calculés. Il s'agit de la différence normalisée entre les quotients de mortalité de deux années consécutive pour un même exercice de projection :

$$\text{Taux}_{x,t} = \frac{q_{x,t} - q_{x,t-1}}{q_{x,t-1}}.$$

Pour simplifier la lecture, nous focaliserons notre attention sur l'exercice de projection de 2021. Pour les lecteurs désireux d'explorer davantage, les cartes de chaleur des exercices de 2010 et 2016 sont disponibles en annexe [C.1](#) et [C.3](#).

La figure [1.7](#) est la carte de chaleur représentant les taux de croissance entre deux années consécutives pour l'exercice 2021.

Cette carte de chaleur permet de visualiser l'évolution de la mortalité par année pour un exercice et un âge donné. Afin de lire cette carte de chaleur, il faut choisir un âge, puis pour chaque année la couleur nous indique l'intensité de la diminution de la mortalité pour cet âge au fil du temps. Plus le bleu est foncé, plus la diminution est importante.

L'apparition d'une bande diagonale est observée dans la figure [1.7](#). Cette bande correspond à l'effet générationnel observé dans la figure [1.4](#). Afin d'identifier ces générations, une carte de chaleur en vision générationnelle est produite par translation des quotients de mortalité de la table.

La figure [1.7](#) met en évidence un plancher de mortalité pour les hommes âgés de 5 à 14 ans à partir de 2052, une baisse plus homogène de la mortalité par tranche d'âge qui suggère la possibilité d'un lissage des quotients de mortalité, un ralentissement de la baisse de la mortalité pour les générations masculines nées entre 1941 et 1955, et un ralentissement plus marqué chez les femmes.

Pour clore ce chapitre, les résultats de cette analyse comparative ont révélé des différences notables dans les espérances de vie entre les exercices de projection de la mortalité de l'INSEE. Cependant, il est important de souligner que ces différences ne sont pas simplement le résultat

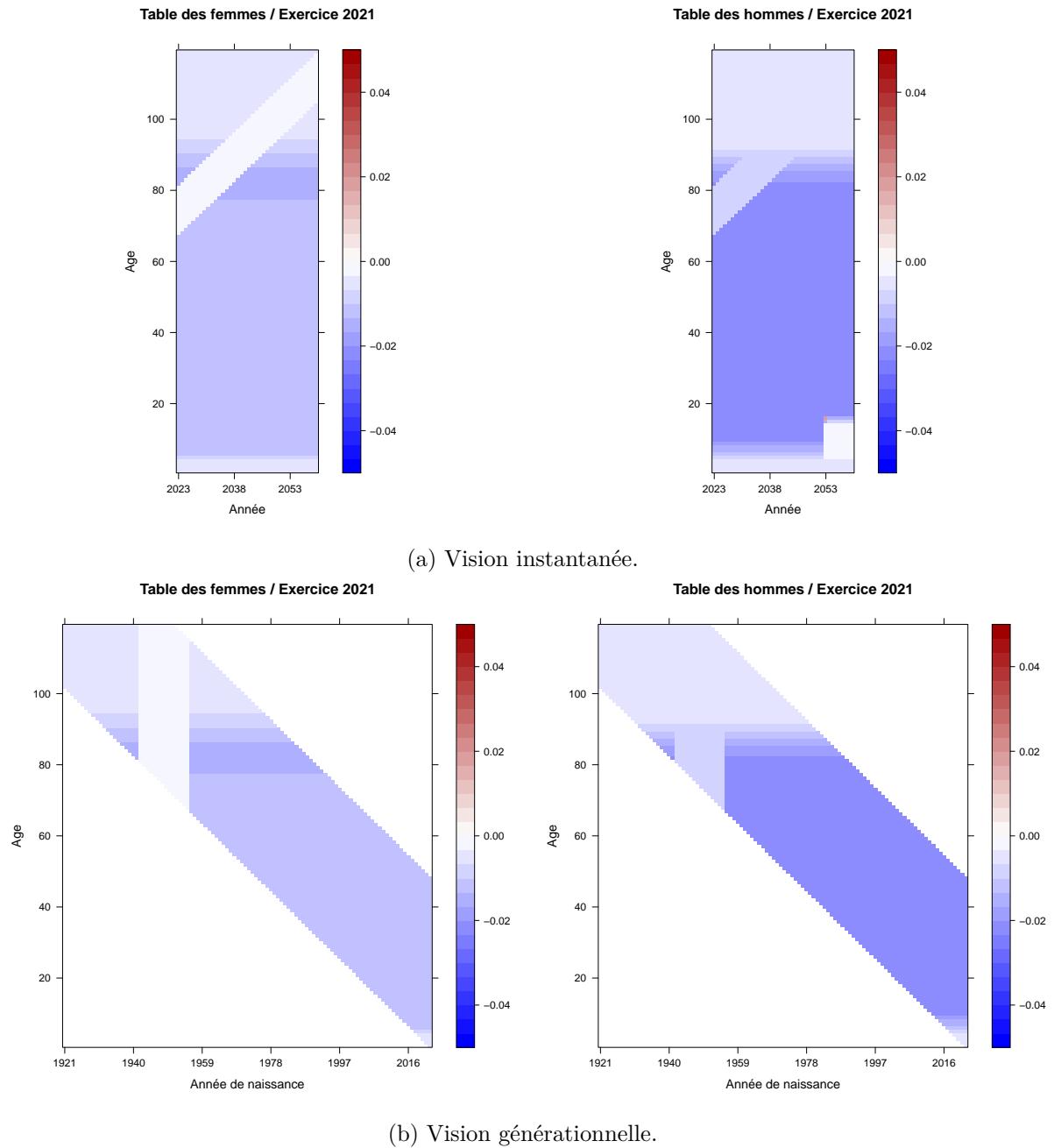


FIGURE 1.7 – Taux de croissance entre deux années consécutives | Exercice 2021.

d'un choc de mortalité global, mais plutôt d'une modification de la structure de la mortalité. Cette observation a suscité une réflexion sur la possibilité de développer un modèle qui permette de prendre en compte des changements structurels et d'incorporer des chocs ciblés pour certaines populations. Ainsi, nous avons exploré l'utilisation de la modélisation par lois *phase-type*, offrant un cadre adapté pour la capture de ces modifications de la mortalité et ouvrant des perspectives intéressantes pour des études plus approfondies.

Chapitre 2

Modélisation de la mortalité par lois de type phase

Les lois *phase-type* constituent un ensemble de lois largement répandues et fréquemment utilisées dans divers domaines d'application tels que la théorie des risques et la théorie des files d'attente. Elles offrent un cadre général pour modéliser un large éventail de phénomènes et sont appréciées pour leur capacité à résoudre des problèmes complexes de manière exacte.

Selon [Asmussen et al. \(2019\)](#), leur utilisation ne vise pas tant la précision de l'ajustement, mais plutôt la simplification de certains calculs, tels que des calculs de primes en assurance-vie ou le prix de produits dérivés.

Les études passées sur les projections de la mortalité ont souvent sous-estimé l'amélioration de l'espérance de vie globale, en partie à cause de l'utilisation de modèles paramétriques.

[Lin et Liu \(2007\)](#) soulignent qu'en utilisant des modèles paramétriques pour extrapoler les tendances passées vers le futur, on suppose implicitement que ces tendances historiques se maintiendront toujours et qu'il n'y aura pas de changement structurel. Pour remédier partiellement à ce problème, il est possible d'incorporer des avis d'experts sur les impacts médicaux, comportementaux et sociaux sur la mortalité dans les projections. Cependant, en raison de l'absence de lien direct entre les paramètres des modèles de mortalité et les mécanismes de vieillissement, cette incorporation est souvent difficile.

C'est là que la modélisation par lois *phase-type* entre en jeu, permettant d'ajuster les données de mortalité observées et de relier les paramètres du modèle à un mécanisme de vieillissement, facilitant ainsi l'incorporation d'avis d'experts ([Lin et Liu, 2007](#)).

2.1 Définition

2.1.1 Chaîne de Markov en temps continu

Une chaîne de Markov en temps continu est un processus stochastique qui évolue dans le temps de manière continue dans un espace d'états dénombrable. À chaque instant $t \geq 0$, la chaîne de Markov se trouve dans un état particulier et peut transitionner vers un autre état de l'espace d'état.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et X un processus stochastique \mathcal{F}_t - adapté à valeur sur un espace d'état dénombrable E .

Le processus X est un processus de Markov si

$$\mathbb{P}(X_{t+s} = y | X_s = x, \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_{t+s} = y | X_s = x), \forall s, t \geq 0, \text{ et } x, y \in E.$$

De plus X est dit homogène si

$$\mathbb{P}(X_{t+s} = y | X_s = x) = \mathbb{P}(X_t = y | X_0 = x), \forall s, t \geq 0, \text{ et } x, y \in E.$$

Dans ce cas $P_t(x, y) = \mathbb{P}(X_t = y | X_0 = x)$ est appelé noyau de transition. Pour un $t \geq 0$ fixé, ce noyau de transition admet une représentation matricielle $P_t(x, y) = [P_t]_{x,y}$ et on parle alors de matrice de transition.

L'ensemble $(P_t)_{t \geq 0}$ muni du produit matriciel forme un semi-groupe. En effet, pour tous $x, y \in E$ on a :

$$\begin{aligned} P_{t+s}(x, y) &= \mathbb{P}(X_{t+s} = y | X_0 = x) \\ &= \sum_{z \in E} \mathbb{P}(X_{t+s} = y | X_s = z, X_0 = x) \mathbb{P}(X_s = z | X_0 = x) \\ &= \sum_{z \in E} \mathbb{P}(X_{t+s} = y | X_s = z) P_s(x, z) \\ &= \sum_{z \in E} P_s(x, z) \cdot P_t(z, y) \\ &= [P_t \cdot P_s]_{x,y}. \end{aligned}$$

Cette relation, aussi connue sous le nom d'équation de Chapman-Kolmogorov, permet de définir une matrice, appelée générateur infinitésimal, qui engendre le semi-groupe. Il s'agit de la dérivée à droite de $t \mapsto P_t$ en 0. En effet en notant \mathbf{Q} cette dérivée, on a :

$$\begin{aligned} P(t) &= P(h)^{t/h} = ((I + h\mathbf{Q} + o(h))^{1/h})^t \\ &\xrightarrow[h \rightarrow 0]{} e^{t\mathbf{Q}} \end{aligned}$$

où $e : t\mathbf{Q} \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t\mathbf{Q})^k}{k!}$ est l'exponentielle de matrice.

Pour une chaîne de Markov homogène en temps continu on peut montrer que le temps passé dans un état donné suit une loi exponentielle. Ce temps de séjour est influencé par une compétition entre un ensemble de variables aléatoires exponentielles, chacune correspondant à une transition possible depuis l'état actuel. Les paramètres de ces variables aléatoires sont déterminés par l'état actuel de la chaîne.

Plus précisément, chaque variable aléatoire exponentielle est associée à une transition possible depuis l'état actuel vers un autre état, et représente le temps nécessaire pour effectuer la transition correspondante.

Dans ce contexte, la variable aléatoire qui réalise la valeur la plus petite détermine l'état suivant de la chaîne de Markov.

2.1.2 Loi de type phase

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une chaîne de Markov en temps continu sur un espace d'état fini $E \cup \{\dagger\}$ qui a un unique état absorbant \dagger . Le générateur infinitésimal de X s'écrit par bloc :

$$Q = \begin{pmatrix} S & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où S est une matrice carré et s est un vecteur colonne de dimension $\text{Card}(E)$.

S contient les taux de transition entre états transitoires et s contient les taux de transition vers l'état absorbant.

Notons $\tau = \inf\{t \geq 0, X_t = \dagger\}$ le temps d'absorption de X .

La loi de τ est appelée loi de type phase de dimension $\text{Card}(E)$ et on note $\tau \sim \text{PH}(\pi, S)$ où π est la loi initiale de X .

On supposera que $\mathbb{P}(X_0 = \dagger) = 0$, et on omet donc l'élément correspondant. Ainsi, π est de dimension $\text{card}(E)$.

2.2 Propriétés

Les lois de type phase ont des propriétés très attrayantes pour la modélisation de durées.

Propriété 1

Les lois de type phase sont denses dans l'ensembles des lois sur \mathbb{R}_+ .

La propriété 1 implique que toute loi dont le support est \mathbb{R}_+ peut être approximée par une loi de type phase.

Considérons la variable aléatoire $\tau \sim \text{PH}(\pi, S)$ pour la suite et notons $\iota = (1 \dots 1)^\top$.

Propriété 2

1. La densité de τ est donnée par

$$f(x) = \pi e^{Sx} s.$$

2. Sa fonction de répartition par

$$F(x) = 1 - \pi e^{Sx} \iota.$$

3. Son espérance par

$$\mathbb{E}(\tau) = -\pi S^{-1} \iota.$$

4. Et sa fonction génératrice des moments par

$$\mathbb{E}(e^{t\tau}) = \pi(-tI - S)^{-1} s.$$

Démonstration. Notons

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{s} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

le générateur infinitésimal de la chaîne de Markov X associée à τ .

La matrice de transition P de X est définie par

$$P_t = \exp(\mathbf{Q} \cdot t) = [\mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i)]_{(i,j) \in \{1, \dots, p, \dagger\}^2}$$

où $\exp : \mathbf{Q} \cdot t \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mathbf{Q} \cdot t)^k}{k!}$ est l'exponentielle de matrice.

Comme P_t est une matrice stochastique, on en déduit :

$$P_t = \begin{pmatrix} e^{\mathbf{S}t} & \iota - e^{\mathbf{S}t} \iota \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent :

2.

$$\begin{aligned} F(t) &= 1 - \mathbb{P}(\tau > t) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_t \in \{1, \dots, p\}) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i) \mathbb{P}(X_0 = i) \\ &= 1 - \boldsymbol{\pi} e^{\mathbf{S}t} \iota \end{aligned}$$

1.

$$\begin{aligned} f(t) &= F'(t) \\ &= -\boldsymbol{\pi} e^{\mathbf{S}t} \mathbf{S} \iota \\ &= \boldsymbol{\pi} e^{\mathbf{S}t} \mathbf{s} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{t\tau}) &= \int_0^{+\infty} e^{tx} \boldsymbol{\pi} e^{\mathbf{S}x} \mathbf{s} dx \\ &= \boldsymbol{\pi} (-tI - \mathbf{S})^{-1} \mathbf{s} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\tau) &= \int_0^{+\infty} \boldsymbol{\pi} e^{\mathbf{S}x} \iota dx \\ &= -\boldsymbol{\pi} \mathbf{S}^{-1} \iota \end{aligned}$$

□

Les lois de type phase sont stables pour de nombreuses opérations (Bladt et Yslas, 2021).

Propriété 3

Notons $\tau_1 \sim \text{PH}(\boldsymbol{\pi}_1, \mathbf{S}_1)$ et $\tau_2 \sim \text{PH}(\boldsymbol{\pi}_2, \mathbf{S}_2)$ des variables aléatoires indépendantes de loi *phase-type* de dimension p_1 et p_2 respectivement.

$$1. \quad \tau_1 + \tau_2 \sim \text{PH}\left(\left(\boldsymbol{\pi}_1, 0\right), \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{s}_1 \boldsymbol{\pi}_2 \\ 0 & \mathbf{S}_2 \end{pmatrix}\right) \text{ (stabilité par convolution)}$$

$$2. \quad p\tau_1 + (1-p)\tau_2 \sim \text{PH}\left(\left(p\boldsymbol{\pi}_1 \quad (1-p)\boldsymbol{\pi}_2\right), \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_2 \end{pmatrix}\right) \text{ pour } p \in [0, 1] \text{ (stabilité par mélange)}$$

$$3. \quad \min(\tau_1, \tau_2) \sim \text{PH}(\boldsymbol{\pi}_1 \otimes \boldsymbol{\pi}_2, \mathbf{S}_1 \oplus \mathbf{S}_2)$$

$$4. \quad \max \sim \text{PH}\left(\left(\boldsymbol{\pi}_1 \otimes \boldsymbol{\pi}_2 \quad 0 \quad 0\right), \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1 \oplus \mathbf{S}_2 & \mathbf{I}_{p_1} \otimes \mathbf{s}_2 & \mathbf{s}_1 \otimes \mathbf{I}_{p_2} \\ 0 & \mathbf{S}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{S}_2 \end{pmatrix}\right)$$

où \oplus désigne la somme de Kronecker, \otimes le produit de Kronecker et \mathbf{I}_p est la matrice identité de dimension p .

On peut également noter que comme les lois de type phase sont associées à une chaîne de Markov, il est possible d'en donner une représentation graphique correspondant au graphe des transitions de la chaîne correspondante.

2.3 Exemples

De nombreuses lois classiques sont des cas particulier de loi de type phase.

2.3.1 Loi exponentielle

La loi exponentielle de paramètre de taux λ est la loi $\text{PH}(1, -\lambda)$.

En effet, d'après la propriété 2, la densité de cette loi PH s'écrit :

$$\begin{aligned} f(x) &= \boldsymbol{\pi} \exp(\mathbf{S}x) \mathbf{s} \\ &= 1 \times \exp(-\lambda x) \times \lambda. \end{aligned}$$

La représentation schématique d'une loi exponentielle avec le formalisme *phase-type* est présentée sur la figure 2.1.



FIGURE 2.1 – Représentation *phase-type* d'une loi exponentielle de paramètre λ .

2.3.2 Loi d'Erlang

La loi d'Erlang est une loi Gamma dont le paramètre de forme est entier. La loi d'Erlang est une loi de type phase. Ses paramètres sont de la forme $\boldsymbol{\pi} = (1 \ 0 \ \dots \ 0)$ et

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -\lambda & \lambda \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

La représentation *phase-type* de la loi d'Erlang est illustrée sur la figure 2.2.



FIGURE 2.2 – Représentation *phase-type* d'une loi d'Erlang de paramètres (p, λ) .

On retrouve de façon imagée et plus intuitive le résultat selon lequel la convolution de p lois exponentielles de paramètre λ donne une loi Gamma de paramètres (p, λ) .

2.3.3 Loi coxiennne

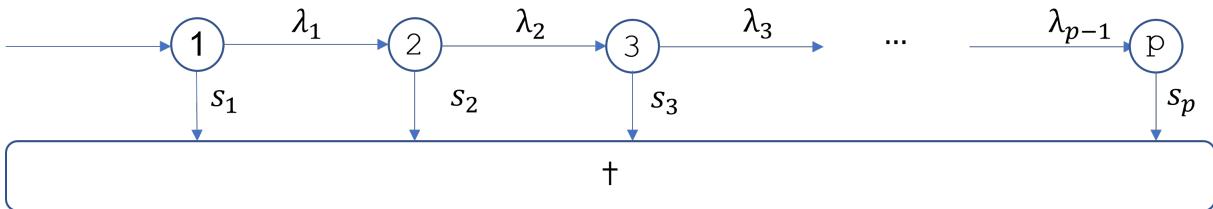
La loi coxiennne est une loi de type phase qui résulte d'une structure particulière de son générateur infinitésimal :

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -(\lambda_1 + s_1) & \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -(\lambda_2 + s_2) & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -(\lambda_{p-1} + s_p) & \lambda_{p-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -s_p \end{pmatrix}.$$

La structure coxiennne suppose que le processus débute dans le premier état i.e $\boldsymbol{\pi} = (1, 0, \dots, 0)$, sinon on parlera de structure coxiennne généralisée.

Cette loi nous intéressera particulièrement dans la modélisation de la mortalité car elle permet notamment une interprétation du processus de Markov comme un processus de vieillissement.

La figure 2.3 montre la représentation *phase-type* d'une loi coxiennne.


 FIGURE 2.3 – Représentation *phase-type* d'une loi coxienne.

Les états de la chaîne s'interprètent comme un indice de santé relatif qui mesure le degré de vieillissement d'un organisme humain en fonction des changements physiologiques associés au passage du temps. La distribution des états à un âge donné permet de décrire une hétérogénéité dans l'état de santé d'une population.

2.4 Application à l'étude de la mortalité

Dans le contexte de la modélisation de la mortalité, on supposera que la durée de vie à la naissance τ est distribuée selon une loi $\text{PH}(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{S})$.

Ce qui nous intéresse plus particulièrement, c'est la loi de la durée de vie résiduelle à l'âge x .

Propriété 4

Notons $\tau_x = \tau - x$ la durée de vie résiduelle à l'âge x . On a :

$$\text{Loi}(\tau_x | \tau_x \geq 0) = \text{PH}\left(\boldsymbol{\pi}(x) = \frac{\boldsymbol{\pi} e^{\mathbf{S}_x}}{\boldsymbol{\pi} e^{\mathbf{S}_{x_\ell}}}, \mathbf{S}\right).$$

Démonstration. Soit g une fonction mesurable, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g(\tau_x) | \tau_x \geq 0) &= \frac{\mathbb{E}(g(\tau_x) \mathbf{1}_{\tau_x \geq 0})}{\mathbb{P}(\tau_x \geq 0)} \\ &= \frac{\int_x^{+\infty} g(t-x) \boldsymbol{\pi} e^{\mathbf{S}t} \mathbf{s} dt}{\boldsymbol{\pi} e^{\mathbf{S}_{x_\ell}}} \\ &= \frac{\int_0^{+\infty} g(u) \boldsymbol{\pi} e^{\mathbf{S}(u+x)} \mathbf{s} du}{\boldsymbol{\pi} e^{\mathbf{S}_{x_\ell}}}. \end{aligned}$$

Par conséquent, la densité de τ_x conditionnellement à $\tau_x \geq 0$ est :

$$f_{\tau_x | \tau_x \geq 0}(t) = \frac{\boldsymbol{\pi} e^{\mathbf{S}(t+x)} \mathbf{s}}{\boldsymbol{\pi} e^{\mathbf{S}_{x_\ell}}} \mathbf{1}_{t \geq 0}.$$

□

Cette propriété nous permet d'accéder aux probabilités de décéder à un âge x donné via la fonction de répartition $q_x = \mathbb{P}(\tau_x \leq 1 | \tau_x \geq 0)$ et aussi à la fonction de hasard comme la moyenne des taux d'absorption pondérés par la distribution des états à l'âge x i.e.

$$\mu(x) = \frac{\boldsymbol{\pi} \exp(\mathbf{S}x) \mathbf{s}}{\boldsymbol{\pi} \exp(\mathbf{S}x) \boldsymbol{\iota}} = \boldsymbol{\pi}(x) \mathbf{s}.$$

Il est également possible d'obtenir des formules fermées pour différents engagements d'assurance-vie.

2.4.1 Calcul des engagements d'assurance-vie

Notons δ la force d'intérêt, \bar{A}_x le capital constitutif d'une garantie vie entière versant 1 euro au moment du décès de l'assuré d'âge x et \bar{a}_x le capital constitutif d'une rente versée en continu à un taux d'un euro par an jusqu'au décès de l'assuré d'âge x . En notant $\boldsymbol{\pi}(x) = \frac{\pi e^{S_x}}{\pi e^{S_x} + 1}$ on a :

$$\begin{aligned} \bullet \bar{A}_x &= \mathbb{E}(e^{-\delta \tau_x} | \tau_x \geq 0) \\ &= -\boldsymbol{\pi}(x)(\mathbf{S} - \delta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{s} \text{ (Transformée de Laplace d'une loi PH(\boldsymbol{\pi}(x), \mathbf{S})).} \\ \bullet \bar{a}_x &= \int_0^{+\infty} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\tau_x > t} \cdot e^{-\delta t} | \tau_x \geq 0) dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} \mathbb{P}(\tau_x \geq t | \tau_x \geq 0) dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} \cdot \boldsymbol{\pi}(x) \cdot e^{\mathbf{S}t} \cdot \iota dt \\ &= -\boldsymbol{\pi}(x)(\mathbf{S} - \delta \mathbf{I})^{-1} \iota. \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse de répartition uniforme des décès dans chaque âge, on peut montrer que :

$$A_x = \frac{\delta}{i} \bar{A}_x \quad \text{et} \quad a_x = \frac{1 + \frac{\delta^2}{i} \bar{a}_x - d - \frac{\delta}{i}}{d}.$$

avec $i = e^\delta - 1$ le taux d'intérêt annuel et $d = \frac{i}{1+i}$ le taux d'escompte.

Il est également possible d'utiliser les lois de type phase pour l'évaluation de produits dérivés actions (Garantie de capital minimum en cas de décès GMDB, High-Water Benefit HWB...) (voir [Asmussen et al. \(2019\)](#)).

2.5 Ajustement par une loi *phase-type*

Il existe diverses méthodes pour ajuster une loi de type phase à des données comme par exemple la méthode des moments ([Bobbio et al., 2005](#)), l'inférence bayésienne par des méthodes MCMC ([Bladt et al., 2003](#)) ou la méthode du maximum de vraisemblance par l'algorithme EM ([Asmussen et al., 1996](#)). C'est cette dernière méthode qui nous intéressera ici car elle est facile à implémenter et présente l'avantage de nous permettre de spécifier une structure pour les estimateurs de la loi initiale et du générateur infinitésimal.

2.5.1 Maximum de vraisemblance

Notons $(X_t)_{t \geq 0}$ le processus de vieillissement Markovien, $\tau \sim \text{PH}(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{S})$ le temps d'absorption de X , $t = (t_1, \dots, t_n)$ n réalisations i.i.d de τ et $\theta = (\boldsymbol{\pi}, \mathbf{S})$ les paramètres à estimer.

La vraisemblance s'écrit :

$$\mathcal{L}(t; \theta) = \prod_{k=1}^n \boldsymbol{\pi} \exp(\mathbf{S} \cdot t_k) \mathbf{s} = \prod_{k=1}^n \boldsymbol{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{S} \cdot t_k)^i}{i!} \mathbf{s}$$

et la log-vraisemblance :

$$\log(\mathcal{L}(t; \theta)) = \sum_{k=1}^n \log(\boldsymbol{\pi} \exp(\mathbf{S} \cdot t_k) \mathbf{s}) = \sum_{k=1}^n \log \left(\boldsymbol{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{S} \cdot t_k)^i}{i!} \mathbf{s} \right).$$

La présence de la somme dans le logarithme empêche une écriture plus simple ainsi que la résolution théorique du problème d'optimisation. Une approche possible est de recourir à des méthodes numériques pour résoudre le problème d'optimisation. Cependant, elles deviennent potentiellement très lourdes lorsque le nombre de phases augmente.

Une autre approche est l'utilisation de l'algorithme EM.

2.5.2 Algorithme EM

L'algorithme EM (Expectation-Maximization) est un algorithme itératif pour réaliser des estimations par maximum de vraisemblance.

Il est souvent utilisé lorsque l'on souhaite modéliser un phénomène à l'aide d'une variable catégorielle non-observée appelée variable latente.

L'algorithme se décompose en deux étapes, une étape E (Expectation) pendant laquelle on calcule l'espérance des variables latentes puis une étape M (Maximization) pendant laquelle on ajuste les paramètres du modèle pour maximiser la vraisemblance des données observées en utilisant les espérances de l'étape précédente.

Notons $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le processus de Markov défini par $Z_n = X_{T_n}$ où $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est le processus des instants de saut du processus (X_t) . Ce processus est appelé chaîne de Markov immergée.

Le processus (X_t) peut s'écrire $X_t = \sum_{n=0}^M Z_n \mathbf{1}_{[T_n, T_{n+1}[}(t)$ avec M le nombre de sauts avant l'absorption.

Ainsi, une observation complète du processus (X_t) serait une observation des M sauts et des temps de séjours dans chaque état.

Les probabilités de transition de la chaîne immergée s'écrivent :

$$\forall j, k \in \{1, 2, \dots, p, \mathfrak{t}\}, p_{jk} = \mathbb{P}(Z_{n+1} = k | Z_n = j) = \begin{cases} [\mathbf{S}]_{j,k} / \lambda_j & \text{si } k \neq \mathfrak{t}, \\ s_j / \lambda_j & \text{si } k = \mathfrak{t}. \end{cases}$$

avec $\lambda_j = -[\mathbf{S}]_{j,j} = \sum_{k \neq j} [\mathbf{Q}]_{j,k}$.

Selon [Asmussen et al. \(1996\)](#), les estimateurs du maximum de vraisemblance peuvent être obtenus explicitement à l'aide de trois statistiques latentes.

Propriété 5

Soient $k \in \{1, \dots, p\}$ et $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2 \cap \{i \neq j\}$ on a :

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_k &= \frac{A_k}{n} & [\hat{S}]_{i,j} &= \frac{C_{ij}}{B_i} \\ \hat{s}_k &= \frac{C_{k\dagger}}{B_k} & \hat{\lambda}_k &= -(\hat{s}_k + \sum_{l=1; l \neq k}^p [\hat{S}]_{k,l})\end{aligned}$$

avec $A_i = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{Z_{0,k}=i\}}$ le nombre de processus qui commencent dans l'état i,

$B_i = \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{m^{(k)}-1} \mathbb{1}_{\{Z_{l,k}=i\}} (T_{l+1,k} - T_{l,k})$ le temps total passé dans l'état i et

$C_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{m^{(k)}-1} \mathbb{1}_{\{Z_{l,k}=i, Z_{l+1,k}=j\}}$ le nombre de sauts de l'état i vers l'état j.

Démonstration. La densité d'une observation est donnée par :

$$f(x_1; \theta) = \pi_{z_{0,1}} \times \prod_{n=0}^{M-1} \lambda_{z_{n,1}} e^{-\lambda_{z_{n,1}} \cdot (t_{n+1,1} - t_{n,1})} p_{z_{n,1}, z_{n+1,1}}.$$

Par conséquent, la vraisemblance s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x; \theta) &= \prod_{k=1}^n f(x_k; \theta) = \prod_{k=1}^n (\pi_{z_{0,k}} \times \prod_{n=0}^{M-1} \lambda_{z_{n,k}} e^{-\lambda_{z_{n,k}} \cdot (t_{n+1,k} - t_{n,k})} p_{z_{n,k}, z_{n+1,k}}) \\ &= \prod_{i=1}^p \pi_i^{A_i} \prod_{i=1}^p e^{-\lambda_i B_i} \prod_{i=1}^p \prod_{j=0; j \neq i}^p [\mathbf{S}]_{i,j}^{C_{ij}} \\ &= \prod_{i=1}^p \pi_i^{A_i} \prod_{i=1}^p s_i^{C_{i\dagger}} e^{-s_i B_i} \prod_{i=1}^p \prod_{j=1; j \neq i}^p [\mathbf{S}]_{i,j}^{C_{ij}} e^{-[\mathbf{S}]_{i,j} B_i}.\end{aligned}$$

En passant au logarithme :

$$l(x; \theta) = \sum_{i=1}^p (A_i \log(\pi_i) + C_{i\dagger} \log(s_i) - s_i B_i + \sum_{j=1; j \neq i}^p (C_{ij} \log([\mathbf{S}]_{i,j}) - [\mathbf{S}]_{i,j} B_i)).$$

Par la méthode des multiplicateurs de Lagrange avec les contraintes $\sum_{k=1}^p \pi_k = 1$ et $\sum_{j=1; j \neq i}^p [\mathbf{S}]_{i,j} + \lambda_i + s_i = 0$, $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, on obtient finalement l'estimateur du maximum de vraisemblance.

□

Le problème est que les statistiques A_k , B_k et C_{kj} ne sont pas accessibles car les sauts et les temps de séjours ne sont pas observés. C'est ici qu'intervient l'algorithme EM.

Un ensemble de paramètres initiaux est utilisé pour effectuer le calcul de l'espérance des variables A_k , B_k , et C_{kj} conditionnellement aux données observées.

Ensuite, les paramètres du modèle sont estimés en utilisant les formules précédemment obtenues, où les variables latentes sont remplacées par leur espérance.

Algorithme 1 Algorithme EM pour les lois *phase-type*. ([Asmussen et al., 1996](#))

Entrée : observations $t = (t_1, \dots, t_n)$, nombre d'itérations J , paramètres initiaux $(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{S})$.

pour $1 \leq j \leq J$ **calculer**

(1) Etape E

$$\begin{aligned} E(A_k | \tau = t) &= \sum_{i=1}^n \frac{\pi_k \times \boldsymbol{\iota}_k^\top \exp(\mathbf{S}t_i) \mathbf{s}}{\boldsymbol{\pi} \exp(\mathbf{S}t_i) \mathbf{s}} \quad (\text{pour tout } k), \\ E(B_k | \tau = t) &= \sum_{i=1}^n \frac{\int_0^{t_i} \boldsymbol{\iota}_k^\top \exp(\mathbf{S}(t_i - u)) \mathbf{s} \times \boldsymbol{\pi} \exp(\mathbf{S}u) \boldsymbol{\iota}_k du}{\boldsymbol{\pi} \exp(\mathbf{S}t_i) \mathbf{s}} \quad (\text{pour tout } k), \\ E(C_{kl} | \tau = t) &= \sum_{i=1}^n [\mathbf{S}]_{k,l} \frac{\int_0^{t_i} \boldsymbol{\iota}_l^\top \exp(\mathbf{S}(t_i - u)) \mathbf{s} \times \boldsymbol{\pi} \exp(\mathbf{S}u) \boldsymbol{\iota}_k du}{\boldsymbol{\pi} \exp(\mathbf{S}t_i) \mathbf{s}} \quad (\text{pour tous } k, l), \\ E(C_k | \tau = t) &= \sum_{i=1}^n s_k \frac{\boldsymbol{\pi} \exp(\mathbf{S}t_i) \boldsymbol{\iota}_k}{\boldsymbol{\pi} \exp(\mathbf{S}t_i) \mathbf{s}} \quad (\text{pour tout } k). \end{aligned}$$

(2) Etape M

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_k &= \frac{E(A_k | \tau = t)}{n} \quad (\text{pour tout } k), \\ [\hat{\mathbf{S}}]_{k,l} &= \frac{E(C_{kl} | \tau = t)}{E(B_k | \tau = t)} \quad (\text{pour tous } k \neq l), \\ \hat{s}_k &= \frac{E(C_k | \tau = t)}{E(B_k | \tau = t)} \quad (\text{pour tout } k), \\ \hat{\lambda}_k &= -(\hat{s}_k + \sum_{l=1; l \neq k}^p [\hat{\mathbf{S}}]_{k,l}). \end{aligned}$$

Assigner $\boldsymbol{\pi} := (\hat{\pi}_1, \dots, \hat{\pi}_p)$, $\mathbf{S} := [\hat{\mathbf{S}}]_{k,l}^{k,l=1,\dots,p}$, $\mathbf{s} := (\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_p)^\top$, et **retour à l'étape (1)**.

Sortie : paramètres estimés $(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{S})$

Le calcul des intégrales impliquant l'exponentielle de matrice est basé sur la propriété suivante ([Van Loan, 1977](#)) :

$$\exp \left(\begin{pmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{s}\boldsymbol{\pi} \\ 0 & \mathbf{S} \end{pmatrix} t \right) = \begin{pmatrix} \exp(\mathbf{S}t) & \int_0^t \exp(\mathbf{S}(t-u)) \mathbf{s} \boldsymbol{\pi} \exp(\mathbf{S}u) du \\ 0 & \exp(\mathbf{S}t) \end{pmatrix}.$$

Pour l'obtention des formules des espérances conditionnelles de l'étape E, se référer à l'annexe de [Asmussen et al. \(1996\)](#).

2.6 Problème d'identifiabilité

Un inconvénient majeur des lois de type phase est que la fonction $(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{S}) \mapsto \boldsymbol{\pi} \exp(\mathbf{S}x) \mathbf{s}$ n'est pas injective. Autrement dit, plusieurs jeux de paramètres différents peuvent aboutir à la même distribution. On parle alors de modèle non-identifiable.

Par exemple un mélange de n lois exponentielles de paramètre λ qui correspond à une loi $\text{PH}(\boldsymbol{\pi}, -\lambda \mathbf{I}_n)$ est distribué selon une loi exponentielle de paramètre λ c'est à dire la loi $\text{PH}(1, -\lambda)$.

Même pour une dimension donnée, si on considère par exemple une structure coxiennne, il suffit de fixer le premier taux d'absorption à la même valeur pour les deux lois puis de prendre une permutation des éléments diagonaux de la matrice \mathbf{S} pour l'autre loi. En effet, on a par exemple en dimension 2 :

$$\begin{cases} \mathbf{S}_a = \begin{pmatrix} -(q_1 + \lambda) & \lambda \\ 0 & -q_2 \end{pmatrix}, & \mathbf{s}_a = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{S}_b = \begin{pmatrix} -q_2 & q_2 - q_1 \\ 0 & -(q_1 + \lambda) \end{pmatrix}, & \mathbf{s}_b = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_1 + \lambda \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\pi} e^{\mathbf{S}_a x} \mathbf{s}_a = \boldsymbol{\pi} e^{\mathbf{S}_b x} \mathbf{s}_b = q_1 e^{-(q_1 + \lambda)x} + \frac{\lambda q_2}{q_2 - q_1 - \lambda} (e^{-(q_1 + \lambda)x} - e^{-q_2 x}).$$

2.7 Lois *phase-type* inhomogènes

Un inconvénient des lois *phase-type* pour la modélisation de la mortalité est la nécessité d'utiliser un grand nombre de phases pour obtenir un ajustement satisfaisant aux données.

Ceci s'explique principalement par le fait que les lois *phase-type* ont des queues asymptotiquement exponentielles (i.e. $\mathbb{P}(\tau > t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} Ce^{-\eta t}$), tandis que les données réelles ne suivent pas toujours cette propriété. Plutôt que d'utiliser de nombreuses phases pour corriger cela, [Albrecher et Bladt \(2019\)](#) proposent d'utiliser des processus de Markov inhomogènes pour construire des lois *phase-type* inhomogènes. Dans cette approche, le temps évolue selon une transformation déterministe du temps d'origine, ce qui permet de capturer le comportement de la queue de distribution résultante par le biais de cette transformation, plutôt que par l'introduction de phases supplémentaires.

Cet ensemble de lois *phase-type* inhomogènes (IPH) se révèle aussi être dense dans l'ensemble des lois sur \mathbb{R}_+ , et il permet d'obtenir des ajustements satisfaisant avec un nombre substantiellement inférieur de phases (et donc de paramètres) dans diverses applications.

Notons $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Markov inhomogène en temps continu avec un état absorbant. Son générateur s'écrit :

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{S}(t) & \mathbf{s}(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le temps d'absorption de X, τ , suit une loi $\text{IPH}(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{S}(t))$.

[Albrecher et Bladt \(2019\)](#) considèrent un sous-ensemble des lois IPH en définissant une fonction d'intensité $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ de telle sorte que $\mathbf{S}(t) = \lambda(t) \mathbf{S}$. Ceci ajoute de la flexibilité par rapport aux lois PH classiques tout en restant pratique à utiliser grâce à la propriété suivante.

Propriété 6

Soit $T \sim \text{PH}(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{S})$.

Il existe une fonction bijective g définie par

$$g^{-1}(x) = \int_0^x \lambda(t) dt$$

telle que $g(T) \sim \text{IPH}(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{S}, \lambda)$.

Il se trouve qu'un grand nombre de lois IPH peuvent être vues comme une généralisation de lois classiques. Dans le contexte de la modélisation de la mortalité, il est d'usage de choisir une fonction d'intensité de type Gompertz i.e. $\lambda(t) = \exp(\beta t)$ afin d'ajouter de la flexibilité à la loi Gompertz qui donne déjà des résultats cohérents pour les données de mortalité en général.

La propriété 6 permet d'adapter facilement l'algorithme 1 de la section précédente pour l'ajustement de lois IPH. Il suffit de transformer les données en utilisant la bijection réciproque de g pour se ramener à une loi PH puis de maximiser la log-vraisemblance par rapport aux paramètres de la fonction d'intensité (β dans le cas d'une fonction d'intensité Gompertz) à chaque itération de l'algorithme après les étapes E et M. Ceci garantit l'augmentation de la vraisemblance à chaque itération de l'algorithme.

Comme pour les lois de type phase, la loi de la durée de vie résiduelle est accessible.

Propriété 7

Soit $\tau \sim \text{PH}(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{S})$. On définit $T = g(\tau) \sim \text{IPH}(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{S}, \lambda)$ et $T_x = T - x$.

$$\mathcal{L}\text{oi}(T_x | T_x \geq 0) = \text{IPH}(\Pi(x), \mathbf{S}, \Lambda_x)$$

$$\text{avec } \Pi(x) = \frac{\pi \exp(\int_0^x \lambda(u) du \cdot \mathbf{S})}{\pi \exp(\int_0^x \lambda(u) du \cdot \mathbf{S})} \text{ et } \Lambda_x(t) = \lambda(t + x).$$

Démonstration. Soit h une fonction mesurable, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(h(T_x) | T_x \geq 0) &= \frac{\mathbb{E}(h(T_x) \mathbb{1}_{T_x \geq 0})}{\mathbb{P}(T_x \geq 0)} \\ &= \frac{\int_0^{+\infty} h(t) \lambda(x+t) \pi \exp(\int_0^{x+t} \lambda(u) du \cdot \mathbf{S}) s dt}{\pi \exp(\int_0^x \lambda(u) du \cdot \mathbf{S})}. \end{aligned}$$

□

2.8 Application sur données INSEE

La modélisation par loi de type phase est réalisée sur le logiciel R. Le code est inspiré de la librairie *matrixdist* (Bladt et Yslas, 2021) pour proposer une interface orientée-objet et la

plupart des fonctions sont programmées en C++ puis rendues disponibles sous R grâce à la librairie *Rcpp* afin de réduire les temps de calcul. En particulier les calculs matriciels font appels à la librairie *Armadillo*.

L'ajustement est réalisé à partir des quotients de mortalité instantanée des femmes pour l'année 2022, provenant de l'exercice de projection 2021 de l'INSEE. Les l_x (nombre de survivants à l'âge x) ont été obtenus par récursivité en utilisant un radix l_0 de 100 000 puis les décès par âge ont été déduits et utilisés pour l'ajustement car il s'agit de durées de vie à la naissance sous forme groupée.

Pour ajuster la loi IPH-Gompertz aux données, nous avons utilisé l'algorithme EM pour obtenir les paramètres initiaux. Ensuite, une minimisation de la distance entre les fonctions de hasard empirique et modélisée $L(\mu, \nu) = \sum_x (\log(\mu_x) - \log(\nu_x))^2$ a été effectuée pour obtenir les estimations finales des paramètres conformément à la méthodologie présentée dans l'article d'[Albrecher et al. \(2021\)](#).

Le nombre de phases de la loi IPH-Gompertz a été déterminé empiriquement par une évaluation visuelle de l'ajustement.

Le résultat de cet ajustement est illustré dans la figure 2.4, où nous avons représenté le logarithme des quotients de mortalité.

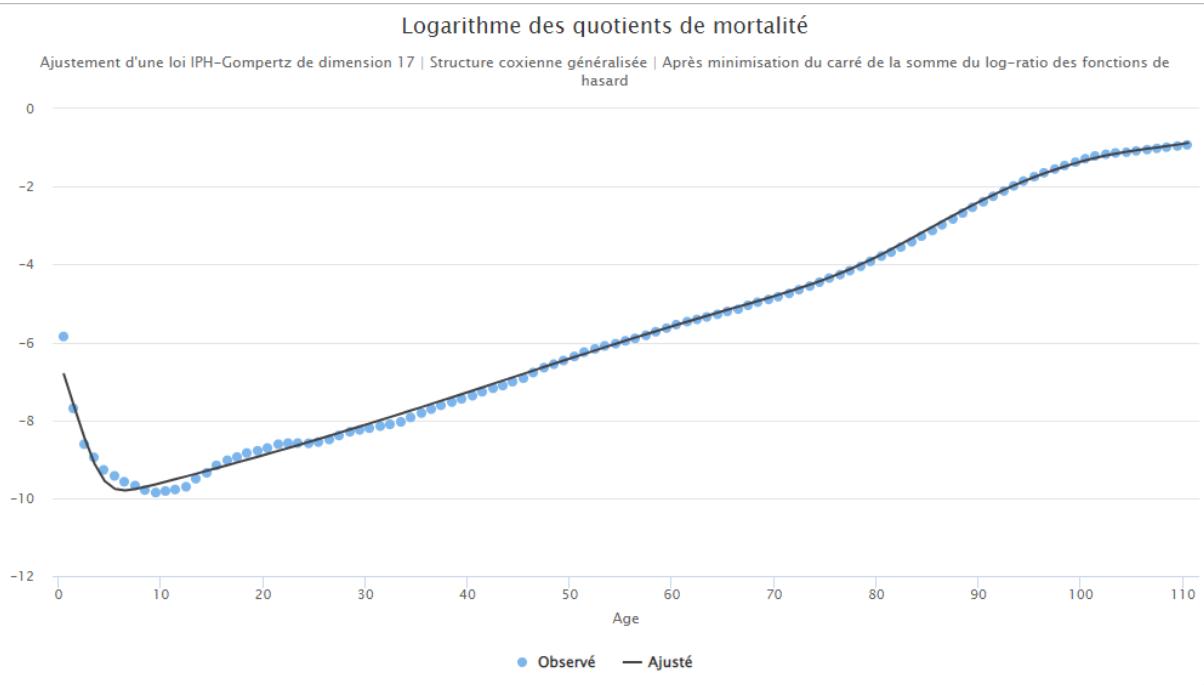


FIGURE 2.4 – Ajustement par une loi IPH-Gompertz.

Dans l'ensemble, l'ajustement réalisé a produit des résultats satisfaisants, mettant en évidence la pertinence de la loi IPH-Gompertz pour représenter les données étudiées.

Cependant, il y a un léger problème d'ajustement aux âges jeunes, qui ne semble pas pouvoir être corrigé en augmentant le nombre de phases.

Chapitre 3

Régression à intensités proportionnelles

On s'intéresse dans ce chapitre à la régression à intensités proportionnelles. Le contenu de ce chapitre s'inspire de [Bladt \(2022\)](#) et [Albrecher *et al.* \(2021\)](#).

Il est possible d'effectuer des regressions à l'aide des lois phase-type inhomogènes en incorporant des covariables dans la fonction d'intensité.

En effet, en notant $X = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur de covariables, on peut accéder à la loi de $\tau|X$ avec la densité suivante :

$$f(t|X) = \lambda(t, \beta, \theta|X) \boldsymbol{\pi} \exp\left(\int_0^t \lambda(u, \beta, \theta|X) du \times \mathbf{S}\right) \mathbf{s}$$

où $\lambda(t, \beta, \theta|X) = e^{\theta X} \lambda(t, \beta)$.

À l'instar du modèle à hasards proportionnels de Cox, dans ce modèle les covariables ont un effet proportionnel sur l'intensité du processus de vieillissement. Autrement dit, le rapport $\frac{\lambda(t, \beta, \theta|X)}{\lambda(t, \beta)}$ ne dépend pas du temps.

L'ajustement de ce modèle est presque identique à l'ajustement d'une loi IPH, en effet, pour se ramener à l'ajustement d'une loi PH par l'algorithme EM, les données sont transformées en utilisant la fonction g définie par

$$g^{-1}(x) = \int_0^x \lambda(t, \beta, \theta|X) dt$$

puis entre chaque itération de l'algorithme EM, une étape de maximisation de la vraisemblance est effectuée sur les paramètres β et θ .

3.1 Incertitude sur les paramètres

L'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{(\beta, \theta)}$ est asymptotiquement distribué selon une loi normale $\mathcal{N}((\beta, \theta), \mathcal{I}^{-1})$ où \mathcal{I} est la matrice d'information de Fisher. Ainsi, sous réserve d'avoir suffisamment de données, on peut utiliser l'approximation gaussienne pour effectuer des tests de significativité et déterminer des ellipses et des intervalles de confiance pour les paramètres β

et θ . On estime la matrice d'information de Fisher par l'opposé de la matrice hessienne de la log-vraisemblance.

3.2 Qualité de l'ajustement

Afin de mesurer la qualité de l'ajustement, la propriété 8 peut être utilisée.

Propriété 8

Soit X une variable aléatoire continue de fonction de répartition F .

$$F(X) \sim \text{Unif}(0, 1).$$

Cette propriété nous permet d'apprécier la qualité de la régression en évaluant l'adéquation de $F(X)$ à une loi uniforme standard.

De manière concrète si on dispose des données (t_1, \dots, t_n) et que l'on note pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i = \pi \exp\left(\int_0^{t_i} \lambda(u, \beta, \theta | X) du \times S\right)$ et $x_{(i)}$ les x_i triés par ordre croissant, la proximité entre la première bissectrice du plan et les $(x_{(i)}, \frac{i}{n})$ permet d'évaluer dans quelle mesure le modèle de régression est bien ajusté.

3.3 Application sur données réelles

Les données regroupent 11 619 observations, où chaque observation comporte la date de naissance, la date de décès et le sexe d'un individu.

La régression de la durée de vie à la naissance ($\frac{\text{date de décès} - \text{date de naissance}}{365,25}$) est effectué par sexe en utilisant la régression à intensités proportionnelles.

L'évaluation globale de la qualité de l'ajustement est mise en évidence dans la figure 3.1, où la fonction de répartition empirique des données est affichée après l'application de la transformation relative à la propriété 8. Cette distribution est ensuite comparée à celle d'une loi uniforme standard. Les résultats suggèrent un ajustement adéquat du modèle.

Pour approfondir notre analyse, la figure 3.2 illustre l'adéquation du modèle de régression entre les sexes. Cela est réalisé par la représentation graphique du logarithme de la fonction de répartition empirique en fonction du sexe. Parallèlement, le tracé correspondant au logarithme de la fonction de répartition estimée par le modèle est affiché.

L'ajustement est satisfaisant étant plus précis chez les femmes que chez les hommes, où on observe un défaut d'ajustement dans les âges jeunes.

De plus, la figure 3.3 illustre l'ellipse de confiance à 95% concernant les coefficients de la régression. Cette ellipse apparaît fortement resserrée autour de l'estimateur des coefficients de la régression en raison de la grande quantité de données disponibles. Ces coefficients se révèlent significatifs au seuil de 5% après l'application d'un test de Wald. Les p-valeurs sont de 2.93×10^{-5} pour β et de 4.83×10^{-26} pour θ .

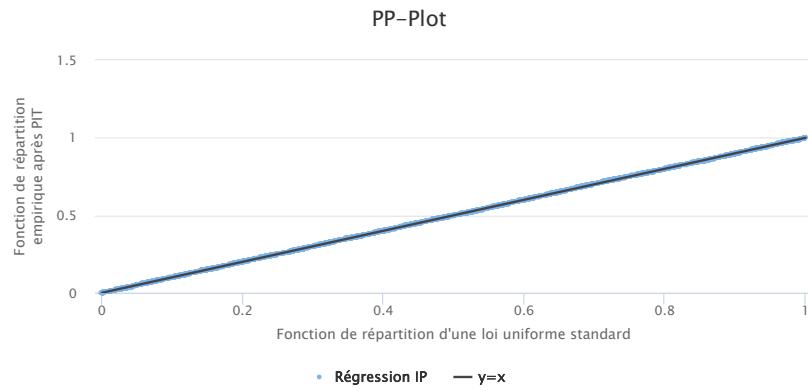


FIGURE 3.1 – Qualité de l'ajustement.

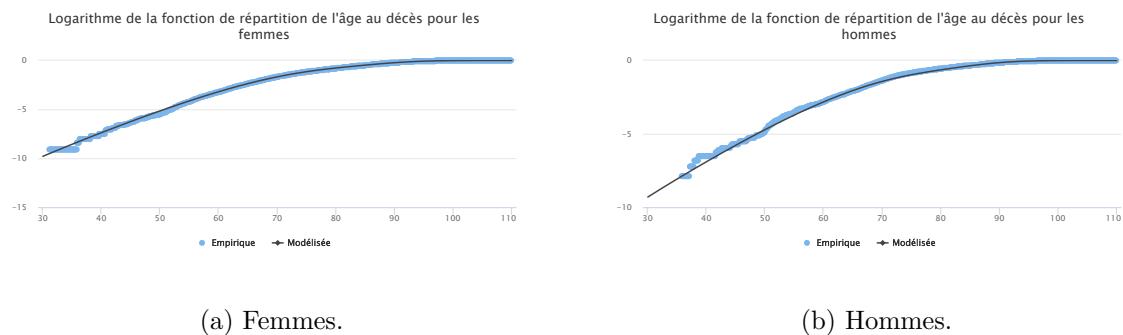


FIGURE 3.2 – Adéquation par modalité de la covariable.

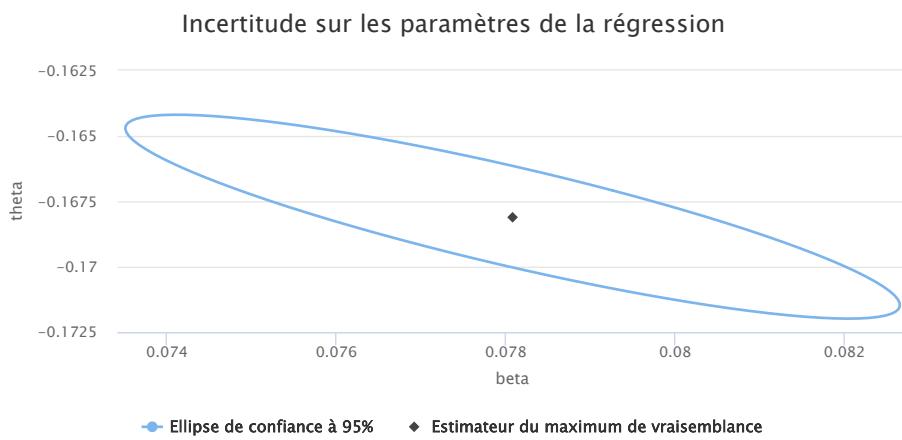


FIGURE 3.3 – Incertitude sur les paramètres de la régression.

Conclusion

En conclusion, ce rapport de stage a présenté mon travail au sein de SPAC Actuaires, mettant en évidence la comparaison des projections de mortalité de l'INSEE et la création d'un modèle de mortalité basé sur les lois de type phase.

Cette démarche a abouti au développement d'un outil efficace de modélisation et de régression des données de mortalité en utilisant R, avec des résultats encourageants dans les deux applications examinées.

Les étapes à venir consisteront à intégrer des covariables climatiques afin d'analyser les disparités entre nos données de mortalité et celles de l'INSEE.

Annexe A

Calcul de l'exponentielle de matrice

Le calcul de l'exponentielle de matrice à l'aide de la librarie *Armadillo* a conduit à des problèmes numériques lors de l'ajustement des données de mortalité par une loi IPH-Gompertz.

Une alternative basée sur l'approximation de la série entière exponentielle par sa somme partielle jusqu'à un certain ordre a donc été adoptée ([Okamura et Trivedi, 2011](#)).

Si \mathbf{S} est la sous-matrice du générateur infinitésimal correspondant aux états transitoires, en posant $\mathbf{T} = (\mathbf{I} + \mathbf{S}/\beta)$ où $\beta \geq \max_i[\mathbf{S}]_{ii}$, \mathbf{T} est une matrice sous-stochastique (somme de chaque ligne inférieure à 1) et on a :

$$e^{\mathbf{St}} = \exp(-\beta t \mathbf{I} + \beta t (\mathbf{I} + \mathbf{S}/\beta)) = e^{-\beta t} \exp(\beta t \mathbf{T}) = e^{-\beta t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\beta t)^n}{n!} \mathbf{T}^n.$$

Ainsi en approximant l'exponentielle de matrice par sa somme partielle jusqu'à M il est possible de borner le reste en utilisant la fonction de survie d'une loi de poisson :

$$\begin{aligned} & \|e^{\mathbf{St}} - e^{-\beta t} \sum_{n=0}^M \frac{(\beta t)^n}{n!} \mathbf{T}^n\| \\ & \leq e^{-\beta t} \sum_{n=M+1}^{+\infty} \frac{(\beta t)^n}{n!} \|\mathbf{T}^n\| \\ & \leq e^{-\beta t} \sum_{n=M+1}^{+\infty} \frac{(\beta t)^n}{n!} \quad \text{car } \mathbf{T} \text{ est sous-stochastique} \\ & = \mathbb{P}(N_{\beta t} > M) \end{aligned}$$

où $N_{\beta t}$ est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre βt .

Pour réduire le temps de calcul on peut observer que $e^{\mathbf{St}} = (e^{\mathbf{St}/2^m})^{2^m}$ et donc trouver un m tel que $\beta t/2^m < 1$, calculer $e^{\mathbf{St}/2^m}$ puis retrouver $e^{\mathbf{St}}$ en calculant les carrés successifs.

Annexe B

Gradient de la fonction de coût

Lors de l'ajustement d'une loi IPH-Gompertz sur les données de mortalité de l'INSEE (2.8), la minimisation d'une fonction de coût a été effectuée. Pour ce faire, une méthode de Newton a été employée par l'intermédiaire de la fonction *optim* sur R. L'utilisation de cette méthode nécessite de calculer le gradient de la fonction à optimiser. Il s'agit de l'objet de la présente section.

Soit x l'âge d'un individu, p le nombre de phases de la loi IPH-Gompertz et $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{3p-1}) = (\boldsymbol{\pi}_1, \dots, \boldsymbol{\pi}_{p-1}, S_{11}, S_{22}, \dots, S_{pp}, S_{12}, S_{23}, \dots, S_{p-1,p}, \beta)$ les paramètres à estimer.

La fonction de coût, notée L , est une distance entre la fonction de hasard modélisée $h_x(\theta)$ et la fonction de hasard observée μ_x .

$$L(\theta) = \sum_x (\log(h_x(\theta)) - \log(\mu_x))^2.$$

On cherche à différentier L .

On a :

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i} = 2 \sum_x \frac{\partial \log(h_x(\theta))}{\partial \theta_i} (\log(h_x(\theta)) - \log(\mu_x)).$$

Il ne reste qu'à calculer $\frac{\partial \log(h_x(\theta))}{\partial \theta_i}$.

La densité de la loi IPH-Gompertz s'écrit

$$f(x) = e^{\beta x} \boldsymbol{\pi} \exp\left(\frac{e^{\beta x} - 1}{\beta} \mathbf{S}\right) \mathbf{s}$$

et sa fonction de survie

$$S(x) = \boldsymbol{\pi} \exp\left(\frac{e^{\beta x} - 1}{\beta} \mathbf{S}\right) \boldsymbol{\iota}$$

d'où

$$\log(h_x(\theta)) = \log(f(x)) - \log(S(x)) = \beta x + \log(\boldsymbol{\pi} \exp\left(\frac{e^{\beta x} - 1}{\beta} \mathbf{S}\right) \mathbf{s}) - \log(\boldsymbol{\pi} \exp\left(\frac{e^{\beta x} - 1}{\beta} \mathbf{S}\right) \boldsymbol{\iota}).$$

Dérivée par rapport à π_k

On a :

$$\boldsymbol{\pi} \exp\left(\frac{e^{\beta x} - 1}{\beta} \mathbf{S}\right) \mathbf{s} = \sum_{i,j} \pi_i [\exp\left(\frac{e^{\beta x} - 1}{\beta} \mathbf{S}\right)]_{ij} s_j.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \log(h_x(\theta))}{\partial \pi_k} \\ &= \left(\frac{\sum_j [\exp\left(\frac{e^{\beta x} - 1}{\beta} \mathbf{S}\right)]_{kj} s_j}{\boldsymbol{\pi} \exp\left(\frac{e^{\beta x} - 1}{\beta} \mathbf{S}\right) \mathbf{s}} - \frac{\sum_j [\exp\left(\frac{e^{\beta x} - 1}{\beta} \mathbf{S}\right)]_{kj}}{\boldsymbol{\pi} \exp\left(\frac{e^{\beta x} - 1}{\beta} \mathbf{S}\right) \boldsymbol{\iota}} \right) - \left(\frac{\sum_j [\exp\left(\frac{e^{\beta x} - 1}{\beta} \mathbf{S}\right)]_{pj} s_j}{\boldsymbol{\pi} \exp\left(\frac{e^{\beta x} - 1}{\beta} \mathbf{S}\right) \mathbf{s}} - \frac{\sum_j [\exp\left(\frac{e^{\beta x} - 1}{\beta} \mathbf{S}\right)]_{pj}}{\boldsymbol{\pi} \exp\left(\frac{e^{\beta x} - 1}{\beta} \mathbf{S}\right) \boldsymbol{\iota}} \right). \end{aligned}$$

Dérivée par rapport à S_{ij}

D'après [Najfeld et Havel \(1995\)](#), on a :

$$\frac{\partial \exp(tA)}{\partial A_{ij}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\exp(t(A + E_{ij}h)) - \exp(tA)) = \int_0^t e^{(t-u)A} E_{ij} e^{Au} du$$

où E_{ij} est la matrice élémentaire avec 1 en position i,j et 0 ailleurs.

Cette intégrale se calcule en utilisant la propriété de Van Loan (2.5.2).

Ainsi par la formule de Taylor, en notant $U(\mathbf{S}) = e^{\mathbf{S}t} \mathbf{S}$:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{S} + E_{ij}h) - U(\mathbf{S}) &= e^{(\mathbf{S} + E_{ij}h)t} (\mathbf{S} + E_{ij}h) - e^{\mathbf{S}t} \mathbf{S} \\ &= (e^{\mathbf{S}t} + \frac{\partial e^{\mathbf{S}t}}{\partial S_{ij}} E_{ij}h + o(h)) (\mathbf{S} + E_{ij}h) - e^{\mathbf{S}t} \mathbf{S} \\ &= \frac{\partial e^{\mathbf{S}t}}{\partial S_{ij}} E_{ij} \mathbf{S} h + e^{\mathbf{S}t} E_{ij} h + o(h) \\ &\Rightarrow \frac{\partial U(\mathbf{S})}{\partial S_{ij}} = e^{\mathbf{S}t} E_{ij} + \frac{\partial e^{\mathbf{S}t}}{\partial S_{ij}} E_{ij} \mathbf{S}. \end{aligned}$$

Comme

$$\mathbf{s} = -\mathbf{S} \boldsymbol{\iota}$$

on a :

$$\frac{\partial \log(h_x(\theta))}{\partial S_{ij}} = \frac{-\boldsymbol{\pi} (\int_0^t e^{\mathbf{S}(t-u)} E_{ij} e^{\mathbf{S}u} du \times E_{ij} \mathbf{S} + e^{\mathbf{S}t} E_{ij}) \boldsymbol{\iota}}{\boldsymbol{\pi} \exp\left(\frac{e^{\beta x} - 1}{\beta} \mathbf{S}\right) \mathbf{s}} - \frac{\boldsymbol{\pi} \int_0^t e^{\mathbf{S}(t-u)} E_{ij} e^{\mathbf{S}u} du \times \boldsymbol{\iota}}{\boldsymbol{\pi} \exp\left(\frac{e^{\beta x} - 1}{\beta} \mathbf{S}\right) \boldsymbol{\iota}}.$$

Dérivée par rapport à β

Finalement :

$$\frac{\partial \log(h_x(\theta))}{\partial \beta} = x + \frac{\frac{1+e^{\beta x}(\beta x - 1)}{\beta^2} \pi S \exp(\frac{e^{\beta x}-1}{\beta} S) s}{\pi \exp(\frac{e^{\beta x}-1}{\beta} S) s} - \frac{\frac{1+e^{\beta x}(\beta x - 1)}{\beta^2} \pi S \exp(\frac{e^{\beta x}-1}{\beta} S) \iota}{\pi \exp(\frac{e^{\beta x}-1}{\beta} S) \iota}.$$

Annexe C

Cartes de chaleur pour les exercices 2016 et 2010

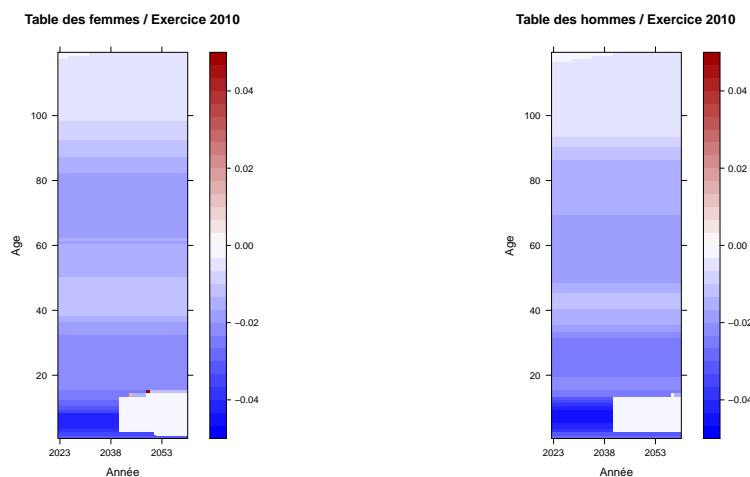


FIGURE C.1 – Taux de croissance entre deux années consécutives | Exercice 2010.

En examinant la figure C.1, plusieurs tendances se dégagent. On observe des tendances baissières de la mortalité au fil du temps. La baisse est similaire par tranche d'âge et est plus prononcée aux âges jeunes et moins marquée aux âges élevés. Une particularité notable est la présence d'un plancher de mortalité pour les tranches d'âge de 3 à 13 ans à partir de l'année 2040 (voir également figure C.2).

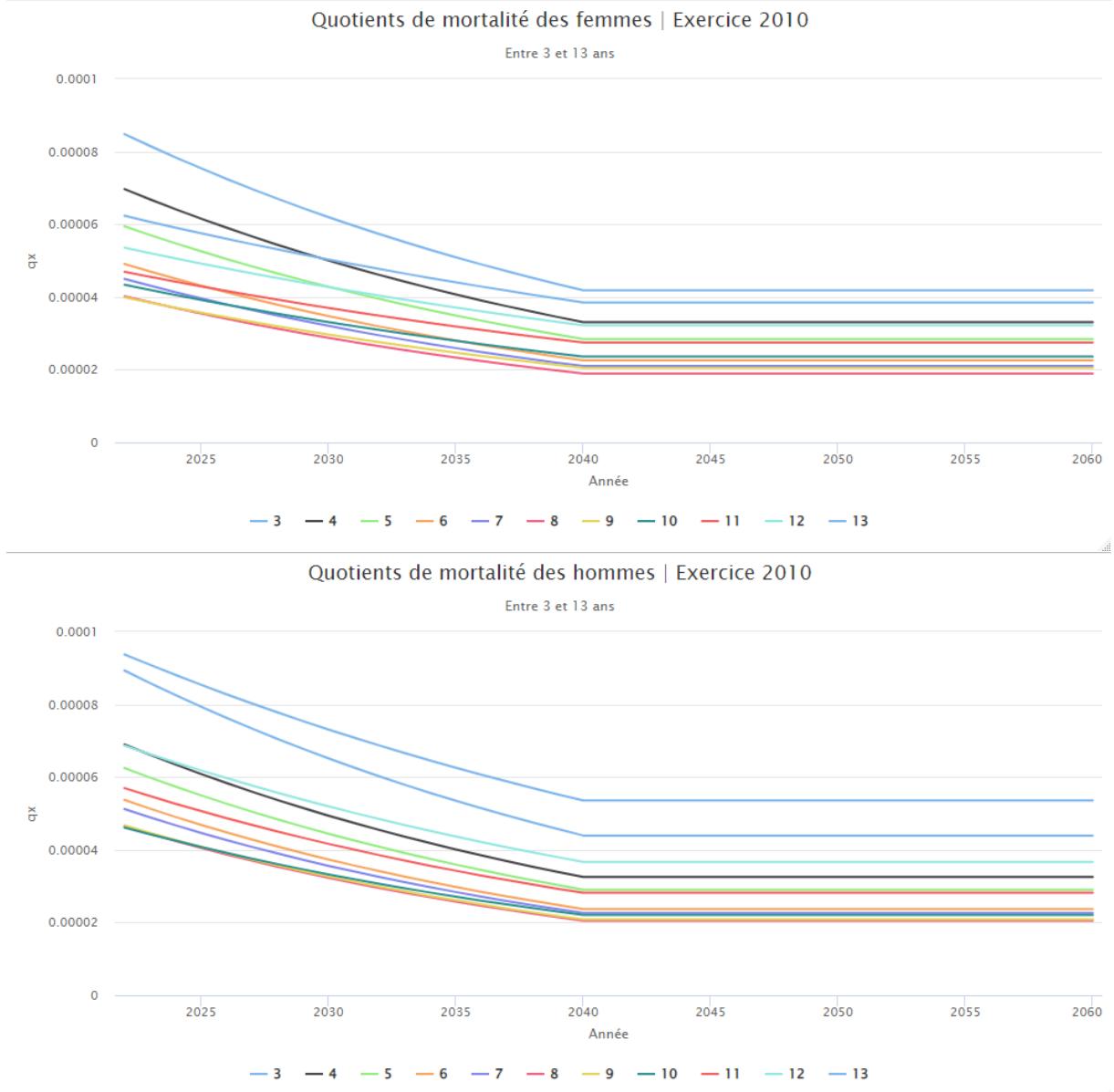


FIGURE C.2 – Plancher de mortalité 3-13 ans à partir de 2040.

Table des femmes / Exercice 2016

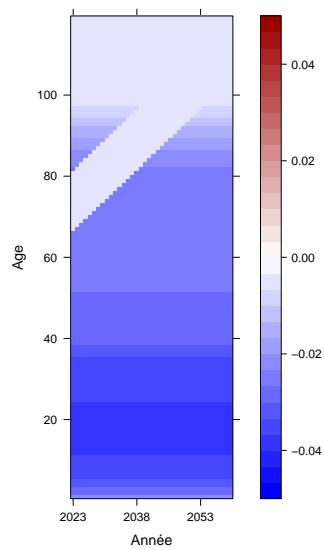
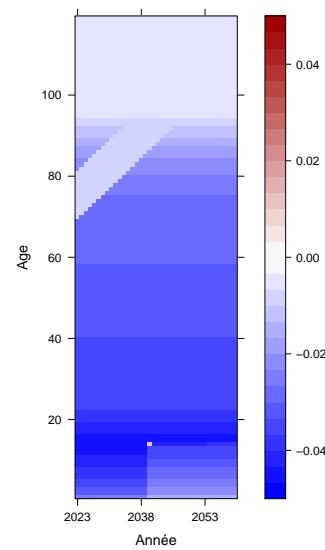


Table des hommes / Exercice 2016



(a) Vision instantanée.

Table des femmes / Exercice 2016

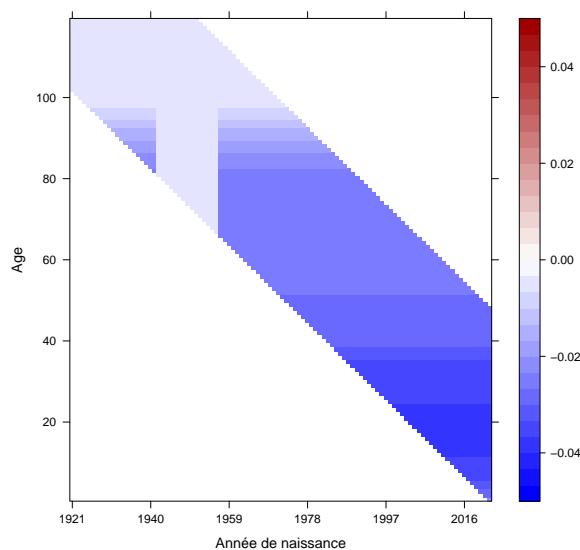
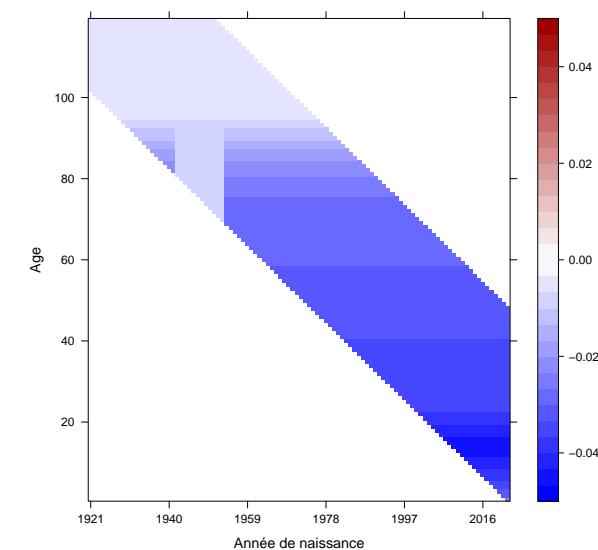


Table des hommes / Exercice 2016



(b) Vision générationnelle.

FIGURE C.3 – Taux de croissance entre deux années consécutives | Exercice 2016.

Sur la figure C.3, un ralentissement de la baisse de la mortalité est observé pour les générations masculines nées entre 1941 et 1953 ainsi que pour les hommes âgés de 0 à 14 ans et également pour les générations féminines nées entre 1941 et 1956.

Annexe D

Figures

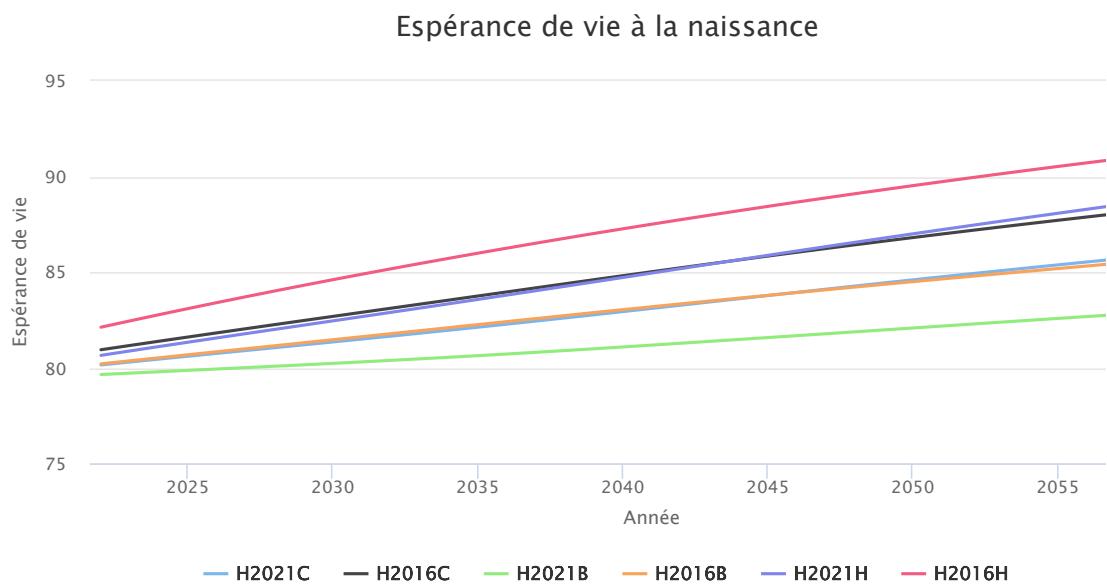


FIGURE D.1 – Espérance de vie à la naissance des hommes pour les exercices 2016 et 2021 selon 3 scénarios de l'INSEE.

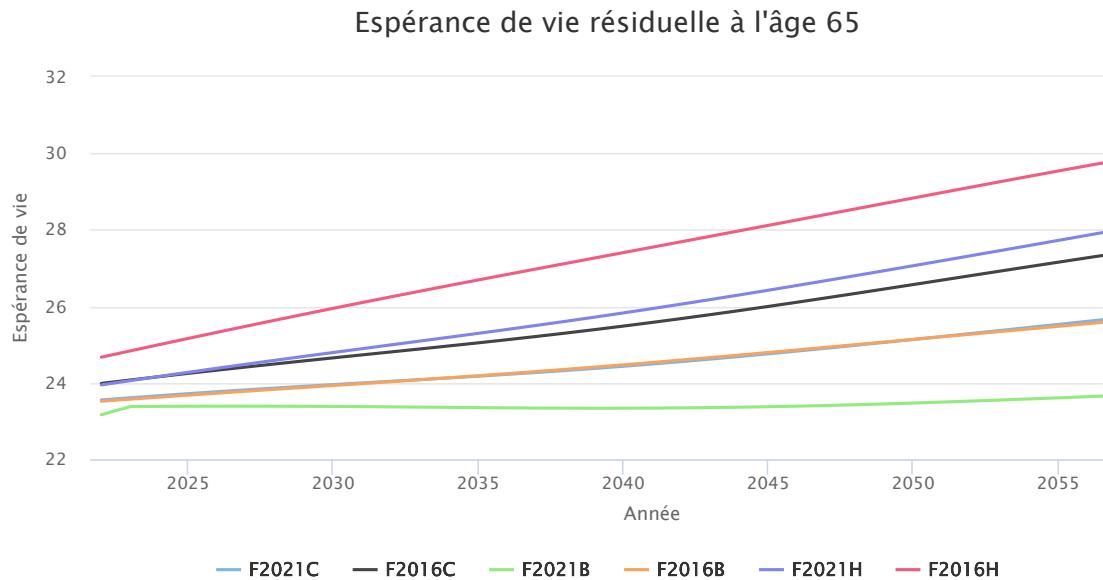


FIGURE D.2 – Espérance de vie résiduelle à 65 ans des femmes pour les exercices 2016 et 2021 selon 3 scénarios de l'INSEE.

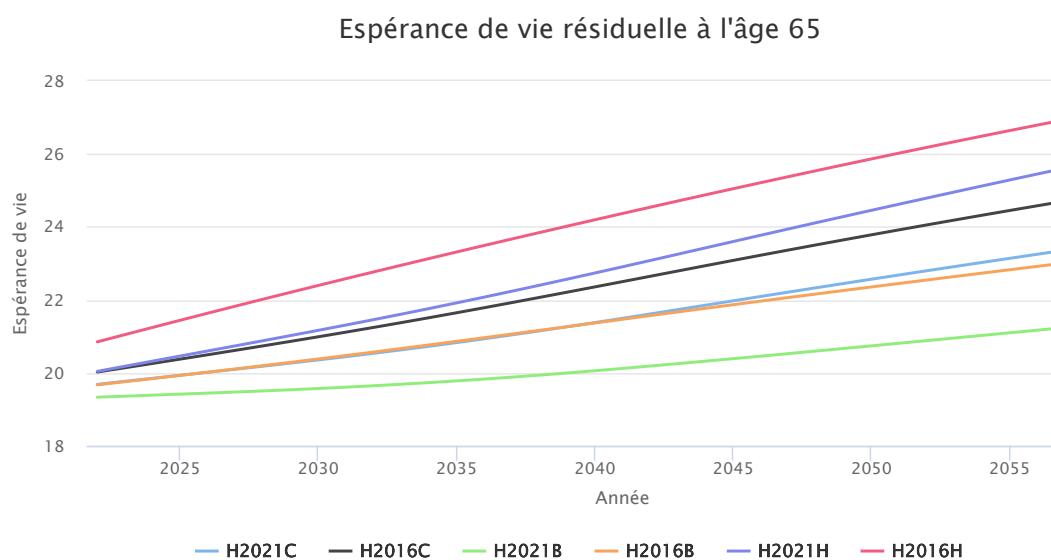


FIGURE D.3 – Espérance de vie résiduelle à 65 ans des hommes pour les exercices 2016 et 2021 selon 3 scénarios de l'INSEE.

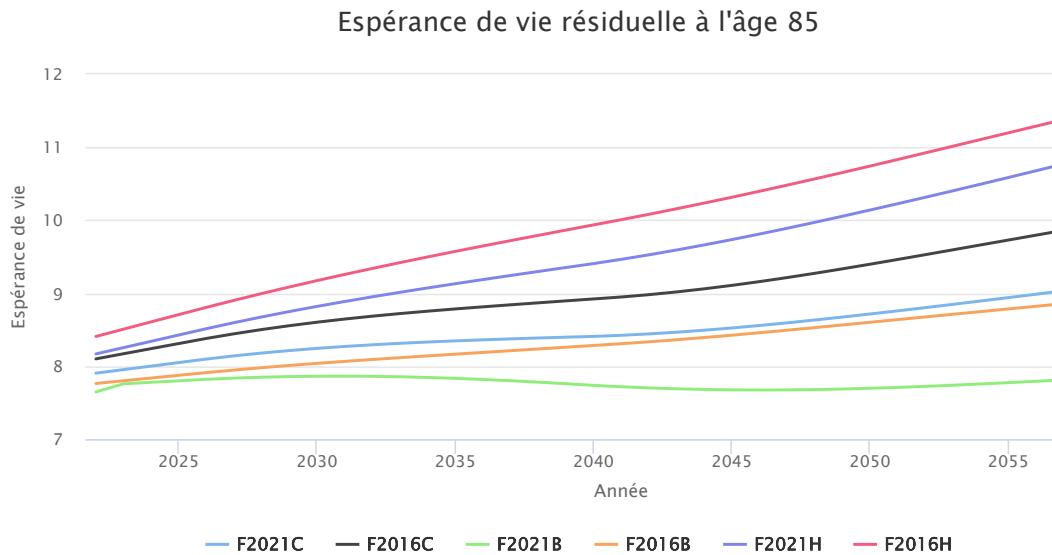


FIGURE D.4 – Espérance de vie résiduelle à 85 ans des femmes pour les exercices 2016 et 2021 selon 3 scénarios de l'INSEE.

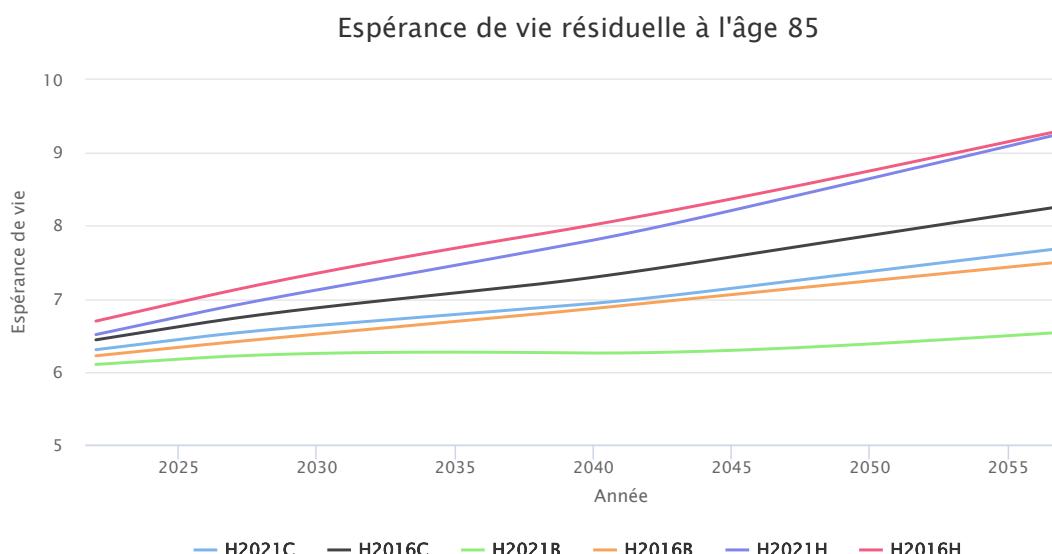


FIGURE D.5 – Espérance de vie résiduelle à 85 ans des hommes pour les exercices 2016 et 2021 selon 3 scénarios de l'INSEE.

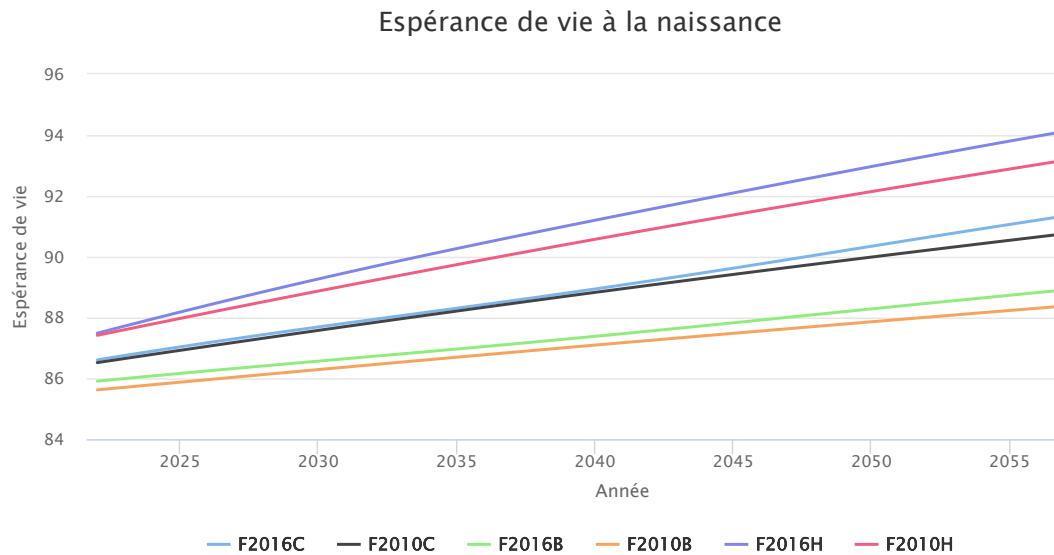


FIGURE D.6 – Espérance de vie à la naissance des femmes pour les exercices 2010 et 2016 selon 3 scénarios de l'INSEE.

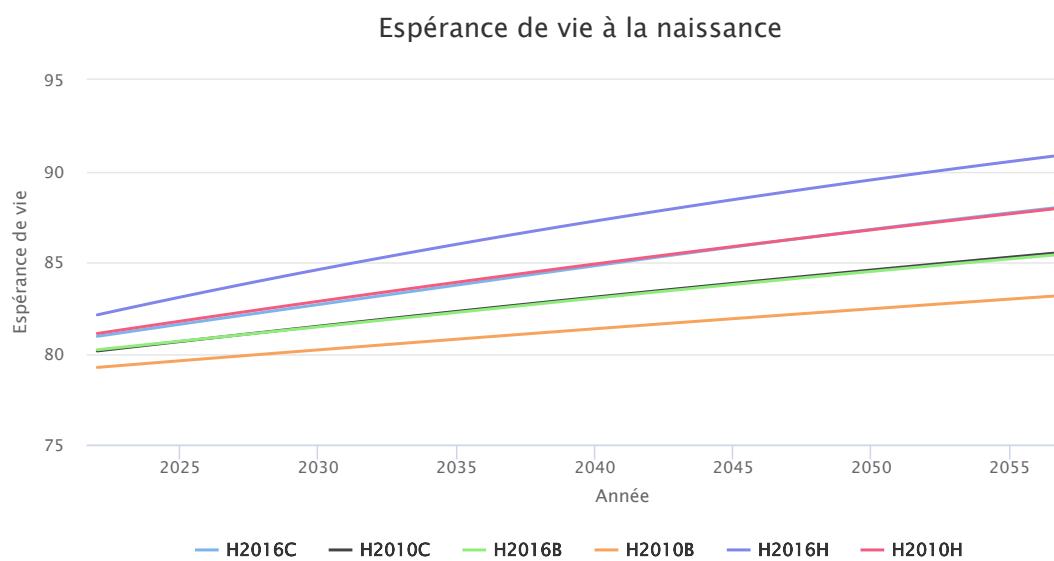


FIGURE D.7 – Espérance de vie à la naissance des hommes pour les exercices 2010 et 2016 selon 3 scénarios de l'INSEE.

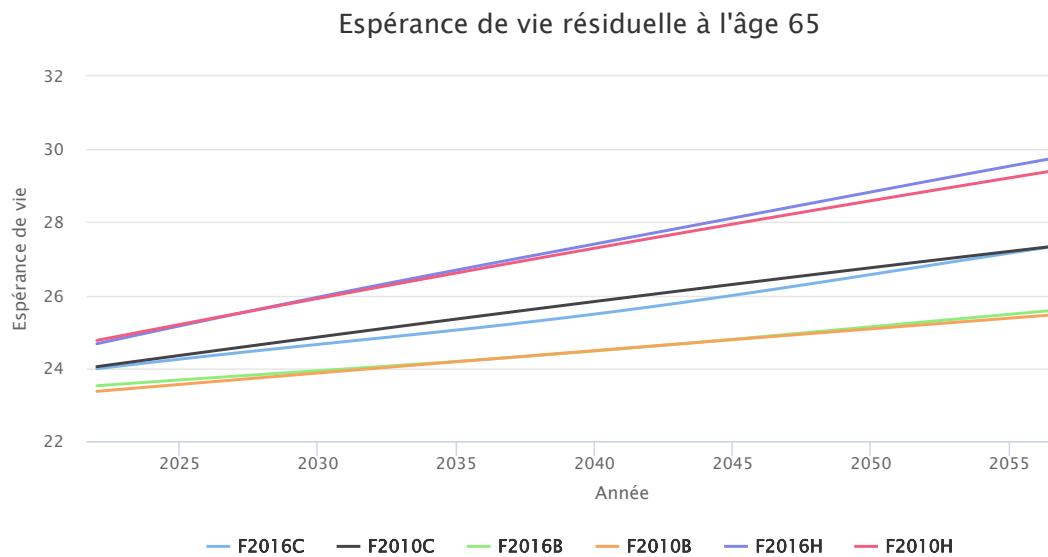


FIGURE D.8 – Espérance de vie résiduelle à 65 ans des femmes pour les exercices 2010 et 2016 selon 3 scénarios de l'INSEE.

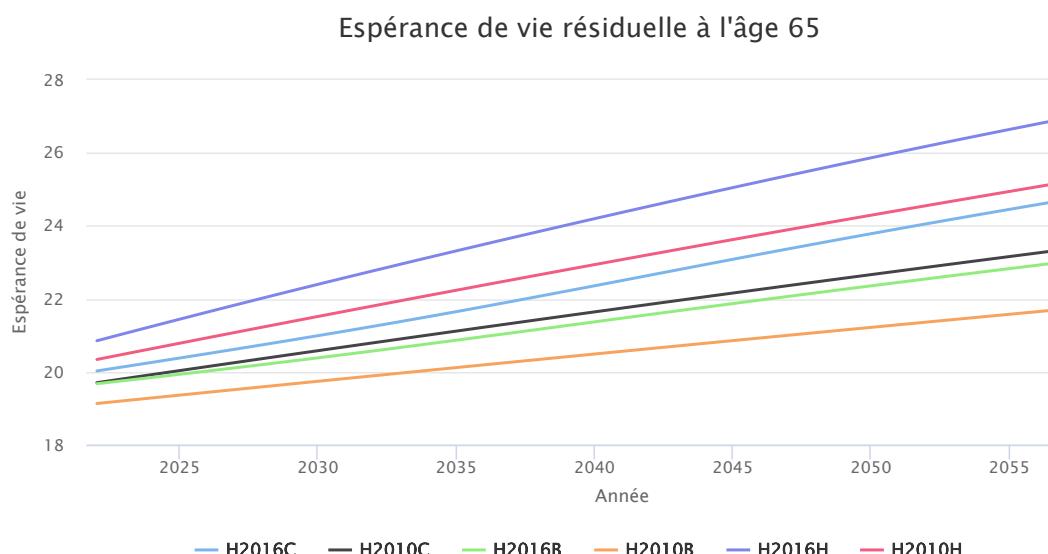


FIGURE D.9 – Espérance de vie résiduelle à 65 ans des hommes pour les exercices 2010 et 2016 selon 3 scénarios de l'INSEE.

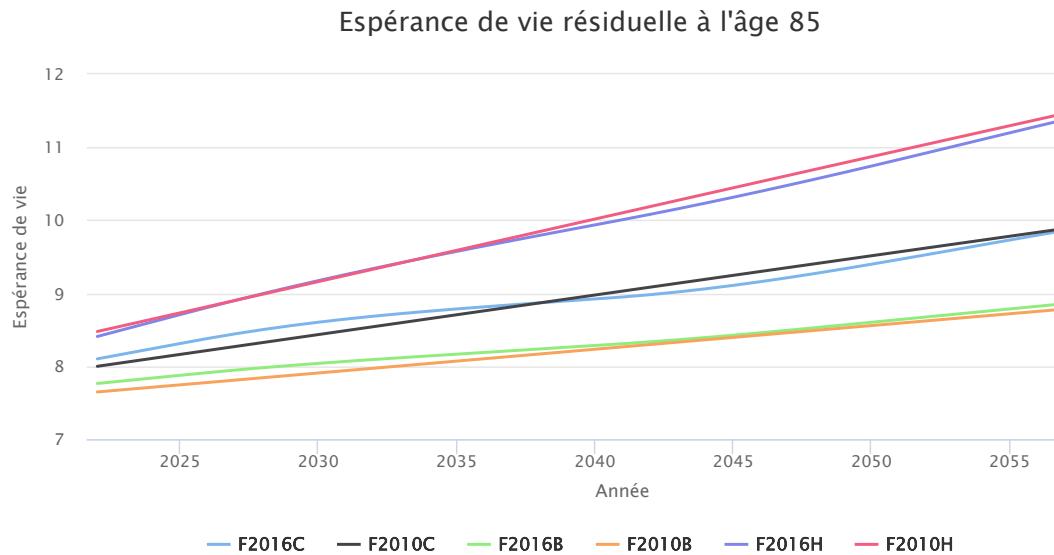


FIGURE D.10 – Espérance de vie résiduelle à 85 ans des femmes pour les exercices 2010 et 2016 selon 3 scénarios de l’INSEE.

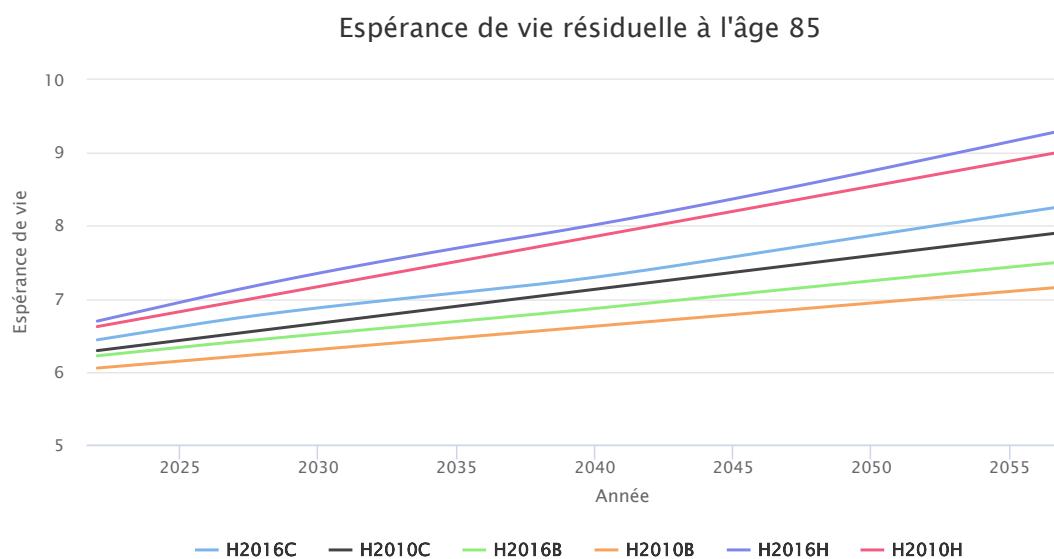


FIGURE D.11 – Espérance de vie résiduelle à 85 ans des hommes pour les exercices 2010 et 2016 selon 3 scénarios de l’INSEE.

Bibliographie

Hansjörg ALBRECHER, Martin BLADT, Mogens BLADT et Jorge YSLAS : Mortality modeling and regression with matrix distributions. *Insurance Mathematics Economics*, 2021. URL <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2022.08.001>.

Hansjörg ALBRECHER et Mogens BLADT : Inhomogeneous phase-type distributions and heavy tails. *Journal of Applied Probability*, 2019. URL <https://doi.org/10.1017/jpr.2019.60>.

Elisabeth ALGAVA et Nathalie BLANPAIN : Projections de population 2021-2070 pour la France -Méthode et hypothèses, documents de travail. Rapport technique, 2021. URL <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03851489>.

Søren ASMUSSEN, Patrick J. LAUB et Hailiang YANG : Phase-Type Models in Life Insurance : Fitting and Valuation of Equity-Linked Benefits. *Risks*, 2019. URL <https://doi.org/10.3390/risks7010017>.

Søren ASMUSSEN, Olle NERMAN et Marita OLSSON : Fitting Phase-type Distributions via the EM Algorithm. *Scandinavian Journal of Statistics*, 1996. URL <http://compbio.fmph.uniba.sk/vyuka/gm/old/2010-02/handouts/Asmussen1996.pdf>.

Martin BLADT : Phase-type distributions for claim severity regression modeling. *Astin Bulletin*, 2022. URL <https://doi.org/10.1017/asb.2021.40>.

Martin BLADT et Jorge YSLAS : Statistics for Matrix Distributions [R package matrixdist version 1.1.3]. *arXiv e-prints*, 2021. URL <http://cran.r-project.org/web/packages/matrixdist/index.html>.

Mogens BLADT, A. Gustavo GONZÁLEZ et Steffen LAURITZEN : The estimation of phase-type related functionals using Markov Chain Monte Carlo methods. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2003, 2003. URL <https://doi.org/10.1080/03461230110106435>.

Nathalie BLANPAIN : La mortalité stagne à l'âge adulte pour les générations nées entre 1941 et 1955. méthode et résultats. Rapport technique, 2020.

Nathalie BLANPAIN : Tables de mortalité par génération en France. 2022. URL <https://www.insee.fr/fr/statistiques/6655536?sommaire=6543680#figure-methode>.

Andrea BOBBIO, András HORVÁTH et Michael J. TELEK : Matching three moments with minimal acyclic phase type distributions. *Stochastic Models*, 2005.

BIBLIOGRAPHIE

Asa X. Sheldon LIN et Xiaoming LIU : Markov Aging Process and Phase-Type Law of Mortality.
The North American Actuarial Journal, 2007. URL <https://doi.org/10.1080/10920277.2007.10597486>.

Igor NAJFELD et Timothy F. HAVEL : Derivatives of the matrix exponential and their computation.
Advances in Applied Mathematics, 1995. URL <https://doi.org/10.1006/aama.1995.1017>.

Hiroyuki OKAMURA et Kishor S. TRIVEDI : A refined EM algorithm for PH distributions.
Performance Evaluation, 2011. URL <https://doi.org/10.1016/j.peva.2011.04.001>.

Charles VAN LOAN : Computing integrals involving the matrix exponential, 1977. URL <https://ecommons.cornell.edu/handle/1813/7095>.