

Mémoire présenté pour l'obtention du DUAS et l'admission à l'Institut des Actuaire

le mercredi 27 novembre 2024 à 14h00

Par : Aurélien PEREZ

Titre: Valorisation en juste valeur de titres non cotés régis par la norme IFRS 2.

Confidentialité : ☐ NON ☐ OUI Durée : ☐ 1 an ☐ 2 ans ☐ 3 ans ☐ 4 ans ☐ 5 ans

Membres du jury de l'IA :

Entreprise : SPAC Actuaire

Directeur de mémoire (entreprise) :

Membres du jury de l'Unistra :

Nom :

Geneviève BERAUD-GRAVILLON

J. BERARD

E. BIRMELE

A. COUSIN

P.-O. GOFFARD

M. MAUMY-BERTRAND

Signature du responsable entreprise

Secrétariat : Mme Stéphanie Richard

Signature du candidat

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme d'actuariat de
l'université de Strasbourg et l'admission à l'institut des
actuares

Master DUAS

Mémoire d'actuariat

Valorisation en juste valeur de titres non cotés régis par la norme
IFRS 2.

PAR : Aurélien Perez

Encadrant Entreprise: GENEVIÈVE BERAUD-GRAVILLON

Encadrant Université: PIERRE-OLIVIER GOFFARD

MEMBRES DU JURY:

Date de soutenance : 27 novembre 2024

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers toutes les personnes qui m'ont accompagné et soutenu tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Tout d'abord, je remercie sincèrement mon tuteur académique, Pierre-Olivier Goffard, pour le suivi de mon mémoire et pour sa disponibilité. Je tiens également à remercier mon tuteur en entreprise, Geneviève Beraud-Gravillon, pour son encadrement attentif et ses conseils éclairés qui ont largement contribué à l'avancement de ce travail.

Je remercie chaleureusement mon collègue Pierre Montesinos pour son aide précieuse et ses nombreux conseils qui m'ont été d'une grande utilité tout au long de ce projet.

Je souhaite exprimer ma reconnaissance à l'entreprise SPAC Actuaires et à son dirigeant, Marc Tourtoulou, pour l'accueil chaleureux, la bienveillance et la confiance qu'ils m'ont témoignée. Merci de m'avoir intégré à l'équipe et de m'avoir invité aux diverses sorties SPAC, qui ont rendu mon expérience au sein de l'entreprise encore plus enrichissante et mémorable.

Un merci particulier à Laura Courgey pour son soutien constant, sa patience et sa compréhension, même lorsque je l'ennuyais avec mon calcul stochastique. Ton soutien a été inestimable.

Je n'oublie pas Hugo Desgrandchamps pour ses "CGC" qui ont été d'une grande aide, et Sébastien Meyer, avec qui j'ai longuement discuté de ce mémoire et qui m'a offert des idées très inspirantes.

À tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire, je vous exprime ma plus profonde reconnaissance. Merci.

Table des matières

1	Contextualisation de la problématique	1
1.1	Actionnariat salarié	2
1.1.1	Spécificités des titres attribués	2
1.1.2	Description des instruments existants	3
1.2	Contexte normatif : IFRS 2	6
1.2.1	Volatilité attendue	7
1.2.2	Taux sans risque	8
1.3	Sociétés non cotées	8
1.3.1	Hierarchie entre les actionnaires	8
1.3.2	Accès limité à des données de marché	8
1.3.3	Illiquidité des titres	9
1.3.4	Importance de la prise en compte de l'illiquidité	11
1.4	Pratiques actuelles concernant la provision IFRS 2	11
1.5	Objectif du mémoire	12
2	Principes de valorisation des produits dérivés	14
2.1	Absence d'opportunité d'arbitrage et règle d'évaluation	15
2.2	Modèle de Black-Scholes (et Merton)	15
2.2.1	Résolution d'une EDP	17
2.2.2	Espérance sous une mesure martingale équivalente	18
2.2.3	Existence de la probabilité risque neutre et absence d'opportunité d'arbitrage	22
2.2.4	Unicité du prix	22
3	Valorisation basée sur l'utilité	24
3.1	Théorie de l'utilité espérée	25
3.1.1	Axiomes de rationalité des agents	25
3.1.2	Fonctions d'utilité	25
3.2	Prix d'indifférence d'un produit dérivé	27
3.2.1	Résolution dans le cas d'une fonction d'utilité exponentielle	28
3.2.2	Fonction d'utilité quelconque	30
4	Impact de l'illiquidité sur la valorisation	31
4.1	Illustration par un exemple	32
4.1.1	Evaluation de l'option d'achat dans le marché liquide	32

4.1.2	Introduction de l'illiquidité dans le marché	33
4.2	Méthodes de valorisation en marché incomplet	38
4.2.1	Sélection d'une mesure martingale équivalente	39
4.2.2	Sélection de l'aversion au risque	40
4.3	Discussion des méthodes dans notre contexte	43
4.3.1	Application des critères de sélection de mesure	43
4.3.2	Cohérence de l'approche par indifférence	44
4.4	Couverture partielle impliquant un accès au marché liquide	44
4.4.1	Mesure martingale minimale	45
4.4.2	Prix d'indifférence exponentiel	45
5	Cadre de valorisation adapté pour l'illiquidité des titres non cotés	47
5.1	Présentation du modèle et des hypothèses	48
5.1.1	Dynamique de la valeur des titres	48
5.1.2	Illiquidité	48
5.1.3	Fonction d'utilité du marché	49
5.1.4	Condition d'exercice de l'option	49
5.2	Valorisation par indifférence de l'option d'achat européenne	49
5.3	Estimation du prix d'indifférence	53
5.3.1	Méthode de Lambert-Monte-Carlo	53
5.3.2	Estimateur de Monte-Carlo imbriqué	57
6	Application numérique	61
6.1	Application à une société réelle	62
6.1.1	Choix et estimation des paramètres du modèle	62
6.2	Application du modèle et résultats obtenus	63
6.3	Analyse de sensibilité	66
6.3.1	Prix d'exercice	67
6.3.2	Date d'exercice	68
6.3.3	Volatilité	69
6.3.4	Rendement espéré	71
6.3.5	Taux sans risque	74
6.3.6	Date de l'événement de liquidité	76
6.4	Impact d'une décote ad hoc	78
A	Démonstrations	84
A.1	La valeur d'un dérivé est le prix de son portefeuille de réplication	84
A.2	Théorème de Girsanov	84
A.3	Décroissance du prix de l'actif risqué en fonction de l'aversion au risque	85
A.4	Convergence en probabilité vers 0	86

B	Détail des calculs de la section 3.2	87
B.1	Lemme d'Ito sur la fonction de valeur	87
B.2	Valeur du portefeuille actualisé	87
B.3	Réécriture de l'équation HJB avec g	88
B.4	Transformation de Hopf-Cole	89
B.5	Obtention de l'équation de la chaleur	89
B.6	Condition de bord	90
C	Prix d'indifférence d'un produit dérivé sur un sous-jacent illiquide partiellement couvert	91
D	Estimateur Lambert-Monte-Carlo	94
D.1	Approximation de la transformée de Laplace d'une variable aléatoire de loi log-normale	94
D.2	Expression de la transformée de Laplace à partir de l'approximation	95

Résumé

Ce mémoire aborde la problématique de l'évaluation des options d'achat d'actions dans le cadre de plans d'actionnariat salarié pour les sociétés non cotées. La norme IFRS 2 exige une évaluation en juste valeur de ces instruments afin de déterminer la provision constituée au titre de ces paiements en actions. En pratique, le modèle de Black-Scholes est largement utilisé, bien que l'absence d'un marché actif et liquide pour les titres des sociétés non cotées remette en cause la validité de son utilisation. Pour pallier cette insuffisance théorique, des ajustements sont souvent appliqués dans les évaluations.

L'impact de l'illiquidité sur la valorisation est exploré, en expliquant la façon dont elle entraîne un marché incomplet où la réplication des options devient impossible, ce qui conduit à une infinité de mesures risque-neutre. L'utilisation du modèle de Black-Scholes est alors invalidé et le choix d'une mesure risque-neutre devient nécessaire afin d'obtenir un prix compatible avec l'absence d'opportunités d'arbitrage.

Afin de tenir compte de l'illiquidité spécifique des titres de sociétés non cotées, un cadre de valorisation basé sur la théorie de l'utilité est proposé. L'aversion au risque du marché est calibrée à partir du cours initial du sous-jacent et le prix d'indifférence de l'option est calculé à l'aide de simulations de Monte-Carlo imbriquées.

Une application numérique est réalisée sur une société non cotée réelle et compare les résultats du modèle proposé à ceux obtenus en utilisant le modèle de Black-Scholes à la date de l'événement de liquidité, avec ou sans ajustements ad hoc. L'analyse montre que, bien que théoriquement discutable, le modèle de Black-Scholes fournit des prix proches de ceux obtenus en tenant compte de l'illiquidité, mais potentiellement plus élevés. L'utilisation de décotes ad hoc est encore plus problématique théoriquement et conduit cette fois-ci à des prix inférieurs.

Le cadre de valorisation proposé offre une alternative intéressante pour l'évaluation des options dans les sociétés non cotées, en intégrant explicitement l'illiquidité dans le processus d'évaluation.

Mots-clés : Actionnariat salarié, sociétés non cotées, illiquidité, IFRS 2, théorie de l'utilité, prix d'indifférence, Lambert-Monte-Carlo, Monte-Carlo imbriqué.

Abstract

This thesis addresses the issue of valuing stock options within the context of employee share ownership plans for unlisted companies. The IFRS 2 standard requires these instruments to be measured at fair value in order to determine the provision established for share-based payments. In practice, the Black-Scholes model is widely used, although the absence of an active and liquid market for unlisted company shares raises doubts about its validity. To compensate for this theoretical limitation, adjustments are often made in valuations.

The impact of illiquidity on valuation is explored, explaining how it leads to market incompleteness where option replication becomes impossible, leading to an infinite number of risk-neutral measures. As a result, the use of the Black-Scholes model is invalidated, and a risk-neutral measure must be selected to obtain a price that is consistent with the absence of arbitrage opportunities.

To account for the specific illiquidity of unlisted company shares, a valuation framework based on utility theory is proposed. Market risk aversion is calibrated using the initial price of the underlying asset, and the option's indifference price is calculated using nested Monte Carlo simulations.

A numerical application is conducted on a real unlisted company, comparing the results of the proposed model to those obtained using the Black-Scholes model at the liquidity event date, with or without ad hoc adjustments. The analysis shows that, although theoretically debatable, the Black-Scholes model provides prices close to those considering illiquidity, but tends to produce higher values. The use of ad hoc discounts is even more problematic theoretically and results in lower prices.

The proposed valuation framework offers an interesting alternative for valuing stock options in unlisted companies, explicitly incorporating illiquidity into the valuation process.

Keywords : Employee share ownership, unlisted companies, illiquidity, IFRS 2, utility theory, indifference pricing, Lambert-Monte Carlo, nested Monte Carlo.

Introduction

Les plans d'actionnariat salarié pour les sociétés non cotées ont récemment pris une importance accrue dans le cadre des efforts visant à dynamiser l'écosystème des startups françaises. La mise à jour du Bulletin Officiel des Finances Publiques (BOFIP) le 27 mars 2024 faisant suite à la déclaration du ministre délégué au numérique concernant l'application d'une décote sur le prix d'exercice des Bons de Souscription de Parts de Créateurs d'Entreprise (BSPCE) souligne l'importance stratégique de ces mécanismes.

L'évaluation en juste valeur de ces titres pose des défis importants dans le cadre du référentiel IFRS 2, notamment en raison de la structure de capital souvent complexe des sociétés non cotées, du manque d'informations de marché disponibles et de l'absence d'un marché actif pour échanger ces titres avant qu'un événement de liquidité n'intervienne.

Actuellement, il n'existe pas vraiment de cadre de valorisation adéquat pour prendre en compte l'illiquidité de ces titres. Les méthodes existantes reposent sur des hypothèses peu réalistes et ne sont pas adaptées à l'illiquidité spécifique des titres de sociétés non cotées.

Le but de ce mémoire est de proposer un cadre de valorisation adapté à l'illiquidité des titres non cotés. À cette fin, une méthode permettant d'évaluer une option d'achat européenne dans un marché illiquide sera développée. Cette méthode pourrait servir de base à des travaux futurs visant à évaluer des produits plus complexes.

L'objectif n'est pas de présenter cette méthode comme fondamentalement supérieure, mais de la positionner comme une alternative permettant de *challenge* les pratiques actuelles, afin de mieux comprendre leurs limites dans ce contexte.

Ce mémoire s'articule autour de six chapitres.

Le [premier chapitre](#) posera le cadre de l'étude, en détaillant le contexte de l'actionnariat salarié, les spécificités des sociétés non cotées et les défis actuels de l'évaluation selon la norme IFRS 2. Les pratiques actuelles seront également passées en revue. Le [deuxième chapitre](#) rappellera les fondements théoriques de la valorisation des produits dérivés, en se concentrant sur le modèle de Black-Scholes et la valorisation en univers risque-neutre. Le [troisième chapitre](#) introduira une méthode de valorisation alternative, basée sur la théorie de l'utilité et l'indifférence. Le [quatrième chapitre](#) se penchera sur l'impact spécifique de l'illiquidité sur la valorisation. L'incomplétude des

marchés illiquides sera mise en évidence, ainsi que les défis qu'elle pose en termes d'évaluation. Fort de ces éclairages, le [cinquième chapitre](#) présentera un cadre de valorisation spécifiquement adapté à l'illiquidité des titres de sociétés non cotées basé sur le principe de prix d'indifférence. La démarche pour évaluer une option d'achat européenne dans ce contexte sera détaillée, et des méthodes numériques basées sur des simulations de Monte-Carlo seront présentées pour le calcul de ce prix d'indifférence. Enfin, le [sixième chapitre](#) illustrera l'application concrète de ce modèle à un cas réel d'une société non cotée. Les résultats obtenus seront analysés en détail, avec une étude de sensibilité aux différents paramètres du modèle. Une comparaison avec les résultats du modèle de Black-Scholes permettra de mettre en évidence les apports et les limites de la nouvelle approche proposée.

Chapitre 1

Contextualisation de la problématique

Ce mémoire traite de la prise en compte de l'illiquidité spécifique des titres de sociétés non cotées dans l'évaluation de plans d'actionnariat salarié dans le référentiel IFRS 2. Ce chapitre vise à contextualiser cette problématique.

La [première section](#) présente l'actionnariat salarié, décrivant les spécificités des titres attribués et les principaux instruments existants. La [deuxième section](#) explique le cadre normatif établi par la norme IFRS 2 pour l'évaluation des plans d'actionnariat salarié. La [troisième section](#) se concentre sur les sociétés non cotées et les défis associés à l'évaluation des titres de ces sociétés. La [quatrième section](#) définit l'objectif principal du mémoire.

1.1 Actionnariat salarié

L'actionnariat salarié désigne l'ensemble des dispositifs permettant à une entreprise d'associer ses salariés à son capital.

L'intérêt de l'actionnariat salarié réside dans l'alignement des objectifs des employés et de l'entreprise, favorisant la motivation, la fidélisation, et l'engagement des salariés tout en leur offrant des avantages financiers et un sentiment d'appartenance (Fenn et Liang (2001), Balsam et Miharjo (2007), Elouadi (2015)).

Les plans d'actionnariat salarié comportent des actions et des options sur actions. Ces titres attribués aux salariés présentent des spécificités distinctes par rapport aux titres échangés sur les marchés financiers.

1.1.1 Spécificités des titres attribués

Période d'acquisition des droits

Les titres attribués aux salariés sont souvent soumis à une période d'acquisition des droits (ou période de *vesting*), ce qui signifie que l'employé doit rester dans l'entreprise pendant une période déterminée avant de pouvoir posséder pleinement ses titres. En cas de départ de l'entreprise, les titres non acquis peuvent être perdus ou soumis à des conditions spécifiques.

Conditions d'acquisition

Après la période d'acquisition des droits, les actions ou options accordées aux employés peuvent être conditionnées à la réalisation de certains objectifs de performance de l'entreprise (liés ou non au cours de l'action) ou de l'employé.

Incessibilité

Les titres des plans d'actionnariat salarié sont souvent soumis à des restrictions de vente, empêchant les employés de céder à des tiers leurs options ou actions pendant une certaine période ou sous certaines conditions.

La figure 1.1 illustre schématiquement la vie d'une option attribuée dans le cadre d'un plan d'actionnariat salarié. Les options sont généralement accordées *in the money*, i.e. avec un prix d'exercice inférieur au cours du sous-jacent. Bien qu'étant attribuées, les options ne sont pleinement acquises qu'après la période d'acquisition. Pendant la période de détention des options, certaines options sont cessibles et d'autres non. Si l'option est cessible, le détenteur peut choisir entre la vente de l'option ou son exercice. Sinon, si l'option est incessible, l'option doit être exercée ou elle sera perdue. A l'exercice, le détenteur fait une plus (ou moins) value d'acquisition qui correspond à la différence entre le cours du sous-jacent et le prix d'exercice de l'option. Il s'agit d'une plus (ou moins) value latente puisqu'elle ne se réalise qu'à la vente de l'action sous-jacente. L'action peut être cédée immédiatement ou à une date ultérieure en fonction des préférences du bénéficiaire mais surtout des clauses d'incessibilité ou de la liquidité du marché (s'il en existe un).

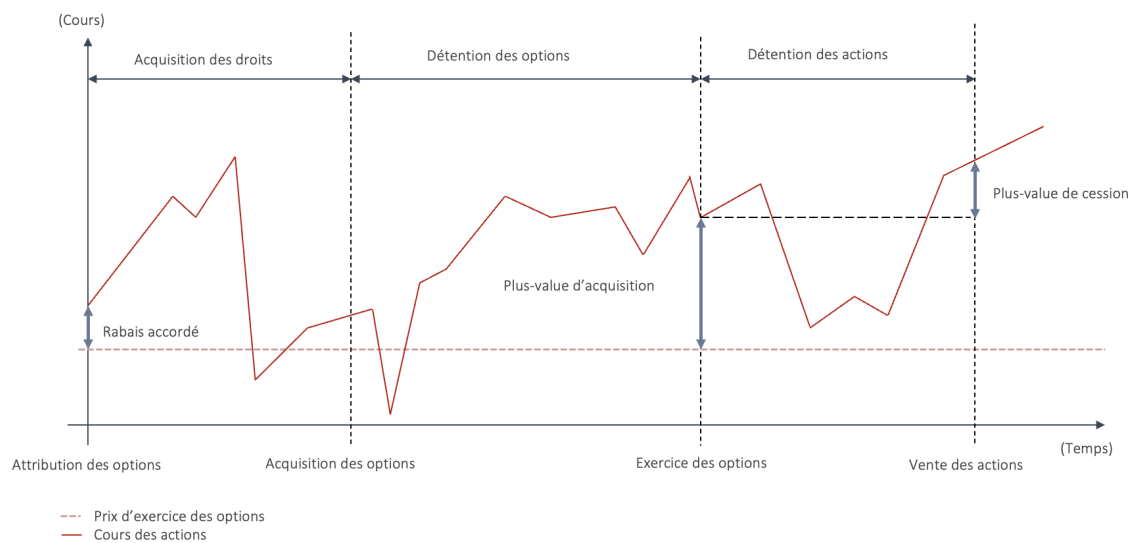


FIGURE 1.1 – Schéma illustratif de la vie d'une option attribuée dans le cadre d'un plan d'actionnariat salarié (Source : [Lacour et Plouvier \(2017\)](#))

Les principaux dispositifs d'actionnariats salariés sont présentés dans la sous-section suivante.

1.1.2 Description des instruments existants

Attribution Gratuite d'Actions (AGA)

Les Attributions Gratuites d'Actions (AGA) sont des actions offertes gratuitement aux salariés et dirigeants d'une société par actions. Elles sont régies par les articles L225-197-1 et suivants du Code de commerce. Les bénéficiaires deviennent propriétaires des actions après une période d'acquisition, fixée par l'entreprise lors de l'attribution, d'une durée minimum d'un an. Une fois propriétaire des actions, le bénéficiaire ne peut les céder pendant une période de conservation. Le cumul des périodes d'acquisition et de conservation doit être d'une durée minimum de deux ans. Ces périodes visent à fidéliser les employés et dirigeants, en les incitant à rester au sein de l'entreprise pour en bénéficier pleinement.

Bon de Souscription de Parts de Créateur d'Entreprise (BSPCE)

Les BSPCE sont des options d'achat d'actions destinées aux employés et dirigeants de sociétés par actions qui ne sont pas cotées en bourse, ou de sociétés par actions cotées dont la capitalisation boursière est inférieure ou égale à 150 millions d'euros, et qui sont immatriculées au registre du commerce et des sociétés depuis moins de 15 ans. Ils sont régis par l'article 163 bis G du Code Général des Impôts. Ces bons n'impliquent pas de contribution patronale et sont incessibles. En raison de leurs conditions d'éligibilité spécifiques et de l'absence de charges sociales pour l'entreprise, les BSPCE sont particulièrement adaptés aux jeunes entreprises en croissance et aux startups.

Bon de Souscription d'Actions (BSA)

Les BSA sont des options d'achats d'actions régies par les articles L228-91 et suivants du Code de commerce. Ils ont le statut de valeur mobilière au sens des articles L211-1 et L211-2 du Code monétaire et financier. Ce statut leur confère deux propriétés que les autres véhicules d'actionnariat ne vérifient pas : les BSA sont librement cessibles dès leur émission - sauf mention contraire de la part du conseil d'administration - et les BSA peuvent être attribués à des tiers de la société. Cette spécificité fait des BSA le véhicule préféré des start-ups pour inclure leurs investisseurs, conseils ou autres partenaires dans le potentiel de croissance de la société.

Stock Options (SO)

Les stock-options sont des options régies par les articles L225-177 et suivants du Code de commerce, et sont destinées principalement aux dirigeants et salariés de l'entreprise. Elles se divisent en deux catégories : les options de souscription et les options d'achat. Les options de souscription permettent d'acquérir des actions nouvelles émises par la société, augmentant ainsi le capital social de l'entreprise. En revanche, les options d'achat donnent le droit d'acquérir des actions existantes détenues par les actionnaires actuels, sans impact sur le capital social. L'émission de ces options nécessite l'approbation de l'assemblée générale des actionnaires et doit respecter des délais d'acquisition et d'exercice précis.

La table 1.1 résume les principales caractéristiques des différents instruments présentés précédemment.

En synthèse, la figure 1.2 retrace l'évolution des supports possibles en fonction de la croissance d'une société. Lors de la phase initiale faisant intervenir des investisseurs et des partenaires de tout horizon, des BSA leur sont attribués, tandis que des BSPCE peuvent être octroyés à certains salariés. L'acquisition définitive de ces instruments peut par exemple être subordonnée au bon déroulement du business plan par exemple. Bien entendu, à chaque nouveau tour de table, des nouveaux instruments pourront être émis, accompagnés d'une mise à jour des critères d'attribution. En supposant que la société se fasse cotée en bourse, sans toutefois dépasser 150 M€ de capitalisation, d'autres BSA et BSPCE pourront être émis. Cette fois-ci, les critères intègrent par exemple des objectifs de performance comptable ou individuelle, dans le sens où aucune notion de comparaison avec des sociétés similaires n'entre en compte. Enfin, dans cet exemple, la capitalisation boursière dépasse le seuil de 150 M€ au bout de trois ans. Les BSPCE ne peuvent plus être émis, la société se tourne donc vers des instruments à destination de ses salariés au sens large, comme les actions gratuites et/ou les stock-options. L'acquisition des instruments pourra être subordonnée à des critères de performance impliquant des sociétés comparables (comparaison des Total Share Return par exemple, ou encore des performances relatives des cours boursiers...). En parallèle de ces critères financiers, la société pourra subordonner l'acquisition des titres à des critères liés à la RSE, comme son bilan carbone ou encore sa politique de parité homme-femme.

Instrument	Régi par	Conditions d'émission	À qui ?	Spécificités
BSPCE	163 bis G du CGI	Société par actions non cotée OU Société par actions cotée + capitalisation \leq 150M EUR + immatriculée depuis moins de 15 ans	Salariés et dirigeants	Pas de contribution patronale + incessibles
BSA	L228-91 et suivants du Code de commerce	Société par actions	Toute personne	Librement cessibles (sauf mention contraire du CA)
AGA	L225-197-1 et suivants du Code de commerce	Société par actions	Salariés et dirigeants	Période d'acquisition et de conservation de minimum 2 ans
SO	L225-177 du Code de commerce	Société par actions	Salariés et dirigeants	Incessibles + Période d'incessibilité du sous-jacent plafonnée à 3 ans à compter de la date d'exercice

TABLE 1.1 – Récapitulatif

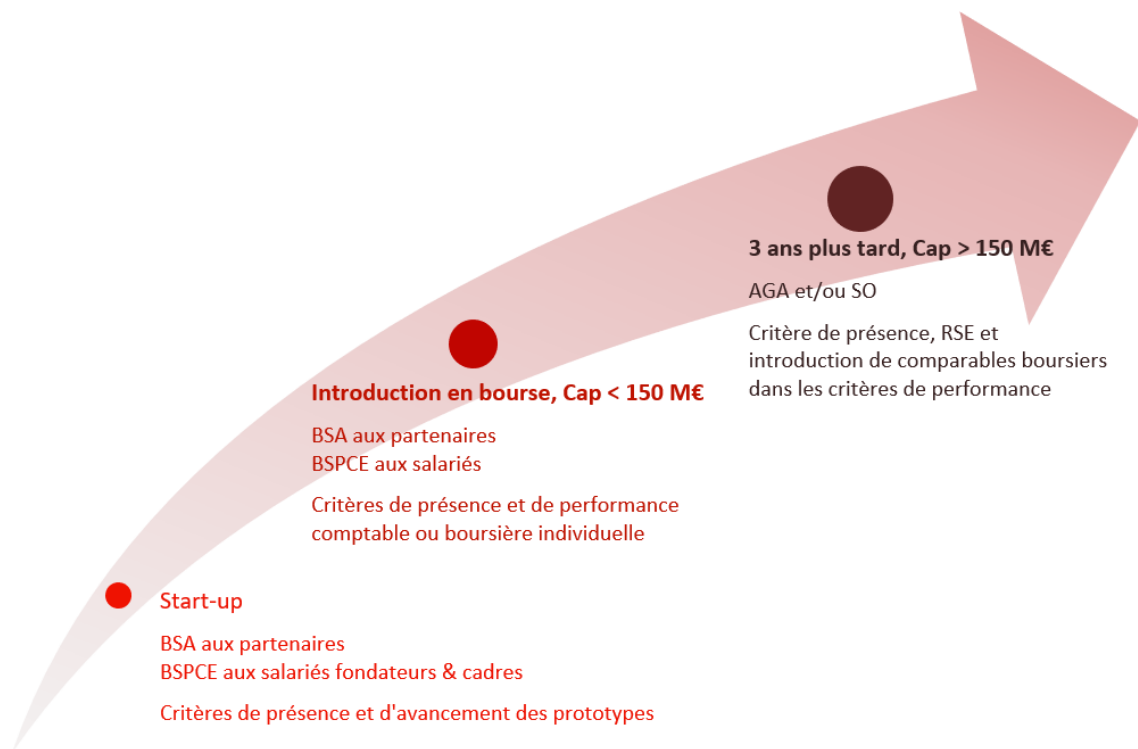


FIGURE 1.2 – Evolution des supports possibles en fonction de la croissance d'une société

L'attribution d'instruments de capitaux propres (actions, options sur action) aux membres du personnel représente un passif social dont l'évaluation et la comptabilisation sont régis par la norme IFRS 2.

1.2 Contexte normatif : IFRS 2

La norme IFRS 2 ([International Accounting Standards Board, 2004](#)) encadre toutes les transactions dont le paiement est fondé sur des actions. Cependant, elle concerne particulièrement les entreprises qui utilisent des plans d'actionnariat salarié pour rémunérer leurs employés. En effet, ces engagements font l'objet d'une provision dans les comptes dont le montant correspond à la "juste valeur" de ces instruments à leur date d'attribution. Le nombre d'options exerçables est recalculé à chaque date d'exercice mais la juste valeur n'est pas modifiée.

La juste valeur est définie dans l'annexe A comme le

"montant pour lequel un actif pourrait être échangé, un passif éteint, ou un instrument de capitaux propres attribué entre des parties bien informées et consentantes dans le cadre d'une transaction effectuée dans des conditions de concurrence normale."

Selon cette définition, il apparaît que la juste valeur se réfère à un prix de marché.

Le paragraphe B2 de la norme stipule que, pour les actions, le prix de marché (ou une estimation en l'absence de celui-ci) doit être pris en compte avec des ajustements pour refléter les conditions d'attribution de ces actions. Cependant, les conditions d'acquisition des droits qui ne seraient pas prises en compte par un intervenant du marché bien informé sont exclues de la norme.

Le paragraphe B4 indique que, pour les options sur actions, les prix de marché sont souvent indisponibles, car ces options présentent des conditions nettement différentes de celles des options cotées. Par conséquent, l'estimation de la juste valeur de ces options nécessite l'utilisation de modèles d'évaluation d'options.

Dans le paragraphe B6, la norme impose la prise en compte, au minimum, des facteurs suivants :

- le prix d'exercice de l'option ;
- la durée de vie de l'option ;
- le prix actuel des actions sous-jacentes ;
- la volatilité attendue du prix de l'action ;
- les dividendes attendus sur les actions (le cas échéant) ; et
- le taux d'intérêt sans risque pour la durée de vie de l'option.

Des recommandations sont fournies par la norme pour la détermination de ces paramètres.

1.2.1 Volatilité attendue

La norme IFRS 2 précise que la volatilité attendue est une estimation de la fluctuation probable du prix d'une action sur la durée de vie d'une option. Pour évaluer cette volatilité, il est recommandé d'utiliser la volatilité historique, qui se base sur les fluctuations passées du prix de l'action, et la volatilité implicite, dérivée des prix des options sur le marché. La norme souligne également l'importance de prendre en compte la tendance des prix à revenir à leur moyenne.

Pour les entités nouvellement cotées ou non cotées, il est suggéré d'utiliser la volatilité des actions d'entités similaires qui sont cotées en bourse. Si aucune donnée comparable n'est disponible, les entités peuvent estimer la volatilité en se basant sur la valeur de leurs actifs nets ou les résultats utilisés dans leur propre méthodologie d'évaluation. Ces estimations doivent être ajustées pour refléter les particularités de l'entité et les conditions du marché.

Enfin, la norme recommande d'appliquer ces méthodologies de manière cohérente et de documenter les hypothèses et les sources de données utilisées pour garantir la transparence et la fiabilité de l'estimation de la volatilité attendue.

1.2.2 Taux sans risque

Le taux sans risque, tel que défini par la norme IFRS 2, correspond au rendement implicite actuel des obligations d'État à coupon zéro du pays dans la monnaie du prix d'exercice de l'option, avec une échéance égale à la durée de vie attendue de l'option. Dans les cas où de telles obligations n'existent pas ou leur rendement n'est pas représentatif, un substitut approprié doit être utilisé. Ce substitut est aussi recommandé si les pratiques de marché montrent une préférence pour ce dernier lors de l'évaluation des options ayant une durée de vie similaire.

1.3 Sociétés non cotées

Les sociétés non cotées sont des entreprises dont les actions ne sont pas négociées sur des marchés financiers publics. Contrairement aux sociétés cotées, qui émettent des actions sur une bourse pour lever des capitaux auprès du grand public, les sociétés non cotées limitent leur accès au financement à travers des investisseurs privés.

1.3.1 Hiérarchie entre les actionnaires

Les sociétés non cotées, pour financer leur croissance, ont souvent recours à des levées de fonds en faisant entrer des investisseurs à leur capital. Ce processus de financement se traduit par l'émission d'instruments financiers, qui peuvent varier en fonctions des droits accordés à leurs détenteurs.

Dans les premières phases de développement, une société non cotée est généralement perçue comme plus risquée. Par conséquent, les instruments émis lors des levées de fonds initiales offrent souvent des droits spécifiques pour compenser ce risque élevé. Par exemple, les premiers investisseurs peuvent recevoir des actions préférentielles, qui comprennent des droits additionnels tels que le privilège de liquidation.

Le privilège de liquidation assure à ces investisseurs d'être remboursés en priorité en cas de liquidation de l'entreprise. Ce droit crée une hiérarchie entre les actionnaires, où les détenteurs d'actions préférentielles sont prioritaires par rapport aux détenteurs d'actions ordinaires. Cette hiérarchie a un impact direct sur la valorisation des instruments financiers émis par la société.

1.3.2 Accès limité à des données de marché

Les données de marché des sociétés non cotées sont limitées en raison de l'absence de négociation publique de leurs titres. Contrairement aux sociétés cotées dont les actions sont échangées sur des marchés financiers publics, les informations sur les transactions de sociétés non cotées sont souvent privées et moins transparentes. Les données de marché pour les sociétés non cotées sont généralement obtenues à partir de transactions privées ou d'estimations faites par des

experts, ce qui peut introduire une certaine variabilité et incertitude dans les évaluations. Cette limitation complique l'évaluation des titres et la détermination de leur juste valeur.

1.3.3 Illiquidité des titres

La notion d'illiquidité traitée dans ce mémoire est spécifique au contexte des titres de sociétés non cotées. Elle se caractérise par l'impossibilité d'échanger des titres pendant certaines périodes, nécessitant l'attente d'un événement de liquidité pour pouvoir les transférer.

Les perspectives de liquidité pour les détenteurs de titres de sociétés non cotées peuvent être variées. Parmi les principales options, on peut citer l'entrée en bourse (IPO), qui permet aux actionnaires de vendre leurs titres sur un marché public, et le rachat de la société par le biais d'opérations de fusion et acquisition (M&A), où les titres peuvent être rachetés par l'acquéreur, offrant ainsi une sortie aux actionnaires actuels. Il est également possible de négocier des fenêtres de liquidité avec les nouveaux investisseurs lors de levée de fonds, permettant à ces derniers de racheter certains titres déjà existants.

Cette forme d'illiquidité se distingue de deux autres formes couramment reconnues dans la littérature financière. La première idée est que l'illiquidité est l'impossibilité de céder ses titres sans perte significative de valeur. Dans ce cas, la possibilité d'un échange existe toujours mais à un coût croissant avec le manque de liquidité (Hodges et Neuberger, 1989; Davis et Norman, 1990). La deuxième idée est d'envisager l'illiquidité comme une limitation de la quantité de titres échangeables (Longstaff, 2001).

Il est important de distinguer également cette forme d'illiquidité de l'incessibilité temporaire de certains titres s'échangeant tout de même sur un marché actif. Les méthodes de détermination de décotes d'incessibilités (DLOM pour "*Discount for Lack of Marketability*") sont souvent appliquées dans ce contexte pour évaluer la perte de valeur induite par ces restrictions.

Discount for lack of marketability

Les plans d'actionnariat salarié (des sociétés cotées ou non cotées) comportent souvent des clauses d'incessibilité, ce qui impacte la juste valeur des titres. La norme IFRS 2 (paragraphe B3) reconnaît cet impact. Plusieurs modèles académiques ont été développés pour quantifier la perte de valeur due à l'incessibilité.

Modèle de Chaffe

Selon Chaffe (1993), si une personne détient des actions restreintes ou non négociables et achète une option pour vendre ces actions au prix du marché libre, le détenteur a, en fait, acheté la négociabilité de ces actions. Le prix de cette option de vente correspond alors à la DLOM. Dans le modèle de Chaffe, cette DLOM est approximée par le prix d'une option de vente européenne,

dont le prix d'exercice est égal à celui du sous-jacent à la date d'évaluation. Ainsi, la DLOM est déterminée en utilisant la formule de Black-Scholes.

Modèle de Longstaff

Dans la même logique que Chaffe, Longstaff (1995) propose de modéliser la DLOM par une option de vente "*lookback*". Il s'agit d'une option permettant de vendre le sous-jacent au prix maximum qu'il a atteint durant une période donnée. L'idée est d'assimiler la DLOM au coût d'opportunité généré par l'incessibilité. Le prix de cette option *lookback* est censé donner une borne supérieure à la DLOM car elle représente le coût d'opportunité d'un investisseur qui a une parfaite capacité à anticiper le marché.

Modèle de Finnerty

Afin de se libérer de l'hypothèse d'anticipations parfaites de l'investisseur, Finnerty (2012) propose un modèle basé sur des options de vente asiatiques avec prix d'exercice flottant. Il s'agit d'options dont le prix d'exercice a maturité est obtenu comme une moyenne arithmétique des cours du sous-jacent observés périodiquement pendant une certaine durée.

Dans un monde risque neutre, un agent devrait être indifférent entre la vente immédiate de son titre ou sa vente différée au prix *forward* (i.e. son prix capitalisé au taux sans risque).

Dans ce modèle, l'investisseur ne possède pas de capacité d'anticipations particulières et donc selon Finnerty, il est tout aussi probable qu'il vende son action à $N+1$ dates également espacées et donc dans un monde risque neutre il devrait être indifférent entre le fait de pouvoir vendre son titre à ces dates ou avoir un titre non échangeable et une série de contrat *forward* d'échéance T à ces dates.

Il est essentiel de souligner qu'avec ces méthodes de valorisation, il est présumé qu'un investisseur est restreint pendant une certaine période, mais qu'il existe néanmoins un marché actif où des titres identiques sont échangés. La norme IFRS 2 stipule que "si les actions font l'objet d'échanges soutenus sur un marché actif et liquide, les restrictions de transfert après acquisition des droits pourraient n'avoir que peu ou pas d'effet sur le prix que paierait pour ces actions un intervenant du marché bien informé et consentant". Cette hypothèse est étayée par un argument d'arbitrage formulé par le Conseil National de la Comptabilité (CNC). Selon cet argument, un investisseur pourrait vendre à terme des titres incessibles tout en achetant des titres identiques (à l'exception de la clause d'incessibilité), financés par un prêt. Ainsi, la DLOM correspondrait au coût du repo, qui demeure faible dans un marché liquide.

De plus, ces méthodes ne peuvent être appliquées pour modéliser l'illiquidité spécifique des titres non cotés, car ces titres ne sont pas échangeables et ne disposent d'aucun marché pour leur négociation. Dans le cas des sociétés non cotées, l'absence de marché actif rend inapplicables les méthodes de valorisation basées sur des transactions comparables. L'illiquidité de ces titres

nécessite l'élaboration de modèles spécifiques pour évaluer les décotes appropriées, en tenant compte des particularités des titres et des conditions de marché dans lesquelles ils sont émis.

1.3.4 Importance de la prise en compte de l'illiquidité

L'illiquidité des titres de sociétés non cotées est une caractéristique qui serait considérée par des parties bien informées sur un marché dans le cadre d'une transaction effectuée dans des conditions de concurrence normale. Par conséquent, cette particularité devrait être intégrée dans la détermination de la juste valeur des engagements de l'entreprise envers ses salariés.

La prise en compte de l'illiquidité des titres lors de l'évaluation initiale devrait réduire la charge comptable, ce qui aurait un impact significatif sur le résultat de l'entreprise, améliorant ainsi ses indicateurs financiers. En outre, la juste valeur des plans d'actionnariat salarié est déterminée à la date d'attribution des titres et n'est pas recalculée par la suite ce qui maintient la charge initialement enregistrée dans les comptes pendant de nombreuses années.

1.4 Pratiques actuelles concernant la provision IFRS 2

Dans la pratique, le calcul de la provision IFRS 2 pour les options sur actions, même pour les sociétés non cotées, repose sur une application quasi-systématique du modèle de Black-Scholes ou du modèle binomial. Cette approche présente l'avantage d'être simple, largement connue et comprise, ce qui facilite la communication avec les clients et les auditeurs.

Cependant, cette utilisation presque automatique soulève des questions d'un point de vue théorique. Le modèle de Black-Scholes, conçu initialement pour des marchés liquides et complets, repose sur des hypothèses qui peuvent ne pas être entièrement vérifiées dans le contexte des sociétés non cotées. L'absence d'un marché actif, remet en question la pertinence de ces hypothèses.

De plus, pour combler cet écart théorique, des décotes sont souvent appliquées de manière ad hoc aux résultats du modèle. Ces décotes peuvent être basées sur des études empiriques, telles que celles portant sur les actions restreintes ou les transactions pré-IPO. Cependant, ces études présentent elles-mêmes des biais et ne reflètent pas nécessairement la réalité des sociétés non cotées. Les actions restreintes, par exemple, concernent des sociétés cotées dont les titres sont soumis à des restrictions de vente, ce qui n'est pas directement comparable à la situation des sociétés non cotées. De même, les études pré-IPO peuvent être biaisées par la sélection des entreprises qui parviennent à réaliser leur introduction en bourse, et ne pas être représentatives de l'ensemble des sociétés non cotées.

Une autre approche consiste à utiliser les modèles théoriques décrits dans la section 1.3.3. Mais tout comme le modèle de Black-Scholes, les hypothèses de ces modèles ne sont pas vérifiées dans le contexte des titres de sociétés non cotées.

Il est important de noter que le prix du sous-jacent est généralement le fruit de négociations entre des parties bien informées et devrait donc déjà incorporer l'information relative à l'illiqui-

dité du sous-jacent. Appliquer une décote supplémentaire conduit à une double réduction du coût de l'option, ce qui peut être problématique.

En somme, la pratique courante pour le calcul de la provision IFRS 2 des options sur actions de sociétés non cotées consiste à appliquer le modèle de Black-Scholes malgré des hypothèses théoriques qui ne sont pas pleinement satisfaites dans ce contexte, puis à éventuellement corriger cette inadéquation par des ajustements ad-hoc qui manquent parfois de fondements théoriques et ont pour effet de réduire davantage la valeur de l'option, qui intègre déjà l'illiquidité du sous-jacent à travers son prix. Il apparaît donc pertinent de remettre en question ces pratiques et d'explorer des approches alternatives plus adaptées à la valorisation des options dans le contexte spécifique des sociétés non cotées.

1.5 Objectif du mémoire

Le but de ce mémoire est de proposer un cadre de valorisation adapté à l'illiquidité des titres non cotés en élaborant une méthode d'évaluation d'une option d'achat européenne dans ce contexte.

Ce choix permet d'isoler précisément l'impact de l'illiquidité sur la valorisation sans introduire de variables additionnelles qui pourraient obscurcir l'analyse.

La modélisation est très similaire au modèle de Black-Scholes. Trois titres sont considérés :

- Un actif sans risque avec un taux sans risque constant ;
- un actif risqué dont le prix évolue selon un mouvement brownien géométrique ;
- une option d'achat européenne de maturité T et de prix d'exercice K sur l'actif risqué.

L'unique différence par rapport au modèle de Black-Scholes réside dans l'impossibilité d'échanger l'option ou son sous-jacent sur la période $[0, T_2[$ avec $T_2 > T$ et où 0 est la date d'évaluation de l'option.

Cette restriction entraîne deux conséquences immédiates :

- Le flux terminal de l'option n'est pas répliquable avec uniquement l'actif sans risque ce qui soulève des questions sur la valorisation risque neutre qui repose sur la réplication ;
- A l'échéance de l'option, il n'est pas possible de savoir si l'exercice générera une plus-value, puisque le sous-jacent ne peut être cédé avant la date T_2 . Il est donc nécessaire de déterminer une condition d'exercice basée sur les informations disponibles en T et les anticipations du marché pour le sous-jacent en T_2 .

La figure 1.3 représente le diagramme des flux du *call* illiquide. E est la condition d'exercice de l'option.

Dans cette modélisation, T_2 , qui représente un événement de liquidité, est unique et connu à l'avance. En réalité, un événement de liquidité est aléatoire et il peut y en avoir plusieurs.

Cela n'est pas problématique car, en pratique, l'évaluation est réalisée avec différents scénarios de sortie (différents T_2 avec leurs probabilités d'occurrence). Ensuite, la valeur de l'option est déterminée en utilisant la loi de l'espérance totale.

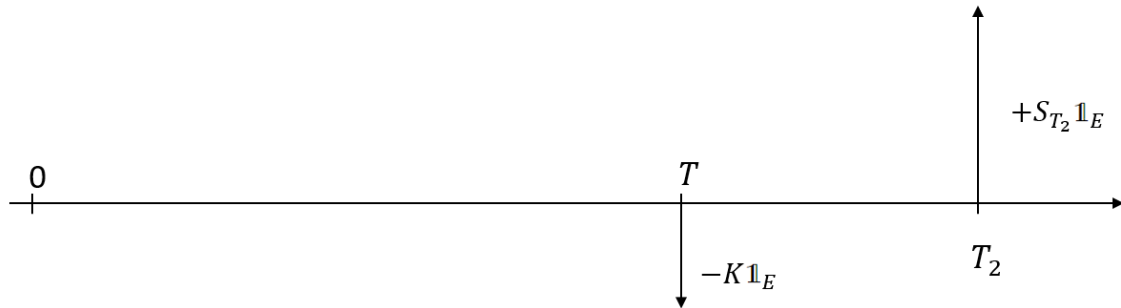


FIGURE 1.3 – Diagramme des flux d'un *call* illiquide

Chapitre 2

Principes de valorisation des produits dérivés

Ce chapitre vise à rappeler au lecteur le cadre de valorisation qui sous-tend la plupart des modèles de valorisation des produits dérivés. Les produits dérivés sont des instruments financiers dont la valeur est basée sur un actif sous-jacent, permettant de générer des flux financiers en fonction des différents scénarios ou conditions du marché.

Dans une optique pédagogique, la présentation sera restreinte à la valorisation de produits dérivés européens dans un marché de type Black-Scholes, caractérisé par un actif sans risque et un actif risqué dont le prix évolue selon un mouvement brownien géométrique.

Les résultats présentés dans ce chapitre s'appliquent également dans un cadre plus général et des références complémentaires peuvent être trouvées dans l'ouvrage de [Delbaen et Schachermayer \(2005\)](#).

La longueur de ce chapitre est intentionnelle pour garantir une compréhension complète des hypothèses et du cheminement mathématique nécessaires pour comprendre les discussions ultérieures sur l'impact de l'illiquidité sur la valorisation.

La [première section](#) explique l'idée générale de la valorisation des produits dérivés en finance, en se basant sur le principe de l'absence d'opportunité d'arbitrage. La [seconde section](#) présente le modèle de Black-Scholes, en détaillant ses hypothèses et sa formulation mathématique. Elle explique pourquoi le prix obtenu est unique et comment la valorisation risque neutre garantit l'absence d'opportunités d'arbitrage.

2.1 Absence d'opportunité d'arbitrage et règle d'évaluation

La majorité des modèles de valorisation des produits dérivés repose sur une hypothèse clé : l'absence d'opportunités d'arbitrage (AOA). Cela signifie qu'il n'est pas possible de réaliser des bénéfices sans prendre de risques. Cette hypothèse repose sur le principe selon lequel un prix d'équilibre résulte de l'interaction entre l'offre et la demande. Si une opportunité d'arbitrage se présente, elle entraînera un afflux de transactions dans la même direction, ce qui modifiera le prix initial, le faisant ainsi sortir de son équilibre. De là découle une règle naturelle pour valoriser des titres telle que mentionnée par **Derman (2003)** :

"Pour déterminer la valeur d'un titre financier, il convient d'utiliser le prix d'un titre similaire, présentant des caractéristiques aussi proches que possible de celui-ci."

En effet, si deux titres présentant des caractéristiques très similaires affichent des prix nettement différents, cela pourrait ouvrir la voie à une opportunité d'arbitrage, impliquant l'achat du titre le moins cher et la vente du titre le plus cher pour réaliser un profit. En particulier, cette hypothèse implique que si deux titres versent les mêmes flux dans toutes les situations possibles, alors ils doivent avoir la même valeur. Il suffit alors de construire un portefeuille composé de titres suffisamment liquides pour que leur prix reflète fidèlement leur valeur, et qui reproduit exactement les flux du titre à évaluer dans toutes les situations possibles. La valeur de ce titre à évaluer est alors égale à la valeur de ce portefeuille. Cependant, pour garantir cette équivalence, il est nécessaire de spécifier un modèle décrivant le comportement du portefeuille, afin de montrer qu'il réplique fidèlement le titre à évaluer dans tous les scénarios envisageables.

Pour illustrer ces principes, un aperçu du modèle de Black-Scholes sera présenté, qui est l'un des modèles les plus célèbres et les plus utilisés pour la valorisation des options.

2.2 Modèle de Black-Scholes (et Merton)

Présentation du marché

Le marché considéré inclut un actif sans risque B , un actif risqué S , et un dérivé européen C sur S de maturité T . Le marché est ouvert en continu et les 3 titres s'échangent à leur prix respectif (B_t, S_t, C_t) sans frais et sans restrictions. Ces processus de prix sont définis sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ où (\mathcal{F}_t) est la filtration naturelle d'un mouvement brownien W défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La probabilité \mathbb{P} est appelée probabilité historique.

Dans ce modèle les dynamiques de S_t et B_t sont données par

$$\begin{cases} \frac{dB_t}{B_t} = r dt \\ \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \text{ (mouvement brownien géométrique)} \end{cases},$$

avec μ le terme de dérive, σ la volatilité de l'actif et r le taux sans risque.

C est un produit qui verse un flux qui dépend du prix de son sous-jacent à maturité. Son flux terminal ou *payoff* s'écrit $h(S_T)$ où h est une fonction mesurable.

Portefeuille de réplcation et stratégies admissibles

La valorisation du produit dérivé implique la construction d'un portefeuille V , composé des titres disponibles, qui réplique son flux terminal dans tous les états du monde.

La valeur d'un portefeuille en t , notée V_t , est donnée par la formule

$$V_t = a_t S_t + b_t B_t,$$

où a_t désigne la quantité d'actif S dans V en t et b_t désigne la quantité d'actif B dans V en t .

Le couple de processus \mathcal{F}_t -prévisibles (a_t, b_t) sera appelé une stratégie et seules les stratégies admissibles seront considérées dans la suite. Une stratégie (a_t, b_t) est dite admissible si

$$\exists M \geq 0, \forall t \in [0, T], \int_0^t a_u dS_u + \int_0^t b_u dB_u \geq -M.$$

Cette relation n'a de sens que si

$$\int_0^T a_t^2 dt < \infty \text{ et } \int_0^T |b_t| dt < \infty.$$

Cette condition d'admissibilité interdit les stratégies avec une perte accumulée infinie et permet d'éviter certaines stratégies d'arbitrage comme "la martingale" bien connue des joueurs de roulette.

La martingale consiste à miser sur une des deux couleurs à la roulette, doubler sa mise à chaque perte et s'arrêter de miser quand on gagne. Cette stratégie, sur un horizon infini, permet de gagner sa mise de départ de façon certaine.

Il est possible de reproduire ce jeu de roulette sur le marché considéré en investissant dans l'actif risqué et en vendant de l'actif sans risque aux temps discrets $t_k = T - 2^{-k}$, cette stratégie est détaillé dans l'ouvrage d'[Ingersoll \(1988\)](#).

De plus, V doit être autofinancé, c'est-à-dire que les variations de V_t sont uniquement dues aux variations des prix des actifs qui le composent sans ajout ou retrait de fond

$$dV_t = a_t dS_t + b_t dB_t \implies V_t = V_0 + \int_0^t a_u dS_u + \int_0^t b_u dB_u.$$

En effet, si le portefeuille n'est pas autofinancé, les flux financiers des deux titres ne sont plus les mêmes et l'absence d'opportunité d'arbitrage ne permet pas de conclure à l'égalité entre la valeur du portefeuille et la valeur du titre répliqué.

Par absence d'opportunité d'arbitrage, le produit dérivé doit avoir la même valeur que ce portefeuille de réplication i.e. $V_t = C_t$, $\forall t \in [0, T]$. Une preuve de ce résultat est présentée en annexe A.1.

À partir de cette observation, plusieurs approches permettent de valoriser le produit dérivé. Deux d'entre elles seront présentées : la première repose sur la résolution d'une équation aux dérivées partielles (EDP) et la seconde, la plus populaire, sur une approche probabiliste.

2.2.1 Résolution d'une EDP

En supposant que la valeur de l'option s'écrit comme une fonction $C^{1,2}$ du temps et du sous-jacent, le lemme d'Ito permet d'obtenir la dynamique de C_t comme

$$dC_t = dC(t, S_t) = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial C}{\partial S} dS_t.$$

L'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage implique que pour tout $t \in [0, T]$, $V_t = C_t$ ce qui permet d'obtenir l'équation aux dérivées partielles (EDP) de Black-Scholes :

$$\frac{\partial C}{\partial t}(t, S) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(t, S) + rS \frac{\partial C}{\partial S}(t, S) = rC(t, S), \quad \forall (t, S) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+$$

avec la condition de bord

$$C(T, S) = h(S), \quad \forall S \in \mathbb{R}_+.$$

Une solution de cette équation donne le prix du produit dérivé pour une date $t \geq 0$ et un cours du sous-jacent S en date t .

La règle de Leibniz permet de réécrire l'équation

$$\frac{\partial C}{\partial t}(t, S) + \frac{1}{2} \sigma^2 (S \frac{\partial}{\partial S})^2 C(t, S) + (r - \frac{1}{2} \sigma^2) S \frac{\partial C}{\partial S}(t, S) - rC(t, S) = 0, \quad \forall (t, S) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+.$$

Et par les changements de variables $S = e^x$ et $t = T - \tau$, on obtient une équation à coefficients constants

$$\frac{\partial C}{\partial \tau}(\tau, x) - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(\tau, x) - (r - \frac{1}{2} \sigma^2) \frac{\partial C}{\partial x}(\tau, x) + rC(\tau, x) = 0, \quad \forall (\tau, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}.$$

Une solution de cette équation peut être obtenue en prenant la transformée de Fourier des termes de l'EDP.

En notant $\hat{C}(\tau, w) = \mathcal{F}\{C\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} C(\tau, x) dx$ la transformée de Fourier de C , l'EDP devient une équation différentielle ordinaire (EDO) en τ

$$\frac{\partial \hat{C}}{\partial \tau}(\tau, w) = -\frac{\sigma^2 w^2}{2} \hat{C}(\tau, w) + iw(r - \frac{1}{2} \sigma^2) \hat{C}(\tau, w) - r \hat{C}(\tau, w)$$

d'où

$$\hat{C}(\tau, w) = \hat{C}(0, w)e^{r\tau} \exp\left(-\frac{\sigma^2 w^2}{2}\tau + iw\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right) = \hat{C}(0, w)e^{r\tau}\varphi(w).$$

On reconnaît la fonction caractéristique $\varphi : w \mapsto \mathbb{E}[-iwX]$ d'une loi normale $X \sim \mathcal{N}\left((r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau, \sigma^2\tau\right)$, on peut donc réécrire

$$\hat{C}(\tau, w) = e^{-r\tau} \mathcal{F}\{(C_0 * f_X)(x)\},$$

où $*$ est le produit de convolution, C_0 la fonction $x \mapsto C(0, x)$ et f_X la densité d'une loi $\mathcal{N}\left((r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau, \sigma^2\tau\right)$.

En utilisant la transformation inverse et les changements de variables dans l'autre sens

$$C(t, S) = e^{-r(T-t)} \int_0^\infty h(y) \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp\left(-\frac{\left(\log(y) - (\log(S) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t))\right)^2}{2\sigma^2(T-t)}\right) dy.$$

2.2.2 Espérance sous une mesure martingale équivalente

L'utilisation du théorème de Girsanov permet de valoriser le produit dérivé sous la forme d'une espérance sous une certaine probabilité.

L'intuition derrière cette approche est d'annuler artificiellement la prime de risque par un changement de probabilité de sorte à évaluer les titres comme le feraient des agents neutres au risque.

Pour établir cette propriété de manière rigoureuse, il suffit de montrer que les processus de prix actualisés au taux sans risque des portefeuilles admissibles sont des martingales sous une probabilité bien choisie appelée mesure martingale équivalente. En particulier, sous une telle probabilité le prix du portefeuille de réplication actualisé au taux sans risque est une martingale.

Une martingale est un processus constant en moyenne. De manière plus formelle, un processus stochastique M est une (\mathcal{F}_t) -martingale si et seulement si :

1. M est (\mathcal{F}_t) -adapté ;
2. $\forall t > 0, \mathbb{E}[|M_t|] < \infty$;
3. $\forall 0 < s < t, \mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$.

En identifiant une mesure martingale équivalente \mathbb{Q} , selon la définition d'une martingale, pour tout $t \in [0, T]$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT}V_T | \mathcal{F}_t] = e^{-rt}V_t,$$

et l'absence d'opportunité d'arbitrage conduit à la règle de valorisation

$$C_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)}C_T|\mathcal{F}_t].$$

Changement de mesure et théorème de Girsanov

Les changements de mesure reposent sur le théorème de Radon-Nikodym qui garantit l'existence d'une densité de passage d'une mesure absolument continue par rapport à une autre.

L'absolue continuité d'une mesure \mathbb{Q} par rapport à une mesure \mathbb{P} (notée $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$) est définie par

$$\forall A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A) = 0 \implies \mathbb{Q}(A) = 0.$$

Le théorème de Radon-Nikodym énonce que pour deux mesures σ -finies \mathbb{Q} et \mathbb{P} sur l'espace mesurable (Ω, \mathcal{F}) , $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ si, et seulement si, il existe une fonction mesurable positive f telle que pour tout $A \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A f d\mathbb{P},$$

où f est la dérivée de Radon-Nikodym (souvent notée $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$).

Dans notre contexte, un changement de mesure est recherché dans un espace de probabilité filtré dont la filtration est engendrée par un mouvement brownien standard. Le théorème s'applique aux mesures de probabilité car elles sont finies, permettant ainsi de définir des mesures de probabilité absolument continues par rapport à la mesure historique via leur dérivée de Radon-Nikodym.

Dans l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$, le théorème de Radon-Nikodym permet de définir une mesure $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ à partir d'une variable aléatoire positive, sa dérivée de Radon-Nikodym $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$. Pour que la mesure soit bien définie dans cet espace filtré, il est nécessaire de considérer un processus de Radon-Nikodym $Z_t = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t}$, \mathcal{F}_t -adapté, engendré par la dérivée définie sur l'ensemble de la tribu \mathcal{F} .

Ce processus doit être d'espérance constante égale à 1 pour que \mathbb{Q} définisse bien une probabilité. En réalité ce processus vérifie une condition plus forte, il s'agit d'une $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ -martingale. En effet si $s < t$, pour tout $(F_s, F_t) \in \mathcal{F}_s \times \mathcal{F}_t$

$$\int_{F_s} d\mathbb{Q} = \int_{F_t} \mathbb{1}_{F_s} d\mathbb{Q} = \int_{F_t} \mathbb{1}_{F_s} Z_t d\mathbb{P} = \int_{F_s} Z_t d\mathbb{P} = \int_{F_s} \mathbb{E}[Z_t | \mathcal{F}_s] d\mathbb{P}$$

et

$$\int_{F_s} d\mathbb{Q} = \int_{F_s} Z_s d\mathbb{P}$$

d'où par définition de l'espérance conditionnelle

$$\mathbb{E}[Z_t | \mathcal{F}_s] = Z_s.$$

Ainsi un changement de probabilité est entièrement déterminé par le choix d'une $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ -martingale positive Z telle que $\mathbb{E}[Z_T] = Z_0 = 1$.

Un choix naturel est un processus stochastique de dynamique

$$dZ_t = \theta_t Z_t dW_t \text{ avec } \theta \text{ un processus } (\mathcal{F}_t)\text{-adapté}$$

qui est une martingale positive sous certaines conditions d'intégrabilité.

En effet,

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t \theta_u Z_u dW_u$$

est une martingale en tant qu'intégrale d'Ito et l'application du lemme d'Ito à $\log(Z_t)$ nous donne :

$$Z_t = Z_0 \exp \left(\int_0^t \theta_u dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_u^2 du \right)$$

qui est un processus positif car $Z_0 = 1 > 0$.

La condition d'intégrabilité la plus connue est la condition de Novikov

$$\mathbb{E}[e^{-\frac{1}{2} \int_0^T \theta_t^2 dt}] < \infty.$$

Le théorème de Girsanov nous donne l'effet d'une telle transformation sur la dynamique du mouvement brownien sous \mathbb{Q} .

Selon ce théorème,

$$dW_t = \theta_t dt + dW_t^{\mathbb{Q}},$$

où $dW_t^{\mathbb{Q}}$ est un mouvement brownien sous la mesure de probabilité \mathbb{Q} caractérisée par le processus de Radon-Nikodym (Z_t) vérifiant $\begin{cases} dZ_t = \theta_t Z_t dW_t \\ Z_0 = 1 \end{cases}$.

La démonstration de ce théorème est disponible en annexe [A.2](#).

Le processus θ du théorème est appelé noyau de Girsanov et son choix détermine entièrement le changement de probabilité. On note que la probabilité ainsi définie est équivalente à \mathbb{P} car $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} = \frac{1}{Z_T}$ donc d'après le théorème de Radon-Nikodym $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$.

Retour à la valorisation

Il est maintenant possible de définir une mesure martingale équivalente en utilisant le théorème de Girsanov. Il suffit de déterminer le noyau de Girsanov qui permet d'éliminer le terme de dérive du processus de prix actualisé d'un portefeuille autofinancé admissible. La dynamique du prix actualisé au taux sans risque d'un portefeuille autofinancé admissible est déterminée à

l'aide du lemme d'Ito

$$\begin{aligned}
 de^{-rt}V_t &= e^{-rt}(-rV_tdt + dV_t) \\
 &= e^{-rt}(-r(a_tS_t + b_tB_t)dt + (a_tdS_t + b_tdB_t)) \\
 &= e^{-rt}(-ra_tS_tdt - rb_tB_tdt + a_tS_t(\mu dt + \sigma dW_t) + rb_tB_tdt) \\
 &= e^{-rt}a_tS_t((\mu - r)dt + \sigma dW_t).
 \end{aligned}$$

On définit une probabilité \mathbb{Q} par sa dérivée de Radon-Nikodym en utilisant le processus défini précédemment

$$\left. \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \right|_{\mathcal{F}_t} = \exp \left(\int_0^t \theta_u dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_u^2 du \right).$$

Par le théorème de Girsanov, on peut réécrire la dynamique du prix actualisé au taux sans risque d'un portefeuille autofinancé admissible

$$\begin{aligned}
 de^{-rt}V_t &= e^{-rt}a_tS_t((\mu - r)dt + \sigma dW_t) = e^{-rt}a_tS_t((\mu - r)dt + \sigma(dW_t^{\mathbb{Q}} + \theta_t dt)) \\
 &= e^{-rt}a_tS_t((\mu - r + \sigma\theta_t)dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}})
 \end{aligned}$$

On cherche θ_t tel que $\mu - r + \sigma\theta_t = 0$, c'est à dire $\theta_t = -\frac{\mu-r}{\sigma}$.

La différence $\mu - r$ est le surplus de rendement demandé par les investisseurs pour supporter la source de risque brownienne. Il s'agit d'une prime de risque qui reflète l'aversion au risque des investisseurs du marché. Le ratio $\frac{\mu-r}{\sigma}$ est le ratio de Sharpe. Il s'interprète comme une prime de risque par unité de risque prise. En prenant ce ratio comme noyau de Girsanov on a défini une mesure \mathbb{Q} qui rend martingale locale le prix du portefeuille actualisé au taux sans risque.

Si $\mathbb{E}[\int_0^t (a_u e^{-ru} \sigma S_u)^2 du] < \infty$ alors le prix du portefeuille actualisé au taux sans risque est une vraie martingale en tant qu'intégrale d'Ito. Dans ce contexte, \mathbb{Q} est plus connue sous le nom de probabilité risque-neutre.

Finalement la valeur d'un produit dérivé européen dans le modèle de Black-Scholes s'écrit comme l'espérance du *payoff* de ce dérivé actualisé au taux sans risque sous la probabilité risque neutre, i.e.

$$\forall t \in [0, T], C_t = V_t = e^{-rt} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_T | \mathcal{F}_t] = e^{-rt} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[h(S_T) | \mathcal{F}_t] = e^{-rt} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C_T | \mathcal{F}_t].$$

La formule obtenue s'avère naturelle pour les actuaires puisqu'elle présente des similitudes avec le calcul d'une prime d'assurance puisqu'elle permet de calculer la prime perçue par un vendeur d'option comme l'espérance des flux futurs qu'il devra payer actualisés.

Néanmoins il convient de souligner que cette méthode de valorisation découle de la mise en place d'un portefeuille de réplcation du produit dérivé. La notion d'évaluation risque-neutre, malgré son appellation, ne revêt aucune signification économique directe. En réalité, elle repré-

sente simplement un outil mathématique ingénieux permettant d'éviter la complexité de résoudre une équation aux dérivées partielles.

2.2.3 Existence de la probabilité risque neutre et absence d'opportunité d'arbitrage

En plus de sa praticité, la valorisation risque neutre d'un produit dérivé permet de s'assurer que la valeur obtenue ne génère pas d'opportunité d'arbitrage. Il s'agit d'une propriété indispensable que devrait vérifier un prix d'équilibre.

Pour s'en convaincre définissons formellement ce qu'est un arbitrage. On dit qu'il y a un arbitrage s'il est possible de construire un portefeuille autofinancé réalisant un profit certain à un instant $T > 0$ à partir d'un capital nul. En notant V_t la valeur de ce portefeuille en t , il y a arbitrage s'il existe $T > 0$ tel que

$$\begin{cases} V_0 = 0 \\ \mathbb{P}(V_T < 0) = 0 \\ \mathbb{P}(V_T > 0) > 0 \end{cases}.$$

Si on suppose qu'il existe une mesure martingale équivalente \mathbb{Q} et que l'on considère un portefeuille V de valeur nulle en 0, on peut montrer qu'il n'est pas possible de remplir les deux conditions d'un arbitrage simultanément. Notons V_t la valeur de V en t .

Supposons que $\mathbb{P}(V_T < 0) = 0$. On a $\mathbb{Q}(V_T < 0) = 0$ car $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$. Ainsi, si $\mathbb{P}(V_T > 0) > 0$ alors $\mathbb{Q}(V_T > 0) > 0$. Par conséquent $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_T] > 0$ ce qui est absurde car $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT}V_T] = V_0 = 0$.

2.2.4 Unicité du prix

On peut remarquer que l'approche probabiliste (2.2.2) et l'approche par résolution d'une EDP (2.2.1) aboutissent à une valeur identique pour le produit dérivé. Il convient alors de s'interroger sur l'unicité de cette valeur.

En partant de l'hypothèse de l'absence d'opportunités d'arbitrage, il a été montré qu'il était possible de construire une mesure martingale équivalente \mathbb{Q} telle que la valeur C_t de tout produit dérivé puisse s'écrire

$$C_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)}C_T|\mathcal{F}_t].$$

Ainsi l'unicité de la valeur d'un produit dérivé est équivalente à l'unicité de \mathbb{Q} . Supposons qu'il existe deux mesures martingales équivalentes \mathbb{Q}_1 et \mathbb{Q}_2 .

Dans le marché que l'on a considéré, on a construit un portefeuille autofinancé qui réplique parfaitement le *payoff* d'un produit dérivé européen quelconque.

En particulier pour tout $A \in \mathcal{F}$, les produits dérivés de *payoff* $h(S_T) = e^{rT} \mathbb{1}_A$ sont répliquables et en notant A_t le prix en t d'un portefeuille de réplication d'un tel dérivé, on a

$$\mathbb{Q}_1(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1}[e^{-rT} A_T] = A_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_2}[e^{-rT} A_T] = \mathbb{Q}_2(A) \implies \mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q}_2.$$

Dans le modèle de Black-Scholes, le prix d'un produit dérivé européen est uniquement déterminé par la règle d'évaluation risque neutre

$$C_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)} C_T | \mathcal{F}_t].$$

Chapitre 3

Valorisation basée sur l'utilité

L'approche traditionnelle de valorisation des produits dérivés s'appuie essentiellement sur l'absence d'opportunités d'arbitrage et la réplication, écartant ainsi la nécessité de considérer les préférences individuelles des acteurs du marché. Cette méthode présente l'intérêt pratique de réduire le problème de valorisation des produits dérivés au calcul d'une espérance.

Ce chapitre introduit une méthode alternative davantage actuarielle et inspirée de la théorie économique, similaire à la détermination des principes de primes en théorie du risque (Kaas *et al.*, 2008). Cette approche est une extension du principe d'équivalent certain développé en théorie de l'utilité espérée de Von Neumann et Morgenstern (1944). Elle a été initialement appliquée à la valorisation des dérivés par Hodges et Neuberger (1989), et est expliquée en détail dans l'ouvrage de Carmona (2009) sur la valorisation basée sur l'utilité.

La première section présente des rappels sur les fondements de la théorie de l'utilité espérée, expliquant comment les préférences des agents vis-à-vis du risque peuvent être modélisées et quantifiées. La seconde section aborde le concept de prix d'indifférence pour valoriser des produits dérivés, détaillant le processus de détermination de ce prix sous les hypothèses classiques du modèle de Black-Scholes. Bien que l'approche diffère de la valorisation par réplication, il apparaît que les deux méthodes aboutissent à la même règle d'évaluation lorsqu'elles reposent sur ces mêmes hypothèses.

Ce mémoire propose une démonstration du fait que, dans un marché complet, le prix d'indifférence exponentiel d'un produit dérivé européen coïncide avec son prix de réplication. L'originalité de cette démonstration réside dans son approche, qui ne fait appel ni à des arguments de réplication ni à une reformulation du problème de valorisation par indifférence comme une minimisation sur un ensemble de mesures. Elle utilise notamment la transformation introduite par Zariphopoulou (2001), connue sous le nom de 'distortion'. Bien que cette démonstration soit probablement connue, aucune démonstration similaire n'a été identifiée dans la littérature académique consultée au moment de la rédaction, ce qui justifie son inclusion dans ce mémoire.

3.1 Théorie de l'utilité espérée

La théorie de l'utilité espérée fournit une base théorique pour modéliser les préférences d'individus appelés agents et permet d'étudier le comportement de ces agents vis à vis du risque.

Le risque est modélisé par des loteries qui sont des scénarios où les résultats sont incertains mais associés à des probabilités connues i.e. des lois de probabilités. Si L désigne une loterie, on notera X_L la variable aléatoire associée.

Cette théorie n'est utilisable que pour des agents rationnels.

3.1.1 Axiomes de rationalité des agents

Notons $L_1 \succ L_2$ la relation L_1 est préféré à L_2 , $L_1 \sim L_2$ la relation d'indifférence entre L_1 et L_2 et \mathcal{L} l'ensemble des loteries. Des agents sont dits rationnels si leur préférences pour les loteries vérifient les 5 axiomes suivants :

- Complétude : $\forall L_1, L_2 \in \mathcal{L}, L_1 \succ L_2$ ou $L_2 \succ L_1$.

Chaque agent peut classer toutes les loteries possibles de manière cohérente, c'est-à-dire qu'il peut toujours dire qu'il préfère une loterie à une autre ou qu'il les considère équivalentes.

- Transitivité : $\forall L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{L}, L_1 \succ L_2$ et $L_2 \succ L_3 \implies L_1 \succ L_3$.

Si un agent préfère une loterie L_1 à une loterie L_2 et qu'il préfère L_2 à une autre loterie L_3 alors il préfère L_1 à L_3 .

- Monotonie : Si $X_{L_1}(\omega) \leq X_{L_2}(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$ alors l'agent préfère la loterie L_2 à la loterie L_1 .

- Continuité : $\forall L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{L}, \exists p \in [0, 1], L_3 \succ L_2 \succ L_1 \implies L_2 \sim pL_3 + (1-p)L_1$.

Si une loterie L_2 est préférée à L_1 et moins préférée à L_3 , alors l'agent est indifférent entre L_2 et une loterie combinaison convexe de L_1 et L_3 .

- Indépendance : $\forall L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{L}, L_2 \succ L_1 \iff \forall p \in [0, 1], pL_2 + (1-p)L_3 \succ pL_1 + (1-p)L_3$.

Si un agent préfère une loterie L_2 à une loterie L_1 alors une combinaison identique de ces deux loteries avec une troisième loterie L_3 ne changera pas la préférence de l'agent.

Les préférences de chaque agent rationnel peuvent être représenté par une fonction d'utilité (unique à une transformation affine croissante près), c'est le théorème de représentation de Von Neumann–Morgenstern.

3.1.2 Fonctions d'utilité

Une fonction d'utilité, souvent notée U , est une fonction continue et strictement croissante qui à une réalisation de loterie associe un nombre réel correspondant à un score d'utilité. Le nombre en lui même a peu d'importance, les fonctions d'utilités servent à comparer des loteries entre elles en fonction des préférences de l'agent. On a l'équivalence

$$L_1 \text{ est préférée à } L_2 \iff \mathbb{E}[U(X_{L_1})] \geq \mathbb{E}[U(X_{L_2})].$$

Ainsi, dans le cadre de cette théorie, l'agent prend les décisions qui maximisent son espérance d'utilité.

On peut définir la notion d'équivalent certain (d'une loterie) qui correspond au montant certain qui rend l'agent indifférent entre la perception de cette somme certaine et la jouissance de la loterie

$$\mathbb{E}[U(X_L)] = U(EC(L)), \text{ avec } EC(L) \text{ l'équivalent certain d'une loterie } L.$$

La prime de risque λ est le montant d'espérance de gain qu'un agent exige pour accepter de prendre une loterie en échange de son équivalent certain

$$\lambda = \mathbb{E}[X_L] - EC(L).$$

Cette notion de prime de risque permet de caractériser l'aversion, le goût et la neutralité au risque.

On dira que l'agent est

$$\begin{cases} \text{averse au risque si } \lambda > 0 \text{ (l'agent demande une prime pour accepter le risque)} \\ \text{neutre au risque si } \lambda = 0 \text{ (l'agent ne demande aucune prime)} \\ \text{attiré par le risque si } \lambda < 0 \text{ (l'agent paye une prime pour prendre le risque)} \end{cases}.$$

Par l'inégalité de Jensen, si U est strictement concave, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U(X_L)] < U(\mathbb{E}[X_L]) &\implies U(EC(L)) < U(\mathbb{E}[X_L]) \\ &\implies EC(L) < \mathbb{E}[X_L] \text{ car } U \text{ est strictement croissante} \\ &\implies \lambda > 0 \implies \text{L'agent est averse au risque.} \end{aligned}$$

Par le même raisonnement, si U est strictement convexe alors l'agent est attiré par le risque. Et si U est affine alors l'agent est neutre au risque.

Ainsi, si U est deux fois dérivable alors l'attitude de l'agent face au risque est entièrement déterminée par le signe de U'' .

En supposant U suffisamment régulière, et en appliquant un développement de Taylor à l'ordre 2 autour de la moyenne de la loterie à l'équation de la définition de l'équivalent certain, on obtient pour la prime de risque

$$\lambda \approx -\frac{1}{2} \frac{U''(\mathbb{E}[X])}{U'(\mathbb{E}[X])} \text{Var}[X].$$

Ce qui justifie la définition du coefficient d'aversion au risque absolu

$$A(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)}$$

qui mesure l'aversion au risque et n'est pas affecté par une transformation affine croissante de U .

On peut classer les fonctions d'utilité en fonction du signe de la dérivé de ce coefficient.

Une fonction d'utilité peut donc être CARA, IARA ou encore DARA où ARA signifie *Absolute Risk Aversion* et les lettres C, I, D signifient respectivement *Constant*, *Increasing* et *De-*

creasing en fonction de la sensibilité du coefficient d'aversion au risque absolu par rapport au niveau de richesse.

Les données expérimentales et empiriques sont pour la plupart compatibles avec une diminution de l'aversion absolue pour le risque (Blume et Friend, 1975). Or ce sont les fonctions CARA qui sont les plus utilisées car elles permettent de réaliser des calculs explicites.

Les fonctions CARA sont aussi appelées fonctions d'utilité exponentielles puisque qu'elles s'écrivent sous la forme

$$U(x) = \frac{c_1}{a} e^{-ax} + c_2, \text{ où } a \text{ est le coefficient d'aversion au risque absolu, } c_1 < 0 \text{ et } c_2 \in \mathbb{R}.$$

La principale caractéristique d'une telle fonction d'utilité est qu'elle ne prend pas en compte la richesse initiale de l'agent dans ses préférences.

3.2 Prix d'indifférence d'un produit dérivé

L'idée est de généraliser le concept d'équivalent certain pour la valorisation de produits dérivés. Il s'agit de déterminer le prix qui rend un agent indifférent entre le paiement de ce prix pour percevoir le *payoff* d'un produit dérivé et l'utilisation du montant non payé pour la construction d'un portefeuille admissible.

On se replace dans les mêmes conditions de marché que dans le modèle de Black-Scholes présenté à la section 2.2 et on conserve les mêmes notations.

L'objectif va aussi être de valoriser un produit dérivé européen C de maturité T mais cette fois-ci dans le cadre de la théorie de l'utilité espérée. On va considérer un agent ayant une fonction d'utilité U et dont le but est de maximiser son utilité espérée en date T . Plus particulièrement son but est de maximiser l'utilité espérée de la richesse qu'il peut générer à partir d'un portefeuille composé des actifs échangeables du marché.

On notera $\Theta_{t,T}$ l'ensemble des stratégies admissibles sur l'intervalle $[t, T]$ et $V_T^{x,\theta}$ la valeur en T d'un portefeuille formé à partir d'une stratégie $\theta \in \Theta_{t,T}$ à partir d'un capital initial x en t .

On définit la fonction de valeur $\mathcal{V} : (t, x, k, s) \mapsto \mathcal{V}(t, x, k, s)$ qui donne la valeur en t qu'associe l'agent à la somme de k fois le *payoff* $h(S_T)$ de C et de la richesse générée en T par une stratégie optimale (du point de vue de son utilité espérée) à partir d'un capital x en t et sachant que $S_t = s$.

Formellement,

$$\mathcal{V}(t, x, k, s) = \sup_{\theta \in \Theta_{t,T}} \mathbb{E}[U(V_T^{x,\theta} + kh(S_T))] = \sup_{(a_u, b_u) \in \Theta_{t,T}} \mathbb{E}[U(a_T S_T + b_T B_T + kh(S_T)) | V_t = x, S_t = s].$$

Dans la suite, on exprimera b_t en fonction de a_t et V_t et on notera $\mathcal{A}_{t,T}$ l'ensemble des processus (a_u) tels que $(a_u, \frac{V_u - a_u S_u}{B_u}) \in \Theta_{t,T}$.

Le prix d'indifférence $p(t, s)$ de C en t sera défini par l'équation

$$\mathcal{V}(t, x, 0, s) = \mathcal{V}(t, x - p(t, s), 1, s). \quad (3.1)$$

Il s'agit du prix $p(t, s)$ pour lequel l'investisseur est indifférent (au sens où son utilité espérée dans le cadre d'une stratégie optimale reste inchangée) entre ne rien payer et ne pas avoir le *payoff* $h(S_T)$ et payer $p(t, s)$ en t pour recevoir le *payoff* $h(S_T)$ en date T .

L'obtention du prix d'indifférence passe par la détermination de la fonction de valeur puis la résolution de l'équation 3.1. Dans la suite, seules les grandes étapes du calcul seront présentées. Le lecteur intéressé trouvera le détail des calculs dans l'annexe B. Dans ce cadre, la fonction valeur est solution d'une équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman. Pour s'en convaincre, il faut utiliser le principe d'optimalité de Bellman (1957) et le lemme d'Ito.

Le principe d'optimalité de Bellman stipule qu'une solution optimale a la propriété que, quelles que soient les conditions initiales et les stratégies sur une période initiale, les stratégies adoptées sur la période restante doivent être optimales pour le problème restant, l'état résultant des premières décisions prises étant la condition initiale.

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(t, x, k, s) &= \sup_{a_t \in \mathcal{A}_{t, t+dt}} \mathbb{E}[\mathcal{V}(t + dt, x + dV_t, k, s + dS_t) | V_t = x, S_t = s] \\ \implies \sup_{a_t \in \mathcal{A}_{t, t+dt}} \mathbb{E}[\mathcal{V}(t + dt, x + dV_t, k, s + dS_t) - \mathcal{V}(t, x, k, s) | V_t = x, S_t = s] &= 0 \end{aligned}$$

En supposant que la fonction \mathcal{V} est $C^{1,2,0,2}$ le lemme d'Ito nous donne

$$\begin{aligned} d\mathcal{V} &= \mathcal{V}(t + dt, x + dV_t, k, s + dS_t) - \mathcal{V}(t, x, k, s) \\ &= \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial V^2} a_t^2 \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial V \partial S} a_t \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial V} (a_t(\mu - r) S_t + r V_t) + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial S} \mu S_t \right) dt \\ &\quad + \sigma S_t \left(a_t \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial V} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial S} \right) dW_t \text{ (annexe B.1).} \end{aligned}$$

Par conséquent, en combinant la dynamique de \mathcal{V} et le principe d'optimalité, on obtient une équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial S^2} \sigma^2 s^2 + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial V} r x + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial S} \mu s + \sup_{a_t \in \mathcal{A}_{t, t+dt}} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial V^2} a_t^2 \sigma^2 s^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial V \partial S} a_t \sigma^2 s^2 + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial V} a_t (\mu - r) s \right] = 0.$$

3.2.1 Résolution dans le cas d'une fonction d'utilité exponentielle

Cette équation admet une solution explicite dans le cas d'une fonction d'utilité exponentielle. Cette fonction nous permet de factoriser le capital initial et donc de supprimer la dépendance en x dans l'EDP.

Si $U(x) = -\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma x}$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(t, x, k, s) &= \sup_{\theta \in \Theta_{t,T}} \mathbb{E}[U(V_T^{x,\theta} + kh(S_T))] \\ &= \sup_{a_u \in \mathcal{A}_{t,T}} \mathbb{E} \left[U \left(x e^{r(T-t)} + \int_t^T a_u d(e^{r(T-u)} S_u) + kh(S_T) \right) \right] \quad (\text{annexe B.2}) \\ &= -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma x e^{r(T-t)}} \inf_{a_u \in \mathcal{A}_{t,T}} \mathbb{E} \left[e^{-\gamma \left(\int_t^T a_u d(e^{r(T-u)} S_u) + kh(S_T) \right)} \middle| S_t = s \right] \\ &= -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma x e^{r(T-t)}} g(T-t, \log(s)).\end{aligned}$$

En posant $\tau = T - t$ et $y = \log(s)$ l'équation HJB se réécrit (annexe B.3)

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 \left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) - \mu \frac{\partial g}{\partial y} + \sup_{a_t \in \mathcal{A}_{t,T}} \left[- \left(\frac{1}{2} \gamma^2 \sigma^2 e^{2y} e^{2r\tau} g \right) a_t^2 + \left(\gamma \sigma^2 e^y e^{r\tau} \frac{\partial g}{\partial y} + \gamma (\mu - r) e^y e^{r\tau} g \right) a_t \right] = 0.$$

Le processus optimal a_t^* est l'abscisse du sommet d'une parabole concave, on a donc

$$a_t^* = \frac{\sigma^2 \frac{\partial g}{\partial y} + (\mu - r) g}{\sigma^2 \gamma g} e^{-r\tau} e^{-y}.$$

Après simplification, on obtient

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} + \left(\frac{1}{2} \sigma^2 - r \right) \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2}{g} + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 g = 0.$$

L'équation obtenue est une EDP non-linéaire qui peut être linéarisée par une transformation de Hopf-Cole (annexe B.4). En effet, en posant $g(\tau, y) = e^{w(\tau, y)}$, l'équation se réécrit

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{1}{2} \sigma^2 - r \right) \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 = 0.$$

Il est possible de résoudre cette équation en prenant la transformée de Fourier de tous les termes comme dans la sous-section 2.2.1, ou alors en se ramenant à une équation de la chaleur. On explore la deuxième solution.

En posant $w(\tau, y) = W \left(\tau, y + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \tau \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 \tau = W(u, v) - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 u$, on obtient une équation de la chaleur (annexe B.5)

$$\frac{\partial W}{\partial u} = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 W}{\partial v^2},$$

dont la solution est

$$W(u, v) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi u}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2 u}} W(0, v - z) dz.$$

En remontant les changements de variables dans l'autre sens, on peut déterminer g

$$g(\tau, y) = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 \tau} \exp \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi \tau}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2 \tau}} W(0, y + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \tau - z) dz \right).$$

On reconnaît l'espérance d'une loi log-normale

$$\begin{aligned} g(\tau, y) &= e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2\tau} \exp\left(\mathbb{E}[W(0, y + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau + \sigma\sqrt{\tau}N)]\right), \quad N \sim \mathcal{N}(0, 1) \\ &= e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2\tau} \exp\left(-\gamma k \mathbb{E}\left[h\left(e^{y+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\tau+\sigma\sqrt{\tau}N}\right)\right]\right). \end{aligned}$$

La dernière égalité vient de la condition de bord (annexe B.6)

$$W(0, z) = -\gamma k h(e^z).$$

La fonction de valeur s'écrit finalement

$$\mathcal{V}(t, x, k, s) = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma x e^{r(T-t)} - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2(T-t)} \exp\left(-\gamma k \mathbb{E}\left[h\left(se^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}N}\right)\right]\right).$$

En reprenant l'équation 3.1, on obtient finalement le prix d'indifférence exponentiel

$$p(t, s) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}\left[h\left(se^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}N}\right)\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)} h(S_T) | \mathcal{F}_t].$$

On observe que

- le prix d'indifférence exponentiel ne dépend pas du paramètre d'aversion au risque γ ;
- bien qu'on soit parti de la dynamique de S sous la probabilité historique et qu'on n'ait jamais cherché à exprimer S sous une probabilité martingale équivalente \mathbb{Q} , le prix d'indifférence exponentiel coïncide avec le prix risque neutre du chapitre 2.

3.2.2 Fonction d'utilité quelconque

En réalité, ce résultat ne dépend pas du type de fonction d'utilité considéré puisque dans un marché complet, on peut répliquer le dérivé avec la stratégie de *delta-hedging*, c'est à dire $\theta^{BS} = \left(\frac{\partial C}{\partial S}(t, S_t), \frac{V_t - \frac{\partial C}{\partial S}(t, S_t)S_t}{B_t}\right)$ pour le prix $p^{BS} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)} h(S_T) | \mathcal{F}_t]$ donc

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(t, x, 0, s) &= \sup_{\theta \in \Theta_{t,T}} \mathbb{E}[U(V_T^{x,\theta})] \\ &= \sup_{\theta \in \Theta_{t,T}} \mathbb{E}[U(V_T^{x,\theta} + h(S_T) - V_T^{p^{BS}, \theta^{BS}})] \\ &= \sup_{\theta \in \Theta_{t,T}} \mathbb{E}[U(V_T^{x-p^{BS}, \theta-\theta^{BS}} + h(S_T))] \\ &= \sup_{\theta \in \Theta_{t,T}} \mathbb{E}[U(V_T^{x-p^{BS}, \theta} + h(S_T))] = \mathcal{V}(t, x - p^{BS}, 1, s). \end{aligned}$$

Chapitre 4

Impact de l'illiquidité sur la valorisation

Avec les hypothèses usuelles d'absence d'opportunité d'arbitrage et d'échanges en continu sans frais et sans frictions les approches de valorisation basées sur la réplication ou sur la théorie de l'utilité espérée sont équivalentes à l'approche de valorisation risque neutre.

L'illiquidité spécifique des titres de sociétés non cotées correspond à une restriction sur l'ensemble des stratégies admissibles. En particulier, l'impossibilité de réaliser des échanges sur une période donnée empêche de réaliser la stratégie de *delta-hedging* ce qui rend la réplication d'un produit dérivé européen impossible. Ainsi le prix de réplication n'existe plus et le prix d'indifférence ne correspond plus nécessairement à la valeur risque neutre. D'autre part, la stratégie optimale du point de vue de l'utilité espérée d'un agent n'est plus forcément réalisable.

Ce chapitre vise à mieux appréhender l'impact de l'illiquidité sur la valorisation des produits dérivés.

La [première section](#) explore l'impact de l'illiquidité sur la réplication, la valorisation risque neutre et la valorisation par indifférence à l'aide d'un exemple chiffré dans un marché en temps discret. Il apparaîtra que l'introduction de l'illiquidité rend le marché incomplet. La [deuxième section](#) examine les solutions de valorisation en marché incomplet. Cela inclut une revue des méthodes couramment employées dans la littérature, ainsi que la proposition d'une nouvelle méthode basée sur la calibration du coefficient d'aversion au risque. La [troisième section](#) décrit la démarche pour aborder l'illiquidité dans notre contexte spécifique. Les limitations des méthodes actuelles pour cette situation particulière seront discutées, et les raisons pour lesquelles la méthode proposée pourrait constituer une alternative valable seront présentées. La [quatrième section](#) explore la possibilité d'utiliser un marché liquide pour couvrir partiellement le risque associé à l'actif illiquide. Cette approche repose sur l'hypothèse qu'il existe une relation de dépendance entre les actifs des deux marchés, permettant ainsi d'utiliser les informations du marché liquide pour affiner la valorisation sur le marché illiquide.

4.1 Illustration par un exemple

Dans cette section, nous mettrons en lumière les conséquences de l'illiquidité sur la valorisation des produits dérivés. Pour illustrer ces concepts, nous présenterons un exemple chiffré dans un marché en temps discret, mettant en évidence les impacts de l'illiquidité sur la réplication du produit dérivé et sur la probabilité risque neutre. Cette analyse nous permettra de souligner les défis rencontrés lors de l'application des méthodes classiques de valorisation à des actifs illiquides.

Supposons un marché à 3 périodes $t \in \{0, 1, 2\}$ avec les 3 titres habituels (S, B, C) .

On va supposer que :

- $S_0 = 100$ et $S_k \in \{\frac{5}{4}S_{k-1}, \frac{4}{5}S_{k-1}\}$ pour $k \in \{1, 2\}$.
- $B_0 = 1$ et $B_k = 1.1 \times B_{k-1}$ pour $k \in \{1, 2\}$.
- C est une option d'achat européenne sur S de maturité 1.

4.1.1 Evaluation de l'option d'achat dans le marché liquide

Dans cette sous-section, nous allons évaluer l'option d'achat en utilisant les principes de valorisation décrits dans le chapitre 2. La valorisation sera présentée du point de vue de la réplication et de celui de la probabilité risque neutre.

La figure 4.1 représente les deux premières périodes du marché considéré.

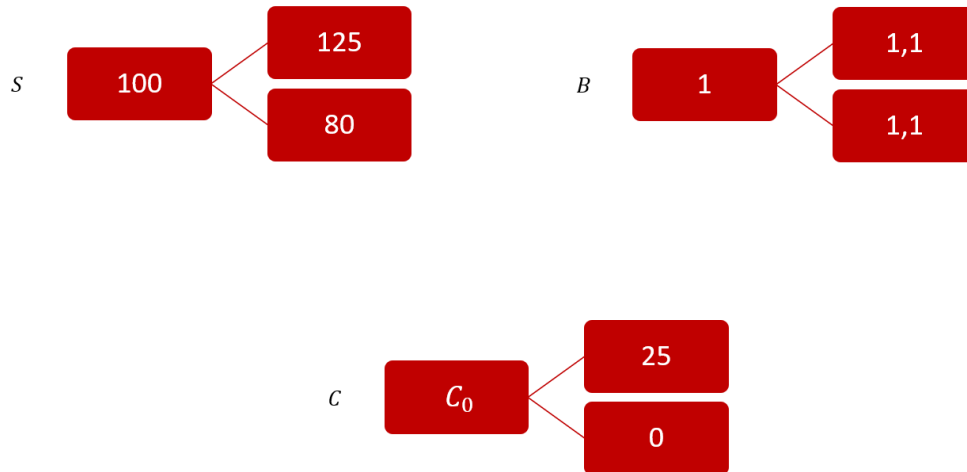


FIGURE 4.1 – Représentation des 3 titres sous forme d'arbre

Valorisation par réplication

L'approche par réplication consiste à constituer un portefeuille en date 0 constitué de n_S part du sous-jacent et n_B part dans l'actif sans risque qui va répliquer le flux terminal de C en

date 1. L'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage nous permet de conclure que la valeur de l'option en date 0 est le prix du portefeuille de réplication en date 0.

Autrement dit :

$$n_S \times S_1 + n_B \times B_1 = C_1 \implies n_S \times S_0 + n_B \times B_0 = C_0.$$

$$n_S \begin{pmatrix} 125 \\ 80 \end{pmatrix} + n_B \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \end{pmatrix} \implies C_0 = \frac{1}{49.5}(27.5S_0 - 2000B_0) = \frac{500}{33} \approx 15.15.$$

Valorisation risque neutre

L'approche par la probabilité risque neutre consiste à identifier la probabilité qui rend martingale l'actif sous-jacent actualisé au taux sans risque. Autrement dit :

$$\begin{cases} (q_1, q_2) \in [0, 1]^2 \\ q_1 + q_2 = 1 \\ \frac{1}{1.1}(125q_1 + 80q_2) = 100 \end{cases} \implies \begin{cases} q_1 = \frac{2}{3} \\ q_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

La valeur de l'option en date 0 s'obtient comme $C_0 = \frac{1}{B_1} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C_1] = \frac{1}{1.1} 25q_1 = \frac{500}{33} \approx 15.15$.

Equivalence des points de vue

On remarque que la valorisation risque neutre n'est qu'une réécriture de l'approche par réplication. Plus précisément, il s'agit d'un changement de base. On passe de la base $\{(125, 80), (1.1, 1.1)\}$ à la base $\{(1.1, 0), (0, 1.1)\}$ dans laquelle la réplication des titres est plus simple à exprimer.

En effet en exprimant le flux terminal de C dans la nouvelle base, on obtient :

$$n_1 \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0 \end{pmatrix} + n_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} n_1 = \frac{1}{1.1} \times 25 \\ n_2 = \frac{1}{1.1} \times 0 \end{cases} \implies C_0 = n_1 q_1 + n_2 q_2 = \frac{1}{B_1} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C_1]$$

où q_1 est la valeur initiale du titre de *payoff* $\begin{pmatrix} 1.1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et q_2 celle du titre de *payoff* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1.1 \end{pmatrix}$.

Et on retrouve bien la probabilité risque neutre à partir du changement de base :

$$\left(\begin{pmatrix} 125 & 1.1 \\ 80 & 1.1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{pmatrix} \right)^t \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

4.1.2 Introduction de l'illiquidité dans le marché

Désormais nous allons constater l'impact de l'introduction d'une illiquidité en date 1. C'est à dire qu'à cette date seul l'actif sans risque devient échangeable. Les titres C et S ne redeviennent échangeables qu'à partir de la date 2.

On fait l'hypothèse que l'option n'est exercé en date 1 que si $S_1 = 125$.

La figure 4.2 représente ce marché.

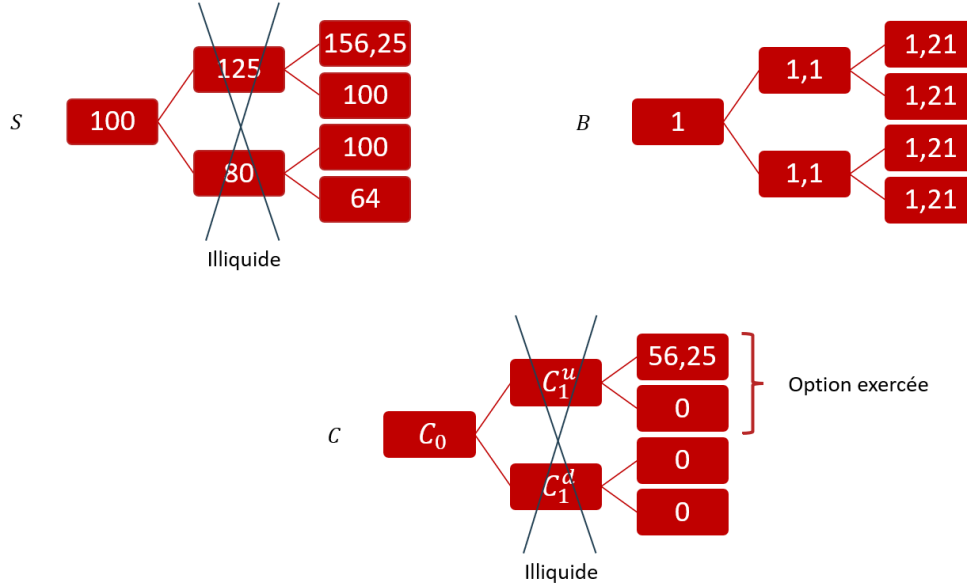


FIGURE 4.2 – Représentation des 3 titres sous forme d'arbre

L'illiquidité va avoir pour effet de rendre le marché incomplet, c'est à dire qu'il ne sera plus possible de répliquer certains flux à partir des titres du marché. Cela signifie que l'absence d'opportunité d'arbitrage n'est plus une condition suffisante pour déterminer la valeur des produits dérivés sur ce marché. Nous illustrerons cette incomplétude du point de vue de la réplication mais également de la probabilité risque neutre.

Impact sur la réplication

L'impossibilité de rééquilibrer son portefeuille en date 1 rend le marché incomplet. En effet, on se retrouve désormais avec deux vecteurs de \mathbb{R}^3 qui ne sont pas suffisant pour engendrer tout \mathbb{R}^3 . En particulier, l'option d'achat n'est pas répliquable car le système d'équation

$$n_S \begin{pmatrix} 156,25 \\ 100 \\ 64 \end{pmatrix} + n_B \begin{pmatrix} 1,21 \\ 1,21 \\ 1,21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56,25 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

n'admet pas de solution.

L'illiquidité nous contraint sur la composition de notre portefeuille. Du point de vue de la réplication, cela nous empêche de répliquer l'option dans tous les états de la nature. Du point de vue des arbitrages, il devient plus dur de faire des arbitrages comme certaines stratégies ne sont plus envisageables. Donc la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage est moins forte.

L'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage n'est pas inutile et fournit un intervalle de prix viables, i.e. des prix qui sont compatibles avec l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbi-

trage.

Pour qu'une option ne génère pas d'opportunité d'arbitrage, son prix doit se situer entre le prix de sous-réplication et le prix de sur-réplication.

Si un portefeuille a un *payoff* inférieur à celui de l'option dans tous les états de la nature, sa valeur doit être inférieure à celle de l'option. De même, si un portefeuille a un *payoff* supérieur à celui de l'option dans tous les états de la nature, sa valeur doit être supérieure à celle de l'option.

Ainsi la valeur de l'option doit se trouver entre le prix maximum d'un portefeuille ayant un *payoff* toujours inférieur à l'option et le prix minimum d'un portefeuille ayant un *payoff* toujours supérieur à l'option qui sont respectivement les prix de sous-réplication et de sur-réplication.

Pour notre exemple, la détermination de ces bornes pour la valeur de l'option est un problème d'optimisation linéaire qui peut être résolu par l'algorithme du simplexe par exemple.

Les programmes d'optimisation s'écrivent :

$$\begin{cases} \min_{(n_B, n_S)} 100n_S + n_B \text{ (Prix de sur-réplication)} \\ 156.25n_S + 1.21n_B \geq 56.25 \\ 100n_S + 1.21n_B \geq 0 \\ 64n_S + 1.21n_B \geq 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \max_{(n_B, n_S)} 100n_S + n_B \text{ (Prix de sous-réplication)} \\ 156.25n_S + 1.21n_B \leq 56.25 \\ 100n_S + 1.21n_B \leq 0 \\ 64n_S + 1.21n_B \leq 0 \end{cases}.$$

La figure 4.3 est une représentation géométrique du problème. Chaque point du plan représente un portefeuille avec en abscisse la quantité d'actif sans risque dans le portefeuille et en ordonnée la quantité de sous-jacent. Le polyèdre bleu représente les portefeuilles qui majorent les flux de l'option et le polyèdre rose représente les portefeuilles qui minorent les flux de l'option. Le vecteur u est un vecteur normal au gradient de la fonction objectif $J(n_B, n_S) = n_B + 100n_S$. Chaque droite parallèle à u correspond aux portefeuilles qui ont le même prix. Comme la fonction objectif est croissante en ses deux variables, on déduit facilement le portefeuille de sous-réplication A et le portefeuille de sur-réplication B. Les prix viables sont les prix des portefeuilles situés entre les deux droites parallèles.

Finalement on obtient l'intervalle de prix $[\frac{2100}{121}, \frac{142500}{4961}] \approx [17.36, 28.72]$.

On remarque que la valeur de l'option du cas liquide n'est plus un prix viable. Cette observation est approfondie dans la sous-section 4.1.2.

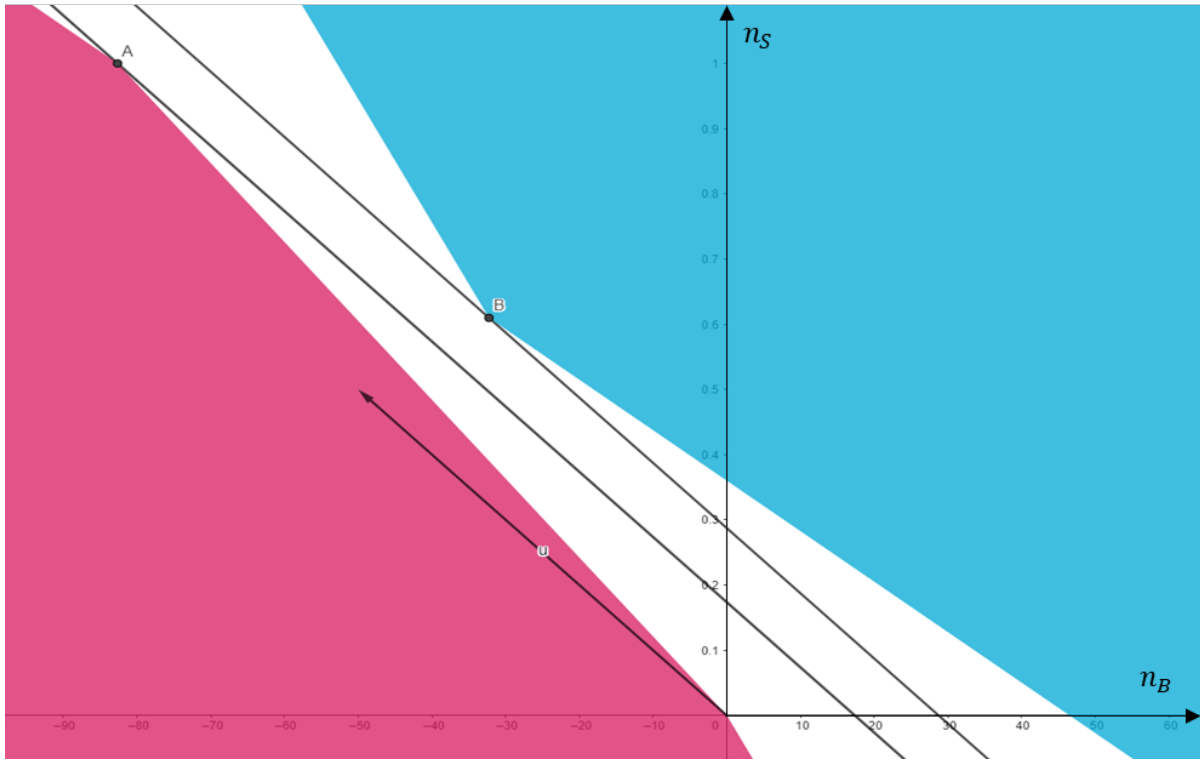


FIGURE 4.3 – Représentation géométrique des portefeuilles

Impact sur la probabilité risque neutre

On cherche la probabilité qui rend martingale les prix actualisés des titres échangés sur le marché. On a donc :

$$\begin{cases} (q_1, q_2, q_3) \in [0, 1]^3 \\ q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ \frac{1}{1.21}(156.25q_1 + 100q_2 + 64q_3) = 100 \end{cases} \implies \begin{cases} q_1 \in [\frac{28}{75}, \frac{76}{123}] \\ q_2 = \frac{1}{48}(76 - 123q_1) \\ q_3 = \frac{1}{48}(75q_1 - 28) \end{cases}$$

La probabilité risque neutre n'est plus unique. L'incomplétude du marché se traduit par une infinité de mesure risque neutre. On parlera ici plutôt de mesure martingale équivalente.

Notons $\mathcal{Q} = \{q_1 \in [\frac{28}{75}, \frac{76}{123}], q_2 = \frac{1}{48}(76 - 123q_1), q_3 = \frac{1}{48}(75q_1 - 28)\}$ l'ensemble des mesures martingales équivalentes.

Le choix d'une mesure de probabilité dans \mathcal{Q} revient à choisir un prix viable pour C .

On obtient comme intervalle de prix viables

$$\left[\inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \frac{1}{1.21} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C_2], \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \frac{1}{1.21} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C_2] \right] = \left[\frac{2100}{121}, \frac{142500}{4961} \right] \approx [17.36, 28.72].$$

Le prix obtenu dans le cas liquide peut conduire à des arbitrages

On se place dans le marché avec une illiquidité en date 1. Supposons que le prix de l'option soit de $\frac{500}{33} \approx 15.15$ c'est à dire la valeur déterminée par réplcation en supposant que le marché

est parfaitement liquide. Ce prix est inférieur au prix de sous-réplication alors en date 0, un arbitragiste pourrait acheter une option et vendre le portefeuille de sous-réplication, i.e. acheter $\frac{100}{1.21}$ actifs sans risque et vendre un actif sous-jacent.

En date 2, cet arbitragiste recevrait un flux positif dans tous les états de la nature.

La table 4.1 résume les différentes transactions et le dénouement de la stratégie d'arbitrage.

Stratégie	En 0	En 2
Achat d'une option	$-\frac{500}{33}$	$+\begin{pmatrix} 56.25 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Vente du sous-jacent	$+100$	$-\begin{pmatrix} 156.25 \\ 100 \\ 64 \end{pmatrix}$
Achat de $\frac{100}{1.21}$ actifs sans risque	$-\frac{100}{1.21}$	$+\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}$
Total	$\frac{800}{363} > 0$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 36 \end{pmatrix} \geq 0$

TABLE 4.1 – Stratégie d'arbitrage

On notera que c'est ici la modification du *payoff* de l'option qui rend le prix du cas liquide non viable. Si dans le cas liquide, l'option ne versait plus de flux en date 1 mais le même flux que l'option illiquide en date 2 alors le prix de l'option liquide serait viable. En effet, on aurait

$$C_0 = \frac{4}{9} \times \frac{1}{1.21} \times 56.25 = \frac{2500}{121} \approx 20.66 \in [17.36, 28.72].$$

Le problème de la valorisation risque neutre

Dans un marché complet, la valorisation risque neutre est très pratique car elle permet d'obtenir le prix de réplication d'un dérivé en calculant une espérance. Cependant, lorsque le marché devient incomplet, il faut faire preuve de prudence. Bien qu'il soit toujours possible de calculer cette espérance, elle ne correspond plus nécessairement à un prix de réplication.

Dans le meilleur des cas, ce prix sera viable parmi d'autres options possibles, mais il n'y a aucune garantie que ce soit le bon choix. Dans le pire des cas, le prix obtenu peut engendrer des opportunités d'arbitrage, comme illustré dans la sous-section 4.1.2.

Prix d'indifférence exponentiel

On applique l'approche par indifférence développée dans la section 3.2 à cet exemple.

$V_2^{x,\theta}$ désigne la valeur en temps $t = 2$ d'un portefeuille composé d'un capital initial x et d'une quantité θ de l'actif S investie à $t = 0$.

La fonction d'utilité choisie est de type CARA et s'exprime sous la forme $U_\gamma(x) = \frac{1-e^{-\gamma x}}{\gamma}$. Dans cette approche le prix du dérivé en 0 est défini par la relation suivante

$$\sup_{\theta_1} \mathbb{E}[U_\gamma(V_2^{x-C_0, \theta_1} + C_2)] = \sup_{\theta_0} \mathbb{E}[U_\gamma(V_2^{x, \theta_0})].$$

En notant θ_1^* et θ_0^* les stratégies optimales du point de vue de l'utilité espérée de la richesse générée, on obtient

$$\mathbb{E}[U_\gamma(\theta_1^* S_2 + (x - C_0 - \theta_1^* S_0) B_2 + C_2)] = \mathbb{E}[U_\gamma(\theta_0^* S_2 + (x - \theta_0^* S_0) B_2)]$$

d'où

$$C_0 = \frac{1}{\gamma B_2} \log \left(\frac{\mathbb{E}[e^{-\gamma \theta_0^* S_2}]}{\mathbb{E}[e^{-\gamma (\theta_1^* S_2 + C_2)}]} \right) + S_0(\theta_0^* - \theta_1^*).$$

Contrairement à l'approche par réplication, on constate que le prix d'indifférence dépend de la probabilité historique.

Il est possible de sur-répliquer le dérivé avec la stratégie θ^{sur} pour le prix p^{sur} (i.e. $V_T^{p^{sur}, \theta^{sur}} \geq C_T$) donc

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(t, x - C_0, 1, s) &= \mathcal{V}(t, x, 0, s) = \sup_{\theta \in \Theta_{t,T}} \mathbb{E}[U(V_T^{x, \theta})] \\ &\geq \sup_{\theta \in \Theta_{t,T}} \mathbb{E}[U(V_T^{x, \theta} + C_T - V_T^{p^{sur}, \theta^{sur}})] \\ &\geq \sup_{\theta \in \Theta_{t,T}} \mathbb{E}[U(V_T^{x-p^{sur}, \theta-\theta^{sur}} + C_T)] \\ &\geq \sup_{\theta \in \Theta_{t,T}} \mathbb{E}[U(V_T^{x-p^{sur}, \theta} + C_T)] = \mathcal{V}(t, x - p^{sur}, 1, s). \end{aligned}$$

Par conséquent, $C_0 \leq p^{sur}$. En notant p^{sous} le prix de sous réplication, on peut montrer de la même manière que $C_0 \geq p^{sous}$. Le prix d'indifférence est donc viable.

De la même façon qu'il fallait choisir une probabilité martingale équivalente pour déterminer un prix, il faut ici choisir un paramètre d'aversion au risque $\gamma > 0$.

4.2 Méthodes de valorisation en marché incomplet

L'exemple précédent révèle que l'illiquidité a pour effet de rendre le marché incomplet. Ainsi, l'approche par réplication n'est plus possible et les approches par indifférence et risque neutre ne fournissent plus un unique prix mais un intervalle de prix viables. L'objet de cette section est de présenter des méthodes permettant de sélectionner un prix dans cet intervalle.

Bien que dans un marché incomplet il ne soit plus possible de répliquer exactement les flux d'un titre, il est envisageable de constituer un portefeuille qui réplique de la manière la plus fidèle possible ces flux. La problématique réside alors dans la définition de l'optimalité de cette réplication. Ces différentes définitions donnent des critères pour sélectionner une mesure

martingale équivalente \mathbb{Q} qui permet de valoriser tout produit dérivé C en utilisant la relation

$$C_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)}C_T|\mathcal{F}_t].$$

De nombreux critères ont été développés dans la littérature académique. En pratique, une fois le critère choisi, il s'agit de caractériser les mesures absolument continues par rapport à la probabilité historique par leur dérivée de Radon-Nikodym, puis de choisir la mesure optimale par rapport à ce critère. Deux critères couramment utilisés pour le choix d'une mesure de valorisation sont présentés.

Nous présentons deux critères utilisés pour le choix d'une mesure de valorisation.

4.2.1 Sélection d'une mesure martingale équivalente

Mesure de variance minimale

La mesure de variance minimale est une mesure qui est associée au problème de couverture quadratique qui consiste à trouver le capital initial x^{\min} et la stratégie θ^{\min} qui minimisent la quantité

$$\mathbb{E} \left[\left(C_T - V_T^{x,\theta} \right)^2 \right],$$

où $V_T^{x,\theta}$ est la valeur à l'instant T d'un portefeuille autofinancé de capital initial x suivant la stratégie θ et C_T le *payoff* d'un produit dérivé européen.

Le minimiseur x^{\min} correspond donc au capital initial permettant une approximation optimale de C_T au sens de la minimisation de l'écart quadratique moyen.

[Schweizer \(1996\)](#) montre qu'il est possible d'exprimer x^{\min} sous la forme d'une espérance du *payoff* du produit dérivé sous \mathbb{Q}^{var} , la mesure de variance minimale.

Il s'agit de la mesure signée \mathbb{Q}^{var} qui minimise

$$\text{Var} \left(\frac{d\mathbb{Q}^{\text{var}}}{d\mathbb{P}} \right),$$

où $\frac{d\mathbb{Q}^{\text{var}}}{d\mathbb{P}}$ est une extension de la dérivée de Radon-Nikodym pour les mesures signées.

L'inconvénient d'avoir une mesure signée est qu'elle peut associer des prix négatifs (ou nuls) à des produits dérivés versant des flux positifs dans tous les états du monde.

Mais sous une condition d'absence d'opportunité d'arbitrage et si les trajectoires du processus de prix actualisé du prix de l'actif sont continues alors la mesure de variance minimale devient une vraie mesure de probabilité ([Schweizer, 1996](#)).

Mesure d'entropie minimum

Un autre critère de choix populaire pour la mesure de valorisation est la mesure martingale équivalente qui minimise l'entropie par rapport à la probabilité historique ([Rouge et El Karoui \(2000\)](#), [Frittelli \(2000\)](#)).

L'entropie relative de \mathbb{Q} par rapport à \mathbb{P} est définie par

$$H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) = \begin{cases} \int \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \log\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right) d\mathbb{P} & \text{si } \mathbb{Q} \ll \mathbb{P} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il s'agit d'un critère lié au problème de valorisation par indifférence avec une fonction d'utilité exponentielle par la relation liant l'énergie libre et l'entropie relative (aussi connue sous le nom de formule variationnelle de **Donsker et Varadhan (1983)**)

$$\log(\mathbb{E}[\exp(X)]) = \sup_{\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}} \{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X] - H(\mathbb{Q}|\mathbb{P})\}.$$

4.2.2 Sélection de l'aversion au risque

Afin de trouver une bonne façon de sélectionner le paramètre d'aversion au risque γ , il est intéressant de se pencher sur la question de l'impact de l'aversion au risque dans le prix d'une option dans le modèle de Black-Scholes.

Où se trouve l'aversion au risque ?

Dans le modèle de Black-Scholes, l'aversion au risque des investisseurs s'observe dans la prime de risque $\mu - r$, en effet plus l'aversion au risque est élevée et plus l'investisseur exigera une espérance de rendement μ importante pour l'actif sous-jacent. Or la valeur d'un produit dérivé dans ce modèle ne dépend pas de l'espérance de rendement. Une conclusion naturelle (mais fausse) serait que la valeur des produits dérivés ne dépend pas de l'aversion au risque.

En réalité l'aversion au risque des investisseurs est déjà prise en compte dans le cours initial du sous-jacent. On suppose dans le modèle de Black-Scholes que le marché est sans arbitrage, ce qui signifie que le cours initial du sous-jacent S_0 est un prix d'équilibre qui reflète toutes les informations disponibles, y compris les attitudes des investisseurs envers le risque.

On peut illustrer ce constat en reprenant l'exemple de la sous-section 4.1.1. Lors de la valorisation de l'option, aucune hypothèse n'a été faite sur les probabilités de hausse ou de baisse du cours de l'action. Supposons que la probabilité de hausse (que l'on notera p) est de 0,6 et que le rendement espéré de l'actif est de 7%. Voyons comment les probabilités de hausse ou de baisse sont incorporés dans le prix de l'action. On a

$$\mathbb{E} \left[\frac{S_1 - S_0}{S_0} \right] = \frac{125 \times 0.6 + 80 \times 0.4}{S_0} - 1 = 7\% \implies S_0 = 100.$$

On s'attend à ce qu'une diminution de p de 0.6 à 0.4 baisse la valeur de l'option d'achat. Avec ces probabilités S_0 devrait vérifier

$$\mathbb{E} \left[\frac{S_1 - S_0}{S_0} \right] = \frac{125 \times 0.4 + 80 \times 0.6}{S_0} - 1 = 7\% \implies S_0 \approx 91.59.$$

Cela a pour effet de modifier la probabilité risque neutre et donc le prix de l'option

$$q_1 = \frac{1.1 - \frac{80}{91.59}}{\frac{125}{91.59} - \frac{80}{91.59}} \implies C_0 = \frac{1}{1.1} q_1 \times 25 \approx 10.48 < 15.15.$$

Calibration sur le cours initial du sous-jacent

La sous-section précédente suggère de rechercher γ dans le cours initial du sous-jacent S_0 .

En supposant que les préférences agrégées du marché peuvent être représentées par une fonction d'utilité de la forme CARA $U(x) = \frac{1 - e^{-\gamma x}}{\gamma}$, le prix initial du sous-jacent S_0 peut être déterminé par indifférence.

Par définition, on aurait

$$\begin{aligned} \sup_{\theta} \{ \mathbb{E}[U(V_T^{x-S_0, \theta} + S_{T_2})] \} &= \sup_{\theta_2} \{ \mathbb{E}[U(V_T^{x, \theta_2})] \} \implies U((x - S_0)B_{T_2} + S_{T_2}) = U(xB_{T_2}) \\ &\implies S_0 = -\frac{e^{-rT_2}}{\gamma} \log(\mathbb{E}[\exp(-\gamma S_{T_2})]) \end{aligned}$$

La fonction $S_0^* : \gamma \mapsto -\frac{e^{-rT_2}}{\gamma} \log(\mathbb{E}[\exp(-\gamma S_{T_2})])$ est une fonction strictement décroissante (immédiat avec l'inégalité de Hölder ou preuve en annexe A.3), elle est donc injective et on peut déterminer de manière unique un γ tel que $S_0^*(\gamma) = S_0$.

Application à l'exemple de la sous-section 4.1.2

Pour des raisons numériques, on modifie la fonction d'utilité

$$U(x) = \frac{1 - \exp(-\frac{\gamma x}{100})}{\gamma}.$$

Par conséquent, le prix d'indifférence exponentiel devient

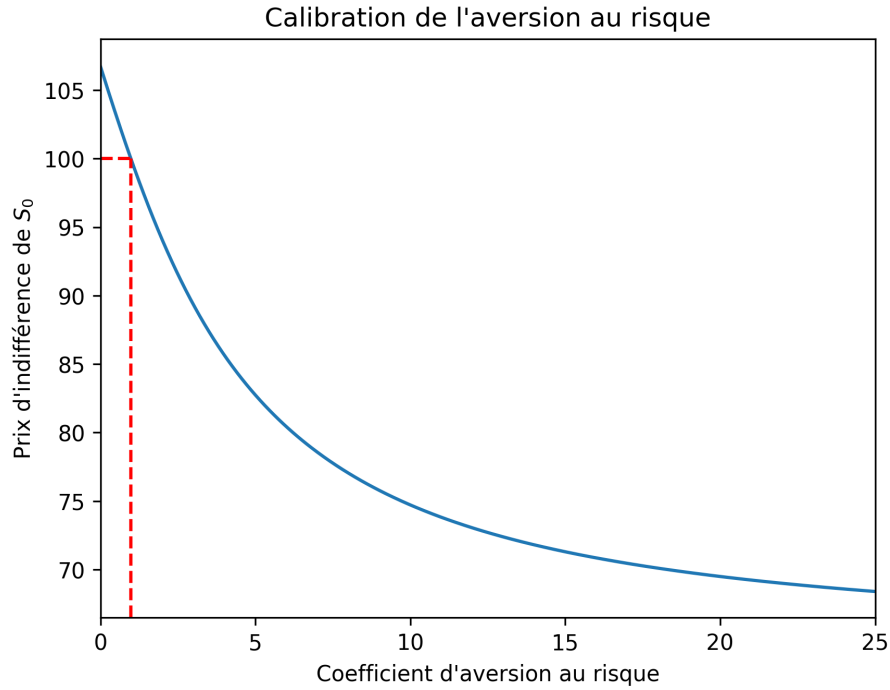
$$C_0 = \frac{100}{\gamma B_2} \log \left(\frac{\mathbb{E}[e^{-\frac{\gamma}{100} \theta_0^* S_2}]}{\mathbb{E}[e^{-\frac{\gamma}{100} (\theta_1^* S_2 + C_2)}]} \right) + S_0(\theta_0^* - \theta_1^*).$$

Ce prix dépend de la loi de S_2 . On notera p_1 la probabilité de hausse, p_2 la probabilité de stagnation et p_3 la probabilité de baisse du sous-jacent.

Avec un prix fixé à $S_0 = 100$, on peut évaluer l'aversion au risque au travers du rendement espéré de l'actif. Ainsi on s'attend à ce que plus p_1 est élevé plus le marché est averse au risque. À l'inverse plus p_3 est élevé moins le marché est averse au risque.

On considère 4 scénarios pour la loi de S_2 , le scénario équiprobable $p = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, le scénario symétrique avec une probabilité plus élevée de stagner $p = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ et 2 scénarios limites. On prend $\varepsilon > 0$ petit et on considère le scénario $p = (\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon) \approx (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ avec une faible probabilité de baisse et le scénario $p = (\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon, \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}) \approx (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ avec une faible probabilité de stagner.

La figure 4.4 représente le graphe de la fonction $\gamma \mapsto -\frac{e^{-rT_2}}{\gamma} \log(\mathbb{E}[\exp(-\gamma S_{T_2})])$ dans le scénario équiprobable. Les pointillés rouges mettent en évidence le γ correspondant au prix $S_0 = 100$.

FIGURE 4.4 – Prix d'indifférence de S_0 en fonction de γ .

Le tableau 4.2 présente le coefficient d'aversion au risque calibré sur S_0 et le prix d'indifférence exponentiel en fonction de la loi de S_2 dans les 4 scénarios.

$p = (p_1, p_2, p_3)$	γ	C_0
$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	0.98	23.09
$(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$	0.98	20.80
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$	21.73	17.36
$(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$	0.98	28.72

TABLE 4.2 – Prix d'indifférence et coefficient d'aversion au risque en fonction de la loi de S_2 .

Les résultats obtenus sont arrondis au centième près. Le coefficient γ et les quantités θ_0^* et θ_1^* sont obtenus numériquement par la méthode de [Brent \(1972\)](#).

On observe que :

- Les prix obtenus sont tous dans l'intervalle de prix viables $[\inf_{Q \in \mathcal{Q}} \frac{1}{1.21} \mathbb{E}_Q[C_2], \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \frac{1}{1.21} \mathbb{E}_Q[C_2]] [\approx 17.36, 28.72]$. Ils ne permettent donc pas de réaliser des arbitrages.
- L'aversion au risque augmente avec le rendement espérée. Ce qui était attendu puisque, le taux sans risque étant fixé, une hausse du rendement espéré augmente la prime de risque. Cette augmentation de l'aversion au risque fait baisser le prix.
- Le prix augmente avec la volatilité.

4.3 Discussion des méthodes dans notre contexte

Considérons à nouveau le marché continu du modèle de Black-Scholes avec une illiquidité sur $[0, T_2[$. Contrairement à l'exemple précédent, ce cas est dégénéré car le seul portefeuille autofinancé admissible sur $[0, T_2[$ est un portefeuille composé uniquement d'actifs sans risque. Ainsi, la valeur actualisée au taux sans risque d'un portefeuille autofinancé admissible est constante, ce qui signifie qu'elle est une martingale sous toute probabilité. Il en découle que, dans ce contexte, toute probabilité équivalente à la probabilité historique est une mesure martingale équivalente.

Contrairement au cas d'un marché complet où la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage permettait d'obtenir l'unique prix de réplication d'un produit dérivé, dans notre marché la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage ne fournit pas beaucoup d'informations puisque l'intervalle de prix viables pour l'option d'achat européenne est $]0, +\infty[$.

Pour s'en convaincre, le prix de sur-réplication p^{sur} est défini par

$$p^{sur} = \inf\{bB_0 : b \in \mathbb{R}, be^{rT_2} \geq (S_{T_2} - Ke^{r(T_2-T)})\mathbf{1}_E\} = +\infty$$

et le prix de sous-réplication p^{sous} par

$$p^{sous} = \sup\{bB_0 : b \in \mathbb{R}, be^{rT_2} \leq (S_{T_2} - Ke^{r(T_2-T)})\mathbf{1}_E\} = 0.$$

E est la condition d'exercice de l'option.

4.3.1 Application des critères de sélection de mesure

Les deux critères aboutissent à la même mesure de valorisation, qui est la probabilité historique elle-même. En effet, dans ce contexte particulier, la probabilité historique rend la valeur actualisée des portefeuilles autofinancés admissibles martingale. Ainsi, tout critère s'apparentant à la maximisation de la proximité entre la mesure de valorisation et la mesure historique conduira à choisir la mesure historique. Cela implique que, selon ces deux critères, la valeur de l'option d'achat est déterminée par :

$$C_t = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}[C_T|\mathcal{F}_t].$$

Dans notre cas on obtiendrait donc

$$\begin{aligned} C_0 &= e^{-rT_2}\mathbb{E}[(S_{T_2} - Ke^{r(T_2-T)})\mathbf{1}_E] \\ &= S_0 \exp((\mu - r)T_2)\mathbb{E}[e^{\sigma W_{T_2} - \frac{1}{2}\sigma^2 T_2}\mathbf{1}_E] - Ke^{-rT}\mathbb{P}(E) \\ &= S_0 \exp((\mu - r)T_2)\tilde{\mathbb{Q}}(E) - Ke^{-rT}\mathbb{P}(E), \end{aligned}$$

avec $\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{P}} = \exp(\sigma W_{T_2} - \frac{1}{2}\sigma^2 T_2)$.

Ce n'est pas satisfaisant puisque dans certains cas on obtiendrait des prix pour l'option d'achat qui sont supérieurs au prix du sous-jacent.

Exemple

Avec une condition d'exercice $E = \{S_T e^{\mu(T_2-T)} \geq K e^{r(T_2-T)}\}$ et les paramètres $(\mu, \sigma, r, T, T_2, S_0, K) = (15\%, 45\%, 2\%, 7, 10, 100, 100)$ le prix "historique" de l'option d'achat est d'environ $124.2 > S_0$.

4.3.2 Cohérence de l'approche par indifférence

La valeur obtenue par indifférence a des propriétés intéressantes pour la valorisation dans un contexte de marché illiquide :

- L'approche par indifférence s'inscrit dans la continuité de la théorie financière classique. Lorsque le marché est complet, le prix d'indifférence coïncide avec le prix de réplication comme démontré dans la section 3.2 ;
- Lorsque le marché devient incomplet à cause de l'illiquidité, le prix d'indifférence est viable (compatible avec l'AOA) ;
- Le prix d'indifférence a une justification économique basée sur la théorie de l'utilité ;
- L'approche de valorisation par indifférence permet de définir la condition d'exercice de l'option à partir des préférences de l'agent en utilisant la fonction d'utilité retenue ;
- Il existe un lien entre la valorisation par indifférence avec fonction d'utilité exponentielle et l'entropie relative, ce qui établit un pont entre la valorisation par indifférence et les nombreux travaux académiques portant sur l'entropie en finance. Cette relation permet d'interpréter le prix d'indifférence comme l'espérance du *payoff* actualisé, calculée sous une mesure de probabilité qui, tout en étant défavorable à l'acheteur de l'option, reste proche de la probabilité historique.

4.4 Couverture partielle impliquant un accès au marché liquide

Jusqu'à présent, seuls les actifs du marché illiquide ont été pris en compte. Toutefois, il est important de considérer que l'investisseur peut également investir dans un marché liquide. Cette possibilité permet de répliquer partiellement un actif illiquide à l'aide d'actifs liquides. Ignorer cette option équivaut à négliger les informations précieuses contenues dans ces marchés. En effet, certains actifs ou indices très corrélés peuvent fournir des indications significatives sur la valeur des actifs illiquides par comparaison.

Cependant, cette approche repose sur l'hypothèse qu'il est possible d'établir un lien de dépendance entre les actifs concernés. Les prix des actifs illiquides sur le marché non coté ne sont pas observés directement, rendant l'estimation d'une corrélation ou d'une structure de dépendance difficile, voire impossible. En outre, choisir des actifs ou des indices corrélés implique un jugement personnel, rendant l'évaluation moins objective.

Introduisons L , un actif risqué liquide dont le prix évolue selon un mouvement brownien géométrique

$$dL_t = L_t(\nu dt + \eta dW_t^0).$$

On peut écrire $W_t = \rho W_t^0 + \sqrt{1 - \rho^2} W_t^\perp$ où ρ est le coefficient de corrélation entre L_t et S_t et W_t^\perp est un mouvement brownien indépendant de W_t^0 .

Dans cette section on note \mathcal{F}_t la filtration engendrée par W_t et W_t^0 .

Si on autorise les portefeuilles contenant de l'actif L , la probabilité historique n'est plus une mesure martingale équivalente. Pour éviter les opportunités d'arbitrages, il faut au minimum que la probabilité rende le prix actualisé de l'actif liquide martingale.

4.4.1 Mesure martingale minimale

La mesure martingale minimale, notée \mathbb{Q}^0 , est la mesure qui rend le prix actualisé de l'actif liquide martingale sans modifier la loi de W_t^\perp . On a

$$\left. \frac{d\mathbb{Q}^0}{d\mathbb{P}} \right|_{\mathcal{F}_t} = \exp \left(- \left(\frac{\nu - r}{\eta} \right) W_t^0 - \frac{1}{2} \left(\frac{\nu - r}{\eta} \right)^2 t \right).$$

Ainsi toute mesure martingale équivalente \mathbb{Q} est caractérisée par

$$\left. \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \right|_{\mathcal{F}_t} = \left. \frac{d\mathbb{Q}^0}{d\mathbb{P}} \right|_{\mathcal{F}_t} \times \exp \left(\int_t^T \theta_u dW_u - \frac{1}{2} \int_t^T \theta_u^2 du \right)$$

où θ_t est un processus vérifiant la condition de Novikov.

Cette mesure coïncide avec la mesure de variance optimale et la mesure d'entropie minimum dans ce contexte.

4.4.2 Prix d'indifférence exponentiel

En reprenant les calculs de la section 3.2, on obtient le prix d'indifférence exponentiel, en autorisant la couverture partielle par le marché liquide, d'un produit dérivé dont le sous-jacent est illiquide.

On a

$$p = - \frac{e^{-r(T-t)}}{\gamma(1 - \rho^2)} \log(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^0}[\exp(-\gamma(1 - \rho^2)h(S_T))])$$

Le détail des calculs se trouve en annexe C.

On remarque que l'influence de l'actif liquide sur le prix d'indifférence de l'option sur le sous-jacent illiquide se résume par le ratio de sharpe de l'actif liquide et le coefficient de corrélation ρ .

Si on suppose que les 2 actifs sont décorrélés alors le prix devient

$$p = - \frac{e^{-r(T-t)}}{\gamma} \log(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^0}[\exp(-\gamma h(S_T))]) = - \frac{e^{-r(T-t)}}{\gamma} \log(\mathbb{E}[\exp(-\gamma h(S_T))])$$

qui n'est autre que le prix d'indifférence dans le modèle de la section 5.

La dernière égalité vient du fait que la loi de S_T ne dépend plus de W_t^0 lorsque $\rho = 0$ mais uniquement de W_t^\perp .

Autoriser l'accès à un marché liquide tout en imposant une corrélation nulle entre les actifs liquides et illiquides revient à ignorer l'information de ce marché. En d'autres termes, lorsqu'il

n'y a aucune corrélation entre les actifs, il n'est pas possible de répliquer, même partiellement, un dérivé basé sur un sous-jacent illiquide à l'aide des actifs liquides.

Chapitre 5

Cadre de valorisation adapté pour l'illiquidité des titres non cotés

Ce chapitre propose un cadre de valorisation adapté pour l'illiquidité spécifique des titres non cotés définie au chapitre 1. Pour ce faire, on présente les différentes étapes pour l'évaluation d'une option d'achat européenne dans un marché illiquide.

La [première section](#) introduit les caractéristiques du marché considéré et les hypothèses du modèle. La [deuxième section](#) détaille le processus pour obtenir le prix d'indifférence de l'option. L'expression du prix d'indifférence sera donnée, et les étapes nécessaires pour le calcul seront présentées, y compris les défis à relever pour chaque étape. La [troisième section](#) aborde la résolution des défis identifiés dans la section précédente. Les méthodes d'estimation nécessaires seront expliquées, et des suggestions seront fournies pour garantir des résultats fiables.

5.1 Présentation du modèle et des hypothèses

On présente et rappelle dans cette section les caractéristiques du marché considéré et les hypothèses du modèle.

Soient T et T_2 deux réels tels que $T > 0$ et $T_2 > T$.

Le marché considéré est constitué de 3 titres.

- B l'actif sans risque ;
- S un actif risqué ;
- C une option d'achat européenne sur S de maturité T et de prix d'exercice K .

5.1.1 Dynamique de la valeur des titres

Les valeurs de B , S et C à un instant t sont respectivement notées B_t , S_t et C_t et évoluent dans un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T_2]}, \mathbb{P})$ où (\mathcal{F}_t) est la filtration naturelle d'un mouvement brownien standard W .

B_t évolue de façon déterministe selon

$$B_0 = 1 \text{ et } dB_t = rB_t dr \implies B_t = e^{rt}.$$

$r > 0$ est le taux sans risque.

La dynamique de S_t est modélisée par un mouvement brownien géométrique

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \implies S_t = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right).$$

$\mu \geq r$ est le rendement espéré de l'actif et $\sigma > 0$ sa volatilité.

5.1.2 Illiquidité

La principale caractéristique de ce marché est qu'il est illiquide sur $[0, T_2[$. Par illiquide, on entend que seul l'actif sans risque peut être échangé pendant cette période.

Cette illiquidité a deux effets.

Premièrement, la valeur V_t d'un portefeuille admissible en date $t \in [0, T_2[$, s'écrit

$$V_t = V_0 e^{rt}.$$

Deuxièmement, les flux générés par l'option C ne tombent pas tous les deux en T puisque le sous-jacent de l'option ne peut être vendu en T .

La figure 5.1 représente le diagramme de flux de C dans ce marché.

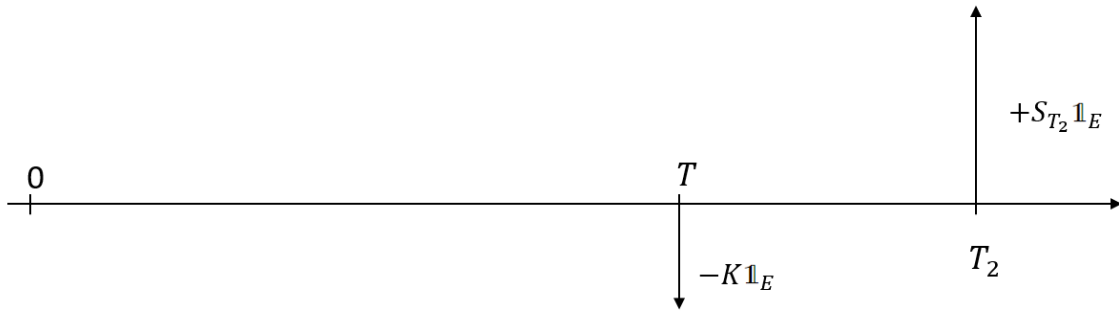


FIGURE 5.1 – Diagramme de flux de l'option.

En notant F_{T_2} la valeur du *payoff* de l'option en T_2 , on a

$$F_{T_2} = (S_{T_2} - Ke^{r(T_2-T)})\mathbb{1}_E.$$

E est la condition d'exercice de l'option. Elle est définie dans la sous-section 5.1.4.

5.1.3 Fonction d'utilité du marché

L'hypothèse $\mu \geq r$ implique que le marché est averse au risque. L'attitude face au risque d'un agent représentatif du marché est modélisée par une fonction d'utilité CARA de la forme

$$U(x) = \frac{1 - e^{-\gamma x}}{\gamma}.$$

Cette forme a l'avantage de se réduire à une fonction linéaire, caractéristique de la neutralité au risque, lorsque γ tend vers 0.

5.1.4 Condition d'exercice de l'option

La décision d'exercer l'option devant être prise en T la variable aléatoire $\mathbb{1}_E$ doit être \mathcal{F}_T -mesurable.

Cette décision doit se faire en fonction des anticipations du marché quant au cours du sous-jacent en date T_2 .

On propose la condition d'exercice suivante

$$E = \{\mathbb{E}[U(S_{T_2} - Ke^{r(T_2-T)})|\mathcal{F}_T] \geq U(0)\} = \{\mathbb{E}[\exp(-\gamma(S_{T_2} - Ke^{r(T_2-T)}))|\mathcal{F}_T] \leq 1\}.$$

Ainsi l'option est exercée selon le critère de décision de la théorie de l'utilité espérée, i.e. avec l'information accumulée jusqu'à T l'option est exercée si le marché préfère recevoir le flux aléatoire $S_{T_2} - Ke^{r(T_2-T)}$ à ne rien recevoir.

5.2 Valorisation par indifférence de l'option d'achat européenne

L'option d'achat est valorisée par indifférence.

On s'appuie sur la méthode proposée dans la section 4.2.2 pour obtenir un unique prix d'indifférence. Il faut donc également calculer le prix d'indifférence de l'actif S en 0 pour calibrer

le coefficient d'aversion au risque implicite γ .

Pour rappel, le prix d'indifférence est le montant p qui rend l'agent représentatif du marché indifférent entre le paiement de p pour recevoir le *payoff* de l'option et le non-paiement de p .

Formellement, le prix d'indifférence de S en 0, noté S_0^* , est défini par

$$\mathcal{V}(x - S_0^*, 0, 1) = \mathcal{V}(x, 0, 0)$$

et le prix d'indifférence de C en 0, noté p , est défini par

$$\mathcal{V}(x - p, 1, 0) = \mathcal{V}(x, 0, 0),$$

où \mathcal{V} la fonction de valeur du marché définie par

$$\mathcal{V}(x, k, l) = \sup_{\theta} \mathbb{E}[U(V_{T_2}^{x, \theta} + kF_{T_2} + lS_{T_2})] = \mathbb{E}[U(xe^{rT_2} + kF_{T_2} + lS_{T_2})]$$

qui donne la valeur en date 0 que le marché associe à la somme de k fois le flux de l'option en T_2 , l fois la valeur de S en T_2 et la valeur en T_2 d'un portefeuille construit en 0 à partir du capital initial x avec la stratégie θ optimale du point de vue de l'utilité espérée. Comme la valeur de l'unique portefeuille admissible est de la forme $V_t = V_0 e^{rt}$, on a bien $V_{T_2}^{x, \theta} = xe^{rT_2}$.

Prix d'indifférence du sous-jacent

Le prix d'indifférence du sous-jacent s'obtient directement à partir de sa définition. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U((x - S_0^*)e^{rT_2} + S_{T_2})] &= U(xe^{rT_2}) \\ \implies \mathbb{E}\left[\frac{1 - \exp(-\gamma((x - S_0^*)e^{rT_2} + S_{T_2}))}{\gamma}\right] &= \frac{1 - \exp(-\gamma xe^{rT_2})}{\gamma} \\ \implies S_0^* &= -\frac{e^{-rT_2}}{\gamma} \log(\mathbb{E}[\exp(-\gamma S_{T_2})]). \end{aligned}$$

Le prix d'indifférence du sous-jacent fait apparaître la transformée de Laplace d'une variable aléatoire de loi log-normale. Aucune formule fermée n'est connue pour cette transformée de Laplace.

Prix d'indifférence de l'option

Le prix d'indifférence de l'option d'achat s'écrit

$$p = -\frac{e^{-rT_2}}{\gamma} \log \left(\mathbb{E} \left[\exp \left(-\gamma (S_{T_2} - Ke^{r(T_2-T)}) \mathbf{1}_{\{\mathbb{E}[\exp(-\gamma(S_{T_2} - Ke^{r(T_2-T)}) | \mathcal{F}_T] \leq 1\}} \right) \right] \right).$$

Il est obtenu de la même manière que celui du sous-jacent, en effet, on a

$$p = -\frac{e^{-rT_2}}{\gamma} \log (\mathbb{E} [\exp(-\gamma F_{T_2})]).$$

Pour simplifier l'expression de p , on note $L_{T_2}(S_T) = \mathbb{E}[\exp(-\gamma(S_{T_2} - Ke^{r(T_2-T)}))|\mathcal{F}_T]$ et $\alpha = \mathbb{E} \left[\exp \left(-\gamma(S_{T_2} - Ke^{r(T_2-T)}) \mathbf{1}_{\{L_{T_2}(S_T) \leq 1\}} \right) \right]$ l'espérance dans l'expression de p .

On a

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathbb{E} \left[\exp \left(-\gamma(S_{T_2} - Ke^{r(T_2-T)}) \mathbf{1}_{\{L_{T_2}(S_T) \leq 1\}} \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left(-\gamma(S_{T_2} - Ke^{r(T_2-T)}) \right) \mathbf{1}_{\{L_{T_2}(S_T) \leq 1\}} + \mathbf{1}_{\{L_{T_2}(S_T) > 1\}} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E}[\exp(-\gamma(S_{T_2} - Ke^{r(T_2-T)}))|\mathcal{F}_T] \mathbf{1}_{\{L_{T_2}(S_T) \leq 1\}} + \mathbf{1}_{\{L_{T_2}(S_T) > 1\}} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[L_{T_2}(S_T) \mathbf{1}_{\{L_{T_2}(S_T) \leq 1\}} + \mathbf{1}_{\{L_{T_2}(S_T) > 1\}} \right] \\ &= \mathbb{E}[1 - (1 - L_{T_2}(S_T))_+]. \end{aligned}$$

Par conséquent, en notant $g : x \mapsto 1 - (1 - x)_+$, le prix d'indifférence s'écrit

$$p = -\frac{e^{-rT_2}}{\gamma} \log(\mathbb{E}[g(L_{T_2}(S_T))]).$$

Conditionnellement à \mathcal{F}_T , S_{T_2} suit toujours une loi log-normale et la transformée de Laplace d'une loi log-normale apparaît donc de nouveau dans l'expression de p par l'intermédiaire de la variable aléatoire $L_{T_2}(S_T)$.

Lien avec l'entropie

En utilisant la relation entre énergie libre et entropie relative (4.2.1) le prix d'indifférence de l'option se réécrit

$$p = \inf_{\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}} \left\{ e^{-rT_2} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[F_{T_2}] + \frac{e^{-rT_2}}{\gamma} H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) \right\}.$$

Le prix d'indifférence peut ainsi s'interpréter comme le prix calculé en considérant un scénario défavorable pour l'agent mais réaliste. Il s'agit de l'espérance du *payoff* actualisé auquel est ajouté un terme entropique qui mesure la proximité entre la mesure de valorisation considérée par l'agent et la mesure historique. Plus l'aversion au risque est grande, plus on envisage des scénarios pessimistes, ce qui diminue le prix acceptable pour l'agent. Inversement, une faible aversion au risque conduit à considérer des scénarios moins défavorables, augmentant ainsi le prix.

Inégalités sur le prix d'indifférence

Le prix d'indifférence, défini comme un infimum sur un ensemble de mesures équivalentes à la probabilité historique, peut être majoré en sélectionnant des mesures spécifiques.

En choisissant la mesure historique elle-même, le prix d'indifférence est inférieur au prix calculé sous cette mesure, i.e.

$$p \leq e^{-rT_2} \mathbb{E}[F_{T_2}].$$

Pour rappel, les critères de sélection de mesures de valorisation basées sur la proximité avec la mesure historique aboutissent à cette dernière. En particulier, la mesure d'entropie minimale et la mesure de variance minimale sont toutes deux équivalentes à la probabilité historique. Par conséquent, le prix d'indifférence est toujours inférieur au prix calculé en choisissant ces mesures de valorisation, en conservant la même condition d'exercice basée sur l'utilité de l'agent.

En considérant la mesure risque-neutre \mathbb{Q}^{BS} du modèle de Black-Scholes, l'inégalité suivante peut être établie :

$$\begin{aligned} p &\leq e^{-rT_2} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{BS}}[F_{T_2}] + \frac{e^{-rT_2}}{\gamma} H(\mathbb{Q}^{BS}|\mathbb{P}) \\ &= e^{-rT_2} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{BS}}[F_{T_2}] + \frac{1}{2} \frac{e^{-rT_2}}{\gamma} \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 T_2. \end{aligned}$$

En effet, la filtration considérée étant engendrée par un mouvement brownien, l'entropie relative entre la mesure risque neutre \mathbb{Q}^{BS} du modèle de Black-Scholes et la mesure historique peut donc se déterminer explicitement en fonction du noyau de Girsanov $\frac{r-\mu}{\sigma}$ qui caractérise \mathbb{Q}^{BS} , on a

$$\begin{aligned} H(\mathbb{Q}^{BS}|\mathbb{P}) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{BS}} \left[\log \left(\frac{d\mathbb{Q}^{BS}}{d\mathbb{P}} \right) \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{BS}} \left[\left(\frac{r - \mu}{\sigma} \right) \left(\left(\frac{r - \mu}{\sigma} \right) T + W_T^{\mathbb{Q}^{BS}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 T \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 T \end{aligned}$$

où $W_T^{\mathbb{Q}^{BS}}$ est un mouvement brownien sous \mathbb{Q}^{BS} .

L'inégalité montre que le prix d'indifférence est toujours inférieur au prix du modèle de Black-Scholes (avec une condition d'exercice modifiée en intégrant les préférences de l'agent), ajusté par un terme qui reflète l'écart entre la mesure historique et la mesure risque-neutre, ce qui intègre l'effet du risque, de la volatilité, et de l'illiquidité sur la valorisation de l'option.

Comportement asymptotique en fonction de γ

Il est observé que lorsque γ tend vers 0, la mesure de valorisation converge vers la mesure historique, ce qui conduit à évaluer l'option comme l'espérance du *payoff* actualisé sous la probabilité historique, ou de manière équivalente, sous la probabilité d'entropie minimale. À l'inverse, lorsque γ tend vers l'infini, le terme entropique disparaît, et le prix d'indifférence coïncide avec le prix de sous-réplication, lequel est nul dans ce contexte.

Etapes de calcul du prix d'indifférence de l'option

La calibration du coefficient d'aversion au risque γ et l'expression du prix d'indifférence de l'option font apparaître des transformée de Laplace de variables aléatoires de loi log-normale qui

n'admettent pas de formule fermée. La valorisation de l'option nécessite donc l'estimation de ces quantités. On choisit d'estimer ces espérances par des méthodes de Monte-Carlo. En particulier, la méthode de Lambert-Monte-Carlo (5.3.1) sera utilisée.

Les étapes pour le calcul du prix d'indifférence de l'option d'achat européenne dans le marché illiquide sont les suivantes :

- Dans un premier temps, on calcule le prix d'indifférence du sous-jacent en fonction de γ en utilisant la méthode de Lambert-Monte-Carlo pour l'estimation de l'espérance puis on inverse numériquement cette fonction pour obtenir le γ calibré sur le prix S_0 observé.
- Dans un second temps, on calcule le prix d'indifférence de l'option à partir du γ calibré précédemment. Pour ce faire, il faut estimer α qui est l'espérance d'une fonction d'une espérance conditionnelle. L'espérance conditionnelle est estimée par Lambert-Monte-Carlo et l'espérance externe est estimée par la méthode de Monte-Carlo classique. L'estimateur de α est appelé estimateur de Monte-Carlo imbriqué.

La figure 5.2 récapitule ces étapes dans un schéma.

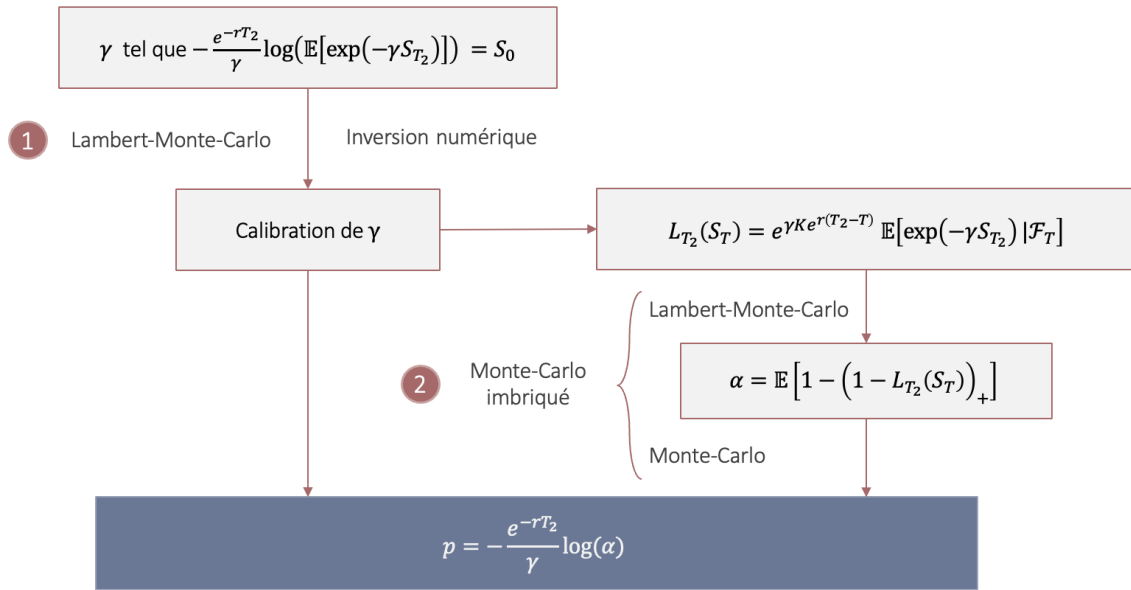


FIGURE 5.2 – Étapes de calcul du prix d'indifférence

La section suivante présente la méthode de Lambert-Monte-Carlo pour l'estimation de la transformée de Laplace de variables aléatoires de loi log-normale et l'estimateur de Monte-Carlo imbriqué.

5.3 Estimation du prix d'indifférence

5.3.1 Méthode de Lambert-Monte-Carlo

La méthode de Lambert-Monte-Carlo (Asmussen *et al.*, 2014) est une méthode efficace pour estimer la transformée de Laplace d'une variable aléatoire de loi log-normale.

Transformée de Laplace d'une variable aléatoire de loi log-normale

La transformée de Laplace d'une variable aléatoire de loi log-normale est définie par

$$\mathcal{L}_X(p) = \mathbb{E}[\exp(-pe^X)], \text{ avec } X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2).$$

On peut écrire $X = \mu + \sigma N$ avec $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

On se ramène au calcul de la transformée de Laplace d'une variable aléatoire log-normale donc le logarithme est centrée en posant $\theta = pe^\mu$

$$\mathcal{L}_X(p) = \mathcal{L}(\theta, \sigma) = \mathbb{E}[\exp(-\theta e^{\sigma N})], \text{ avec } N \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Monte-Carlo classique

L'estimateur de Monte-Carlo de \mathcal{L} , noté $\hat{\mathcal{L}}_M$, est défini par

$$\hat{\mathcal{L}}_M(\theta, \sigma) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \exp(-\theta e^{\sigma N_m}), \text{ avec } N_m \text{ i.i.d. de loi normale centrée réduite.}$$

Cet estimateur est sans biais, consistant et asymptotiquement gaussien.

Cette dernière propriété nous permet d'obtenir des intervalles de confiance au niveau α .

$$\mathcal{L}(\theta, \sigma) \in \left[\hat{\mathcal{L}}_M(\theta, \sigma) - q_\alpha \sqrt{\frac{\text{Var}(\exp(-\theta e^{\sigma N}))}{M}}, \hat{\mathcal{L}}_M(\theta, \sigma) + q_\alpha \sqrt{\frac{\text{Var}(\exp(-\theta e^{\sigma N}))}{M}} \right]$$

où q_α est le quantile d'ordre $\frac{1+\alpha}{2}$ de la loi normale centrée réduite.

Le problème est que pour de grandes valeurs de θ , l'obtention d'une certaine précision relative nécessite un grand nombre de simulations.

En effet, si on souhaite atteindre une précision relative de $q_\alpha \sqrt{\frac{\text{Var}(\exp(-\theta e^{\sigma N}))}{\mathcal{L}(\theta, \sigma)^2 M}} = K$, il faut un nombre de simulations $M = \left(\frac{q_\alpha}{K}\right)^2 \cdot \frac{\text{Var}(\exp(-\theta e^{\sigma N}))}{\mathcal{L}(\theta, \sigma)^2}$.

Or d'après [Asmussen et al. \(2014\)](#), on a

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(\exp(-\theta e^{\sigma N}))}{\mathcal{L}(\theta, \sigma)^2} = +\infty.$$

Pour remédier à ce problème [Asmussen et al. \(2014\)](#) proposent un estimateur de Monte-Carlo basé sur une approximation obtenue par une version modifiée de la méthode de Laplace dans la thèse de [Rojas-Nandayapa \(2008\)](#).

Lambert-Monte-Carlo

Un estimateur plus efficace pour la transformée de Laplace d'une variable aléatoire de loi log-normale est donné par

$$\hat{\mathcal{L}}_M^{LMC}(\theta, \sigma) = \exp\left(-\frac{W(\sigma^2 \theta)^2 + 2W(\sigma^2 \theta)}{2\sigma^2}\right) \times \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \exp\left(-\frac{W(\sigma^2 \theta)}{\sigma^2} (e^{\sigma N_m} - \sigma N_m - 1)\right)$$

où W est la branche principale de la fonction de Lambert (bijection réciproque de $x \mapsto xe^x$ sur \mathbb{R}_+).

Cet estimateur est appelé estimateur Lambert-Monte-Carlo ([Carassus et Ferhoun, 2024](#)).

Approximation de la transformée de Laplace

On a

$$\mathcal{L}(\theta, \sigma) = \mathbb{E}[\exp(-\theta e^{\sigma N})] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\theta e^{\sigma x}) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-k(x)) dx$$

avec $k(x) = \frac{x^2}{2} + \theta e^{\sigma x}$.

$x \mapsto \exp(-k(x))$ est une fonction concave en cloche qui atteint son maximum au point critique de k .

L'idée de la méthode de Laplace est d'approximer la fonction k par un développement limité autour du point critique puisque ce sont les points dans ce voisinage qui contribuent le plus à l'intégrale.

La figure 5.3 représente le graphe des fonctions $x \mapsto \exp(-k(x))$ en rouge et $x \mapsto \exp(-d(x))$ en vert où d est le développement limité de k à l'ordre 2 pour $\theta = \sigma = 1$.

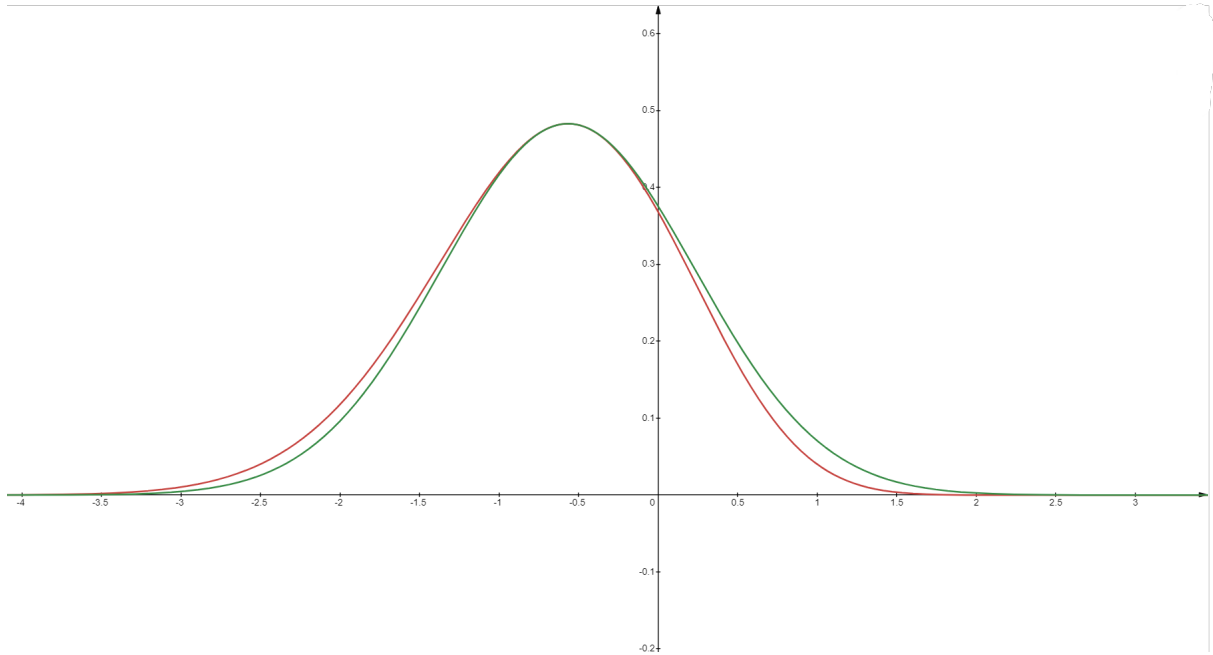


FIGURE 5.3 – Graphe des fonctions $x \mapsto \exp(-k(x))$ en rouge et $x \mapsto \exp(-d(x))$ en vert.

Par cette méthode on obtient l'approximation

$$\tilde{\mathcal{L}}(\theta, \sigma) = \frac{\exp\left(-\frac{W(\sigma^2\theta)^2 + 2W(\sigma^2\theta)}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{1 + W(\sigma^2\theta)}} \approx \mathcal{L}(\theta, \sigma).$$

La preuve est disponible en annexe D.

Estimateur de Monte-Carlo basé sur cette approximation

L'idée est de réduire la variance de l'estimateur de Monte-Carlo en échantillonnant des points dans le voisinage du point critique de k plutôt qu'autour de 0. Cette translation induit un biais, corrigé par un changement de probabilité, ce qui permet de conserver la même espérance que celle de l'échantillonnage initial. L'estimateur obtenu repose ainsi sur un échantillonnage préférentiel centré sur le point critique de k .

On a

$$\mathcal{L}(\theta, \sigma) = \exp\left(-\frac{W(\sigma^2\theta)^2 + 2W(\sigma^2\theta)}{2\sigma^2}\right) \mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{W(\sigma^2\theta)}{\sigma^2}(e^{\sigma N} - \sigma N - 1)\right)\right], \quad N \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

La preuve est disponible en annexe D.

Par conséquent, on peut définir l'estimateur de Lambert-Monte-Carlo

$$\hat{\mathcal{L}}_M^{LMC}(\theta, \sigma) = \exp\left(-\frac{W(\sigma^2\theta)^2 + 2W(\sigma^2\theta)}{2\sigma^2}\right) \times \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \exp\left(-\frac{W(\sigma^2\theta)}{\sigma^2}(e^{\sigma N_m} - \sigma N_m - 1)\right)$$

qui est plus efficace que l'estimateur de Monte-Carlo classique (Asmussen *et al.*, 2014).

Comparaison des méthodes sur un exemple

Le prix d'indifférence du sous-jacent à la date 0 s'écrit

$$S_0^* = -\frac{e^{-rT_2}}{\gamma} \log\left(\mathcal{L}\left(\gamma S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T_2}, \sigma\sqrt{T_2}\right)\right).$$

On calcule le prix d'indifférence du sous-jacent à la date 0 pour le jeu de paramètres $(S_0, \mu, \sigma, r, T_2) = (100, 15\%, 15\%, 2\%, 10)$ en estimant la transformée de Laplace avec les méthodes décrites dans la sous-section 5.3.1. Les paramètres ont été sélectionnés de manière délibérée pour obtenir une valeur élevée de θ afin d'illustrer le problème avec l'estimateur de Monte-Carlo classique.

La figure 5.4 représente le prix d'indifférence de S_0 en fonction du coefficient d'aversion au risque γ pour $M = 10^4$ simulations par point.

L'utilisation de la méthode delta permet de déterminer des intervalles de confiance à 95% pour S_0^* et on peut en déduire des intervalles de confiance à 95% pour γ . Pour ce faire, on calcule S_0^* et les bornes de l'intervalle en fonction de γ puis on inverse numériquement les fonction en utilisant un *root-solver*.

On trouve $\gamma = 14, 78\%$ et l'intervalle de confiance à 95% $[12.53\%, 17.78\%]$ avec l'estimateur de Monte-Carlo classique et $\gamma = 13, 73\%$ et l'intervalle de confiance à 95% $[13.71\%, 13.74\%]$ avec l'estimateur Lambert-Monte-Carlo.

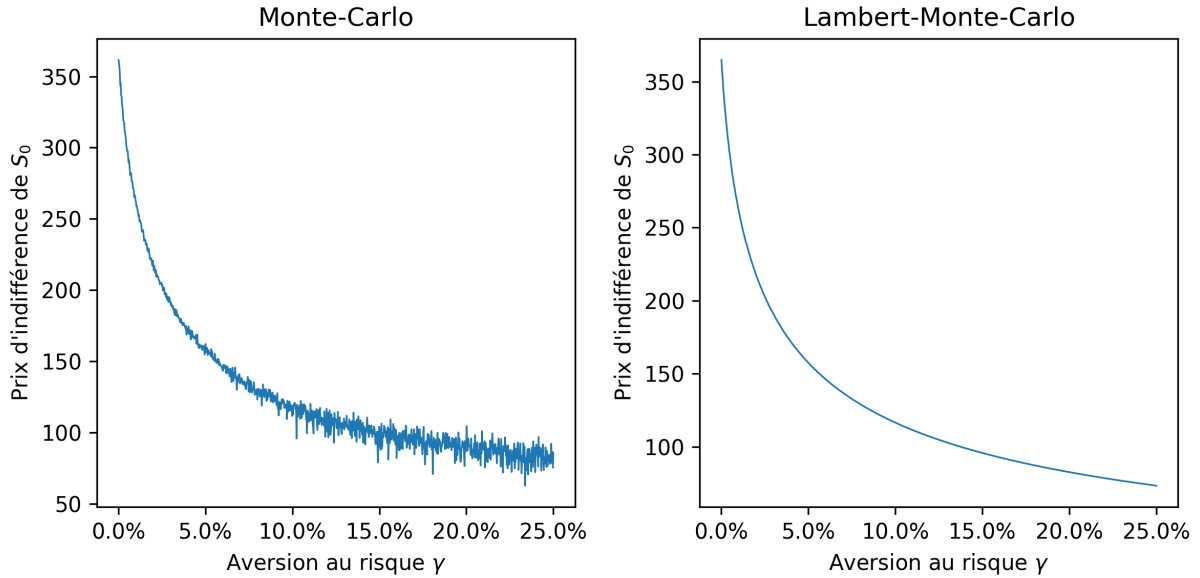


FIGURE 5.4 – Prix d'indifférence de S_0 en fonction du coefficient d'aversion au risque γ pour $M = 10^4$ simulations selon les 2 méthodes.

Le prix d'indifférence de S_0 en fonction du nombre de simulations en sélectionnant le γ calibré sur S_0 est représenté sur la figure 5.5. 100 000 simulations sont affichées pour l'estimateur de Monte-Carlo et 1000 pour l'estimateur Lambert-Monte-Carlo.

Dans cet exemple, l'estimateur de Monte-Carlo du prix d'indifférence ne semble pas vraiment converger après 100 000 simulations. La vraie valeur ($S_0 = 100$) n'est pas comprise dans l'intervalle de confiance à 95%. L'estimateur Lambert-Monte-Carlo, quant à lui, semble converger vers la vraie valeur du prix d'indifférence après 1000 simulations et les intervalles de confiance à 95% sont plus étroits qu'avec l'estimation par Monte-Carlo.

5.3.2 Estimateur de Monte-Carlo imbriqué

L'obtention du prix d'indifférence nécessite l'estimation de la quantité

$$\alpha = \mathbb{E}[g(\mathbb{E}[\exp(-\gamma(S_{T_2} - Ke^{r(T_2-T)})) | \mathcal{F}_T])].$$

Cette quantité fait apparaître deux espérances imbriquées à estimer. L'espérance interne fait intervenir la transformée de Laplace d'une variable aléatoire de loi log-normale et est estimée par Lambert-Monte-Carlo. L'espérance externe est estimée par Monte-Carlo classique.

L'algorithme 1 décrit la procédure à suivre pour estimer α .

Notons $\hat{\alpha}_{M,N}$ l'estimateur de Monte-Carlo imbriqué de α et $\hat{L}_M(S)$ l'estimateur de Lambert-Monte-Carlo de $L_{T_2}(S)$.

On a

$$\hat{\alpha}_{M,N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(\hat{L}_M(S_i))$$

avec S_i des variables aléatoires i.i.d de même loi que S_T .

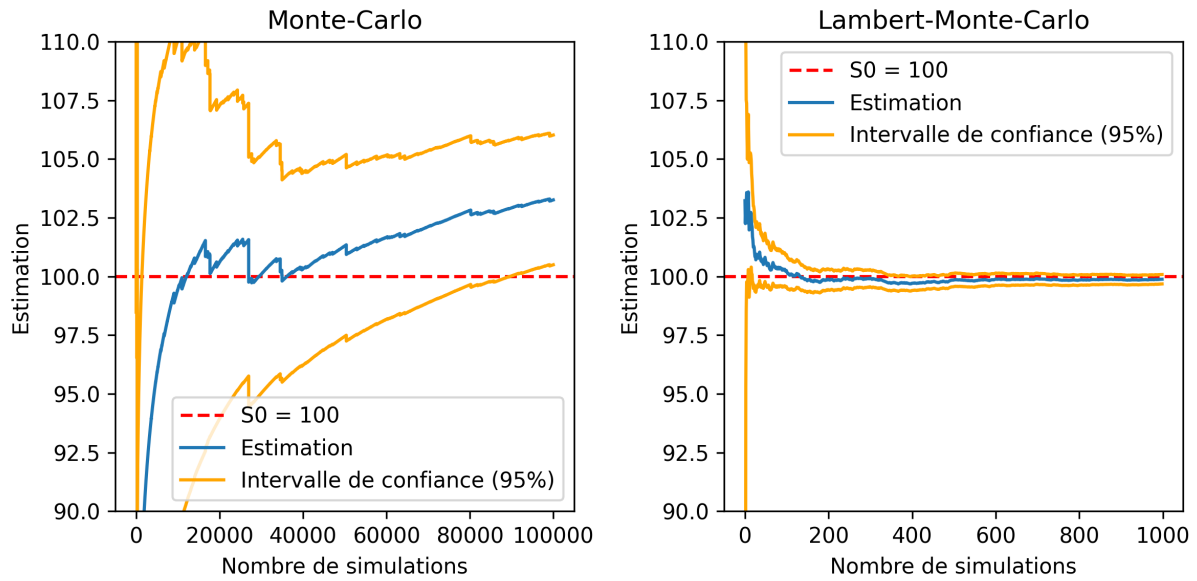


FIGURE 5.5 – Prix d'indifférence de S_0 en fonction du nombre de simulations selon les 2 méthodes.

Algorithme 1 Estimation de α par Monte-Carlo imbriqué

Entrée : nombre de simulations internes M , nombre de simulations externes N

pour $1 \leq j \leq M$

(1) Simuler N_j i.i.d de loi $\mathcal{N}(0, 1)$

fin pour

pour $1 \leq i \leq N$

(2) Simuler S_i i.i.d de même loi que S_T

(3) Estimer les $L_{T_2}(S_i)$ par Lambert-Monte-Carlo :

$$\hat{L}_M(S_i) = \exp\left(-\frac{W(\sigma^2\theta(S_i))^2 + 2W(\sigma^2\theta(S_i))}{2\sigma^2}\right) \times \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \exp\left(-\frac{W(\sigma^2\theta(S_i))}{\sigma^2}(e^{\sigma N_j} - \sigma N_j - 1)\right)$$

fin pour

(4) Calculer l'estimateur de Monte-Carlo de α :

$$\hat{\alpha}_{M,N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(\hat{L}_M(S_i))$$

Sortie : estimateur $\hat{\alpha}_{M,N}$

$\hat{\alpha}_{M,N}$ est biaisé :

$\hat{L}_M(S)$ est bien un estimateur sans biais de $L_{T_2}(S)$. Néanmoins, remplacer $L_{T_2}(S)$ par son estimateur $\hat{L}_M(S)$ dans l'estimation de α introduit un biais à cause la fonction g . En effet, comme g est concave, on a

$$\mathbb{E}[\hat{\alpha}_{M,N}] = \mathbb{E}[g(\hat{L}_M(S_T))] \leq g(\mathbb{E}[\hat{L}_M(S_T)]) = g(L_{T_2}(S_T)) \implies \mathbb{E}[\hat{\alpha}_{M,N}] \leq \alpha.$$

$\hat{\alpha}_{M,N}$ est asymptotiquement sans biais :

Le biais de l'estimateur ne va pas poser problème puisqu'en augmentant le nombre de simulations internes il va converger vers 0. En effet, on a

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\hat{\alpha}_{M,N}] &= \lim_{M \rightarrow \infty} \mathbb{E}[g(\hat{L}_M(S_T))] \\ &= \mathbb{E}[\lim_{M \rightarrow \infty} g(\hat{L}_M(S_T))] \text{ (Convergence Dominée : } |g(\hat{L}_M(S_T))| \leq \hat{L}_M(S_T) \text{)} \\ &= \mathbb{E}[g(L_{T_2}(S_T))] \text{ (par continuité de } g \text{)} \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

Loi asymptotique de l'erreur $\hat{\alpha}_{M,N} - \alpha$:

Afin d'obtenir une mesure de l'erreur commise lors de l'estimation du prix d'indifférence, des intervalles de confiance sont calculés.

Il faut obtenir d'abord des intervalles de confiance sur $\hat{\alpha}$ puis l'application de la méthode delta nous fournira des intervalles de confiance sur \hat{p} .

On a

$$\begin{aligned} &\sqrt{N}(\hat{\alpha}_{M,N} - \alpha) \\ &= \sqrt{N} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(L_{T_2}(S_n)) - \mathbb{E}[g(L_{T_2}(S_T))] \right) + \sqrt{N} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(\hat{L}_M(S_n)) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(L_{T_2}(S_n)) \right). \end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite converge en loi vers une loi normale $\mathcal{N}(0, \text{Var}[g(L_{T_2}(S_T))])$ en vertu du théorème central limite.

Si M converge plus vite vers l'infini que N alors le second terme du membre de droite converge en probabilité vers 0 (Preuve en annexe A).

Ainsi, si $\lim_{N, M \rightarrow +\infty} \frac{N}{M} = 0$, le lemme de Slutsky donne la loi asymptotique de l'erreur :

$$\sqrt{N}(\hat{\alpha}_{M,N} - \alpha) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \text{Var}[g(L_{T_2}(S_T))]).$$

Par la méthode delta, on obtient la loi asymptotique de $\sqrt{N}(\hat{p} - p)$

$$\sqrt{N}(\hat{p} - p) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \text{Var}[g(L_{T_2}(S_T))] \times \left(\frac{\exp(-rT_2)}{\gamma\alpha} \right)^2 \right).$$

Par conséquent l'intervalle de confiance de l'estimateur du prix d'indifférence au niveau de confiance 95% est donné par

$$\left[\hat{p} - \frac{q}{\sqrt{N}} \sqrt{\text{Var}[g(L_{T_2}(S_T))]} \times \left| \frac{\exp(-rT_2)}{\gamma\alpha} \right|, \hat{p} + \frac{q}{\sqrt{N}} \sqrt{\text{Var}[g(L_{T_2}(S_T))]} \times \left| \frac{\exp(-rT_2)}{\gamma\alpha} \right| \right],$$

où q est le quantile 97,5% d'une loi normale centrée réduite.

En pratique, on définit le budget computationnel $\Gamma = N \times M$, et on exprime le nombre de simulations internes et externes en fonction de Γ i.e

$$N = \frac{1}{c}\Gamma^a \text{ et } M = c\Gamma^{1-a} \text{ avec } a \in [0, 1], c > 0.$$

Pour garantir la fiabilité de l'intervalle de confiance, il faut choisir a tel que

$$\lim_{\Gamma \rightarrow +\infty} \frac{N}{M} = \lim_{\Gamma \rightarrow +\infty} \frac{1}{c^2} \Gamma^{2a-1} = 0.$$

Il faut donc choisir $a < \frac{1}{2}$. On fait face à un dilemme biais-variance. Plus a est faible et plus la variance augmente mais le biais diminue et plus a est élevé et plus la variance baisse et le biais augmente.

Chapitre 6

Application numérique

Les chapitres précédents ont posé un cadre théorique de la valorisation d'options d'achat européennes dans un marché illiquide en se concentrant sur le contexte spécifique des titres non cotés. Ce chapitre vise à donner vie à cette théorie en explorant ses implications numériques, en comparant ses résultats aux pratiques actuelles, notamment l'utilisation du modèle de Black-Scholes.

Le cas étudié concerne une société réelle opérant dans le secteur de l'énergie, désignée sous le nom de "Société A" pour des raisons de confidentialité. Cette société, non cotée en bourse, a récemment mis en place un plan d'actionnariat salarié attribuant des options d'achat d'actions à ses employés. L'évaluation de ces options doit être réalisée en juste valeur, conformément aux exigences de la norme IFRS 2.

La [première section](#) présente un exemple de sélection et d'estimation des paramètres clés du modèle proposé, en tenant compte des exigences et recommandations de la norme IFRS 2. Deux scénarios sont ensuite comparés au modèle de Black-Scholes : un premier scénario où l'exercice de l'option se produit pendant la période d'illiquidité, empêchant la cession du sous-jacent avant un événement de liquidité ; et un second scénario où l'exercice a lieu lors de l'événement de liquidité. La [deuxième section](#) examine les sensibilités des paramètres du modèle d'indifférence en utilisant les deux scénarios susmentionnés, avec le modèle de Black-Scholes comme scénario central. Cette analyse permet de comparer le comportement du modèle d'indifférence dans ces deux scénarios à celui du modèle de Black-Scholes. La [troisième section](#) explore l'impact de l'application d'une décote ad hoc sur le prix de l'option, pratique couramment utilisée pour compenser les insuffisances du modèle de Black-Scholes lorsqu'il est appliqué dans un marché illiquide.

6.1 Application à une société réelle

6.1.1 Choix et estimation des paramètres du modèle

Dans le cadre de l'évaluation des options sur actions en vertu de la norme IFRS 2, le choix des paramètres du modèle d'option doit être guidé par le principe de refléter au mieux les attentes du marché ou celles d'un observateur informé, en tenant compte des informations disponibles à la date d'attribution. L'objectif est d'estimer les valeurs des paramètres de manière à ce que le modèle reflète de façon réaliste les conditions de marché et le comportement des détenteurs d'options. Bien que la norme IFRS 2 ne fournisse pas de directives spécifiques sur l'estimation de certains paramètres, tels que le rendement espéré du sous-jacent (μ), elle exige que les hypothèses utilisées soient basées sur des informations et des attentes raisonnables et justifiables.

Pour estimer le **rendement espéré du sous-jacent** (μ), le taux de rendement interne (TRI) fixé contractuellement lors des émissions d'obligations convertibles de la Société A est utilisé comme indicateur. Ce TRI, établi à 10%, reflète les attentes de rendement des investisseurs pour ces instruments et sert ainsi de proxy pour le rendement attendu des actions.

Le **taux sans risque** (r) est déterminé à partir du rendement des obligations d'État françaises à long terme, reflétant le taux de rendement d'un actif sans risque sur une durée similaire à l'horizon de liquidité envisagé. Dans cet exemple, un rendement de 2,5% est utilisé, correspondant à des obligations d'État françaises avec une maturité proche de l'horizon d'investissement de 4 à 5 ans.

Dans le modèle, la **date d'exercice de l'option** (T) représente le moment où le détenteur de l'option paie le prix d'exercice pour obtenir le sous-jacent illiquide, qui ne pourra être cédé qu'à la **date de l'événement de liquidité** (T_2). Les options attribuées dans le cadre de l'actionnariat salarié sont généralement de type américain, permettant leur exercice à tout moment avant une date d'échéance prédéfinie. Cependant, ni le modèle utilisé ni le modèle de Black-Scholes ne prennent en compte cette spécificité. En pratique, pour des options de sociétés non cotées, le modèle de Black-Scholes est appliqué en prenant comme maturité la date de l'événement de liquidité afin de simuler un marché liquide, bien que l'hypothèse de liquidité parfaite sur la période ne soit pas vérifiée. La date de l'événement de liquidité est déterminée par les objectifs de sortie pour les investisseurs, établis lors de négociations. Dans ce cas, le scénario central envisage une sortie à $T_2 = 5$ ans avec une probabilité de $\frac{1}{2}$. Deux autres scénarios sont considérés : une sortie anticipée à $T_2 = 4$ ans avec une probabilité de $\frac{1}{4}$ et une sortie tardive à $T_2 = 6$ ans avec une probabilité de $\frac{1}{4}$. Conformément au paragraphe B12 de la norme IFRS 2, qui recommande de calculer une valeur attendue en pondérant le montant de chaque scénario par la probabilité d'occurrence correspondante, le prix de l'option est ainsi calculé en utilisant la loi de l'espérance totale. Pour que la comparaison avec le modèle de Black-Scholes soit pertinente, un prix d'indifférence est calculé avec $T = T_2$, ainsi qu'un prix avec $T = 3 < T_2$ afin d'illustrer l'impact de la date d'exercice sur le prix de l'option.

Le **prix d'exercice** (K) et le **prix initial du sous-jacent** (S_0) sont des données exogènes fournies par la Société A. Le prix initial du sous-jacent est de 100€, et les options sont attribuées à la monnaie, c'est-à-dire $K = S_0 = 100$ €.

Enfin, pour estimer la **volatilité** (σ), le paragraphe B29 de la norme IFRS 2 recommande l'utilisation d'un panel de sociétés comparables. Un panel de quatre sociétés comparables par secteur d'activité et structure est fourni par la Société A, et la volatilité historique de chaque entreprise comparable est calculée sur une période de quatre ans. Les données utilisées incluent la période de crise du COVID-19 et la guerre en Ukraine, représentées par des tirets verticaux gris sur la figure 6.1. La similarité marquée des variations de cours observées pendant ces périodes suggère une influence exogène globale, indépendante des fondamentaux spécifiques à chaque société. Ces fluctuations, n'étant pas représentatives des conditions normales de marché, sont exclues du calcul de la volatilité pour obtenir une estimation plus fiable et conforme à l'objectif d'IFRS 2. La volatilité de la Société A est alors estimée par la moyenne des volatilités de ces sociétés, soit $\sigma = 40,1\%$.

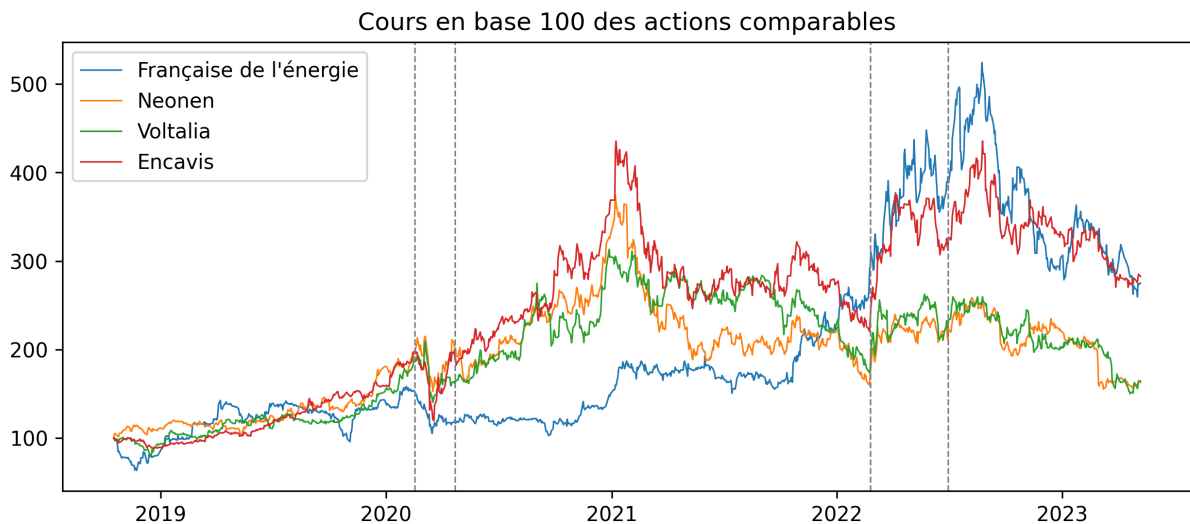


FIGURE 6.1 – Cours en base 100 des entreprises comparables

6.2 Application du modèle et résultats obtenus

Comme expliqué précédemment, le calcul du prix d'indifférence de l'option nécessite de déterminer le prix pour chaque scénario de sortie envisagé, puis de calculer le prix final en prenant la moyenne des prix pondérés par la probabilité d'occurrence de chaque scénario.

Afin d'éviter la redondance, le cas du scénario $T_2 = 5$ ans est détaillé ici. Une fois ce cas maîtrisé, la même méthode peut être appliquée aux autres scénarios, suivie d'une moyenne pondérée pour obtenir le prix final.

Le prix d'indifférence de l'option est calculé en utilisant la méthode décrite dans le cha-

pitre 5 pour le jeu de paramètres $(\mu, \sigma, r, S_0, K, T, T_2) = (10\%, 40.1\%, 2.5\%, 100, 100, 5, 5)$ dans le scénario $T = T_2$ et $(\mu, \sigma, r, S_0, K, T, T_2) = (10\%, 40.1\%, 2.5\%, 100, 100, 3, 5)$ dans le cas où $T = 3 < T_2$. Le paramètre γ utilisé est calibré par la méthode Lambert-Monte-Carlo (section 5.3.1) de manière à ce que le prix d'indifférence de S_0 soit de 100. Pour cette estimation, 10 000 simulations sont réalisées, donnant une valeur de $\gamma = 0.72\%$ avec un intervalle de confiance à 95% de $[0.71\%, 0.74\%]$.

Pour estimer le prix d'indifférence de l'option d'achat, le budget computationnel est fixé à $\Gamma \approx 10^9$, avec des paramètres $a = 0.49$ et $c = 1$. Cela conduit à un nombre de simulations internes $M = 38905$ et un nombre de simulations externes $N = 25704$.

Dans le cas où $T = T_2$, le prix d'indifférence obtenu pour l'option illiquide est de 38€, avec un intervalle de confiance à 95% de $[37.66\text{€}, 38.34\text{€}]$.

Dans le cas où $T < T_2$, le prix d'indifférence obtenu est de 28.62€, avec un intervalle de confiance à 95% de $[28.33\text{€}, 28.91\text{€}]$.

Le prix d'une option de mêmes caractéristiques (de maturité $T = T_2 = 5$ ans) calculé avec le modèle de Black-Scholes est de 38.74€. Ce prix n'étant pas inclus dans l'intervalle de confiance à 95% du prix d'indifférence de l'option illiquide, il est bien considéré comme supérieur.

Les figures 6.2 et 6.3 illustrent l'estimateur du prix d'indifférence de l'option avec un intervalle de confiance à 95%, en fonction du nombre de simulations externes. Le prix d'une option de mêmes caractéristiques (de maturité T_2) calculé avec le modèle de Black-Scholes est représenté par la ligne horizontale en tirets rouges. L'estimateur du prix d'indifférence de l'option semble converger dans les deux cas.

La même méthode est répétée pour les scénarios $T_2 = 4$ et $T_2 = 6$, et une moyenne pondérée des prix est calculée. Les résultats finaux pour la juste valeur de l'option de la société A selon les deux scénarios et le modèle de Black-Scholes sont les suivants :

- **Prix selon le modèle de Black-Scholes** : 38.63€.
- **Prix pour $T < T_2$** : 28.42€, soit 26.43% inférieur au prix calculé avec le modèle de Black-Scholes.
- **Prix pour $T = T_2$** : 37.97€, soit 1.71% inférieur au prix calculé avec le modèle de Black-Scholes.

Dans cet exemple, il est donc possible de conclure que l'application du modèle de Black-Scholes, en supposant une liquidité parfaite qui n'est pas respectée dans le contexte actuel, surestime la valeur de l'option par rapport à un modèle spécifiquement conçu pour prendre en compte l'illiquidité. L'utilisation inadéquate du modèle de Black-Scholes dans cet exemple conduit à constituer des provisions excessives.

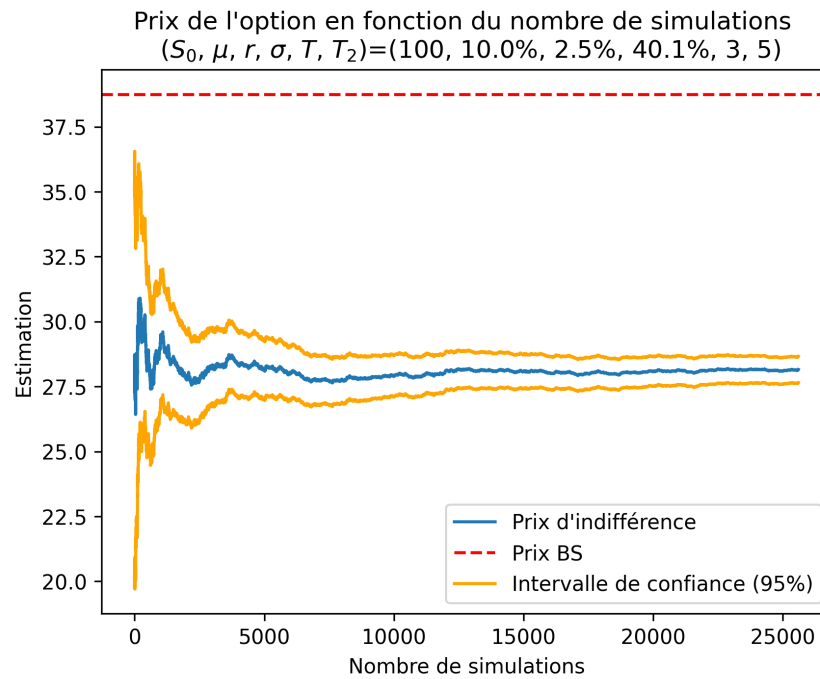


FIGURE 6.2 – Estimateur du prix d'indifférence de l'option d'achat ($T < T_2$) en fonction du nombre de simulations externes.

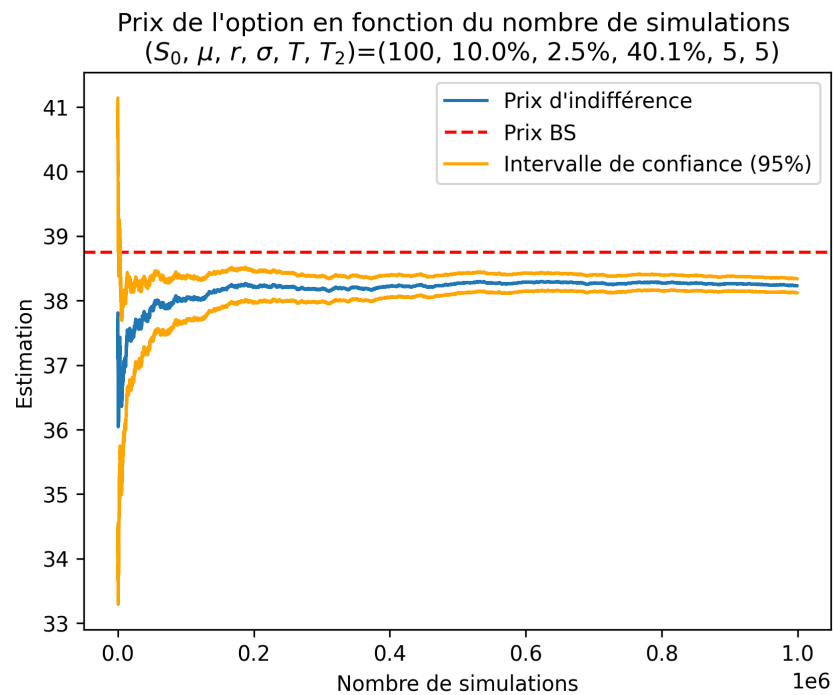


FIGURE 6.3 – Estimateur du prix d'indifférence de l'option d'achat ($T = T_2$) en fonction du nombre de simulations externes.

Il est important de souligner que la comparaison effectuée ici ne porte pas sur la différence entre le prix d'une option dans un contexte d'illiquidité et celui d'une option sur un marché parfaitement liquide. Les pourcentages mentionnés plus haut ne doivent pas être interprétés comme des décotes d'illiquidité. L'objectif est plutôt de situer le modèle proposé par rapport à une évaluation qui ignore les impacts de l'illiquidité, comme c'est le cas avec l'application du modèle de Black-Scholes. Ce dernier, bien que conçu pour des marchés liquides, est ici utilisé avec les paramètres d'un sous-jacent illiquide, malgré le fait que ses hypothèses ne soient pas respectées.

6.3 Analyse de sensibilité

Cette section examine comment le prix d'indifférence de l'option réagit aux variations des paramètres du modèle, en utilisant le scénario central avec $T_2 = 5$ ans. Les sensibilités seront analysées pour les deux scénarios étudiés dans la section précédente, en comparant également les résultats avec ceux obtenus par le modèle de Black-Scholes appliqué à la date de l'événement de liquidité T_2 .

L'analyse de sensibilité dans le cadre du modèle d'indifférence est complexe, car le prix dépend du coefficient d'aversion au risque, γ , qui est lui-même calibré en fonction des autres paramètres du modèle. Ainsi, une variation de paramètres comme le rendement espéré (μ), la date de liquidité (T_2), ou le taux sans risque (r) n'affecte pas seulement le prix de manière directe, mais aussi indirectement à travers son impact sur γ .

En général, l'effet direct d'une variation de paramètre tend à influencer la valeur du sous-jacent en T_2 et donc le *payoff* de l'option, tandis que l'effet indirect, passant par la modification de γ , ajuste la valorisation du flux futur par le marché et le comportement d'exercice de l'option. Par exemple, si un paramètre augmente la valeur du sous-jacent en T_2 , cela pourrait directement augmenter la valeur de l'option. Cependant, cette augmentation du prix du sous-jacent en T_2 pourrait aussi entraîner une augmentation de γ , réduisant la valorisation du flux de l'option et donc diminuant son prix. En effet, γ est calibré de sorte à compenser un effet direct et indirect sur le sous-jacent en T_2 pour le garder à $S_0 = 100$.

Dans le cas $T < T_2$, l'effet indirect tend à prédominer, car γ influence à la fois la valorisation et le comportement d'exercice. En revanche, pour $T = T_2$, le prix d'indifférence et le modèle de Black-Scholes devraient montrer des sensibilités similaires, bien que des différences subsistent en raison de l'illiquidité persistante sur $[0, T_2]$.

L'analyse de sensibilité commence par les paramètres qui n'influencent pas γ , comme le prix d'exercice et la maturité de l'option. Ensuite, l'analyse se poursuit avec les autres paramètres.

Paramètres qui n'influencent pas l'aversion au risque implicite

6.3.1 Prix d'exercice

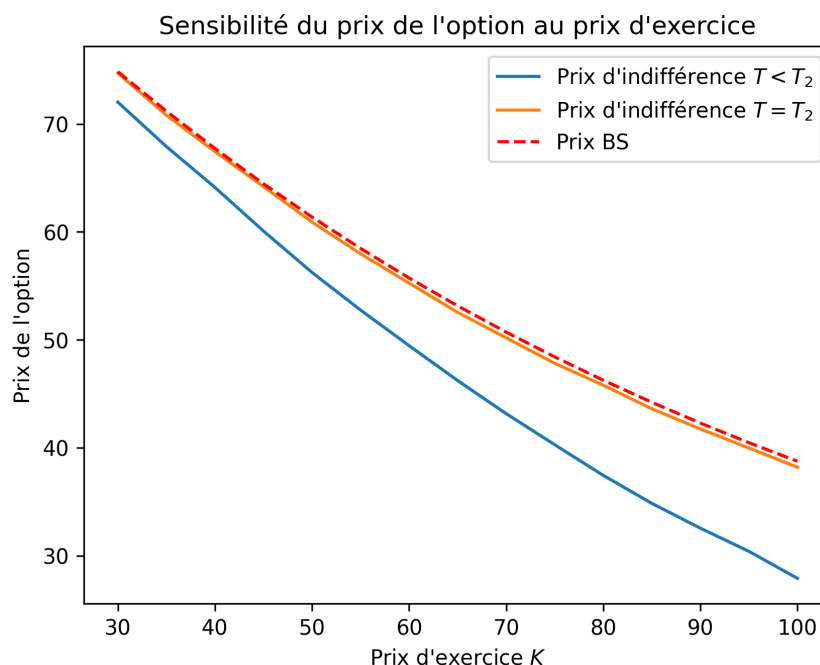


FIGURE 6.4 – Sensibilité du prix de l'option en fonction du prix d'exercice

La figure 6.4 montre que le prix de l'option diminue dans les deux modèles, que ce soit pour $T < T_2$ ou $T = T_2$, lorsque le prix d'exercice K augmente entre 30 et 100. Cette diminution peut être expliquée par deux effets principaux :

- Une augmentation du prix d'exercice K réduit la probabilité que l'option soit exercée, car un prix d'exercice plus élevé nécessite que le sous-jacent atteigne une valeur plus élevée pour que l'exercice soit rentable ;
- En plus de diminuer la probabilité d'exercice, une augmentation de K réduit également le montant du *payoff* lorsque l'option est exercée. En effet, un prix d'exercice plus élevé diminue le gain potentiel pour l'acheteur de l'option.

Il est également notable que le prix de l'option dans le cas $T < T_2$ diminue plus fortement avec l'augmentation de K par rapport au cas $T = T_2$. Cela pourrait s'expliquer par le coût d'opportunité associé à l'exercice anticipé en T et au paiement de K à cette date plutôt qu'en T_2 . Si l'option est exercée en T , l'acheteur doit payer K à ce moment-là et perd ainsi la possibilité de capitaliser cette somme jusqu'à la date T_2 . En d'autres termes, la valeur actuelle du prix d'exercice est plus faible lorsque $T = T_2$.

De plus, il existe un risque supplémentaire lorsque l'option est exercée en T et que le prix d'exercice K est payé à ce moment-là. Entre T et T_2 , la valeur du sous-jacent pourrait suffisamment diminuer pour entraîner une moins-value, même si l'option semblait rentable en T .

6.3.2 Date d'exercice

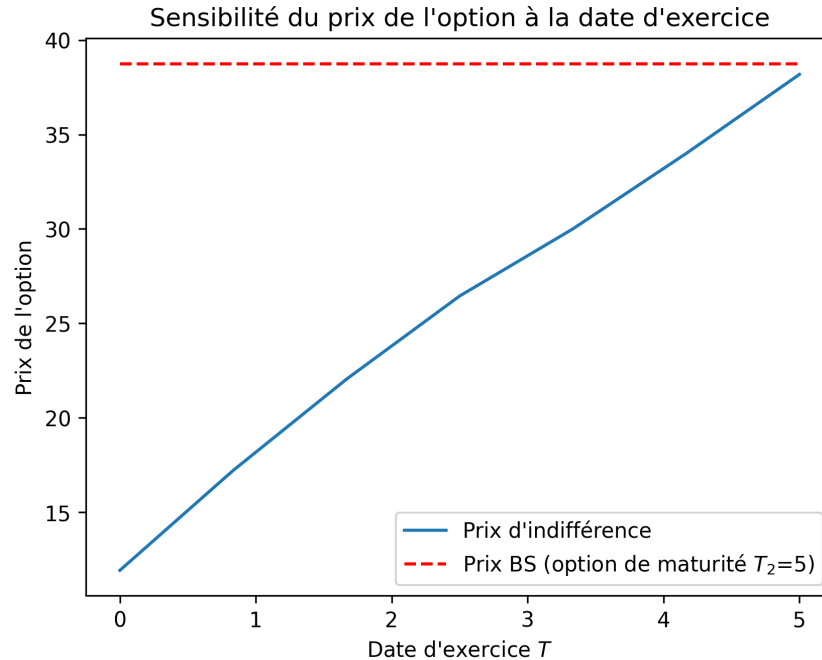


FIGURE 6.5 – Sensibilité du prix de l'option en fonction de la date d'exercice

La figure 6.5 illustre la relation entre le prix de l'option et sa date d'exercice T . Dans le modèle de Black-Scholes, le prix de l'option reste constant en fonction de T puisque l'évaluation est réalisée à la date de l'événement de liquidité $T_2 = 5$ ans.

En revanche, le prix d'indifférence de l'option augmente avec la prolongation de la date d'exercice T entre 0 et 5 ans. Cette augmentation est cohérente avec la théorie, car une date d'exercice plus éloignée réduit la valeur actuelle du prix d'exercice K .

De plus, une date d'exercice plus tardive accroît le potentiel de gain pour le détenteur de l'option. En prolongeant la période jusqu'à l'exercice, l'option bénéficie d'une plus grande variance sur l'intervalle $[0, T]$, ce qui offre davantage d'opportunités de hausse pour le sous-jacent. Par ailleurs, exercer l'option à une date plus proche de l'événement de liquidité T_2 réduit l'incertitude concernant les fluctuations du sous-jacent entre le moment de l'exercice et T_2 . Cette réduction de l'incertitude contribue également à augmenter la valeur de l'option.

Paramètres qui influencent l'aversion au risque implicite

Pour les paramètres qui suivent, les sensibilités de l'aversion au risque implicite aux paramètres seront également présentées.

L'impact indirect de la variation d'un paramètre, via l'aversion au risque implicite, joue un rôle déterminant dans la sensibilité du prix de l'option. Toutes choses égales par ailleurs, il existe une relation inverse entre l'aversion au risque implicite et le prix de l'option. Cette relation peut être démontrée à l'aide de l'inégalité de Hölder. En effet, si $\gamma_1 \leq \gamma_2$:

$$\mathbb{E}[\exp(-\gamma_1 F_{T_2})] \leq \mathbb{E}[\exp(-\gamma_2 F_{T_2})]^{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} \implies -\frac{e^{-rT_2}}{\gamma_2} \log(\mathbb{E}[\exp(-\gamma_2 F_{T_2})]) \leq -\frac{e^{-rT_2}}{\gamma_1} \log(\mathbb{E}[\exp(-\gamma_1 F_{T_2})]).$$

La formule reliant le prix d'indifférence à l'entropie relative (5.2) fournit l'interprétation de cette relation inverse. Plus l'aversion au risque est élevée, plus les scénarios pessimistes sont envisagés dans la valorisation de l'option, ce qui diminue le prix acceptable pour l'agent. À l'inverse, une faible aversion au risque conduit à prendre en compte des scénarios moins défavorables, augmentant ainsi le prix de l'option.

De plus, cette relation via l'entropie relative permet également d'interpréter l'effet direct des paramètres. Si un changement de paramètre augmente la valeur du sous-jacent à la date de maturité T_2 , cela indique que ce mouvement correspond à un scénario favorable pour l'agent. Dans ce cas, le coût en entropie pour prendre en compte des scénarios défavorables devient plus élevé. Par conséquent, le prix d'indifférence de l'option augmente.

6.3.3 Volatilité

Aversion au risque

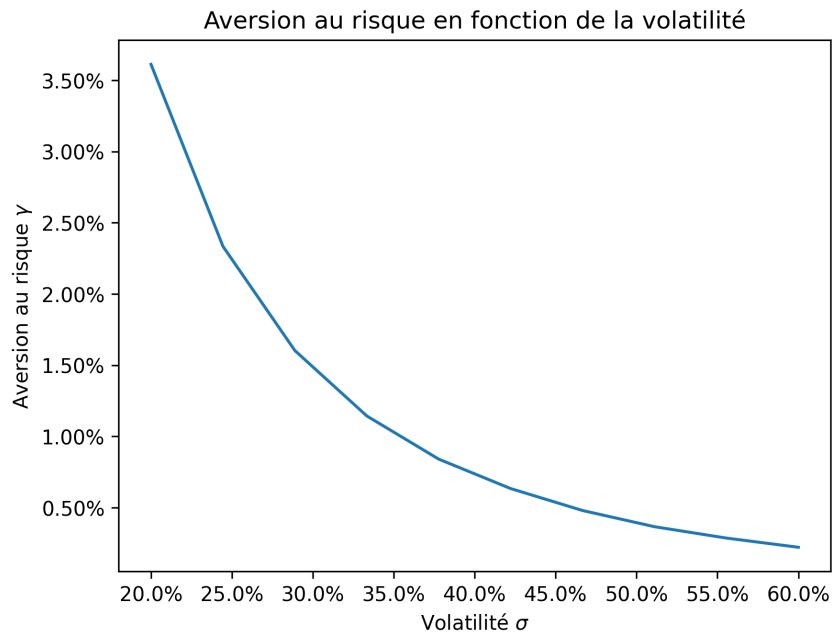


FIGURE 6.6 – Sensibilité de l'aversion au risque implicite en fonction de la volatilité du sous-jacent

La figure 6.6 illustre que lorsque la volatilité varie entre 20% et 60%, l'aversion au risque implicite diminue de manière significative, étant réduite d'environ un facteur 16.

Cette diminution s'explique par l'augmentation du risque associé au sous-jacent lorsque la volatilité s'accroît, tandis que la prime de risque exigée par le marché demeure constante. En d'autres termes, la prime de risque par unité de risque diminue, ce qui conduit à une baisse de l'aversion au risque implicite.

Prix de l'option

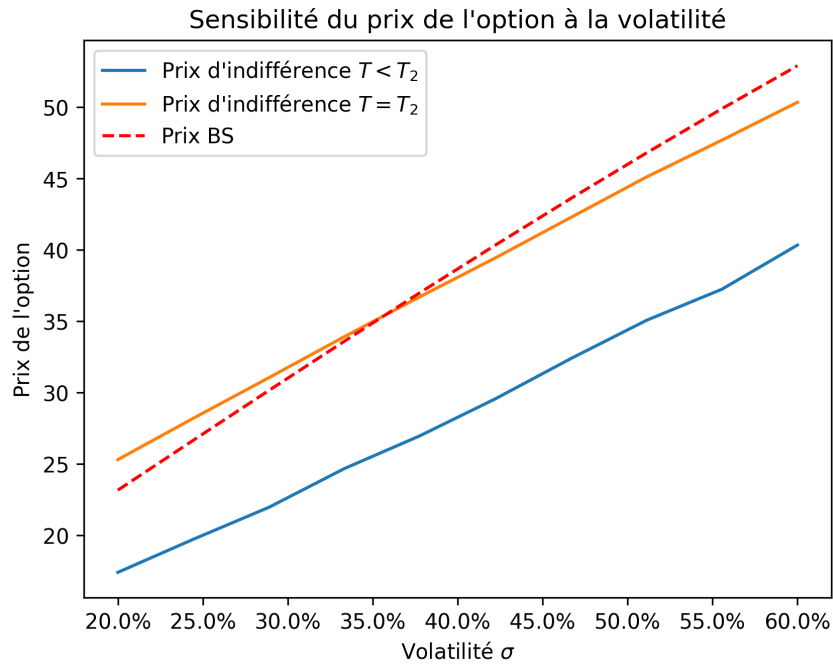


FIGURE 6.7 – Sensibilité du prix de l'option en fonction de la volatilité du sous-jacent

La figure 6.7 montre que, lorsque la volatilité varie entre 20% et 60%, le prix d'indifférence de l'option augmente, tout comme le prix calculé avec le modèle de Black-Scholes.

Dans le modèle de Black-Scholes, cette augmentation est due à l'accroissement de la variance du sous-jacent, ce qui augmente la probabilité de réaliser une plus-value en raison de l'asymétrie du *payoff* de l'option. En d'autres termes, une volatilité plus élevée permet un potentiel de gain plus important pour l'option, ce qui se traduit par une hausse de son prix.

Dans l'approche par indifférence, lorsque $T < T_2$, l'effet de la volatilité est plus nuancé. D'une part, l'optionnalité offre une flexibilité qui valorise positivement une augmentation de la variance sur l'intervalle $[0, T]$. Une volatilité accrue sur cette période augmente la probabilité que le sous-jacent atteigne un prix plus élevé en T , ce qui augmente la valeur potentielle de l'option. Si le prix du sous-jacent est trop faible en T , l'agent peut choisir de ne pas exercer l'option, évitant ainsi une perte. D'autre part, si l'option est exercée en T , une volatilité plus élevée sur l'intervalle $[T, T_2]$ introduit un risque de perte supplémentaire, car la valeur du sous-jacent pourrait diminuer avant d'atteindre T_2 , où il devient liquide.

Finalement, une forte volatilité tend à réduire l'aversion au risque implicite, ce qui augmente

la valeur de l'option. En effet, lorsque l'aversion au risque implicite diminue, l'option est exercée plus fréquemment, et le flux futur est valorisé davantage.

Lorsque $T = T_2$, pour des volatilités faibles, le prix d'indifférence est plus élevé que celui calculé par Black-Scholes, mais il devient plus bas lorsque la volatilité est élevée.

Ce phénomène peut s'expliquer par comparaison à la situation où le prix d'indifférence pour $T = T_2$ coïncide avec le prix du modèle de Black-Scholes.

Lorsque $T = T_2$ et $\mu = r$, il n'y a pas de prime de risque, ce qui implique que $\gamma = 0$. Dans cette situation, le prix d'indifférence de l'option est équivalent au prix obtenu par la règle de valorisation historique (5.2), et lorsque $\mu = r$, cela coïncide avec le prix du modèle de Black-Scholes.

Cependant, si μ augmente au-dessus de r , le prix d'indifférence pour $T = T_2$ s'écarte du prix de Black-Scholes de manière directe et indirecte via l'augmentation de l'aversion au risque implicite :

- **Effet indirect** : Une augmentation de μ accroît l'aversion au risque, γ , ce qui peut réduire la valorisation de l'option.
- **Effet direct** : Une augmentation de μ élève le prix du sous-jacent à maturité, augmentant ainsi le *payoff* de l'option.

À des niveaux de volatilité faibles (ici 20%), une hausse du rendement espéré μ tend à augmenter le prix d'indifférence par rapport au prix de Black-Scholes. Autrement dit, dans un environnement de faible risque, l'effet direct de l'augmentation de μ sur le *payoff* l'emporte sur l'effet indirect de l'augmentation de γ . Cela peut s'expliquer par le fait qu'un faible niveau de risque atténue l'impact de γ , même en présence d'une certaine aversion au risque.

En revanche, à des niveaux de volatilité élevés (ici 60%), une hausse du rendement espéré μ tend à diminuer le prix d'indifférence par rapport au prix de Black-Scholes. Dans ce contexte, l'effet indirect de l'augmentation de γ devient plus prononcé, surpassant l'effet direct de la hausse du rendement espéré sur le *payoff* du sous-jacent. Ainsi, face à un risque plus élevé, l'augmentation de μ ne compense pas suffisamment l'aversion accrue au risque, entraînant une baisse relative du prix de l'option.

6.3.4 Rendement espéré

Aversion au risque

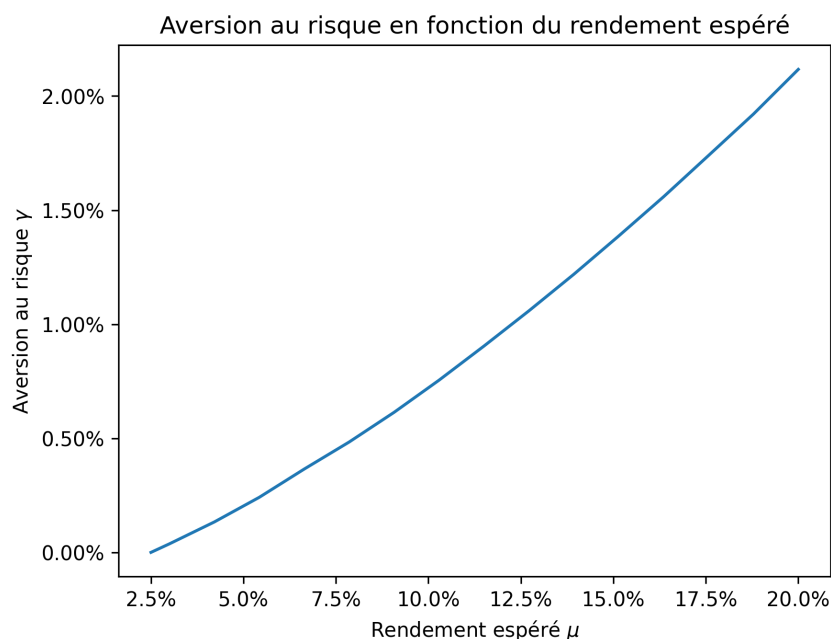


FIGURE 6.8 – Sensibilité de l’aversion au risque implicite en fonction du rendement espéré du sous-jacent

La figure 6.8 montre que lorsque le rendement espéré varie entre 2,5% et 25%, l’aversion au risque implicite augmente de manière significative.

Cette augmentation s’explique par le fait qu’une hausse du rendement attendu entraîne une augmentation de la prime de risque exigée par le marché, ce qui conduit à une aversion au risque implicite plus élevée.

Prix de l’option

La figure 6.9 montre qu’en faisant varier le rendement espéré entre 2,5% et 25%, le prix d’indifférence de l’option diminue, alors que le prix calculé avec le modèle de Black-Scholes reste constant.

Dans le modèle de Black-Scholes, le prix de l’option est indépendant du rendement espéré du sous-jacent, car la prime de risque est annulée par l’application d’une stratégie de couverture dynamique (*delta-hedging*). En revanche, dans un marché illiquide, cette stratégie ne peut pas être appliquée, ce qui entraîne un impact direct du rendement du sous-jacent sur le prix de l’option dans l’approche par indifférence.

Pour le cas $T < T_2$, le prix d’indifférence diminue avec l’augmentation de μ en raison de l’accroissement de γ , qui affecte à la fois la valorisation du flux et la condition d’exercice, l’effet de γ l’emportant sur l’augmentation du flux.

Dans le cas $T = T_2$, lorsque $\mu = r$, les prix d’indifférence et de Black-Scholes coïncident.

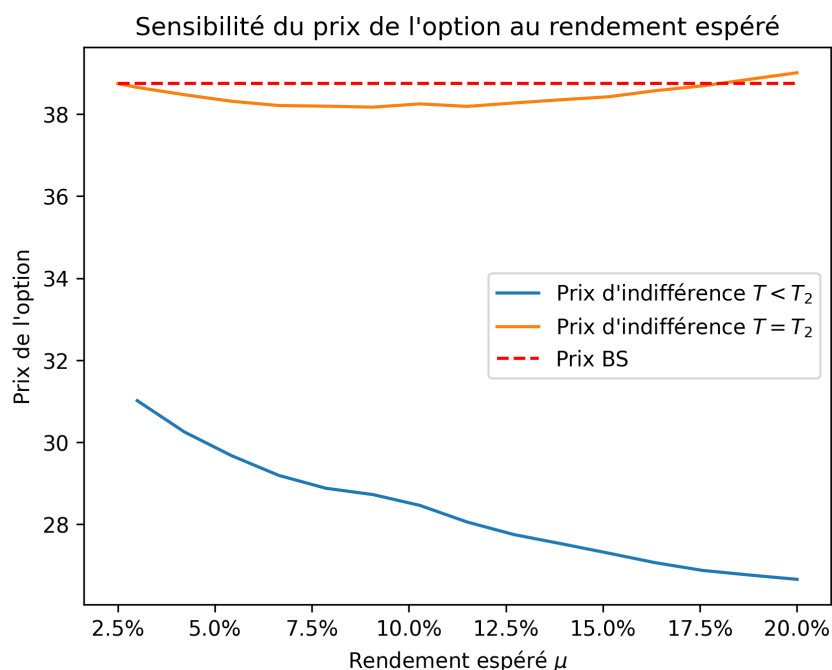
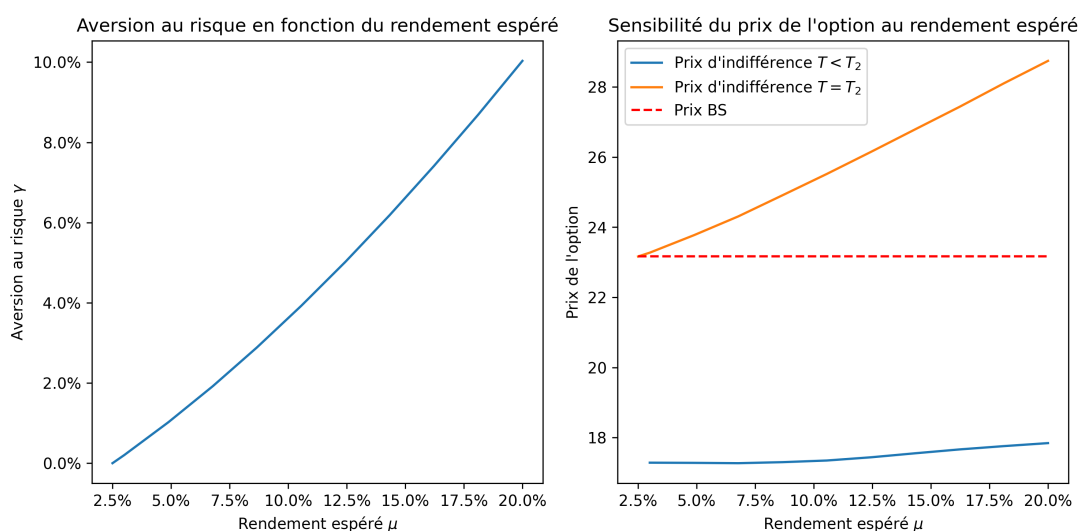


FIGURE 6.9 – Sensibilité du prix de l'option en fonction du rendement espéré

À ce niveau de volatilité, le prix d'indifférence diminue initialement avec l'augmentation de μ en raison de l'aversion au risque, puis augmente lorsque l'augmentation du *payoff* compense la baisse initiale.

Pour mieux comprendre le comportement du prix en fonction de μ , il est pertinent d'examiner deux scénarios : l'un avec une volatilité faible (20%) et l'autre avec une volatilité élevée (60%).

Quand la volatilité est faible

FIGURE 6.10 – Sensibilité du prix de l'option en fonction du rendement espéré ($\sigma = 20\%$)

La figure 6.10 illustre que, dans un contexte de faible volatilité, l'augmentation du rendement espéré conduit à une hausse significative de l'aversion au risque. Cependant, étant donné le faible niveau de risque, cet accroissement de l'aversion a un effet limité sur le prix de l'option. Par conséquent, malgré l'augmentation de γ , le prix de l'option tend à augmenter, car l'effet direct de l'augmentation du rendement sur le *payoff* domine.

Quand la volatilité est élevée

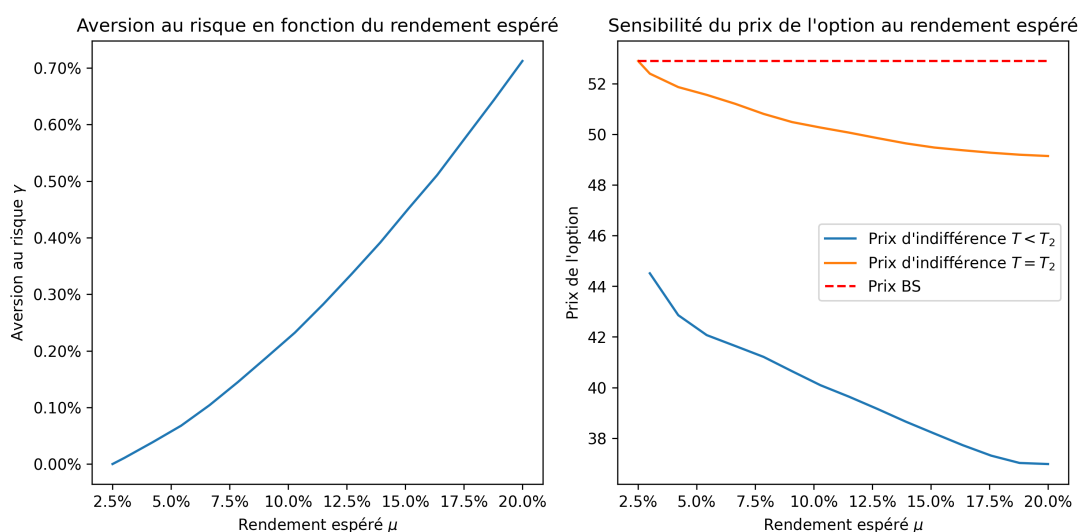


FIGURE 6.11 – Sensibilité du prix de l'option en fonction du rendement espéré ($\sigma = 60\%$)

À l'inverse, comme le montre également la figure 6.11, dans un environnement de forte volatilité, l'augmentation du rendement espéré a un impact moins prononcé sur l'aversion au risque. Pourtant, dans ce cas, l'effet sur le prix de l'option est plus marqué en raison du niveau de risque élevé. Ici, l'accroissement de γ contribue de manière significative à la baisse du prix de l'option, car l'effet indirect lié à l'aversion au risque devient plus important que l'effet direct du rendement espéré.

6.3.5 Taux sans risque

Aversion au risque

La figure 6.12 montre qu'en faisant varier le taux sans risque entre 0% et 5%, l'aversion au risque implicite diminue.

Cette diminution s'explique par la réduction de la prime de risque exigée par le marché lorsque le taux sans risque augmente, ce qui entraîne une baisse de l'aversion au risque implicite.

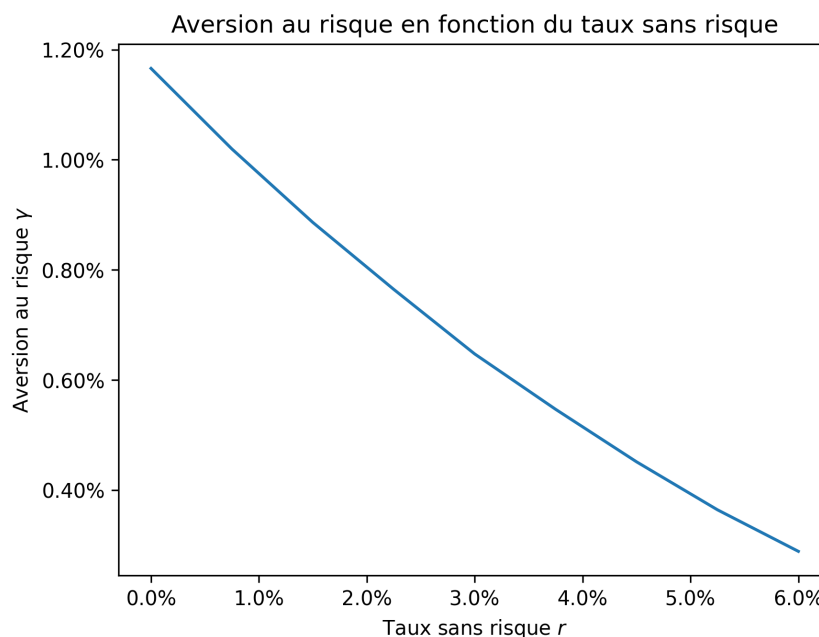


FIGURE 6.12 – Sensibilité de l’aversion au risque implicite en fonction du taux sans risque

Prix de l’option

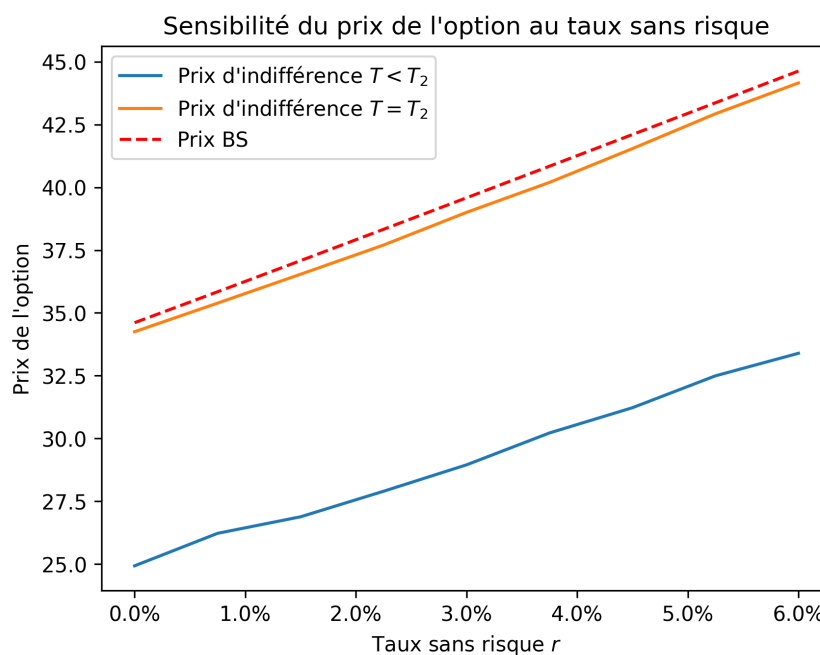


FIGURE 6.13 – Sensibilité du prix de l’option en fonction du taux sans risque

La figure 6.13 montre également qu’en faisant varier le taux sans risque entre 0% et 5%, le prix d’indifférence de l’option augmente, tout comme le prix obtenu par le modèle de Black-Scholes. Les deux prix croissent de manière linéaire sur cet intervalle.

Cette augmentation est attribuée à la diminution de la valeur actuelle du prix d’exercice, qui augmente la valeur de l’option. Cette dynamique est également observée dans le modèle

d'indifférence.

6.3.6 Date de l'événement de liquidité

Aversion au risque

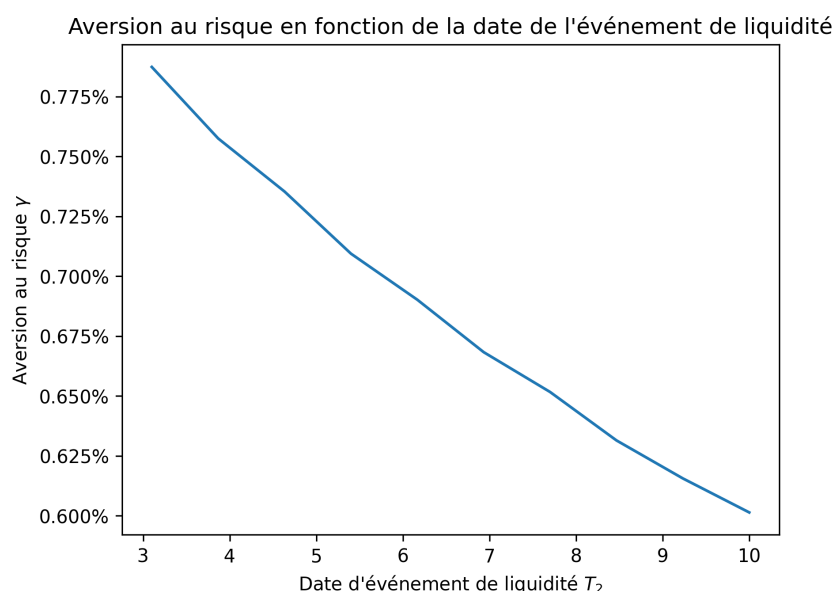


FIGURE 6.14 – Sensibilité de l'aversion au risque implicite en fonction de la date de l'événement de liquidité

La figure 6.14 montre qu'en faisant varier la date de l'événement de liquidité de 3 ans à 10 ans, l'aversion au risque implicite diminue légèrement.

Cette diminution s'explique par l'augmentation du risque associé au sous-jacent lorsque la date de l'événement de liquidité est plus lointaine, tandis que la prime de risque exigée par le marché demeure constante. En effet, lorsque la date de l'événement de liquidité T_2 est repoussée, les scénarios de marché risqués deviennent plus probables, mais l'évaluation du sous-jacent reste inchangée, ce qui diminue l'aversion au risque implicite.

Prix de l'option

La figure 6.15 illustre la sensibilité du prix de l'option en fonction de la date de l'événement de liquidité T_2 .

Dans le modèle de Black-Scholes, le prix de l'option augmente avec la maturité. Cette hausse est due à deux facteurs principaux : la diminution de la valeur actuelle du prix d'exercice à mesure que T_2 s'allonge, et l'augmentation de la volatilité, qui accentue l'asymétrie du *payoff* et permet de bénéficier davantage de la valeur temps de l'option. Le prix d'indifférence pour le cas où $T = T_2$ suit une dynamique similaire, pour les mêmes raisons. Cependant, le prix d'indifférence reste inférieur à celui calculé par Black-Scholes, et l'écart entre les deux prix tend à

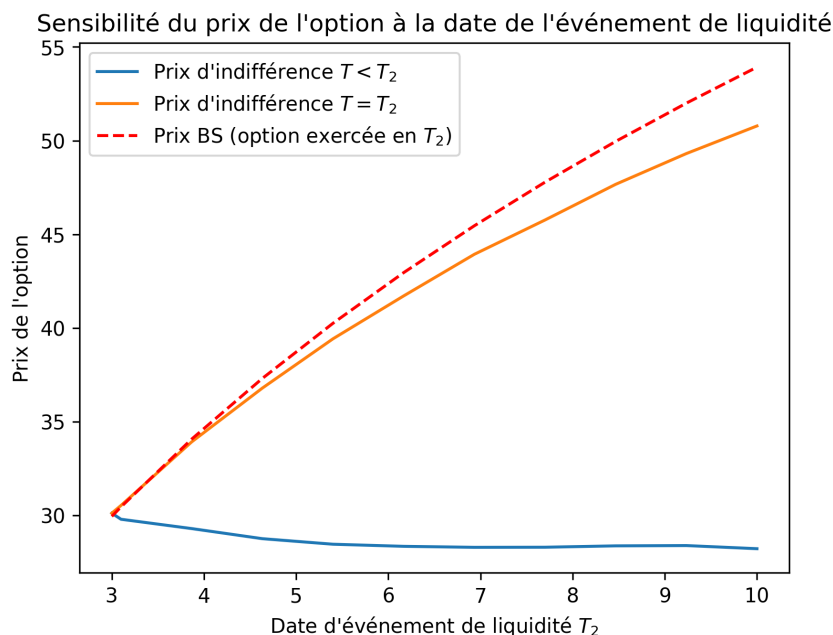


FIGURE 6.15 – Sensibilité du prix de l’option en fonction de la date de l’événement de liquidité

s’accroître avec l’augmentation de T_2 .

Dans le cas où $T < T_2$, il est observé que le prix d’indifférence de l’option diminue lorsque la période d’illiquidité s’allonge. Cela est conforme aux attentes, car plus le sous-jacent reste illiquide longtemps, moins l’option est attrayante pour son détenteur. La prolongation de l’illiquidité réduit la flexibilité et augmente l’incertitude, ce qui se traduit par une baisse de la valeur de l’option.

De plus, on remarque que lorsque T_2 tend vers T , le prix d’indifférence semble converger vers le prix de Black-Scholes, tandis que lorsque T tendait vers T_2 , le prix d’indifférence était inférieur. Cette convergence peut s’expliquer par le fait que lorsque T_2 tend vers T , la période d’illiquidité est beaucoup plus courte que lorsque T tendait vers T_2 . Par conséquent, la différence entre les modèles est réduite, ce qui rapproche les deux prix.

Bilan des sensibilités

Les prix d’indifférence obtenus se révèlent relativement proches de ceux calculés par le modèle de Black-Scholes, ce qui est rassurant. Cette proximité suggère que les évaluations fournies par le modèle d’indifférence ne s’écartent pas excessivement des valeurs couramment utilisées sur les marchés, évitant ainsi des résultats potentiellement incohérents ou déraisonnables.

De plus, le comportement de ces prix est globalement conforme à l’intuition financière : une augmentation de la volatilité, du taux sans risque ou de la maturité accroît la valeur de l’option d’achat, tandis qu’une augmentation du prix d’exercice la réduit. Toutefois, une distinction importante par rapport au modèle de Black-Scholes est la dépendance du prix d’indifférence

au rendement espéré du sous-jacent, une caractéristique absente dans le modèle de Black-Scholes.

Cependant, un avertissement important s'impose : prévoir le comportement du modèle d'indifférence peut être complexe en raison des interactions entre les différents paramètres, l'aversion au risque et le prix de l'option. Cette complexité peut mener à des résultats inattendus, en particulier dans des scénarios spécifiques. Par exemple, dans des situations de faible volatilité associée à un rendement espéré élevé, le prix d'indifférence pour $T = T_2$ peut, contre toute attente, dépasser le prix calculé avec le modèle de Black-Scholes.

Enfin, le modèle d'indifférence permet de valoriser des situations où $T < T_2$, et dans ces cas, le prix de l'option est généralement bien plus bas que dans un contexte où l'exercice coïncide avec l'événement de liquidité.

6.4 Impact d'une décote ad hoc

Une hypothèse fondamentale du modèle de Black-Scholes est la liquidité parfaite du marché. Cette hypothèse permet de construire un portefeuille de réplication et, grâce à l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, de déterminer le prix de l'option.

Dans le cadre de la valorisation d'options sur des sociétés non cotées, le sous-jacent étant totalement illiquide, la création d'un portefeuille de réplication devient impossible. En conséquence, le prix obtenu par le modèle de Black-Scholes n'a plus de fondement théorique.

Pour remédier à cette limitation, une pratique couramment observée consiste à appliquer une décote ad hoc pour refléter la perte de valeur de l'option due à l'illiquidité. Comme indiqué dans la section 1.4, ces décotes peuvent être de nature empirique ou théorique.

Dans cette section, un exemple est présenté en utilisant le modèle théorique de [Finnerty \(2012\)](#), évoqué précédemment dans la section 1.3.3, afin de démontrer l'impact de cette décote sur le prix de l'option. Ce modèle a été initialement développé pour calculer une décote d'incessibilité (*Discount for Lack of Marketability* ou DLOM) pour des actions restreintes aux États-Unis. Dans un contexte similaire au nôtre, il s'agit d'actions qui ne peuvent être cédées pendant une période donnée ; toutefois, contrairement à notre situation, il existe un marché où des titres identiques, à l'exception de la restriction de transfert, sont échangés.

En suivant une logique similaire à celle de [Chaffe \(1993\)](#) et [Longstaff \(1995\)](#), Finnerty propose d'assimiler cette décote d'incessibilité à la valeur d'une option de vente, représentant le droit de céder l'action incessible. Plus précisément, cette décote est assimilée au prix d'une option de vente asiatique dont le prix d'exercice est égal à la moyenne des prix *forward*.

Pour évaluer cette option de vente, le modèle assimile la situation à celle d'une option d'échange d'un actif restreint contre une série de contrats *forward*. La formule de [Margrabe](#)

(1978), qui permet de déterminer le prix d'une option d'échange entre deux actifs risqués, conduit à la formule suivante pour la décote :

$$D(\nu, T_2) = S_0 \left(\phi \left(\frac{\nu \sqrt{T_2}}{2} \right) - \phi \left(-\frac{\nu \sqrt{T_2}}{2} \right) \right)$$

$$\nu \sqrt{T_2} = \sqrt{\sigma^2 T_2 + \log(2(e^{\sigma^2 T_2} - \sigma^2 T_2 - 1)) - 2 \log(e^{\sigma^2 T_2} - 1)}$$

Pour tenir compte de la perte de valeur due à l'illiquidité, cette décote peut être appliquée au prix du sous-jacent. Par la suite, le modèle de Black-Scholes est utilisé sur cette valeur ajustée du sous-jacent, évaluée à la date de l'événement de liquidité.

Cette procédure est appliquée à l'exemple de la société A. Après application de la décote, la valeur ajustée du sous-jacent s'élève à 83 €, et le prix de l'option est de 27.12 €. En comparaison, le prix de l'option selon le modèle de Black-Scholes sans décote était de 38.63 €, ce qui représente une décote d'environ 29.8%.

Il est toutefois important de noter que l'application de décotes au prix du sous-jacent peut poser problème, car ce prix est censé résulter de négociations entre parties bien informées et devrait déjà intégrer l'impact de l'illiquidité du titre. Ainsi, l'application d'une décote supplémentaire revient à réduire le prix d'un sous-jacent qui tient déjà compte de l'illiquidité, risquant ainsi de conduire à une évaluation doublement pénalisée.

Conclusion

La constitution d'une provision pour les options attribuées aux salariés, exigée par la norme IFRS 2, nécessite une évaluation en juste valeur de ces instruments financiers. Ce mémoire explore les défis de cette évaluation pour les sociétés non cotées, où l'illiquidité des titres remet en question l'applicabilité du modèle de Black-Scholes.

Après un rappel des fondements théoriques du modèle de Black-Scholes et la présentation d'une méthode alternative cohérente avec celui-ci, l'impact de l'illiquidité spécifique aux titres de sociétés non cotées a été étudié. Un exemple a permis d'illustrer comment cette illiquidité peut conduire à l'incomplétude du marché, compromettant ainsi la possibilité de répliquer parfaitement les flux financiers et engendrant une infinité de mesures risque-neutres.

Face à ce constat, différentes approches de valorisation en marché incomplet ont été passées en revue. Un modèle, basé sur la théorie de l'utilité, a été proposé pour intégrer l'illiquidité dans la valorisation. De plus, une méthode numérique de mise en œuvre, s'appuyant sur des simulations de Monte-Carlo imbriquées, a été présentée .

Une étude de cas sur une société non cotée réelle a permis de comparer les résultats de ce modèle avec ceux issus des pratiques actuelles, qui consistent à utiliser le modèle de Black-Scholes à la date de l'événement de liquidité.

Bien que l'application du modèle de Black-Scholes soit théoriquement discutable dans ce contexte, l'analyse comparative a montré que les résultats obtenus ne diffèrent pas sensiblement de ceux d'un modèle prenant en compte l'illiquidité, bien qu'ils soient généralement plus élevés. Cette observation suggère que, malgré ses limitations théoriques, le modèle de Black-Scholes peut fournir des estimations numériquement acceptables, mais avec un biais potentiel à la hausse, pouvant entraîner une sur-provision. En revanche, l'utilisation de décotes ad hoc pour pallier les insuffisances théoriques du modèle de Black-Scholes, bien que courante, est encore plus problématique sur le plan théorique et aboutit à des prix inférieurs, augmentant ainsi le risque de sous-provision.

Il est important de souligner que le modèle proposé repose lui-même sur un ensemble d'hypothèses qui peuvent être sujettes à débat. L'objectif de ce travail n'était pas de proposer un modèle supérieur, mais plutôt de mettre en lumière les limites de l'application du modèle de Black-Scholes dans un contexte d'illiquidité, et d'offrir une alternative.

Plusieurs pistes d'amélioration peuvent être envisagée.

Ce mémoire se limite à l'évaluation d'une option européenne afin d'isoler précisément l'effet de l'illiquidité. Toutefois, il serait pertinent d'adapter ce modèle pour intégrer le caractère américain des options attribuées dans le cadre de l'actionnariat salarié, ces dernières permettant un exercice anticipé qui pourrait influencer la valorisation.

Par ailleurs, dans la pratique, la hiérarchie des titres revêt une importance considérable dans la valorisation des instruments financiers au sein des sociétés non cotées. Une piste de recherche intéressante consisterait à intégrer le modèle proposé dans ce mémoire à une analyse en cascade, afin de tenir compte de cette hiérarchie et des droits préférentiels associés aux différentes catégories de titres.

Table des figures

1.1	Schéma illustratif de la vie d'une option attribuée dans le cadre d'un plan d'actionnariat salarié (Source : Lacour et Plouvier (2017))	3
1.2	Evolution des supports possibles en fonction de la croissance d'une société	6
1.3	Diagramme des flux d'un <i>call</i> illiquide	13
4.1	Représentation des 3 titres sous forme d'arbre	32
4.2	Représentation des 3 titres sous forme d'arbre	34
4.3	Représentation géométrique des portefeuilles	36
4.4	Prix d'indifférence de S_0 en fonction de γ	42
5.1	Diagramme de flux de l'option.	49
5.2	Etapes de calcul du prix d'indifférence	53
5.3	Graphe des fonctions $x \mapsto \exp(-k(x))$ en rouge et $x \mapsto \exp(-d(x))$ en vert. . . .	55
5.4	Prix d'indifférence de S_0 en fonction du coefficient d'aversion au risque γ pour $M = 10^4$ simulations selon les 2 méthodes.	57
5.5	Prix d'indifférence de S_0 en fonction du nombre de simulations selon les 2 méthodes. .	58
6.1	Cours en base 100 des entreprises comparables	63
6.2	Estimateur du prix d'indifférence de l'option d'achat ($T < T_2$) en fonction du nombre de simulations externes.	65
6.3	Estimateur du prix d'indifférence de l'option d'achat ($T = T_2$) en fonction du nombre de simulations externes.	65
6.4	Sensibilité du prix de l'option en fonction du prix d'exercice	67
6.5	Sensibilité du prix de l'option en fonction de la date d'exercice	68
6.6	Sensibilité de l'aversion au risque implicite en fonction de la volatilité du sous-jacent	69
6.7	Sensibilité du prix de l'option en fonction de la volatilité du sous-jacent	70
6.8	Sensibilité de l'aversion au risque implicite en fonction du rendement espéré du sous-jacent	72
6.9	Sensibilité du prix de l'option en fonction du rendement espéré	73
6.10	Sensibilité du prix de l'option en fonction du rendement espéré ($\sigma = 20\%$)	73
6.11	Sensibilité du prix de l'option en fonction du rendement espéré ($\sigma = 60\%$)	74
6.12	Sensibilité de l'aversion au risque implicite en fonction du taux sans risque	75
6.13	Sensibilité du prix de l'option en fonction du taux sans risque	75

6.14	Sensibilité de l'aversion au risque implicite en fonction de la date de l'événement de liquidité	76
6.15	Sensibilité du prix de l'option en fonction de la date de l'événement de liquidité .	77

Annexe A

Démonstrations

A.1 La valeur d'un dérivé est le prix de son portefeuille de réplique

Supposons qu'il existe un $t \in [0, T]$ tel que $V_t < C_t$.

En achetant le portefeuille et en vendant à découvert le produit dérivé en t , on obtient un flux positif $C_t - V_t$ en t et les flux en T s'annulent $h(S_T) - h(S_T) = 0$.

Ainsi, en absence d'opportunité d'arbitrage $V_t \geq C_t$.

Or s'il existe un $t \in [0, T]$ tel que $V_t > C_t$ alors en achetant le produit dérivé et en vendant à découvert le portefeuille en t , on obtient un flux positif $V_t - C_t$ en t et les flux en T s'annulent $h(S_T) - h(S_T) = 0$.

Finalement, en absence d'opportunité d'arbitrage, on a forcément $C_t = V_t$ pour tout $t \in [0, T]$.

A.2 Théorème de Girsanov

Démonstration. Il suffit de montrer que le processus $W_t^{\mathbb{Q}}$ défini par

$$W_t^{\mathbb{Q}} = W_t - \int_0^t \theta_u du$$

est un mouvement brownien standard sous \mathbb{Q} .

Pour ce faire nous utilisons la caractérisation de Lévy :

- $W_0^{\mathbb{Q}} = W_0 = 0$
- Le terme $\int_0^t \theta_u du$ ne contribue pas dans la variation quadratique de $W_t^{\mathbb{Q}}$ donc

$$\langle W_t^{\mathbb{Q}}, W_t^{\mathbb{Q}} \rangle = \langle W_t, W_t \rangle = t$$

- En appliquant le lemme d'Ito sur le produit $W_t^{\mathbb{Q}} Z_t$, on obtient :

$$\begin{aligned}
dW_t^{\mathbb{Q}} Z_t &= W_t^{\mathbb{Q}} dZ_t + Z_t dW_t^{\mathbb{Q}} + d\langle W_t^{\mathbb{Q}}, Z_t \rangle \\
&= W_t^{\mathbb{Q}} \theta_t Z_t dW_t + Z_t (dW_t - \theta_t dt) + \theta_t Z_t d\langle W_t, W_t \rangle - \theta_t^2 Z_t d\langle t, W_t \rangle \\
&= (W_t^{\mathbb{Q}} \theta_t + 1) Z_t dW_t.
\end{aligned}$$

Donc $W_t^{\mathbb{Q}} Z_t$ est une \mathbb{P} -martingale (modulo des conditions d'intégrabilité). Par conséquent par le théorème de Bayes abstrait pour tout $s < t$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[W_t^{\mathbb{Q}} | \mathcal{F}_s] = \frac{\mathbb{E}[W_t^{\mathbb{Q}} Z_t | \mathcal{F}_s]}{Z_s} = \frac{W_s^{\mathbb{Q}} Z_s}{Z_s} = W_s^{\mathbb{Q}}.$$

□

A.3 Décroissance du prix de l'actif risqué en fonction de l'aversion au risque

Démonstration. Pour établir la décroissance du prix d'indifférence de l'actif risqué en fonction de l'aversion au risque, on étudie sa dérivée.

$$\frac{\partial S_0^*}{\partial \gamma} = \frac{e^{-rT_2}}{\gamma^2} \left(\log(\mathbb{E}[\exp(-\gamma S_{T_2})]) - \gamma \frac{\mathbb{E}[-S_{T_2} \exp(-\gamma S_{T_2})]}{\mathbb{E}[\exp(-\gamma S_{T_2})]} \right).$$

L'interversion entre dérivée et espérance est justifiée car S_{T_2} est intégrable et $\exp(-\gamma S_{T_2}) \leq 1$. Notons $\varphi(\gamma) = \log(\mathbb{E}[\exp(-\gamma S_{T_2})])$. On a

$$\frac{\partial S_0^*}{\partial \gamma} < 0 \Leftrightarrow \varphi(\gamma) < \gamma \varphi'(\gamma).$$

Pour montrer cette inégalité on montre que φ est strictement convexe.

La dérivée seconde de φ s'écrit

$$\varphi''(\gamma) = \frac{\mathbb{E}[S_{T_2}^2 \exp(-\gamma S_{T_2})]}{\mathbb{E}[\exp(-\gamma S_{T_2})]} - \frac{\mathbb{E}[-S_{T_2} \exp(-\gamma S_{T_2})]^2}{\mathbb{E}[\exp(-\gamma S_{T_2})]^2}.$$

L'interversion entre dérivée et espérance est justifiée car S_{T_2} admet un moment d'ordre 2.

On reconnaît la variance de S_{T_2} sous la probabilité caractérisée par $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \frac{\exp(-\gamma S_{T_2})}{\mathbb{E}[\exp(-\gamma S_{T_2})]}$. On a

$$\varphi''(\gamma) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_{T_2}^2] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_{T_2}]^2 > 0.$$

Comme φ est strictement convexe, on a

$$\begin{aligned}
&\forall a \geq 0, b \geq 0, \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a} > \varphi'(a) \\
&\Rightarrow \forall a \geq 0, b \geq 0, \varphi(b) > \varphi'(a)(b - a) + \varphi(a) \\
&\Rightarrow \varphi(\gamma) < \gamma \varphi'(\gamma) \text{ (en posant } a = \gamma, b = 0).
\end{aligned}$$

Par conséquent le prix d'indifférence de l'actif risqué est strictement décroissant en fonction de l'aversion au risque. \square

A.4 Convergence en probabilité vers 0

Démonstration. On cherche à établir la convergence en probabilité vers 0, lorsque $N, M \rightarrow +\infty$, de la quantité

$$\sqrt{N} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(\hat{L}_M(S_n)) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(L_{T_2}(S_n)) \right).$$

Pour ce faire, on démontre la convergence en moyenne d'ordre 1 de cette quantité vers 0, qui est une convergence plus forte.

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left| \sqrt{N} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(\hat{L}_M(S_n)) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(L_{T_2}(S_n)) \right) \right| \right] &\leq \frac{\sqrt{N}}{N} \sum_{n=1}^N \mathbb{E} \left[|g(\hat{L}_M(S_n)) - g(L_{T_2}(S_n))| \right] \\ &= \sqrt{N} \mathbb{E} \left[|g(\hat{L}_M(S_T)) - g(L_{T_2}(S_T))| \right]. \end{aligned}$$

Pour rappel, g est la fonction $x \mapsto 1 - (1 - x)_+$.

g est 1-Lipschitzienne, i.e.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |g(x) - g(y)| \leq |x - y|.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\left| \sqrt{N} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(\hat{L}_M(S_n)) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(L_{T_2}(S_n)) \right) \right| \right] \\ &\leq \sqrt{N} \mathbb{E} \left[|\hat{L}_M(S_T) - L_{T_2}(S_T)| \right] \\ &\leq \sqrt{N} \mathbb{E} \left[\left(\hat{L}_M(S_T) - L_{T_2}(S_T) \right)^2 \right]^{0.5} \quad (\text{Inégalité de Jensen}) \\ &= \sqrt{N} \mathbb{E} \left[\text{Var} \left[\hat{L}_M(S_T) \mid \mathcal{F}_T \right] \right]^{0.5} \quad (\text{car } \mathbb{E}[\hat{L}_M(S_T) \mid \mathcal{F}_T] = L_{T_2}(S_T)) \\ &= \sqrt{\frac{N}{M}} \mathbb{E} \left[\exp \left(-\frac{W(\sigma^2 \theta(S_T))^2 + 2W(\sigma^2 \theta(S_T))}{\sigma^2} \right) \text{Var} \left[\exp \left(-\frac{W(\sigma^2 \theta(S_T))}{\sigma^2} (e^{\sigma N} - \sigma N - 1) \right) \mid \mathcal{F}_T \right] \right]^{0.5} \\ &\leq \sqrt{\frac{N}{M}}. \end{aligned}$$

La dernière inégalité vient du fait que $\exp(-x) \leq 1$ pour tout $x \geq 0$.

Finalement, si $\frac{N}{M}$ tend vers 0 alors

$$\sqrt{N} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(\hat{L}_M(S_n)) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(L_{T_2}(S_n)) \right)$$

converge en probabilité vers 0. \square

Annexe B

Détail des calculs de la section 3.2

B.1 Lemme d'Ito sur la fonction de valeur

On a

$$d \langle S_t, S_t \rangle = \sigma^2 S_t^2 dt$$

$$d \langle V_t, S_t \rangle = a_t d \langle S_t, S_t \rangle = a_t \sigma^2 S_t^2 dt$$

$$d \langle V_t, V_t \rangle = a_t^2 d \langle S_t, S_t \rangle = a_t^2 \sigma^2 S_t^2 dt$$

Par le lemme d'Ito

$$\begin{aligned} d\mathcal{V} &= \mathcal{V}(t+dt, x+dV_t, k, s+dS_t) - \mathcal{V}(t, x, k, s) \\ &= \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial V} dV_t + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial S} dS_t + \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial V \partial S} d \langle V_t, S_t \rangle + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial V^2} d \langle V_t, V_t \rangle + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial S^2} d \langle S_t, S_t \rangle \\ &= \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial V} (a_t dS_t + b_t dB_t) + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial S} dS_t + \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial V \partial S} a_t \sigma^2 S_t^2 dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial V^2} a_t^2 \sigma^2 S_t^2 dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 dt \\ &= \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial V} \left(a_t S_t (\mu dt + \sigma dW_t) + \left(\frac{V_t - a_t S_t}{B_t} \right) r B_t dt \right) + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial S} S_t (\mu dt + \sigma dW_t) + \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial V \partial S} a_t \sigma^2 S_t^2 dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial V^2} a_t^2 \sigma^2 S_t^2 dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 dt \\ &= \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial V^2} a_t^2 \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial V \partial S} a_t \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial V} (a_t (\mu - r) S_t + r V_t) + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial S} \mu S_t \right) dt \\ &\quad + \sigma S_t \left(a_t \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial V} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial S} \right) dW_t. \end{aligned}$$

B.2 Valeur du portefeuille actualisé

L'application du lemme d'Ito au processus $e^{-rt} V_t$ permet d'obtenir en intégrant entre t et T

$$V_T = V_t e^{r(T-t)} + \int_t^T a_u d(e^{r(T-u)} S_u).$$

Soit $u \in [t, T]$, par le lemme d'Ito

$$d(e^{-ru} V_u) = e^{-ru} (-r V_u du + dV_u)$$

d'où en intégrant entre t et T et en multipliant par e^{rT}

$$\begin{aligned}
 V_T &= V_t e^{r(T-t)} - \int_t^T V_u r e^{r(T-u)} du + \int_t^T e^{r(T-u)} dV_u \\
 &= V_t e^{r(T-t)} - \int_t^T V_u r e^{r(T-u)} du + \int_t^T e^{r(T-u)} a_u dS_u + \int_t^T e^{r(T-u)} b_u dB_u \\
 &= V_t e^{r(T-t)} - \int_t^T V_u r e^{r(T-u)} du + \int_t^T e^{r(T-u)} a_u dS_u + \int_t^T e^{r(T-u)} \frac{V_u - a_u S_u}{B_u} r B_u du \\
 &= V_t e^{r(T-t)} + \int_t^T e^{r(T-u)} a_u dS_u - \int_t^T e^{r(T-u)} a_u S_u r du \\
 &= V_t e^{r(T-t)} + \int_t^T a_u e^{r(T-u)} (-r S_u du + dS_u) \\
 &= V_t e^{r(T-t)} + \int_t^T a_u d(e^{r(T-u)} S_u).
 \end{aligned}$$

B.3 Réécriture de l'équation HJB avec g

L'équation HJB s'écrit

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial S^2} \sigma^2 s^2 + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial V} r x + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial S} \mu s + \sup_{a_t \in \mathcal{A}_{t,t+dt}} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial V^2} a_t^2 \sigma^2 s^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial V \partial S} a_t \sigma^2 s^2 + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial V} a_t (\mu - r) s \right] = 0$$

On a

- $\mathcal{V} = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma x e^{r\tau}} g(T-t, \log(s)) = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma x e^{r\tau}} g(\tau, y)$
- $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma x e^{r\tau}} \left(-\gamma r x e^{r\tau} g + \frac{\partial g}{\partial \tau} \right)$
- $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial S} = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma x e^{r\tau}} e^{-y} \frac{\partial g}{\partial y}$
- $\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial S^2} = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma x e^{r\tau}} e^{-2y} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - \frac{\partial g}{\partial y} \right)$
- $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial V} = e^{r\tau} e^{-\gamma x e^{r\tau}} g$
- $\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial V^2} = -\gamma e^{2r\tau} e^{-\gamma x e^{r\tau}} g$
- $\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial V \partial S} = e^{r\tau} e^{-\gamma x e^{r\tau}} e^{-y} \frac{\partial g}{\partial y}$

Ainsi en multipliant l'équation par $\gamma e^{\gamma x e^{r\tau}}$ on obtient

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{\partial g}{\partial \tau} - \gamma e^{r\tau} g r x \right) + \frac{1}{2} \left(-e^{-2y} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) \right) \sigma^2 e^{2y} + (\gamma e^{r\tau} g) r x + \left(-e^{-y} \frac{\partial g}{\partial y} \right) \mu e^y \\
 &\quad + \sup_{a_t \in \mathcal{A}_{t,t+dt}} \left[\frac{1}{2} (-\gamma^2 e^{2r\tau} g) a_t^2 \sigma^2 e^{2y} + (\gamma e^{r\tau} e^{-y} \frac{\partial g}{\partial y}) a_t \sigma^2 e^{2y} + (\gamma e^{r\tau} g) a_t (\mu - r) e^y \right] = 0 \\
 \implies &\frac{\partial g}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 \left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) - \mu \frac{\partial g}{\partial y} \\
 &\quad + \sup_{a_t \in \mathcal{A}_{t,T}} \left[-\left(\frac{1}{2} \gamma^2 \sigma^2 e^{2y} e^{2r\tau} g \right) a_t^2 + \left(\gamma \sigma^2 e^y e^{r\tau} \frac{\partial g}{\partial y} + \gamma (\mu - r) e^y e^{r\tau} g \right) a_t \right] = 0.
 \end{aligned}$$

B.4 Transformation de Hopf-Cole

A ce stade l'équation HJB s'écrit

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 - r\right) \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}{g} + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 g = 0.$$

L'idée est de supprimer le terme non linéaire par un changement de variable.

En posant $g(\tau, y) = \phi(w(\tau, y))$, on a

- $\frac{\partial g}{\partial \tau} = \phi'(w) \frac{\partial w}{\partial \tau}$
- $\frac{\partial g}{\partial y} = \phi'(w) \frac{\partial w}{\partial y}$
- $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \phi''(w) \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \phi'(w) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$

d'où en divisant l'équation par $\phi'(w)$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 - r\right) \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{2}\sigma^2 \left(\frac{\phi'^2(w) - \phi(w)\phi''(w)}{\phi(w)\phi'(w)}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 \frac{\phi(w)}{\phi'(w)} = 0.$$

Le terme non linéaire s'annule en choisissant ϕ comme une solution de l'EDO

$$\phi'^2(w) - \phi(w)\phi''(w) = 0.$$

En prenant $\phi(w) = e^w$, on obtient l'équation

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 - r\right) \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 = 0.$$

B.5 Obtention de l'équation de la chaleur

A ce stade l'équation HJB s'écrit

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 - r\right) \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 = 0.$$

En posant $w(\tau, y) = W(\tau, y + \beta\tau) + \alpha\tau = W(u, v) + \alpha u$, on obtient

- $\frac{\partial w}{\partial \tau} = \alpha + \frac{\partial W}{\partial u} + \beta \frac{\partial W}{\partial v}$
- $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial v}$
- $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial v^2}$

d'où la réécriture

$$\left(\frac{\partial W}{\partial u} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 W}{\partial v^2}\right) + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 - r + \beta\right) \frac{\partial W}{\partial v} + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 + \alpha = 0.$$

En posant $\alpha = -\frac{1}{2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2$ et $\beta = r - \frac{1}{2}\sigma^2$ on obtient une équation de la chaleur

$$\frac{\partial W}{\partial u} = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 W}{\partial v^2}.$$

B.6 Condition de bord

On a

$$\begin{aligned} W(0, z) &= w(0, z) \\ &= \log(g(0, z)) \\ &= \log(g(0, \log(s))) \\ &= \log\left(\inf_{a_u \in \mathcal{A}_{t,T}} \mathbb{E}\left[e^{-\gamma\left(\int_T^T a_u d(e^{r(T-u)} S_u) + kh(S_T)\right)} \middle| S_T = s\right]\right) \\ &= \log\left(\inf_{a_u \in \mathcal{A}_{t,T}} \mathbb{E}\left[e^{-\gamma kh(S_T)} \middle| S_T = s\right]\right) \\ &= \log\left(\mathbb{E}\left[e^{-\gamma kh(S_T)} \middle| S_T = s\right]\right) \\ &= \log\left(\mathbb{E}\left[e^{-\gamma kh(s)} \middle| S_T = s\right]\right) \\ &= \log\left(e^{-\gamma kh(s)}\right) \\ &= -\gamma kh(e^z). \end{aligned}$$

Annexe C

Prix d'indifférence d'un produit dérivé sur un sous-jacent illiquide partiellement couvert

Notons S l'actif illiquide et L l'actif liquide.

Les prix des actifs évoluent selon un mouvement brownien géométrique, on a

$$dL_t = L_t(\nu dt + \eta dW_t^0)$$

et

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) = S_t \left(\mu dt + \sigma \left(\rho dW_t^0 + \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^\perp \right) \right).$$

μ et ν sont les rendements des actifs, σ et η les volatilité, W_t^0 et W_t^\perp sont des mouvements browniens géométriques indépendants et ρ est la corrélation entre les browniens. En particulier, on a $d \langle W_t^0, W_t^\perp \rangle = 0$ et $d \langle S_t, L_t \rangle = \rho dt$.

On souhaite calculer le prix d'indifférence d'un produit dérivé européen de maturité T et de *payoff* $h(S_T)$.

La fonction de valeur est définie par

$$\mathcal{V}(x, t, k, l, s) = \sup_{\theta \in \Theta_{t,T}} \mathbb{E}[U(V_T^{x,\theta} + kh(S_T))] = \sup_{(a_t, b_t) \in \Theta_{t,T}} \mathbb{E}[U(a_T L_T + b_T B_T + kh(S_T)) | V_t = x, L_t = l, S_t = s].$$

En prenant une fonction d'utilité exponentielle ($U(x) = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma x}$), on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(x, t, k, l, s) &= -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma x e^{r(T-t)}} \inf_{a_u \in \mathcal{A}_{t,T}} \mathbb{E} \left[e^{-\gamma \left(\int_t^T a_u d(e^{r(T-u)} L_u) + kh(S_t) \right)} \middle| L_t = t, S_t = s \right] \\ &= -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma x e^{r(T-t)}} g(T-t, \log(s)) = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma x e^{r(T-t)}} g(\tau, y). \end{aligned}$$

Le lemme d'Ito nous donne

$$d\mathcal{V} = \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial V} (a_t(\nu - r)L_t + rV_t) + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial S} S_t \mu + \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial S \partial V} a_t S_t \eta \sigma \rho L_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial S^2} S_t^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial V^2} a_t^2 L_t^2 \eta^2 \right) dt \\ + \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial V} a_t L_t \eta + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial S} S_t \sigma \rho \right) dW_t^0 + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial S} S_t \sigma \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^\perp.$$

\mathcal{V} est solution d'une équation HJB d'après le principe d'optimalité de Bellman

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial V} rV_t + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial S} S_t \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial S^2} S_t^2 \sigma^2 + \sup_{a_t \in \mathcal{A}_{t,T}} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial V^2} a_t^2 L_t^2 \eta^2 + a_t \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial S \partial V} S_t \eta \sigma \rho L_t + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial V} (\nu - r)L_t \right) \right] = 0$$

On réécrit l'équation en fonction de g

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} - \mu \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{1}{2} \sigma^2 \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) + \sup_{a_t \in \mathcal{A}_{t,T}} \left[- \left(\frac{1}{2} \gamma^2 e^{2r\tau} \eta^2 L_t^2 g \right) a_t^2 + \left(\gamma e^{r\tau} L_t \left(\frac{\partial g}{\partial y} \eta \sigma \rho + g(\nu - r) \right) \right) a_t \right] = 0.$$

La stratégie optimale correspond à l'abscisse du sommet d'une parabole

$$a_t^* = \frac{\frac{\partial g}{\partial y} \eta \sigma \rho + g(\nu - r)}{\gamma \eta^2 L_t g} e^{-r\tau}.$$

L'équation HJB se réécrit

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} + \left(\frac{1}{2} \sigma^2 - \mu + \rho \sigma \left(\frac{\nu - r}{\eta} \right) \right) \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 \rho^2 \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2}{g} + \frac{1}{2} \left(\frac{\nu - r}{\eta} \right)^2 g = 0.$$

On utilise une transformation de Hopf-Cole pour enlever la non-linéarité $g(\tau, y) = \phi(w(\tau, y))$.

On réécrit l'équation en fonction de w

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} + \left(\frac{1}{2} \sigma^2 - \mu + \rho \sigma \left(\frac{\nu - r}{\eta} \right) \right) \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma^2 \left(\frac{\rho^2 \phi' - \phi''}{2\phi\phi'} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\nu - r}{\eta} \right)^2 = 0.$$

En prenant $\phi(x) = x^{\frac{1}{1-\rho^2}}$ on obtient

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} + \left(\frac{1}{2} \sigma^2 - \mu + \rho \sigma \left(\frac{\nu - r}{\eta} \right) \right) \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\nu - r}{\eta} \right)^2 = 0.$$

On utilise le changement de variable $w(\tau, y) = \alpha\tau + W(\tau, y + \beta\tau) = \alpha\tau + W(\tau, u)$

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} + \left(\frac{1}{2} \sigma^2 - \mu + \rho \sigma \left(\frac{\nu - r}{\eta} \right) + \beta \right) \frac{\partial W}{\partial u} - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\nu - r}{\eta} \right)^2 + \alpha = 0.$$

Et on posant $\alpha = -\frac{1}{2} \left(\frac{\nu - r}{\eta} \right)^2$ et $\beta = -\frac{1}{2} \sigma^2 + \mu - \rho \sigma \left(\frac{\nu - r}{\eta} \right)$, on obtient une équation de la chaleur

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 W}{\partial u^2} = 0.$$

La solution de cette équation est donnée par

$$W(\tau, u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2\tau}} W(0, u-z) dz = \mathbb{E}[W(0, u-\sigma\sqrt{\tau}N)] = \mathbb{E}[W(0, u+\sigma\sqrt{\tau}N)], N \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

En remontant les changements de variables dans l'autre sens, on obtient

$$\mathcal{V}(x, t, k, s) = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma x e^{r(T-t)} - \frac{1}{2} \left(\frac{\nu-r}{\eta}\right)^2 (T-t)} \left(\mathbb{E} \left[\exp \left(-\gamma k (1-\rho^2) h \left(s e^{(\mu-\rho\sigma(\frac{\nu-r}{\eta}) - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} e^{\sigma\sqrt{T-t}N} \right) \right) \right] \right)^{\frac{1}{1-\rho^2}}$$

et le prix d'indifférence s'écrit

$$\begin{aligned} p &= -\frac{e^{-r(T-t)}}{\gamma(1-\rho^2)} \log(\mathbb{E}[\exp(-\gamma(1-\rho^2)h(se^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}e^{(\mu-\rho\sigma(\frac{\nu-r}{\eta}))}(T-t)}e^{\sigma\sqrt{T-t}N}))]) \\ &= -\frac{e^{-r(T-t)}}{\gamma(1-\rho^2)} \log(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^0}[\exp(-\gamma(1-\rho^2)h(S_T))]) \end{aligned}$$

où \mathbb{Q}^0 est la mesure martingale minimale [4.4.1](#).

Annexe D

Estimateur Lambert-Monte-Carlo

D.1 Approximation de la transformée de Laplace d'une variable aléatoire de loi log-normale

On a

$$\mathcal{L}(\theta, \sigma) = \mathbb{E}[\exp(-\theta e^{\sigma N})] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\theta e^{\sigma x}) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-k(x)) dx$$

avec $k(x) = \frac{x^2}{2} + \theta e^{\sigma x}$.

Le point critique m de k est tel que

$$\begin{aligned} k'(m) = 0 &\implies m + \sigma \theta e^{\sigma m} = 0 \\ &\implies -m e^{-\sigma m} = \sigma \theta \\ &\implies -\sigma m e^{-\sigma m} = \sigma^2 \theta \\ &\implies -\sigma m = W(\sigma^2 \theta) \\ &\implies m = -\frac{W(\sigma^2 \theta)}{\sigma} \end{aligned}$$

Développement de Taylor à l'ordre 2 autour de m

$$\begin{aligned} k(x) &= k(m) + \frac{1}{2} k''(m)(x-m)^2 + o((x-m)^2) \\ \implies k(m) - k(x) &\approx -\frac{1}{2} k''(m)(x-m)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\theta, \sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-k(m)} \int_{\mathbb{R}} \exp(k(m) - k(x)) dx \\
 &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-k(m)} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2} k''(m)\right) dx \\
 &= \frac{e^{-k(m)}}{\sqrt{k''(m)}} = \tilde{\mathcal{L}}(\theta, \sigma).
 \end{aligned}$$

Rappel :

$$W(x)e^{W(x)} = x$$

- On a

$$\begin{aligned}
 e^{-k(m)} &= \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{W(\sigma^2\theta)}{\sigma^2} - \theta e^{-W(\sigma^2\theta)}\right) \\
 &= \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left(W(\sigma^2\theta)^2 + 2\sigma^2\theta e^{-W(\sigma^2\theta)}\right)\right) \\
 &= \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left(W(\sigma^2\theta)^2 + 2W(\sigma^2\theta)\right)\right).
 \end{aligned}$$

- Et

$$k''(m) = 1 + \sigma^2\theta e^{-W(\sigma^2\theta)} = 1 + W(\sigma^2\theta).$$

Finalement

$$\tilde{\mathcal{L}}(\theta, \sigma) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (W(\sigma^2\theta)^2 + 2W(\sigma^2\theta))\right)}{\sqrt{1 + W(\sigma^2\theta)}}.$$

D.2 Expression de la transformée de Laplace à partir de l'approximation

On a $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $m = -\frac{W(\sigma^2\theta)}{\sigma}$.

Notons

- $Y = N + m$ de loi normale centrée autour de m ;
- f la densité de la loi de N ;
- g la densité de la loi de Y ;
- $h : x \mapsto \exp(-\theta e^{\sigma x})$.

On a

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[h(N)] &= \int_{\mathbb{R}} h(x)f(x)dx \\
 &= \frac{h(x)f(x)}{g(x)}g(x)dx \\
 &= \mathbb{E}\left[\frac{h(Y)f(Y)}{g(Y)}\right] \\
 &= \mathbb{E}\left[h(Y) \times e^{\frac{m^2}{2}-Ym}\right] \\
 &= \mathbb{E}\left[\exp\left(-\theta e^{\sigma Y} + \frac{m^2}{2} - Ym\right)\right] \\
 &= \mathbb{E}\left[\exp\left(-\theta e^{\sigma(N+m)} + \frac{m^2}{2} - (N+m)m\right)\right] \\
 &= \mathbb{E}\left[\exp\left(-e^{\sigma N} \frac{W(\sigma^2\theta)}{\sigma^2} + N \frac{W(\sigma^2\theta)}{\sigma} - \frac{W(\sigma^2\theta)^2}{2\sigma^2}\right)\right] \\
 &= \exp\left(-\frac{W(\sigma^2\theta)^2 + 2W(\sigma^2\theta)}{2\sigma^2}\right) \mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{W(\sigma^2\theta)}{\sigma^2} (e^{\sigma N} - \sigma N - 1)\right)\right]
 \end{aligned}$$

Bibliographie

- Søren ASMUSSEN, Jens Ledet JENSEN et Leonardo ROJAS-NANDAYAPA : On the Laplace Transform of the Lognormal Distribution. *Methodology and computing in applied probability*, 18 (2):441–458, 12 2014. URL <https://doi.org/10.1007/s11009-014-9430-7>.
- Steven BALSAM et Setiyono MIHARJO : The effect of equity compensation on voluntary executive turnover. *Journal of accounting and economics*, 43(1):95–119, 3 2007. URL <https://doi.org/10.1016/j.jacceco.2006.09.004>.
- Richard BELLMAN : *Dynamic Programming*. 1 1957.
- Marshall E. BLUME et Irwin FRIEND : The Demand for Risky Assets. *The American Economic Review*, 65(5):900–922, 1975. URL <https://www.jstor.org/stable/1806628>.
- Richard P. BRENT : *Algorithms for Minimization Without Derivatives*. Prentice Hall, 1 1972.
- Laurence CARASSUS et Massinissa FERHOUNE : Efficient Approximations for Utility-Based Pricing. *Methodology and computing in applied probability*, 26(2), 3 2024. URL <https://doi.org/10.1007/s11009-024-10076-z>.
- René CARMONA : *Indifference pricing : Theory and applications*. Princeton University Press, 1 2009.
- David B. H. CHAFFE : Option Pricing as a Proxy for Discount for Lack of Marketability in Private Company Valuations. *Business Valuation Review*, 12(4):182–188, 12 1993. URL <https://doi.org/10.5791/0882-2875-12.4.182>.
- M. H.A. DAVIS et A. R. NORMAN : Portfolio Selection with Transaction Costs. *Mathematics of operations research*, 15(4):676–713, 11 1990. URL <https://doi.org/10.1287/moor.15.4.676>.
- Freddy DELBAEN et Walter SCHACHERMAYER : *The Mathematics of Arbitrage*. 12 2005.
- Emanuel DERMAN : The Boy’s Guide to Pricing & Hedging. *Social Science Research Network*, 1 2003. URL https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=364760.
- M. D. DONSKEER et S. R. S. VARADHAN : Asymptotic evaluation of certain markov process expectations for large time. IV. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 36(2): 183–212, 3 1983. URL <https://doi.org/10.1002/cpa.3160360204>.

- Sara ELOUADI : Les effets attitudinaux de l'actionnariat salarié : une étude empirique dans le contexte des entreprises françaises du SBF 250. *Question(s) de management ?*, n° 11(3):11–24, 12 2015. URL <https://doi.org/10.3917/qdm.153.0011>.
- George W. FENN et Nellie LIANG : Corporate payout policy and managerial stock incentives. *Journal of financial economics*, 60(1):45–72, 4 2001. URL [https://doi.org/10.1016/s0304-405x\(01\)00039-3](https://doi.org/10.1016/s0304-405x(01)00039-3).
- John D. FINNERTY : An Average-Strike Put Option Model of the Marketability Discount. *Journal of Derivatives*, 19(4):53–69, 5 2012. URL <https://doi.org/10.3905/jod.2012.19.4.053>.
- Marco FRITTELLI : The Minimal Entropy Martingale Measure and the Valuation Problem in Incomplete Markets. *Mathematical Finance*, 10(1):39–52, 1 2000. URL <https://doi.org/10.1111/1467-9965.00079>.
- Stewart HODGES et Anthony NEUBERGER : Optimal replication of contingent claims under transaction costs. *Review Futures Market*, 8:222–239, 1989.
- Jonathan E. INGERSOLL : Theory of Financial Decision Making. *The Journal of Finance*, 43(1):298, 3 1988. URL <https://doi.org/10.2307/2328335>.
- INTERNATIONAL ACCOUNTING STANDARDS BOARD : IFRS 2 : Share-based payment. 2 2004.
- Rob KAAS, Marc GOOVAERTS, Jan DHAENE et Michel DENUIT : *Modern Actuarial risk theory*. 1 2008. URL <https://doi.org/10.1007/978-3-540-70998-5>.
- Guillaume LACOUR et Patrice PLOUVIER : IFRS 2 : PAIEMENT FONDÉ SUR DES ACTIONS Évaluation & comptabilisation des Stock-Options. Rapport technique, Adding, 9 2017.
- Francis A. LONGSTAFF : How much can marketability affect security values? *The Journal of finance (New York. Print)*, 50(5):1767–1774, 12 1995. URL <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1995.tb05197.x>.
- Francis A. LONGSTAFF : Optimal Portfolio Choice and the Valuation of Illiquid Securities. *The Review of financial studies*, 14(2):407–431, 4 2001. URL <https://doi.org/10.1093/rfs/14.2.407>.
- William MARGRABE : THE VALUE OF AN OPTION TO EXCHANGE ONE ASSET FOR ANOTHER. *The Journal of Finance*, 33(1):177–186, 3 1978. URL <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1978.tb03397.x>.
- Leonardo ROJAS-NANDAYAPA : Risk Probabilities : Asymptotics and Simulation, 2008. URL <https://pure.au.dk/portal/da/publications/risk-probabilities-asymptotics-and-simulation>.
- Richard ROUGE et Nicole EL KAROUI : Pricing Via Utility Maximization and Entropy. *Mathematical finance*, 10(2):259–276, 4 2000. URL <https://doi.org/10.1111/1467-9965.00093>.
- Martin SCHWEIZER : Approximation pricing and the variance-optimal martingale measure. *Annals of Probability*, 24(1), 1 1996. URL <https://doi.org/10.1214/aop/1042644714>.

John VON NEUMANN et Oskar MORGENSTERN : *Theory of Games and Economic Behavior*. 1 1944.

Thaleia ZARIPHOUPOULOU : A solution approach to valuation with unhedgeable risks. *Finance and stochastics*, 5(1):61–82, 1 2001. URL <https://doi.org/10.1007/p100000040>.