FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT D'INFORMATIQUE

INFO-F-524 : Optimisation Continue
Projet

Bernard Fortz Luciano Porretta

2013-2014

1 Introduction

Les modèles de conception de réseau apparaissent dans diverses applications comme les télécommunications, les transports, la logistique et la planification de la production. Ces modèles se caractérisent souvent de la manière suivante : on considère un réseau avec des capacités sur les arcs. L'objectif est d'envoyer des flux dans le réseau afin de satisfaire les demandes entre différents origines et destinations. Les flux peuvent être fractionnés sur différents chemins. Un prix est payé non seulement pour le routage des flux, mais aussi pour l'ouverture des arcs. Ce problème est généralement appelé *Fixed-Charge Multi-Commodity Capacitated Network Design Problem* (MCNDP), et il est notoirement difficile, non seulement parce qu'il est *NP*-difficile, mais aussi parce que ses relaxations linéaires "simples" ne fournissent généralement pas de bonnes approximations pour les programmes entiers mixtes.

2 Formulation [1]

Etant donné un graphe dirigé $G = (N, A)$ et un ensemble de produits K pour lesquels une demande d'une origine à une destination doit être transportée dans le réseau, l'objectif est de minimiser la somme des coûts de transport et d'installation lorsqu'un arc est utilisé. Pour chaque arc $(i, j) \in A$, le coût de transport par unité de produit k est noté c_{ij}^k et le coût d'installation de l'arc est noté par f_{ij} . Touts les coûts sont supposés être positifs. Pour un produit k, une demande $d^k > 0$ est à transporter entre l'origine $O(k)$ et la destination $D(k)$. Chaque arc $(i, j) \in A$ a une capacités $u_{ij} > 0$, et on définit une borne supérieure $b_{ij}^k = min\{d^k, u_{ij}\}$ qui peut être imposée sur la quantité de flux de produit k transportée sur l'arc (i, j). Pour chaque noeud $i \in N$, on définit les ensembles $N_i^+ = \{j \in N | (i, j) \in A\}$ et $N_i^- = \{j \in N | (j, i) \in A\}$. Le MCNDP consiste en l'activation de liens tels que toutes les demandes sont satisfaites et le coût total (composé du coût fixe des arcs sélectionnés et des coût de transport des produits sur arcs) est minimisé. Une formulation possible pour le MCNDP est la suivante :

$$\min \sum_{(i,j)\in A} f_{ij}y_{ij} + \sum_{(i,j)\in A} \sum_{k\in K} c_{ij}^k x_{ij}^k \tag{1}$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j\in N_i^+} x_{ij}^k - \sum_{j\in N_i^-} x_{ji}^k = \begin{cases} d^k, & \text{si } i = O(k), \\ -d^k, & \text{si } i = D(k), \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \qquad \forall i \in N,\ k \in K \tag{2}$$

$$\sum_{k\in K} x_{ij}^k \leq u_{ij}y_{ij} \qquad \forall (i,j) \in A \tag{3}$$

$$x_{ij}^k \leq b_{ij}^k y_{ij} \qquad \forall (i,j) \in A,\ k \in K \tag{4}$$

$$x_{ij}^k \geq 0 \qquad \forall (i,j) \in A,\ k \in K \tag{5}$$

$$y_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall (i,j) \in A \tag{6}$$

Une façon de résoudre ce problème est d'utiliser la méthode du branch-and-bound avec une borne fournie par la relaxation Lagrangienne. Dans la littérature, il existe deux façons d'obtenir une relaxation : en relaxant les contraintes de flux ou en relaxant les contraintes de capacité. En particulier, si les contraintes (3) et (4) sont relâchées, le problème se décompose en petits sous-problèmes, un pour chaque produit, où chaque sous-problème peut être résolu par un algorithme du plus court chemin. Cette relaxation est appelée *shortest-path relaxation*. La deuxième relaxation possible, appelée *knapsack relaxation*, est obtenue en relâchant les contraintes (2). Le problème est alors décomposé en un ensemble de sous-problèmes de sac-à-dos.

Une deuxième manière de résoudre le MCNDP est d'utiliser une formulation qui à la place des variable sur les arcs utilise des variables sur tous les chemins possibles entre une origine et une destination, en utilisant une méthode de génération de colonnes pour la résolution.

3 Tâches

1. Implémenter en Xpress-Mosel la formulation du MCNDP.
2. Implémenter une des trois méthodes (relaxation Lagrangienne (shortest-path / knapsack) ou génération de colonnes).
3. Comparer la méthode implémentée avec la formulation de base, sur l'ensemble des données fournies (qui seront disponibles prochainement sur la page web du cours), et enregistrer le temps d'exécution, la valeur des solutions et toute autre statistique que vous considérez comme importante. Pour obtenir une licence temporaire pour le logiciel Xpress-Mosel, envoyez un e-mail de requête à : `mailto:lporrett@ulb.ac.be`.

Références

[1] Teodor Gabriel Crainic, Antonio Frangioni, and Bernard Gendron. Bundle-based relaxation methods for multicommodity capacitated fixed charge network design. *Discrete Applied Mathematics*, 112(1–3) :73 – 99, 2001. Combinatorial Optimization Symposium, Selected Papers.