E2. Transformada de Fourier de una Ley de potencias para la función de correlación

$$\xi(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\gamma}$$

Sabemos que se puede expandir la densidad de perturbaciones como una serie de Fourier (asumiendo una caja cúbica con $V = L^d$ con condiciones de frontera periódicas).

$$\delta(x) = \sum_k \delta_k e^{+ik\cdot x}$$

con $$\delta_k = \frac{1}{V}\int_V \delta(x)\, e^{-ik\cdot x}\, d^d x$$

En analogía con la función de correlación $\xi(x,x')$ en el espacio de Fourier se tendrá:

$$\langle \delta_k^* \delta_{k'} \rangle = \langle |\delta_k|^2 \rangle$$

$$= \frac{1}{V^2}\int d^d x\, e^{ik\cdot x}\int d^d x'\, e^{-ik'\cdot x'} \langle \delta(x)\delta(x') \rangle$$

$$= \frac{1}{V^2}\int d^d r\, e^{-ik'\cdot r}\, \xi(r) \int d^d x\, e^{i(k-k')\cdot x}$$

$$= \frac{1}{V}\delta_{kk'}\int d^d r\, e^{-ik\cdot r}\, \xi(r) \equiv \frac{1}{V}\delta_{kk'} P(k)$$

donde se usó que $\langle \delta(x)\, \delta(x+r) \rangle = \xi(r)$.

$\delta_{kk'}$ es una delta de Kronecker

$$\Rightarrow P(k) \equiv V \langle |\delta_k|^2 \rangle = \int d^d r\, e^{-ik\cdot r}\, \xi(r)$$

Esta expresión da la variación de δ_k, es el espectro de potencias (P) de $\delta(x)$.

La antitransformada

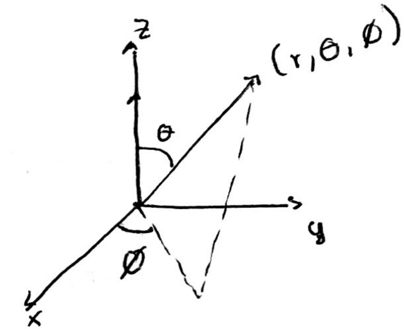
$$\xi(r) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int d^d k\, e^{ik\cdot r}\, P(k)$$

Suponiendo que $\xi(r)$ es independiente de la dirección de $\vec{r}$ podemos llevar a cabo la integración angular. Tomando $\vec{K}$ a lo largo del eje z, tendremos $\vec{K}\cdot\vec{r} = K \cdot r \cos\theta$

$$P(K) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \int_0^{\infty} r^2 \xi(r) e^{-iKr\cos\theta} dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} dr\, r^2 \xi(r) \int_0^{\pi} d\theta \operatorname{sen}\theta\, e^{-iKr\cos\theta}$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} dr\, r^2 \xi(r) \frac{1}{iKr} \int_{-iKr}^{iKr} dx\, e^{x}$$



$d^3x = r^2 \sin\theta \, dr d\theta \, d\phi$

Considerando

$x = -iKr\cos\theta$

$dx = iKr\sin\theta \, d\theta \quad \Rightarrow \quad d\theta = \dfrac{dx}{iKr\operatorname{sen}\theta}$

Límites $\quad \theta = 0 \quad \Rightarrow x = iKr$

$\theta = \pi \quad \Rightarrow x = -iKr$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} dr\, r^2 \xi(r) \frac{1}{iKr}\left(e^{iKr} - e^{-iKr}\right)$$

, usando $\sin u = \dfrac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i}$

$$P(K) = 4\pi \int_0^{\infty} dr\, r^2 \xi(r) \frac{\operatorname{sen}(Kr)}{Kr}$$

Para las potencias $\xi(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\gamma}$

$$P(K) = 4\pi \int_0^{\infty} dr\, r^2 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\gamma} \frac{\sin(Kr)}{Kr}$$

$$= \frac{4\pi}{r_0^{\gamma}} \int_0^{\infty} r^2 r^{\gamma} \frac{\sin(Kr)}{Kr} dr$$

Ahora usaremos la ecuación de Limher para tomar como aproximación que: $\sin(kr) \approx kr$

Para angulos pequeños $kr \ll 1$ $\Rightarrow$ $\frac{\sin(kr)}{kr} \approx 1$.

Fuera de este rango $\frac{\sin(kr)}{kr} \approx 0$

$$\Rightarrow \quad P(k) \approx \frac{4\pi}{r_0{}^{\gamma}} \int_0^{1/k} r^{\gamma+2}\, dr$$

$$\therefore \quad P(k) \approx \frac{4\pi}{r_0{}^{\gamma}} \left(\frac{1}{k}\right)^{\gamma+3}$$

Considerando que $k^{\gamma-d}$ debe ser $\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\gamma}$ que es como usualmente aparece.