Riassunto di Elementi di Teoria delle Rappresentazioni

Matteo Migliorini

Indice

1 Rappresentazioni

Definizione 1.1. *Sia G un gruppo finito, e sia V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale. Si dice* rappresentazione *di G su V un'azione lineare di G su V, ovvero un omomorfismo da G in $GL(V)$.*

Le rappresentazioni si possono indicare equivalentemente come delle applicazioni $G \times V \to V$ con $(g, v) \mapsto gv$, con gv lineare, oppure come mappe $g \mapsto \rho(g)$, dove $\rho(g) \in GL(V)$. In generale mi piace di più il secondo modo. A volte userò anche la notazione $g \mapsto \rho_g$, per evitare quintali di parentesi.

Definizione 1.2. *Si definisce* grado *di una rappresentazione ρ*

$$\deg \rho := \dim V_\rho$$

Sia ora R_g la *matrice associata* all'applicazione lineare ρ_g. Allora R_g è quadrata, di ordine $\deg \rho$, invertibile ($\det R_g \neq 0$) e vale $R_g R_h = R_{gh}$. Inoltre, se $r_{ij}(g)$ sono i coefficienti di R_g, allora vale

$$r_{ik}(gh) = \sum_j r_{ij}(g) r_{jk}(h)$$

Definizione 1.3. *Date ρ, σ due rappresentazioni di G su V_ρ, V_σ rispettivamente, si dice* omomorfismo di rappresentazioni *un omomorfismo φ di spazi vettoriali $V_\rho \to V_\sigma$ tale che $\rho(g) \circ \varphi = \varphi \circ \sigma(g)$. In altre parole, deve far commutare il seguente diagramma*

$$\begin{tikzcd}
V_\rho \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho(g)"'] & V_\sigma \arrow[d, "\rho(g)"] \\
V_\rho \arrow[r, "\varphi"] & V_\sigma
\end{tikzcd}$$

Analogamente, si definisce endomorfismo *di ρ un omomorfismo da ρ in ρ, e* isomorfismo di rappresentazioni *un omomorfismo che è un isomorfismo di spazi vettoriali.*

Dette R_g e S_g le matrici associate alle applicazioni lineari ρ_g e σ_g rispettivamente, se le due rappresentazioni sono isomorfe, allora esiste una matrice T invertibile tale che

$$R_g = T^{-1} S_g T \qquad \forall g \in G$$

Quindi le matrici analoghe sono coniugate attraverso un'unica matrice invertibile.

Esempio 1.4. TODO

- Banale

- Regolare
- Permutazione su X

Esempio 1.5 (Rappresentazioni di $\mathbb{Z}_n$)**.** Ho esattamente n possibilità per χ_ρ. Infatti, se g genera $\mathbb{Z}_n$, posso scegliere $\chi_\rho(g) = \zeta^i$ per $i = 0, 1 \ldots n - 1$, dove ζ è una radice primitiva dell'unità.
Posso ora scrivere

$$V = \bigoplus_{\lambda=\zeta^i} V_\lambda$$

dove i V_λ sono gli autospazi dell'applicazione $\rho_(g)$ relativi all'autovalore λ.
Se ρ è una rappresentazione in V, e σ in W, allora φ è un omomorfismo da ρ in σ se e solo se $\varphi(V_\lambda) \subseteq \varphi(W_\lambda)$ per ogni λ.

Dimostrazione. Boh. □

2 Operazioni tra rappresentazioni

Vediamo quali operazioni si possono definire tra le rappresentazioni.

Definizione 2.1 (Somma di rappresentazioni)**.** *Siano ρ, σ due rappresentazioni di G in V_ρ, V_σ rispettivamente. Si definisce la* somma di rappresentazioni $\rho + \sigma$ *come la rappresentazione di G in $V_\rho \oplus V_\sigma$ tale che*

$$(\rho + \sigma)_g(u + v) = \rho_g(u) + \sigma_g(v) \qquad \forall u \in V_\rho, v \in V_\sigma$$

Matricialmente $(\rho + \sigma)_g$ si rappresenta come

$$\left[\begin{array}{c|c} \rho_g & 0 \\ \hline 0 & \sigma_g \end{array}\right]$$

dove ovviamente si intende che la base ha i primi vettori in V_ρ, i secondi in V_σ. Inoltre per come è definito il grado vale $\deg(\rho + \sigma) = \deg \rho + \deg \sigma$.

Definizione 2.2. *Un sottospazio W di V_ρ si dice G-invariante se per ogni $g \in G$ vale $\rho_g(W) \subseteq W$.*

Definizione 2.3. *Si dice* sottorappresentazione *di ρ la restrizione dei ρ_g a un sottospazio vettoriale G-invariante.*

Esempio 2.4. Data la rappresentazione regolare Reg, allora il sottospazio generato da $\sum_{g \in G} e_g$ è G-invariante, e la sottorappresentazione indotta è quella banale.

Teorema 2.5. *Sia ρ una rappresentazione su V, e sia W un sottospazio G-invariante. Allora esiste un supplementare W_0 anch'esso G-invariante.*

Dimostrazione. Sia π una qualsiasi proiezione di V su W, e sia π_0 la proiezione pesata data da

$$\pi_0 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_g \circ \pi \circ \rho_g^{-1}$$

Dato che π lascia fisso W allora anche π_0 lo lascia fisso (sto usando che ρ_g stabilizza W). Inoltre $\pi_0(V) \subseteq W$. Quindi anch'essa è una proiezione con $\operatorname{Ker} \pi_0 = W_0$. Inoltre π_0 commuta con i ρ_g, come si vede calcolando $\rho_g \circ \pi_0 \circ \rho_g^{-1}$. Quindi se $w \in W_0$, allora $\pi_0(\rho_g(w)) = \rho_g(\pi_0(w)) = 0$, quindi W_0 è G-invariante. □

Osservazione. Se su V fosse definito un prodotto hermitiano, allora il prodotto hermitiano dato da $\sum_{g \in G} (\rho_g(x)|\rho_g(y))$ è invariante per G, quindi si può facilmente verificare che $W^\perp$ è G-invariante, abbiamo così una dimostrazione alternativa del teorema 2.5.
Inoltre, dato che rispetto al prodotto hermitiano G è invariante, significa che i ρ_g sono ortogonali rispetto a una base ortonormale, e quindi sono matrici unitarie e in particolare *diagonalizzabili*.

Ogniqualvolta abbiamo una sottorappresentazione, siamo quindi in grado di spezzarla in somma di due sottorappresentazioni.
Ora invece, data una rappresentazione su V, vediamo come costruirne una sul duale V^*.

Definizione 2.6. *Sia ρ una rappresentazione di G su V. Dato $f \in V^*$ e $v \in V$, sia ora $\langle f, v\rangle$ la dualità (è solo un modo figo per chiamare l'applicazione $\langle f, v\rangle \mapsto f(v)$). Definiamo la* rappresentazione duale *ρ^* come l'unica rappresentazione tale che:*

$$\langle \rho_g^*(f), \rho_g(v)\rangle = \langle f, v\rangle$$

In altre parole, ρ_g^* è l'applicazione *trasposta* di ρ_g^{-1}.
Il fatto che io usi l'inverso è perché l'applicazione trasposta inverte l'ordine delle composizioni, mentre noi vogliamo un isomorfismo: quindi mettendo l'inverso l'ordine torna magicamente a essere quello giusto.
Oltre alla somma, abbiamo anche un prodotto tra rappresentazioni. Esso è definito come segue.

Definizione 2.7 (Prodotto tensore)**.** *Dati due spazi vettoriali sul medesimo campo V e W, si dice* prodotto tensore *uno spazio Z con una mappa $(v, w) \mapsto v \cdot w$ da $V \times W$ in Z che sia bilineare e tale che se $(v_i)_{i\in I}$ e $(w_j)_{j\in J}$ sono una base di V e W, allora $(v_i \cdot w_j)_{(i,j)\in I\times J}$ è una base di Z.*

Si può dimostrare che il prodotto tensore esiste ed è unico a meno di isomorfismi, e ha dimensione $\dim V \cdot \dim W$.
Definiamo inoltre il prodotto tensore di applicazioni lineari come

$$(f \otimes g)(v \otimes w) = f(v) \otimes g(w)$$

Ora siamo pronti a dare la definizione di prodotto di rappresentazioni.

Definizione 2.8 (Prodotto di rappresentazioni)**.** *Siano ρ, σ due rappresentazioni su V_ρ, V_σ. Si definisce il prodotto $\rho\sigma$ come la rappresentazione su $V_\rho \otimes V_\sigma$ che soddisfa*

$$(\rho\sigma)_g = \rho_g \otimes \sigma_g$$

TODO: prodotto in forma matricale

3 Rappresentazioni irriducibili e Schur

Data una rappresentazione, vorremmo spezzarla in somma di rappresentazioni più semplici. Se abbiamo una sottorappresentazione, allora possiamo effettivamente scriverla come somma di rappresentazioni, sfruttando che esiste un supplementare invariante (vedi Teorema 2.5). Non è però sempre possibile trovare una sottorappresentazione.

Definizione 3.1. *Una rappresentazione che non ammette sottorappresentazioni non banali si dice irriducibile.*

Banalmente, tutte le rappresentazioni di grado 1 sono irriducibili, ma non sono le uniche.
Possiamo quindi decomporre una rappresentazione fino a quando gli addendi non sono tutti irriducibili.
Ci piacerebbe affermare che la decomposizione in irriducibili è unica (dove unica è inteso come al solito a meno dell'ordine). Tuttavia non è così banale dimostrarlo. Per farlo ci serve che se possiamo immergere una rappresentazione irriducibile in una somma, allora possiamo immergerla in almeno uno dei fattori. (Sì, vogliamo in un qualche senso che irriducibile $\Rightarrow$ primo)
Ci viene in aiuto il Lemma di Schur.

Teorema 3.2 (Lemma di Schur)**.** *Siano ρ, σ due rappresentazioni irriducibili, e sia Φ un omomorfismo. Allora o $\Phi \equiv 0$ oppure Φ è un isomorfismo ed è la moltiplicazione per uno scalare.*

Dimostrazione. Notiamo che $\operatorname{Ker}\Phi$ è banale oppure è tutto V_ρ, dato che ρ è irriducibile. Nel secondo caso quindi $\Phi \equiv 0$, altrimenti si vede che analogamente $\Im\Phi$ è tutto V_σ. Quindi Φ è un isomorfismo.
Sia ora λ un autovalore di Φ: allora $\Phi - \lambda I$ ha Ker non banale e quindi è identicamente nulla. □

Un facile corollario è il seguente.

Corollario 3.3. Data $f : V_\rho \to V_\sigma$ lineare, sia $\bar{f} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sigma_g^{-1} f \rho_g$. Allora

- Se $\rho \ncong \sigma$ allora $\bar{f} \equiv 0$;
- Se $\rho \cong \sigma$, allora $\bar{f} = \frac{\operatorname{Tr}(f)}{\deg \rho} I$.

Dimostrazione. Deriva tutto dal lemma di Schur. Il fatto che lo scalare si $\frac{\operatorname{Tr} f}{\deg \rho}$ viene dal fatto che $\operatorname{Tr} \bar{f} = \operatorname{Tr} f$ (basta fare il conto) e che $\operatorname{Tr} \bar{f} = \lambda \deg \rho$. □

Adesso possiamo concludere il claim precedente.

Proposizione 3.4. *Ogni rappresentazione si può scrivere in maniera unica come somma di rappresentazioni irriducibili.*

Dimostrazione. Siano $\rho = \rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_n = \sigma_1 + \cdots + \sigma_m$ due decomposizioni in irriducibili della stessa rappresentazione. Prendiamo σ_1 e la immergiamo in modo canonico in ρ. A questo punto, restringendosi ai ρ_i, abbiamo degli omomorfismi da σ_1 in ρ_i, che non possono essere tutti banali. Quindi per il lemma di Schur $\sigma_1 \cong \rho_i$ per qualche i. La conclusione per induzione è immediata. $\square$

Esercizio 1. Consideriamo un n-agono regolare, con un numero complesso scritto su ogni vertice. A ogni passo sositiuisco ogni vertice con la media degli adiacenti. Come si comporta il problema asintoticamente?
Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^n$ dei numeri presenti sui vertici, e consideriamo la rappresentazione regolare di $\mathbb{Z}_n$ su $\mathbb{C}^n$ (che agisce sui vettori della base per rotazione). Sia inoltre T l'applicazione lineare che manda ogni vertice nella media degli adiacenti.
Visto che T commuta con tutti i ρ_g, allora T è anche un *endomorfismo di rappresentazione.* DA FINIRE

4 Caratteri

Definizione 4.1. *Si dice* carattere *di una rappresentazione* ρ *l'applicazione* $\chi_\rho : G \to C^*$ *definita da*

$$\chi_\rho(g) = \operatorname{Tr} \rho(g)$$

Achtung!™ *Il carattere* <u>*NON*</u> *è un'omomporfismo da* G *in* C^**! Lo è se e solo se* $\deg \rho = 1$.

Proposizione 4.2. *Il carattere soddisfa le seguenti:*

1. $\chi_\rho(e) = \deg \rho$
2. $\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$
3. $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$

Dimostrazione. La 1 è ovvia, visto che $\rho_e = I_n$, dove $n = \deg \rho$.
La 2 viene dal fatto che, essendo ρ_g diagonalizzabile con autovalori di norma 1, e dato che la traccia è la somma degli autovalori, allora

$$\operatorname{Tr} \rho_g^{-1} = \sum_i \lambda_i^{-1} = \sum_i \overline{\lambda_i} = \overline{\sum_i \lambda_i} = \overline{\operatorname{Tr} \rho_g}$$

da cui quello che volevamo.
La 3 invece deriva dal fatto che se g e g' sono coniugati, allora anche ρ_g e $\rho_{g'}$ lo sono, e la traccia è invariante per coniugio. Ogni funzione che soddisfa la 3 si chiama *funzione di classe.* □

Ci chiediamo se il carattere identifica le rappresentazioni, ossia se rappresentazioni diverse hanno caratteri diversi. Intanto però il carattere distingue il grado di una rappresentazione, che è dato da $\deg \rho = \chi_\rho(e)$.

Lemma 4.3. *I caratteri godono delle seguenti proprietà:*

- $\chi_{\rho+\sigma} = \chi_\rho + \chi_\sigma$
- $\chi_{\rho\otimes\sigma} = \chi_\rho \cdot \chi_\sigma$
- $\chi_{\rho^*} = \overline{\chi_\rho}$

Dimostrazione. Per la rappresentazione duale vale

$$\chi_{\rho^*}(s) = \operatorname{Tr}({}^t\rho_{s^{-1}}) = \operatorname{Tr}(\rho_s^{-1})$$

Dato che la traccia è la somma degli inversi degli autovalori, e questi hanno modulo 1, allora otteniamo $\overline{\chi_\rho}$.

□

4.1 Prodotto hermitiano

Introduciamo un prodotto interno su $\mathbb{C}^{(G)}$ (le funzioni da G in C), dato da

$$(f|g) = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} f(s)\overline{g(s)}$$

Grazie a questo prodotto possiamo effettuare delle proiezioni.

Esempio 4.4. Consideriamo ρ una G-rappresentazione, e sia I la rappresentazione banale di grado 1 (irriducibile). Allora

$$(\rho|I) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g) = \dim V_\rho^G$$

Dimostrazione. Sappiamo che per definizione

$$(\rho|I) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{Tr}(\rho(g))$$

Per la linearità otteniamo $\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)\right)$. Sia quindi $T = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)$. Sia $v \in V_\rho^G$, allora $T(v) = v$. Inoltre per ogni v vale che $T(v) \in V_\rho^G$ (TODO fare il conto). Quindi abbiamo la tesi. □

4.2 Relazioni di ortogonalità

Teorema 4.5 (Teorema di ortogonalità dei caratteri)**.** *Siano ρ, σ due rappresentazioni irriducibili. Allora*

$$(\chi_\rho|\chi_\sigma) = \begin{cases} 1 \text{ se } \rho \cong \sigma \\ 0 \text{ se } \rho \ncong \sigma \end{cases}$$

Dimostrazione.

$$(\chi_\rho|\chi_\sigma) = (\chi_\rho \overline{\chi_\sigma}|I) = \left(\chi_{\mathrm{Hom}(V_\rho, V_\sigma)}|I\right)$$

TODO: Serve la rappresentazione su Hom □

Proposizione 4.6. *Sia ρ una rappresentazione decomposta in irriducibili. Allora il numero di addendi isomorfi a σ, con σ irriducibile, è pari a $(\rho|\sigma)$.*

In particolare, da questo deriva che due rappresentazioni con lo stesso carattere sono isomorfe.

Teorema 4.7 (Criterio di irriducibilità)**.** *Una rappresentazione σ è irriducibile se e solo se $(\sigma|\sigma) = 1$.*

4.3 Rappresentazione regolare

Abbiamo definito da qualche parte la rappresentazione regolare. La matrice associata a Reg_g è una matrice di permutazione, e gli elementi sulla diagonale sono 1 se $g = e$, 0 altrimenti. Ne deriva che

$$\chi_R(g) = |G| \cdot \delta_{ge}$$

Proposizione 4.8. *Ogni rappresentazione irriducibile ρ di G è contenuta* $\deg \rho$ *volte in* Reg.

Proposizione 4.9. *Se n_i è il grado della n-esima rappresentazione, allora vale $\sum_i n_i^2 = |G|$ e, se $s \neq e$, $\sum_i n_i \chi(s) = 0$*

Teorema 4.10. *I caratteri delle rappresentazioni irriducibili di G formano una base ortonormale delle funzioni classe $\mathbb{C}[G]^G$.*

Teorema 4.11. *Le rappresentazioni irriducibili di G sono tante quante le classi di coniugio.*

Proposizione 4.12 (Ortogonalità delle colonne)**.** *Se χ_i sono le rappresentazioni irriducibili di G, e $g, h \in G$ non coniugati, e $c(g)$ la cardinalità della classe di coniugio di g, allora*

$$\sum_i |\chi_i(g)|^2 = \frac{|G|}{c(g)}$$
$$\sum_i \chi_i(g)\overline{\chi_i(h)} = 0$$

5 Tavola dei caratteri

6 Coefficienti matriciali