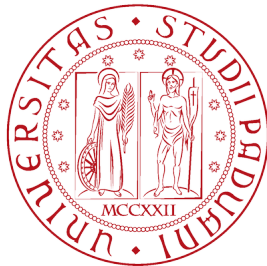


Studio circuiti con amplificatori operazionali

Barbon Alice, Ciarlantini Sabrina, Leso Aurora



Università degli studi di Padova
Dipartimento di Fisica e Astronomia

CORSO:

Laboratorio di Fisica

ANNO ACCADEMICO:

2020/2021

GRUPPO DI LAVORO V

Alice Barbon

1193880

alice.barbon@studenti.unipd.it

Sabrina Ciarlantini

1193258

sabrina.ciarlantini@studenti.unipd.it

Aurora Leso

1187622

aurora.leso@studenti.unipd.it

DATE DI ESECUZIONE

28-10-2020

29-10-2020

1 Prima parte: analisi curva di trasferimento VTC

1.1 Obiettivi

Stima dell'amplificazione A del circuito e studio della curva VTC.

1.2 Strumentazione utilizzata

- **Multimetro Metrix**
- **Multimetro Agilent**
- **Oscilloscopio:** modello Tektronix TBS 1102B. E' uno strumento che permette di osservare l'andamento temporale di uno o più segnali di tensione variabile, mostrando sullo schermo in un sistema di coordinate XY massimo due tracce, in cui ogni punto su Y è proporzionale alla tensione fornita in ingresso e ogni X è proporzionale al tempo. Il segnale analogico viene campionato ad intervalli di tempo fissi e convertito in valori numerici visualizzati sullo schermo. Il passaggio da analogico a digitale, detto **campionamento**, avviene con frequenza o **sampling rate** $\nu = \frac{1}{\Delta T} = 2 \text{ Gsps}$ (sampling per second= Hz), ossia la frequenza massima campionabile $\nu_{\max} = 1 \text{ GHz}$. La granularità della conversione, detta **risoluzione**, è pari ad 8 bit, ossia il segnale continuo è convertito in una serie di numeri interi che possono variare tra 0 e 256 livelli. Infine, la larghezza di banda **bandwidth** è pari a 100 MHz, cioè essa è la regione dello spettro di frequenza ove l'effetto di distorsione introdotto dallo strumento si considera accettabile. L'oscilloscopio può essere modellizzato da una resistenza di 1 M Ω in parallelo ad una capacità di 20 pF. La lunghezza del vettore di punti corrisponde a 2500 per ogni base dei tempi; l'**input sensitivity** va da 2 mV a 5 V per divisione; l'accuratezza dell'amplificazione è di $\pm 3\%$ da 10 mV/divisione a 5 V/divisione; l'ampiezza massima del segnale è di 300 V_{RMS} che diminuisce di 20 dB/decade di frequenza sopra i 100 kHz fino a 13 V picco picco sopra i 3 mHz; al segnale si può applicare un offset di $\pm 1,8 \text{ V}$ tra 2 mV/divisione e 200 mV/divisione e $\pm 45 \text{ V}$ per valori superiori.
- **Generatore di funzioni:** modello **Textronix AFG 1022**, è uno strumento dotato di due canali. Può generare un'onda sinusoidale fino a 25 MHz, un'onda quadra fino a 12.5 MHz o forma arbitraria con 192 punti e 14 bit. Il **sampling rate** è 125 Msps; ha un'uscita ad alta impedenza e a 50 Ω ; l'ampiezza dei segnali possibili varia tra 2 e 20 V_{pp} e la metà, rispettivamente, nei due casi.

- **Breadboard:** è una tavoletta forata ove tramite appositi cavi si collegheranno delle resistenze, induttanze e capacità. Le estremità delle resistenze collegate lungo la stessa linea verticale sono allo stesso potenziale.

- **Amplificatore Operazionale:** modello TL082C

Ogni componente del gruppo ha montato il circuito con le seguenti componenti:

Tabella 1: Leso

Componente (udm)	Misura	Scala
R1 (Ω)	6.7374 k	10 k
R3 (Ω)	46.86	1 k
Rf (Ω)	83.195 k	100 k
C1 (F)	112 n	200 n
C2 (F)	99 n	100 n

Tabella 2: Ciarlantini

Componente (udm)	Misura	Scala
R1 (Ω)	46.3	1k
R3 (Ω)	8.059 k	10 k
Rf (Ω)	56.78 k	100k
C1 (nF)	500n	1u
C2 (nF)	500n	1u

Tabella 3: Barbon

Componente (udm)	Misura	Scala
R1 (Ω)	6.72 k	0.001 k
R3 (Ω)	46.3	0.1
Rf (Ω)	82 k	0.01 k
C1 (nF)	504n	1u
C2 (nF)	499n	1u

1.3 Presentazione dati raccolti

E' stata computata l'amplificazione attesa secondo la formula

$$A = -\frac{R_f}{R_1}$$

con segno negativo dovuto all'operazionale in configurazione invertente. Come errore vi si associa quello che si ottiene per propagazione degli errori

$$\sigma_A = \sqrt{\left(-\frac{R_f}{R_1^2} * \sigma_{R1}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_1} * \sigma_{Rf}\right)^2}$$

Si calcolano quindi le incertezze associate alle misure delle resistenze che, essendo state misurate tramite un multimetro *Metrix3292* sfruttano le seguenti informazioni

Componente (udm)	FS	Risoluzione	Precisione
R1 (Ω)	10 k	0.1	0.07%+8
R3 (Ω)	1 k	0.01	0.10%+8
Rf (Ω)	100 k	1	0.07%+8

L'operatore Barbon ha fatto uso di un multimetro *Agilent* e perciò sono stati utilizzati i seguenti valori per calcolare le incertezze:

Componente (udm)	FS	Risoluzione	Precisione
R1 (Ω)	1k	0.001 k	0.9%+3
R3 (Ω)	10 k	0.1	0.9%+3
Rf (Ω)	100 k	0.01 k	0.9%+3

E, secondo la formula

$$\sigma_R = \sqrt{(L \cdot 0.58 \cdot \text{valore})^2 + (D \cdot 0.58 \cdot \text{risoluzione})^2}$$

ove L indica la percentuale e D l'incertezza sul digit, si ottengono come incertezze

Tabella 4: Leso

Resistenza (udm)	Misura \pm incertezza
R1	6.737 \pm 0.005 (k Ω)
R3	46.86 \pm 0.03 (Ω)
Rf	83.195 \pm 0.03 (k Ω)

L'operatore ottiene quindi $\sigma_A = 0.006$ Perciò, teoricamente, esso si aspetta un valore dell'amplificazione pari ad **A=(12.348 \pm 0.006)**

Tabella 5: Ciarlantini

Resistenza (udm)	Misura \pm incertezza
R1	8.059 \pm 0.003 (k Ω)
R3	46.86 \pm 0.03 (Ω)
Rf	56.78 \pm 0.02 (k Ω)

L'operatore ottiene $\sigma_A = 0.004$ Dunque teoricamente ci si aspetta un valore dell'amplificazione pari ad **A=(7.046 \pm 0.004)**.

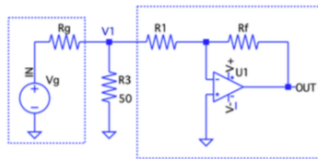
Tabella 6: Barbon

Resistenza (udm)	Misura \pm incertezza
R1	6.72 \pm 0.04 (k Ω)
R3	46.30 \pm 0.04 (Ω)
Rf	82.00 \pm 0.04 (k Ω)

In particolare l'amplificazione attesa per quest'ultimo operatore risulta essere pari ad **A=(1.000 \pm 0.007)** proprio in quanto è stata utilizzata una resistenza R1=Rf.

1.4 Procedura di sperimentazione

Al fine di misurare sperimentalmente l'amplificazione, si costruisce il circuito sottostante



e, tramite un generatore di funzioni, si inietta una tensione sinusoidale di frequenza $\nu = 1kHz$. A questo punto, andando a modificare l'ampiezza del segnale in ingresso si misura

tramite i cursori del voltaggio sull'oscilloscopio i punti di massimo e di minimo sia per la tensione fornita in ingresso sia per la tensione che si visualizza in uscita. Si ottengono i seguenti dati:

Tabella 7: Leso

A (mV)	Vin _{max} (mV)	Vin _{min} (mV)	FS(mV)
200	104	-104	50
500	252	-256	100
800	408	-408	200
1200	616	-610	200
1800	900	-920	324
2000	1000	-1020	324
2100	1060	-1080	324
2300	1160	-1180	376
1600	800	-820	200
1700	860	-860	324
1900	940	-980	324

A (mV)	Vout _{max} (mV)	Vout _{min} (mV)	FS(mV)
200	1280	-1200	324
500	3200	-3120	1000
800	5000	-5000	2000
1200	7600	-7600	2000
1800	11200	-10400	3800
2000	11600	-10400	3800
2100	11600	-10400	3800
2300	11600	-10400	3800
1600	10200	-10000	3400
1700	10800	-10400	3400
1900	11600	-10400	3800

Tabella 8: Ciarlantini

A (mV)	Vin _{max} (mV)	Vin _{min} (mV)	FS(mV)
200	102	-100	28.8
300	150	-151	40.8
400	203	-199	56
500	252	-252	68
600	298	-304	81
700	353	-349	95
800	407	-403	112
900	456	-451	124
1000	505	-505	136
1100	558	-552	150
1200	604	-604	182
1300	655	-655	182
1500	767	-750	204

A (mV)	Vout _{max} (mV)	Vout _{min} (mV)	FS(mV)
200	760	-664	200
300	1120	-1010	296
400	1470	-1370	388
500	1820	-1730	480
600	2200	-2060	580
700	2550	-2440	670
800	2900	-2770	770
900	3240	-3130	870
1000	3610	-3490	960
1100	4020	-3800	1080
1200	4380	-4170	1320
1300	4440	-4540	1320
1500	4420	-5240	1380

Tabella 9: Barbon

A (mV)	V _{in} _{max} (mV)	V _{in} _{min} (mV)	FS(mV)
200	100	-94	100
600	296	-288	200
1100	544	-528	500
1600	800	-760	500
2100	1040	-1020	500
2600	1280	-1240	500
3400	1680	-1640	1000
4400	2160	-2120	1000
5600	2720	-2680	1000
6600	3280	-3200	2000

A (mV)	V _{out} _{max} (mV)	V _{out} _{min} (mV)	FS(mV)
200	96	-100	100
600	288	-296	200
1100	528	-536	500
1600	780	-780	500
2100	1020	-1020	500
2600	1240	-1260	500
3400	1640	-1640	1000
4400	2120	-2160	1000
5600	2680	-2720	1000
6600	3200	-3200	2000

Nota: In tabella è stato riportato sottocampione dei dati raccolti per quanto concerne l'operatore Barbon.

1.5 Analisi dati

Per prima cosa, si calcolano gli errori associati alle misure di V_{in} e V_{out}, sia per i massimi che per i minimi che per la differenza (picco-picco). Per i primi due si associa l'incertezza

$$\sigma_V = \sqrt{(0.04 * FS)^2 + (0.015 * misura)^2}$$

per l'ultimo si associa per propagazione

$$\sigma_{\Delta V} = \sqrt{(\sigma_{V_{max}})^2 + (\sigma_{V_{min}})^2}$$

A questo punto è possibile procedere con un fit lineare con errori, trascurando momentaneamente l'incertezza associata alle ascisse.

Sono stati scartati i dati a saturazione in quanto il fit non porterebbe al risultato atteso.

Notando che il fit migliore è quello che considera le differenze, si tengono in considerazione solo le seguenti rette del tipo $y=a+b*x$:

Tabella 10: Rette del fit preliminare

Operatore	a ± σ a (mV)	b ± σ b (V/V)
Leso	-120 ± 70	12.52 ± 0.07
Ciarlantini	4 ± 20	7.05 ± 0.05
Barbon	-3 ± 20	0.997 ± 0.003

A questo punto, dato che gli errori sulle ascisse sono stati ignorati per questa analisi preliminare, vengono ora presi in considerazione tramite la seguente proiezione:

$$\sigma_{V_{out}} = \sqrt{\sigma_{V_{out}}^2 + b^2 * \sigma_{V_{in}}^2}$$

Si ottengono perciò le nuove rette fittanti:

Tabella 11: Rette del fit definitivo

Operatore	a ± σ a (mV)	b ± σ b (V/V)
Leso	-120 ± 70	12.5 ± 0.2
Ciarlantini	4 ± 20	7.05 ± 0.05
Barbon	-3 ± 20	0.997 ± 0.003

Il chi quadro teorico è stato calcolato come N-3 (N gradi di libertà, 3 vincoli), considerando come vincoli i parametri di fit e l'errore sulle ordinate.

Si ottengono i seguenti risultati:

Operatore	χ ² teorico	χ ² sperimentale	compatibilità χ ²	σ _{post}
Leso	2	0.6	0.7	80
Ciarlantini	8	1	1.7	20
Barbon	46	4.5	5	30

I plot del fit sono :

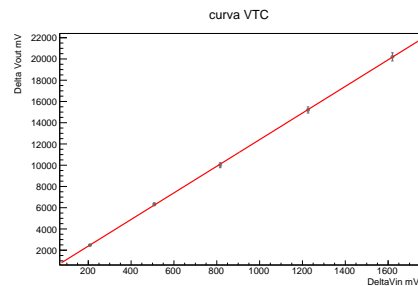


Figura 1: Curva VTC Leso

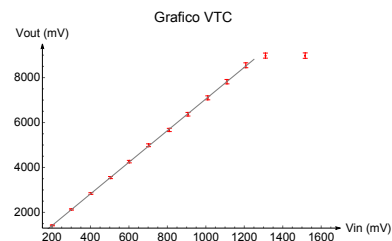


Figura 2: Curva VTC Ciarlantini

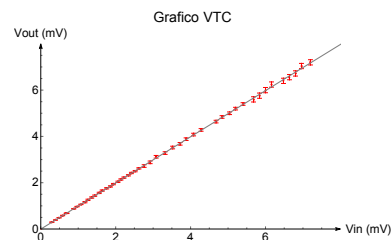


Figura 3: Curva VTC Barbon

con residui

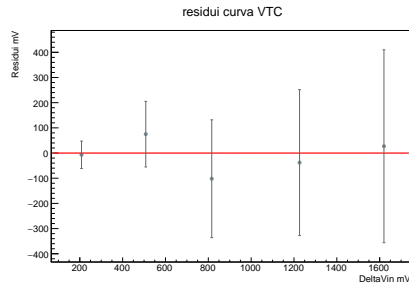


Figura 4: Residui curva VTC Leso

Si nota un trend in salita nell'ultimo tratto: è probabilmente causato da un leggero outlier, comunque non invalidante per il fit. I residui di fatto confermano il trend lineare e la buona riuscita del fit stesso.

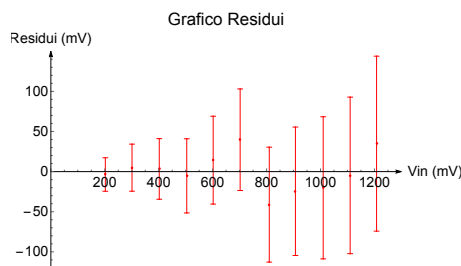


Figura 5: Residui curva VTC Ciarlantini

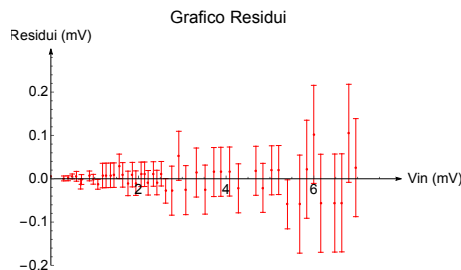


Figura 6: Residui curva VTC Barbon

Dunque la stima dell'amplificazione si riporta nella seguente tabella:

operatore	$A \pm \sigma_A$
Leso	12.5 ± 0.2
Ciarlantini	7.05 ± 0.05
Barbon	0.997 ± 0.003

Si calcola la compatibilità tra i valori ottenuti e con il valore di aspettazione calcolato teoricamente:

operatore	λ
Leso	0.7
Ciarlantini	0.005
Barbon	0.4

1.6 Discussione e commenti

Al fine di stimare l'amplificazione sperimentale, gli operatori hanno analizzato sia i dati inerenti ai massimi di V_{in} e V_{out} , sia ai minimi oltre che alle differenze tra questi. Una volta ottenute maggiori informazioni dai fit e considerate le stime finali per l'amplificazione, si è concluso che il metodo più efficace risulta essere quello che considera le differenze tra i voltaggi. Questa decisione si basa sia sul fatto che con le differenze si elimina un eventuale offset, sia perché la compatibilità con il valore atteso risulta ottima, rispetto alla scala in appendice.

Dai residui si nota che il fit lineare è effettivamente rappresentativo per i dati. Inoltre, come ci si aspetta in quanto proporzionale a V_{in} e V_{out} , la barra di errore aumenta al crescere dei dati misurati.

Si nota che il χ^2 in tabella 18 suggerisce una sovrastima dell'errore associato alle ordinate. In realtà anche senza la proiezione si erano ottenuti dei χ^2 più bassi di quelli attesi, quindi aumentando l'errore tramite proiezione è chiaro che ci si aspetta un'ulteriore sovrastima.

1.7 Conclusioni

La stima dell'amplificazione sperimentale è

Tabella 12: Stime A

operatore	$A \pm \sigma_A$
Leso	12.0 ± 0.4
Ciarlantini	7.05 ± 0.05
Barbon	0.997 ± 0.003

2 Seconda parte: circuito derivatore

2.1 Obiettivi

Stima della frequenza di taglio e realizzazione del grafico di Bode.

2.2 Strumentazione utilizzata

Tabella 13: Leso

Componente (udm)	Misura	Scala
R1 (Ω)	46.7	1 k
R3 (Ω)	8.2k	10 k
Rf (Ω)	82 k	100 k
C (F)	1.54 n	10 n

Tabella 14: Ciarlantini

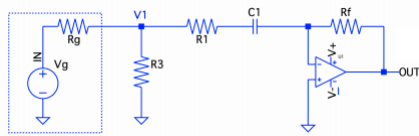
Componente (udm)	Misura	Scala
R1 (Ω)	8.059 k	0.003 k
R3 (Ω)	46.86	0.03
Rf (Ω)	56.78 k	0.02 k
C (F)	1.54 n	0.05 n

Tabella 15: Barbon

Componente (udm)	Misura	Scala
R3 (Ω)	6.72k	0.001 k
R1 (Ω)	46.3	0.1
Rf (Ω)	82k k	0.01 k
C (F)	1 n	1 n

2.3 Procedura di sperimentazione

Si realizza il circuito



E si fornisce in ingresso un'onda sinusoidale di ampiezza 1 Vpp: variando la frequenza in ingresso sono state dunque misurate le ampiezze del segnale in ingresso e in uscita (modalità picco-picco). Seguono i dati ottenuti:

Tabella 16: Leso

f (Hz)	Vin (V)	scala (V)	Vout (V)	Scala(V)
99.8	984m	200m	80m	20m
998	976m	200m	768m	200m
9.1k	984m	200m	6	5
10k	984m	200m	6	1
11k	984m	200m	6.6	1
15k	984m	200m	7.6	5
100k	984m	200m	8.72	2
1M	980m	200m	1.46	500m
20900	984m	200m	8.56	2
40160	984m	200m	9.44	2

Tabella 17: Ciarlantini

f (kHz)	Vin (mV)	scala (mV)	Vout (mV)	Scala(mV)
20	440	100	2480	500
50	432	100	2840	500
70	436	100	2860	500
80	440	100	2820	500
100	432	100	2800	500
200	436	100	2560	500
300	444	100	2440	500
500	436	100	1640	500
600	440	100	1400	500
700	444	100	1200	500
800	444	100	1040	500
1000	436	100	808	500

Tabella 18: Barbon

f (Hz)	Vin (V)	scala (V)	Vout (V)	Scala(V)
100	984m	200m	71m	20m
200	984m	200m	146m	50m
400	984m	200m	292m	100m
600	984m	200m	424m	100m
800	984m	200m	568m	100m
1k	984m	200m	720m	200m
1.4k	984m	200m	864m	200m
1.6	984m	200m	1.14	200m
1.8	984m	200m	1.26	500m
3k	984m	200m	2.1	500m
5k	984m	200m	3.44	1
10k	984m	200m	6.24	2
50k	984m	200m	11.68	2
70k	984m	200m	11.6	5
900k	984m	200m	11.28	2
100k	984m	200m	10.96	2
300k	984m	200m	6.56	2
500k	984m	200m	4.16	2
700k	984m	200m	3.04	1
900k	984m	200m	2.26	500m
1M	984m	500m	2	500m

Nota: I dati riportati sono un sottocampione delle misure effettuate per quanto concerne quest'ultimo operatore.

2.4 Analisi dati

2.4.1 Analisi preliminare senza errori

Si calcolano in primis le incertezze associate alle misure delle resistenze come nella prima parte dell'esperienza. Si ottengono i seguenti risultati:

Tabella 19: Componenti Leso con errore

Resistenza (udm)	Misura \pm incertezza
R1	8.200 ± 0.002 (k Ω)
R3	46.70 ± 0.03 (Ω)
Rf	82.00 ± 0.02 (k Ω)
C (Ω)	1.54 ± 0.03 (nF)

Tabella 20: Componenti Ciarlantini con errore

Resistenza (udm)	Misura \pm incertezza
R1	8.059 ± 0.006 (k Ω)
R3	46.70 ± 0.05 (Ω)
Rf	56.78 ± 0.04 (k Ω)
C (Ω)	1.53 ± 0.05 (nF)

Tabella 21: Componenti Barbon con errore

Resistenza (udm)	Misura \pm incertezza
R1	6.72 ± 0.04 (k Ω)
R3	46.30 ± 0.04 (Ω)
Rf	82.00 ± 0.04 (k Ω)
C (Ω)	1 ± 1 (nF)

Si computa poi la frequenza di taglio attesa f_t :

$$f_t = \frac{1}{2\pi * R_1 * C}$$

L'errore che vi si associa per propagazione è

$$\sigma_f = \frac{1}{2 * \pi} \sqrt{\left(\frac{-1}{R_1^2 * C_1} * \sigma_R\right)^2 + \left(\frac{-1}{R_1 * C^2} * \sigma_C\right)^2}$$

Seguono in tabelle le frequenze stimate con le rispettive incertezze:

Operatore	Frequenza \pm incertezza (kHz)
Leso	12.6 \pm 0.4
Ciarlantini	12.9 \pm 0.4
Barbon	23.68 \pm 0.02

Si può poi computare l'errore sull'amplificazione, come fatto in precedenza, associando l'errore

$$\sigma_V = \sqrt{(0.04 * FS)^2 + (0.015 * misura)^2}$$

alle tensioni.

Per propagazione, si associa come incertezza all'amplificazione:

$$\sigma_A = \sqrt{\left(\frac{-V_{out}}{V_{in}^2} * \sigma_{V_{in}}\right)^2 + \left(\frac{1}{V_{in}} * \sigma_{V_{out}}\right)^2}$$

Infine si può calcolare l'errore riguardante l'amplificazione in decibel, computata come $20 * \log_{10}(A)$, come $\sigma_A = \frac{20}{A * \ln(10)} * \sigma_A$. In particolare, vista la definizione di Amplificazione come rapporto e applicando il logaritmo per la conversione in dB, si scorpora l'errore di scala originariamente associato alle tensioni di ingresso e uscita, che va ad elidersi nella differenza tra logaritmi: tuttavia, il contributo di scala influisce nel fit e viene integrato successivamente nel computo dell'incertezza associata all'intercetta sia della parabola che della retta poi calcolate come fit dai dati. In particolare, il contributo $\sigma_{scala} = \frac{\sqrt{2}}{\ln(10)} * 0.015$ si aggiunge in somma quadratica all'errore computato sull'intercetta stessa dei fit. I risultati degli errori definitivi associati a V_{in} e V_{out} si trovano nelle tabelle successive:

Tabella 22: Leso

f (Hz)	$V_{in} \pm \sigma_{V_{in}}$ (mV)	$V_{out} \pm \sigma_{V_{out}}$ (mV)
99.8	984 \pm 8	80.0 \pm 0.8
998	976 \pm 8	768 \pm 8
9100	984 \pm 8	6000 \pm 200
11750	992 \pm 8	6800 \pm 40
11000	984 \pm 8	6600 \pm 40
15000	984 \pm 8	7600 \pm 200
100000	984 \pm 8	8720 \pm 80
1000000	980 \pm 8	1460 \pm 20
20900	984 \pm 8	8560 \pm 80
40160	984 \pm 8	9440 \pm 80

Tabella 23: Ciarlantini

f (Hz)	$V_{in} \pm \sigma_{V_{in}}$ (mV)	$V_{out} \pm \sigma_{V_{out}}$ (mV)
20000	440 \pm 4	2480 \pm 20
50000	432 \pm 4	2840 \pm 20
70000	436 \pm 4	2860 \pm 20
80000	440 \pm 4	2820 \pm 20
100000	432 \pm 4	2800 \pm 20
200000	436 \pm 4	2560 \pm 20
300000	444 \pm 4	2440 \pm 20
500000	436 \pm 4	1640 \pm 20
600000	440 \pm 4	1400 \pm 20
700000	444 \pm 4	1200 \pm 20
8000000	444 \pm 4	1040 \pm 20
1000000	436 \pm 4	808 \pm 20

Tabella 24: Barbon

f (Hz)	$V_{in} \pm \sigma_{V_{in}}$ (mV)	$V_{out} \pm \sigma_{V_{out}}$ (mV)
400	980 \pm 10	292 \pm 6
600	980 \pm 10	424 \pm 6
800	980 \pm 10	568 \pm 6
1000	980 \pm 10	720 \pm 10
1400	980 \pm 10	860 \pm 10
1600	980 \pm 10	1140 \pm 10
1800	980 \pm 10	1260 \pm 30
3000	980 \pm 10	2100 \pm 30
5000	980 \pm 10	3440 \pm 60
10000	980 \pm 10	6200 \pm 100
50000	980 \pm 10	11700 \pm 100
70000	980 \pm 10	11600 \pm 300
90000	980 \pm 10	11300 \pm 100
100000	980 \pm 10	11000 \pm 100
300000	980 \pm 10	6600 \pm 100

Seguono le tabelle con gli errori associati all'amplificazione:

Tabella 25: Leso

log(f) (Hz)	$A \pm \sigma_A$ (V/V)	$A \pm \sigma_A$ (dB)
1.999	0.001 \pm 0.001	-21.8 \pm 0.1
2.999	0.01 \pm 0.01	-2.1 \pm 0.1
3.959	0.2 \pm 0.2	15.7 \pm 0.3
4.070	6.00 \pm 0.07	15.7 \pm 0.1
4.041	6.0 \pm 0.2	16.5 \pm 0.3
4.176	8.0 \pm 0.2	17.8 \pm 0.2
5	9.0 \pm 0.1	19.0 \pm 0.1
6	1.50 \pm 0.02	3.5 \pm 0.1
4.320	9.0 \pm 0.1	18.8 \pm 0.1
4.604	10.0 \pm 0.1	19.6 \pm 0.1

Tabella 26: Ciarlantini

log(f) (Hz)	$A \pm \sigma_A$ (V/V)	$A \pm \sigma_A$ (dB)
4.30	5.64 \pm 0.07	15.0 \pm 0.1
4.70	6.57 \pm 0.08	16.4 \pm 0.1
4.85	6.56 \pm 0.08	16.3 \pm 0.1
4.90	6.41 \pm 0.07	16.1 \pm 0.1
5.00	6.48 \pm 0.08	16.2 \pm 0.1
5.30	5.87 \pm 0.07	15.4 \pm 0.1
5.48	5.50 \pm 0.07	14.8 \pm 0.1
5.70	3.76 \pm 0.06	11.5 \pm 0.1
5.78	3.18 \pm 0.05	10.1 \pm 0.1
5.85	2.70 \pm 0.05	8.6 \pm 0.2
5.90	2.34 \pm 0.05	7.4 \pm 0.2
6.00	1.85 \pm 0.05	5.4 \pm 0.2

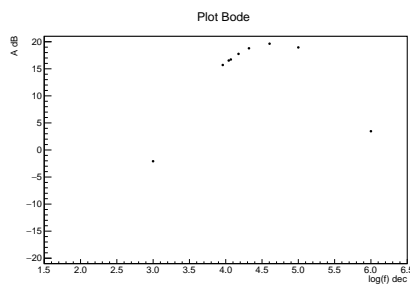
Tabella 27: Barbon

log(f) (Hz)	A $\pm \sigma_A$ (V/V)	A $\pm \sigma_A$ (dB)
2.60	0.297 \pm 0.006	5.9 \pm 0.1
2.78	0.431 \pm 0.008	8.6 \pm 0.2
2.90	0.577 \pm 0.009	11.5 \pm 0.2
3.00	0.73 \pm 0.01	14.6 \pm 0.3
3.15	0.88 \pm 0.02	17.6 \pm 0.3
3.20	1.16 \pm 0.02	23.2 \pm 0.3
3.26	1.28 \pm 0.03	25.6 \pm 0.6
3.48	2.13 \pm 0.04	42.7 \pm 0.7
3.70	3.50 \pm 0.07	69 \pm 1
4.00	6.3 \pm 0.1	127 \pm 3
4.70	11.9 \pm 0.2	237 \pm 4
4.85	11.8 \pm 0.3	235 \pm 6
4.95	11.5 \pm 0.2	229 \pm 3
5.00	11.1 \pm 0.2	222 \pm 3
5.48	6.7 \pm 0.2	133 \pm 3

2.5 Stima della frequenza di Taglio

2.5.1 Leso

In primis viene plottato il grafico di bode senza errori, per verificare che l'andamento sia simile a quello atteso, corrispondente a un passa alto, ottenendo il seguente grafico:

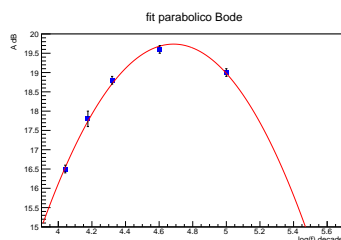


Che si nota essere simile al grafico di Bode che ci si aspetta da un passa banda, nonostante i pochi punti presi al di fuori del range di frequenza **9-40 kHz**, come confermato anche dalla simulazione Spice proposta nella sezione dell'operatore successivo.

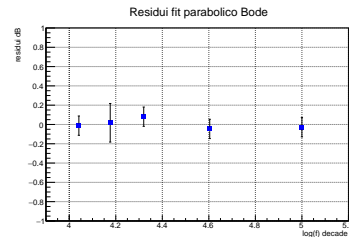
E' stato calcolato successivamente il fit parabolico del tipo $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, associando ai dati il relativo errore come sopra descritto; questo considera solo i dati che effettivamente sembrano avere un andamento parabolico, e risulta:

$$y = -150(\pm 10) + 72(\pm 4)x - 7.7(\pm 0.5)x^2$$

ove all'errore sull'intercetta si è incorporato l'errore di scala come discusso in precedenza. Segue il fit



con residui



e $\chi^2 = 0.15$.

Si nota che l'andamento è parabolico e i residui lo confermano: ci si aspetterebbe un andamento più lineare una volta accettato che il filtro si comporta come passa banda, e per ovviare a questa problematica e cercare di stimare la frequenza di taglio, si calcola la retta passante per il massimo e vi si associa l'errore riportato in appendice, che tiene conto della covarianza tra parametri che segue

parametri	valore di cov
a-b	-2.108
b-c	-43.05
a-c	4.744

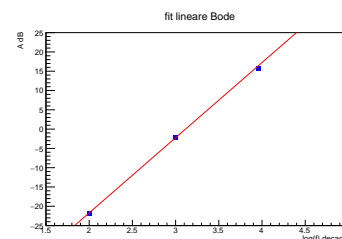
Il massimo risulta

$$y_{max} = 19.74 \pm 0.05 \text{ dB}$$

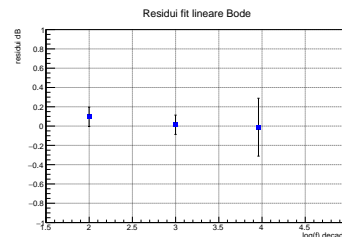
A questo punto si calcola la retta che fitta i dati in salita, ove il circuito ha il comportamento tipico del derivatore, che sono i primi tre del gruppo esposto sopra in tabella 35, ottenendo come risultato

$$y = -60.7(\pm 0.3) + 19.5(\pm 0.1)x$$

con covarianza tra i parametri -0.03556 e $\chi^2 = 10$. Segue il fit



con residui



Si nota dai residui che il primo dato a sinistra comprende lo zero al limite della barra d'errore,

quindi se i dati fossero di più in numero si potrebbe scartare in quanto considerabile come outlier, ma in questo caso non avrebbe senso rigettarlo e rifare il fit in quanto rimarrebbero solo due dati da fittare, il che non avrebbe senso. Questa retta si interseca con la retta passante per il massimo ottenuta sopra; il risultato dell'intersezione sarà $\log_{10}(f_t)$, cui si associa l'errore dell'intersezione tra due rette, riportato sempre in Appendice; l'intersezione ha come ascissa

$$4.74 \pm 0.03 \text{dec}$$

Si ottiene, convertendo da dB in Hertz e propagando l'errore

$$f_t = 13.4 \pm 0.6 \text{Hz}$$

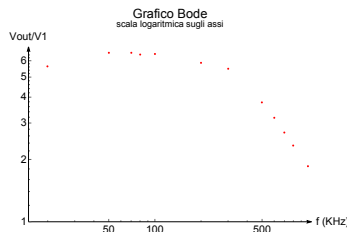
2.5.2 Commenti

Si nota che i χ^2 di tutti i fit si discostano rispetto alle attese: in particolare, si nota una sovrastima dell'errore per il fit parabolico e una sottostima per quello lineare; la compatibilità è discreta (1.4), cioè i risultati sperimentali possono considerarsi piuttosto in accordo con quelli teorici. Un'ulteriore problematica incontrata nell'analisi è che influisce sul risultato ottenuto deriva dal fatto che l'operatore ha preso troppi pochi punti nel fit della retta in salita, e quindi una retta fittante tre punti non potrà mai portare ad un'analisi ottimale. Tuttavia, considerando le difficoltà appena citate il risultato è attendibile.

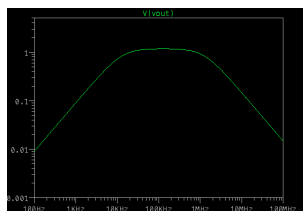
2.5.3 Ciarlantini

L'analisi dei dati raccolti per il grafico di Bode è stata eseguita in modo differente rispetto alle altre analisi in quanto sono stati campionati punti solo dai 20 kHz in poi, per un errore dell'operatore.

Come conseguenza di ciò, il primo plot del grafico di Bode, eseguito per verificare l'andamento dei dati sperimentali privi di errore, risulta quindi essere:



Il corretto grafico di Bode di questo circuito realizzato con simulazione LTSpice è invece:



Si notano subito due cose.

- La prima riguarda l'andamento del grafico simulato che rappresenta chiaramente quello di un circuito passa banda invece che passa alto.
- La seconda riguarda invece il confronto tra il plot realizzato con i dati sperimentali e quello realizzato con simulazione: è evidente come manchi il ramo ascendente della curva, quello corrispondente a frequenze più basse di 20 kHz che non sono state campionate.

Sfortunatamente l'analisi della stima della frequenza di taglio si effettua proprio su tale parte di grafico mancante.

Per ovviare il problema è stata sfruttata la simmetria delle due frequenze di taglio rispetto alla frequenza massima del circuito: le tre grandezze sono legate dalla relazione

$$f_0 = \sqrt{f_{t1} * f_{t2}}$$

dove la frequenza massima è denominata f_0 e le due frequenze di taglio, rispettivamente in ordine crescente di valore, f_{t1} e f_{t2} . Innanzitutto si è proceduto al computo di f_0 tramite fit parabolico del tipo

$$y = a * x^2 + b * x + c$$

Sono stati interpolati i dati relativi al range di frequenza **50 kHz - 200 kHz**, ponendone i logaritmi in base dieci sulle ascisse e la corrispettiva amplificazione in decibel sulle ordinate.

Successivamente è stato trovato il vertice di tale parabola corrispondente di fatto alla frequenza f_0 e al valore massimo di A.

Segue la tabella con i valori trovati:

Tabella 28: Valori stimati

grandezze	valori	udm
a	-3.03 ± 0.02	dB/dec ²
b	28.9 ± 0.1	dB/dec
c	-51.6 ± 0.5	dB
χ^2	2.6	
XVertice	4.738	dec
YVertice	16.345	dB
f_0	54731	Hz

Segue il grafico dei residui:

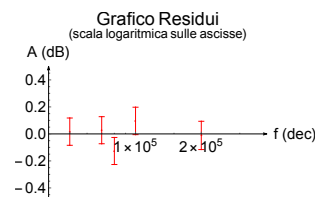


Figura 7: Residui fit parabolico

Si nota che il terzo punto si discosta maggiormente dall'andamento della curva fittata, ma comunque in modo accettabile. Verosimilmente, rigettandolo, anche il quarto punto dovrebbe risultare meno distante dall'andamento del fit.

Al fine di stimare la frequenza f_{t2} , sono stati interpolati tramite fit lineare i dati relativi al range di frequenza 300 kHz- 800 kHz, sempre ponendone i logaritmi in base 10 sulle ascisse e le rispettive amplificazioni A in dB sulle ordinate. Poichè dall'analisi del grafico dei residui i dati corrispondenti alle frequenze 700 e 800 kHz risultavano outlier che avrebbero invalidato l'analisi, essi sono stati rigettati e sono stati considerati solo tre dati per il fit lineare, corrispondenti alle frequenze di 300, 500 e 600 kHz.

Successivamente è stato trovato il punto di intersezione tra la retta appena computata e la retta tangente al massimo della parabola calcolato precedentemente: il suo punto di ascissa corrisponde di fatto al logaritmo della frequenza cercata. Seguono i dati dell'interpolazione, la stima della f_{t2} e il grafico comprendente le due rette con i punti sperimentali.

Tabella 29: Valori stimati

grandezze	valori	udm
e	100 ± 3	dB
f	-15.5 ± 0.5	dB/dec
χ^2	1	
$x_{intersezione}$	5.376	dec
f_{t2}	237762	Hz

Segue il grafico dei residui:

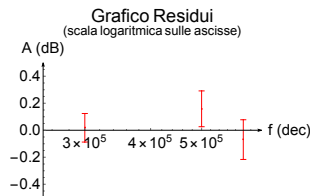


Figura 8: Residui fit lineare

Si riporta il grafico con l'intersezione delle rette:

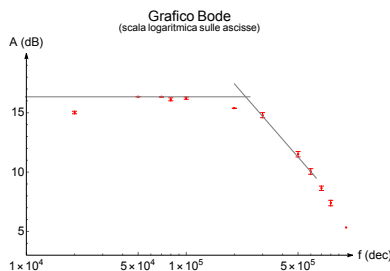


Figura 9: grafico Bode con fit

Ricorrendo alla relazione che lega le tre frequenze considerate (riportata sopra), si stima preliminarmente $f_{t1}=12598.9245$ Hz

Per il calcolo degli errori sulle grandezze stimate a partire dai parametri dei fit si è reso necessario il computo delle covarianze tra i parametri, poichè le grandezze non possono essere considerate esenti dalla dipendenza della correlazione tra i parametri da cui sono computate.

Seguono le tabelle con le covarianze calcolate tramite ROOT:

grandezze	valori
cov ab	-0.001873
cov bc	-0.046530
cov ac	-0.002025
cov ef	-0.4353

Dal fit parabolico sono state stimate le coordinate del vertice della parabola e la corrispondente frequenza f_0 di massimo. Gli errori sono stati calcolati come riportato in Appendice. L'errore della f_0 è stato stimato come:

$$\sigma_{f_0} = 10^{x_{Vertex}} * \ln(10) * \sigma_{x_{Vertex}}$$

Dal fit lineare invece è stata stimata la frequenza di taglio f_{t2} . Gli errori associati all'ascissa di intersezione $x_{intersezione}$ e alla f_{t2} sono riportati in Appendice.

La stima dell'errore sull'effettiva frequenza di taglio risulta quindi essere dato per propagazione da

$$\sigma_{f_{t1}} = \sqrt{\left(\frac{2f_0}{f_{t2}} \sigma_{f_0}\right)^2 + \left(\frac{f_0^2}{f_{t2}^2} \sigma_{f_2}\right)^2}$$

Segue la tabella di riepilogo delle grandezze stimate con i relativi errori

Tabella 30: Valori stimati

grandezze	valori	unità misura
x_{Vertex}	4.74 ± 0.03	dec
y_{Vertex}	16.35 ± 0.06	dB
f_0	54865 ± 3266	Hz
$x_{intersezione}$	5.38 ± 0.01	dec
f_{t2}	237762 ± 6000	Hz
f_{t1}	12600 ± 2000	Hz

La stima della frequenza f_{t1} ha associato un errore piuttosto grande: ciò è dovuto all'analisi dati svolta che ha comportato tante propagazioni di errori. E' possibile quindi che le incertezze siano aumentate nel corso dell'analisi nei vari step effettuati, fino ad aumentare di un ordine di grandezza l'errore finale stimato, rispetto per esempio a quello computato per la stima teorica di f_{t1} o rispetto a quello di Leso, che ha svolto un'analisi dati più lineare e con meno propagazioni. Sempre a causa di questo, la compatibilità calcolata tra la stima teorica e sperimentale di f_{t1} risulta essere ottima, ma ciò non corrisponde ad una reale compatibilità dei risultati ottenuti dello stesso grado. Dalla definizione di compatibilità si nota come essa dipenda strettamente dall'ordine

di grandezza degli errori (comparendo questi ultimi al denominatore): è evidente che un errore su f_{t1} così sproporzionato rispetto all'errore sulla stima teorica abbia portato ad una compatibilità così bassa.

2.5.4 Barbon

Al fine di calcolare la frequenza di taglio è stato fatto un grafico di bode dei dati ovvero mettendo in ascissa le frequenze e in ordinata l'amplificazione (entrambe in scala logaritmica). Inizialmente i dati seguono un andamento lineare come ci si aspetta dal comportamento di un derivatore. Dunque sono stati plottati i dati da **100Hz a 10000 Hz** attraverso una retta della forma $y=a+bx$ ottenendo:

Tabella 31: Stima retta con errori

grandezze	valori	udm
a	-61.9 ± 0.4	dB
b	19.7 ± 0.1	dB/dec
χ^2	2.37	
Sigmatpost	0.5	dB
ro	0.983	
cov(a,b)	-0.06326	

In una analisi preliminare si è osservato che dei dati non seguivano l'andamento lineare previsto: questo potrebbe essere dovuto ad una presa dati difettosa oppure perchè effettivamente non erano fittati da una retta. Di fatto gli ultimi dati potrebbero essere soggetti già all'incurvatura del grafico in prossimità della frequenza di taglio e ciò potrebbe influire sul loro andamento. Dunque sono stati scartati alcuni dati utilizzando la regola del 3σ .

Il χ^2 teorico risulta essere pari a $N-3=6$ in cui N è il numero dei dati e 3 i vincoli imposti dalla retta e dal calcolo dell'errore sulle ordinate. Dal confronto con il χ^2 sperimentale risulta che gli errori sulle ordinate imposti sono stati sovrastimati. Nel seguente grafico sono riportati i residui:

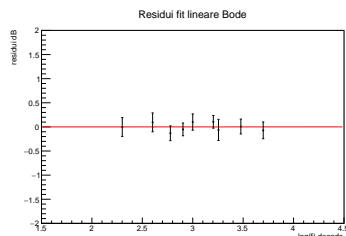
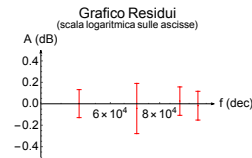


Figura 10: grafico residui retta

E' stato eseguito un fit parabolico dei dati tra 50000 Hz a 100000 Hz della forma $y=ax^2+bx+c$ utilizzando ROOT. Questa funzione è stata utilizzata per cercare di fittare i dati che curvano in corrispondenza della frequenza di taglio. I valori sono riportati in tabella:

grandezze	valori	udm
a	-10.82 ± 0.04	dB/dec ²
b	103.1 ± 0.2	dB/dec
c	-224.3 ± 0.9	dB
cov(a,b)	-0.00505	
cov(a,c)	-0.01323	
cov(b,c)	-0.1199	

Sono riportati in grafico i residui della parabola:



Come si può notare i residui si allineano in modo conforme attorno alla parabola, perciò sono ben rappresentati dal fit parabolico. Successivamente è stata stimata la retta tangente al massimo della parabola, utilizzando le formule precedentemente descritte ed è stato calcolato l'errore sulla ordinata tramite propagazione tenendo conto della covarianza fra i parametri a,b,c, tale errore è riportato in Appendice. La retta trovata è $y=22\pm 2$ dB.

Si calcola la frequenza di taglio dall'intersezione di questa con la retta trovata precedentemente. Per quanto concerne l'errore da associarle è stata eseguita una propagazione tenendo conto della covarianza fra i parametri a e b della retta, nuovamente tale formula è riportata in Appendice.

Nel seguente grafico sono riportati i fit delle due rette.

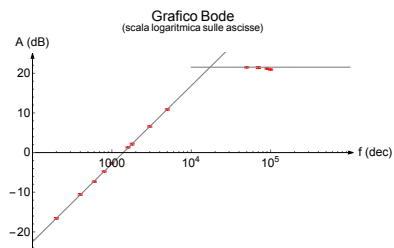


Figura 11: grafico Bode con dati sperimentali

Ottenendo $x= 4.2 \pm 0.1$ Hz, dunque la frequenza risulta $f= 17 \pm 2$ kHz.

Vengono riportati alcuni commenti. Poichè i dati orizzontali non sono sufficienti in numero può essere che non siano ben rappresentati da una parabola, ma piuttosto da una retta. E' stato eseguito un fit lineare dei dati per verificare l'ipotesi. Dall'analisi è emerso che il risultato ottenuto non è rappresentativo dei dati. Dunque il fit parabolico è effettivamente proprio dei dati, come d'altronde precedentemente evidenziato dai residui. E' stata calcolata la compatibilità tra il valore atteso della frequenza di taglio e il valore trovato e, secondo la scala riportata in appendice, risulta essere pari a 3. In effetti come già evidenziato il numero dei dati utilizzati nel fit parabolico era esiguo perciò si ipotizza che

il risultato della frequenza di taglio sia inferiore rispetto al valore teorico poichè molto influenzato dall'analisi e dalla presa dati.

2.6 Conclusioni

Le frequenze di taglio stimate sono:

Tabella 32: Stima della frequenza di taglio

operatore	stima \pm errore	λ
Leso	13.4 ± 0.6 kHz	1.4
Ciarlantini	12 ± 3 kHz	0.2
Barbon	17 ± 2 kHz	3

3 Terza parte: analisi con Arduino

3.1 Obiettivi

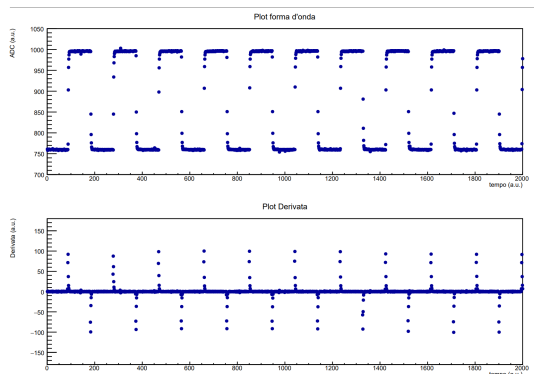
Stima del **sampling rate** e della **funzione di calibrazione**

3.2 Strumentazione utilizzata

- **Scheda Arduino Due n°15**
- **Oscilloscopio:** la descrizione dello strumento si trova nella prima parte alla sezione "Strumentazione Utilizzata"
- **Generatore di funzioni:** la descrizione dello strumento si trova nella prima parte alla sezione "Strumentazione Utilizzata"

3.3 Presentazione dati raccolti

E' stato impostato il generatore di funzioni in modo da iniettare un'onda quadra di frequenza 1 kHz e durata $10\mu s$ sul CH2 e si è verificato che l'altezza dell'impulso di trigger fosse pari a 2V dallo zero. Sul CH1, invece, si inietta un'onda quadra di ampiezza 1 V dallo zero, con frequenza pari a 5 kHz e di ampiezza variabile a seconda del dataset che si desidera acquisire. Si ottengono dei plot per i dati (con annesso il plot della derivata, usato nei programmi per le varie stime) del tipo:



3.4 Analisi dati

3.4.1 stima del Sampling rate

In primis è stata effettuata la stima del Sampling Rate tramite un apposito programma in linguaggio c++, sfruttando le librerie ROOT.

La conversione di un segnale analogico in digitale consiste nel passaggio del valore di una grandezza continua in corrispondenza di intervalli di tempo fissati. Si stima dunque che Arduino sia in grado di acquisire dati con una frequenza di campionamento pari a **f=955000 sps**.

E' stato anche controllato tramite un altro programma che tale frequenza di campionamento fosse effettivamente la stessa per ogni dataset, e questa ipotesi è stata confermata.

3.4.2 Commento

Per farsi un'idea più *materiale* di quanto sia questo valore, apparentemente molto elevato, lo si può confrontare con quello di alcuni strumenti utilizzati in laboratorio e di cui si conosce il sampling rate, tenendo comunque conto della diversità tra gli strumenti stessi; il generatore di funzioni presenta un valore di 125 Msps, mentre l'oscilloscopio presenta una frequenza di campionamento pari a $\simeq 2$ Gsps, entrambi molto più veloci del $\simeq 1$ Msps della scheda Arduino Due. Dunque, in laboratorio sono stati utilizzati strumenti che di fatto campionano il segnale molto più rapidamente.

3.4.3 Calcolo della funzione di Calibrazione

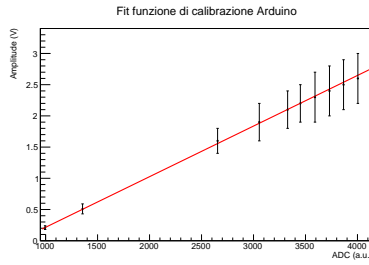
Si è poi calcolata la funzione di calibrazione; per fare ciò, dapprima è stata effettuata una calibrazione verticale: di fatto, prendere solo il punto di massimo per ogni dataset non sarebbe rappresentativo di esso in quanto le fluttuazioni che si osservano in quello che può esser considerato l'apice dell'onda quadra non sono banali.

Dopo aver mediato dunque tutti i punti sull'apice di ciascun periodo di onda quadra per ogni dataset, si può eseguire il fit lineare che considera in ascissa proprio i massimi di ciascun dataset, e in ordinata le corrispondenti tensioni prese come picco-picco dall'oscilloscopio. Si ottengono i seguenti dati

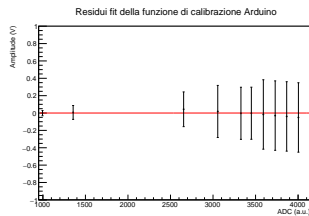
ADC (u.a.)	V_{IN} (V)	FS (V)	$\sigma_{V_{IN}}$ (V)
995.416	0.21	0.05	0.03
1355.49	0.51	0.1	0.08
2654.47	1.6	0.5	0.2
3055.62	1.9	0.5	0.3
3328.16	2.1	0.5	0.3
3450.61	2.2	0.5	0.3
3591.41	2.3	0.5	0.4
3730.72	2.4	0.5	0.4
3866	2.5	0.5	0.4
4003.87	2.6	0.5	0.4

La retta del fit, del tipo $y=a+b*x$, risulta:

$$y = -0.60(\pm 0.06) + 0.00081(\pm 0.00004)x$$



Si ottiene un $\chi^2_{\text{sperimentale}} = 0.1$ decisamente più basso rispetto al $\chi^2_{\text{teorico}} = N - 3 = 7$ il che suggerisce sovrastima degli errori in ordinata (ossia sul Vin) proprio come nelle precedenti parti dell'esperienza. Segue il plot dei residui:



I residui suggeriscono che il fit lineare sia rappresentativo per la distribuzione di dati.

3.5 Conclusioni

Il sampling rate della scheda Arduino utilizzata risulta essere pari a 955000 sps, e la funzione di calibrazione, che risponde alla domanda *A quanti Volt corrisponde un ADC count della scheda Arduino Due?* è data dall'equazione $y=a+b*x$ con

parametro	valore \pm incertezza
a	0.51 ± 0.04 [V]
b	$77 * 10^{-5} \pm 10^{-5}$ [V/a.u.]

4 Appendice

Le formule di propagazione utilizzate nel corso dell'analisi dati sono e quelle generali per il computo delle grandezze sono:

4.1 Formule di statistica utilizzate

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{y - a - b * x}{\sigma_i} \right)^2$$

Compatibilità tra χ^2 teorico e sperimentale

$$\lambda = \frac{|\chi_{\text{speri}} - \chi_{\text{teo}}|}{\sqrt{2 * \chi_{\text{teo}}}}$$

Sigma a posteriori

$$\sigma_{\text{posteriori}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y - a - b * x)^2}{N - 2}$$

Coefficiente di correlazione

$$\rho = \frac{\text{cov}(xy)}{\sqrt{\sigma_x^2 * \sigma_y^2}}$$

Compatibilità

$$\lambda = \frac{|a - b|}{\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}}$$

La scala per stabilire il grado di compatibilità tra le grandezze è

- * $0 < \lambda < 1$ ottimamente compatibile
- * $1 < \lambda < 2$ compatibile
- * $2 < \lambda < 3$ discretamente compatibile
- * $\lambda > 3$ non compatibile

L'errore sull'ordinata del vertice, che si calcola come segue, rappresenta anche l'errore associato alla retta tangente al vertice usata nella stima della frequenza di taglio f_{t2} come punto di intersezione fra le due rette.

$$\sigma_y = \sqrt{\left(\frac{b^2 \sigma_a}{4a^2}\right)^2 + \left(\frac{b \sigma_b}{2a}\right)^2 + \sigma_c^2 - \left(\frac{b^3}{4a^3}\right) \text{cov}(ab) + \frac{b^2}{2a^2} \text{cov}(ac) - \frac{b}{a} \text{cov}(bc)}$$

Considerando la retta come $y=e+f*x$:

$$\sigma_{x_{\text{inter}}} = \sqrt{\left(\frac{f - y_V}{e^2} \sigma_e\right)^2 + \left(\frac{\sigma_f}{e}\right)^2 \left(\frac{\sigma_{y_V}}{e}\right)^2 + 2 \frac{y_V - f}{e^3} \text{cov}(ef)}$$

(dove per y_V si intende il valore di ordinata del vertice della parabola.)

$$\sigma_{f_{\text{taglio}}} = 10^{x_{\text{inter}}} \ln(10) \sigma_{x_{\text{inter}}}$$