Momento angolare orbitale $\vec{L}$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = -i\hbar(\vec{r} \times \vec{\nabla})$$

Quindi, le sue componenti risultano

$$L_i = \varepsilon_{ijk} x_j P_k = \begin{cases} L_x = -i\hbar(y\partial_z - z\partial_y) = (yP_z - zP_y) \\ L_y = -i\hbar(z\partial_x - x\partial_z) = (zP_x - xP_z) \\ L_z = -i\hbar(x\partial_y - y\partial_x) = (xP_y - yP_x) \end{cases}$$

I commutatori risultano

$$[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk} L_k = \begin{cases} [L_x, L_y] = i\hbar L_z \\ [L_y, L_z] = i\hbar L_x \\ [L_z, L_x] = i\hbar L_y \end{cases}$$

Le componenti del momento angolare sono **operatori Hermitiani**, quindi vale

$$\begin{cases} [L_i, X_j] = i\hbar\epsilon_{ijk} X_k \\ [L_i, P_j] = i\hbar\epsilon_{ijk} P_k \end{cases}$$

Dato che $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, allora $[H, L] = 0$ quindi $\langle \vec{L} \rangle$ non dipende dal tempo. Inoltre, se

$$|\vec{L}^2| = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

Dato che $\vec{L}$ **commuta con H**, anche $\vec{L^2}$ commuta con ogni componente di $\vec{L}$.
Posso prendere $H, \vec{L^2}, L_i$ e questo sarà un **ICOC**; per convenzione si prende L_z. **Non si hanno autostati comuni alle 3 componenti** L_i.

Operatori di innalzamento ed abbassamento

$$\begin{cases} L_\pm = L_x \pm iL_y \\ (L_\pm)^+ = L\mp \\ L_\pm|l, m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}|l, m \pm 1\rangle \end{cases}$$

Si ottiene

$$\begin{cases} L_x = \frac{L_+ + L_-}{2} \\ L_y = i\frac{L_+ - L_-}{2} \\ L^2 = L_+L_- + L_z^2 \hbar L_z = L_-L_+ + L_z^2 \hbar L_z \end{cases}$$

e valgono i seguenti commutatori

$$\begin{cases} [L_+, L_-] = 2\hbar L_z \\ [L_z, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm \\ [\vec{L^2}, L_\pm] = 0 \end{cases}$$

Gli autovalori di $\vec{L^2}$ sono

$$\hbar^2 l(l+1)$$

mentre per L_z si ha

$$\hbar m$$

ricordando che **fissato m si hanno (2l+1) valori possibili di m**, con $m \in [-l, l]$

Momenti angolari in forma matriciale

per **l=1**

$$L_z = \hbar \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} L_+ = \hbar \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} L_- = \hbar \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} L_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}$$

Gli autovettori di L_z sono

$$\begin{cases} \lambda = \hbar, \psi_\hbar = |11\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \lambda = -\hbar, \psi_{-\hbar} = |1-1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \lambda = 0, \psi_0 = |10\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Gli autovettori di L_x sono

$$\begin{cases} \lambda = \hbar, \psi_\hbar = |11\rangle_x = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \\ \lambda = -\hbar, \psi_{-\hbar} = |1-1\rangle_x = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \\ \lambda = 0, \psi_0 = |10\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Gli autovettori di L_y sono

$$\begin{cases} \lambda = \hbar, \psi_\hbar = |11\rangle_y = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -i\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \\ \lambda = -\hbar, \psi_{-\hbar} = |1-1\rangle_y = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ i\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \\ \lambda = 0, \psi_0 = |10\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Matrici di Pauli

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\mathbb{I} + i\sum_n \epsilon_{ijk}\sigma_k$$

Se A e B sono vettori, allora valgono le seguenti proprietà:

$$(\sigma \cdot A)(\sigma \cdot B) = A \cdot B\mathbb{I} + i\sigma(A \times B)$$

$$(\vec{A} \cdot \vec{\sigma})^2 = A^2\mathbb{I}$$

$$e^{i\vec{a}\cdot\vec{\sigma}} = \mathbb{I}cos|\vec{a}| + i\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\vec{\sigma}sin|\vec{a}|$$

Spin $\vec{S}$

Matrici di Pauli

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

valgono

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$$

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \mathbb{I}_2$$

Queste matrici anticommutano, ossia

$$\{\sigma_x, \sigma_y\} = \{\sigma_y, \sigma_z\} = \{\sigma_z, \sigma_x\} = 0 \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i$$

Operatore di Spin

$\vec{S} = (S_x, Sy, S_z)$ è definito come

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} \ , \ \vec{S_i} = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$$

il commutatore tra componenti del vettore di spin vale

$$[S_i, S_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}S_k$$

Gli autovalori sono

$$s^2 = \hbar^2 s(s+1)$$

e per ogni valore di **s** esistono (2l+1) valori di s_z che valgono $\hbar m_s$, con $m_s \in [-s, s]$ Posso definire anche

$$S_\pm = S_x \pm iS_y \Rightarrow S_+ = \hbar \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S_- = \hbar \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Per particelle di spin $\frac{1}{2}$ gli autovalori di S_z sono $\pm\frac{\hbar}{2}$ e gli **autostati dello spin vengono chiamati autospinori e sono rappresnettai da**

$$|\frac{1}{2}\rangle = |+\rangle_z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |-\frac{1}{2}\rangle = |-\rangle_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Allora un generico stato può esser decomposto in termini di $|+\rangle_z$ e $|-\rangle_z$:

$$\psi(x) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ove $|a|^2$ e $|b|^2$ sono le probabilità che una misura d S_z restituisca $\pm\frac{\hbar}{2}$.
Per trovare la componente $\vec{S}$ lungo la direzione generica $\vec{m} \in \mathbb{R}^3$:

$$|\frac{1}{2}\rangle_m = \begin{bmatrix} cos(\theta/2)e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ sin(\theta/2)e^{i\frac{\phi}{2}} \end{bmatrix} | -\frac{1}{2}\rangle_m = \begin{bmatrix} -sin(\theta/2)e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ cos(\theta/2)e^{i\frac{\phi}{2}} \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\begin{cases} |+\rangle_m = cos(\frac{\theta}{2})e^{-i\frac{\phi}{2}}|+\rangle + sin(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\phi}{2}}|-\rangle \\ |-\rangle_m = -sin(\frac{\theta}{2})e^{-i\frac{\phi}{2}}|+\rangle + cos(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\phi}{2}}|-\rangle \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} |+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_z + |-\rangle_z) \\ |-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-\rangle_z - |+\rangle_z) \end{cases}$$

Posso scrivere poi

$$\begin{cases} S_z = \frac{\hbar}{2}(|+\rangle_z\langle+|_z - |-\rangle_z\langle-|_z) \\ S_x = \frac{\hbar}{2}(|+\rangle_z\langle-|_z + |-\rangle_z\langle+|_z) \end{cases}$$

Valgono poi

$$\begin{cases} S_+|+\rangle = 0 \\ S_-|+\rangle = \hbar|-\rangle \\ S_+|-\rangle = \hbar|+\rangle \\ S_-|-\rangle = 0 \end{cases}$$

Hamiltoniana con campo magnetico

Sia il campo magnetico $\vec{B} = B_z\vec{u_z}$

$$H = -\vec{M} \cdot \vec{B} = \frac{eg}{2m}\vec{S} \cdot \vec{B} = \frac{eg}{2m}S_zB$$

ove

$$\omega_0 = \frac{e_gB}{2m} \Rightarrow H = \omega_0 S_z$$

$$\begin{cases} H|+\rangle_z = \frac{\hbar}{2}\omega_0|+\rangle_z \\ H|-\rangle_z = -\frac{\hbar}{2}\omega_0|-\rangle_z \end{cases}$$

Nella visuale di Heisenberg

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{[\vec{S(t)}, H]}{i\hbar} \quad H = \gamma\vec{S} \cdot \vec{B} \Rightarrow \frac{d\vec{S}}{dt} = \gamma(\vec{B} \times \vec{S})$$

Composizione di momenti angolari

Il momento angolare totale è definito come

$$\vec{J} = \vec{S} + \vec{L}$$

In caso di sistema isolato commuta con H ed è quindi una costante del moto (non cambia nel tempo). quindi $\vec{J^2}, J_z$ e H commutano. Per $\vec{J}$ valgono le stesse proprietà che valevano per $\vec{L}$.

- ICOC 1 $\{\vec{J_1^2}, J_{1,z}; \vec{J_2^2}, J_{2,z}\}$ con autoket $|j_1, j_2; m1, m2\rangle$. Vale sia per due particelle che per $\vec{L} + \vec{S}$, ossia $|l, s; m, m_s\rangle$.

- ICOC 2 $\{\vec{J_1^2}, \vec{J_2^2}; \vec{J^2}, J_z\}$ con autoket $|j_1, j_2; J, M\rangle \Rightarrow |l, s; J, M\rangle$

Sommare due spin

due particelle di spin $\frac{1}{2} \Rightarrow H_s = H_1 \otimes H_2$ con base ortonormale $\{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}$. Tali autovettori sono autostati di $S_1^2, S_{1,z}, S_2^2, S_{2,z}$ che formano un ICOC su H_S. Ricordiamo che **Gli operatori relativi a particelle diverse commutano**. Siano $|+\rangle = \chi_+, |-\rangle = \chi_-$, allora

$$\begin{cases} S_1^2|\chi_\pm^{(1)}, \chi_\pm^{(2)}\rangle = S_2^2|\chi_\pm^{(1)}, \chi_\pm^{(2)}\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|\chi_\pm^{(1)}, \chi_\pm^{(2)}\rangle \\ S_{1z}|\chi_\pm^{(1)}, \chi_\pm^{(2)}\rangle = S_{2z}|\chi_\pm^{(1)}, \chi_\pm^{(2)}\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\chi_\pm^{(1)}, \chi_\pm^{(2)}\rangle \\ \vec{S^2} = \vec{S_1^2} + \vec{S_2^2} + 2S_{1z}S_{2z} + S_{1+}S_{2-} + S_{1-}S_{2+} \\ ICOC \Rightarrow \{\vec{S_1^2}, \vec{S_2^2}, \vec{S^2}, S_z\} \ avett \ |s_1, s_2; S, \underbrace{M}\rangle = |S, M\rangle \end{cases}$$

Le equazioni agli autovalori sono

$$\begin{cases} S^2|S, M\rangle = \hbar^2 s(s+1)|S, M\rangle \\ S_1^2|S, M\rangle = S_2^2|S, M\rangle = \hbar^2\frac{3}{4}|S, M\rangle \end{cases}$$

Da cui si deduce che tutti i vettori $|S, M\rangle$ sono **autovettori sia di S_1^2 che S_2^2**.
Dato che S_z **commuta con tutti gli operatori dell'ICOC**, i vettori della base $|\chi_\pm^{(1)}, |\chi_\pm^{(2)}\rangle$ sono **suoi autovettori**. Si ha

$$\begin{cases} S_z|++\rangle = \frac{\hbar}{2}(1+1)|++\rangle \\ S_z|+-\rangle = S_z|-+\rangle = 0 \\ S_z|--\rangle = -\hbar|--\rangle \\ S^2|\pm,\pm\rangle = 2\hbar^2|\pm,\pm\rangle \\ S^2|+-\rangle = S^2|-+\rangle = \hbar^2(|+-\rangle + |+-\rangle|) \end{cases}$$

$\boldsymbol{S^2}$ **assume solo due possibili valori**, ossia $\boldsymbol{2\hbar^2}$ oppure **0**, base completa con ICOC $\boldsymbol{\{S_1^2, S_2^2, S^2, S_z\}}$

$$|S, M\rangle = \begin{cases} |1, 1\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + |-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle) \\ |1, 1\rangle = |-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \\ |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - |-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle) \end{cases}$$

Ove noto che per le prime tre righe $S = S_1 + S_2 = 1(2\hbar^2)$ si hanno 3 autovettori e dunque è degenere. S_z risolve la degenerazione dato che $M = 1, -1, 0$, mentre l'ultima riga non è degenere.

Spin e momento orbitale $\vec{J}$

Si ha

- ICOC 1 tale che $|l, s; m, m_s\rangle$
- ICOC 2 tale che $|l, s; J, M\rangle$

Gli autovalori sono $M = m + m_s \in [-J, J]$ con $J = |l-s|, .., |l+s|$ quindi in totale si hanno $(2l+1)(2s+1)$ autovalori!

Oscillatore armonico

L'hamiltoniana dell'oscillatore armonico 1D può esser scritta come

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = -\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Se

$$H' = \frac{H}{\hbar\omega} \ , \ P' = \frac{P}{\sqrt{m\hbar\omega}} \ , \ X' = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X$$

Allora

$$H' = \frac{1}{2}(P^2 + X^2)$$

E si ha

$$H'_\psi = \frac{1}{2}(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial X'^2} + x'^2)\psi = \frac{1}{2}(P'^2 - \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial P'})\psi$$

Data la simmetria di H', la soluzione risulta **Fourier-invariante** e vale la stessa soluzione nei due spazi, ossia $c_0 = (\frac{m\omega}{\hbar\pi})^{\frac{1}{4}}$

Autovalori

$$E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$$

Autostati

Sono un **sistema ortonormale completo di** $\mathbb{L}^2$

$$\begin{cases} \psi_0(x) = c_0 \ exp(-\frac{mx^2\omega}{2\hbar}) \\ \psi_1(x) = c_0\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}x \ exp(-\frac{mx^2\omega}{2\hbar}) \\ \psi_2(x) = \frac{c_0}{\sqrt{2}}(\frac{2m\omega x^2}{\hbar} - 1) \ exp(-\frac{mx^2\omega}{2\hbar}) \\ \psi_3(x) = \frac{c_0}{\sqrt{3}}(2(\frac{m\omega}{\hbar})^{\frac{3}{2}}x^3 - 3\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x) \ exp(-\frac{mx^2\omega}{2\hbar}) \end{cases}$$

Le soluzioni sono pari per n pari e dispari per n dispari. In generale

$$\langle H\rangle_{\psi(0)} = \langle H\rangle_{\psi(t)} \quad , \quad \langle\mathcal{P}\rangle_{\psi(0)} = \langle\mathcal{P}\rangle_{\psi(t)}$$

Potenziale centrale

In potenziale centrale

$$\{\vec{L}^2, L_z, H\}$$

sono ICOC e ammettono una base di autoket comune: le armoniche sferiche sono autofunzioni di H e dunque l'evoluzione temporale, scritta in termini di autovalori di H, è unitaria e i valori di $\vec{L}^2, L_z$ restano costanti nel tempo.

Buca di potenziale infinitamente profonda

L'hamiltoniana classica è

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

Mentre quella quantistica è

$$H = -\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$$

con potenziale

$$\begin{cases} 0 & |x| < \frac{a}{2} \\ \infty & |x| \geq \frac{a}{2} \end{cases}$$

di autovalori di energia

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}(\frac{n\pi}{2a})^2$$

ed autofunzioni (sia n positivo)

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}cos(\frac{n\pi x}{a}) & n\ dispari \\ \sqrt{\frac{2}{a}}sin(\frac{n\pi x}{a}) & n\ pari \end{cases}$$

Queste **autofunzioni sono pari per n pari e dispari per n dispari**.
Lo spettro è

$$\sigma(H) = \{E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{1}{2m}(\frac{\hbar n\pi}{a})^2 \quad n \in \mathbb{N}\}$$

Probabilità di trovarsi in 0,a

$$W = \int_0^a |\psi(x;t)|^2 = \int_0^a dx\psi * \psi \tag{1}$$

Operatori di distruzione e creazione

$$\begin{cases} a = \frac{X' + iP'}{\sqrt{2}} \\ a^+ = \frac{X' - iP'}{\sqrt{2}} \\ X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^+) \\ P = i\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}(a^+ - a) \end{cases}$$

Proprietà e conti utili

$$\begin{cases} [a, a^+] = 1 \\ H' = aa^+ + \frac{1}{2} = N + \frac{1}{2} \\ [H', a^+] = a^+ \\ [H', a] = -a \\ \langle n|X|n\rangle = 0 \\ \langle n|P|n\rangle = 0 \\ \langle n|X^2|n\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1) \\ \langle n|P^2|n\rangle = \frac{2m\omega}{\hbar}(2n+1) \\ [\mathcal{P}, H] = 0 \Rightarrow \langle\mathcal{P}\rangle_{t>0} = \langle\mathcal{P}\rangle_{t=0} \\ a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \\ a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \\ aa^+|n\rangle = (n+1)|n\rangle \\ a^+a|n\rangle = n|n\rangle \\ a + a^+|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle + \sqrt{n+1}|n+1\rangle|n\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \end{cases}$$

In rappresentazione $\hat{P}$ si ha

$$\psi(P) = \langle P|n\rangle = \frac{c_n}{\alpha\sqrt{\hbar}}(-i)^n H_n(\frac{P}{\alpha\hbar})e^{-\frac{P^2}{2\alpha^2\hbar^2}}$$

Nel caso D-dimensionale:

$$H = \sum_{i=1}^{D}(\frac{P - i^2}{2m} + \frac{1}{2}\omega^2 m x_i)$$

con autovalori

$$E_n = \hbar\omega(n_1 + .. + n_D + \frac{D}{2}) = \hbar\omega(n + \frac{D}{2}\ , \quad n = \sum_{i=1}^{D} n_i$$

La degenerazione dei livelli di energia E_n è

$$d_n = \frac{(n + D - 1)!}{n!(D-1)!}$$

valgono

$$\begin{cases} [a_i, aj] = [a_i^+, a_j^+] = 0 \\ [a_i, a_j^+ = \delta_{ij}] \\ L_z = i\hbar(a_x a_y^+ - a_x^+ a_y) \quad e\ [H, L_z] = 0 \\ \langle m|x|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle m|(a + a^+)|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}[\sqrt{n}\delta_{n,m+1} + \sqrt{n+1}\delta_{n,m-1}] \\ \langle m|P|n\rangle = -i\frac{\hbar m\omega}{2}[\sqrt{n}\delta_{n,m+1} - \sqrt{n-1}\delta_{n,m-1}] \end{cases}$$

Si hanno le seguenti costanti del moto

$$\begin{cases} S_{ij} = \frac{1}{2}(a_i^+ a_j + a_j^+ a_i) \\ A_{ij} = \frac{1}{2i}(a_i^+ a_j - a_j^+ a_i) \end{cases}$$

Domini

$$D(P) = \{\psi \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}, dx)|\exists\psi' q.o. \int_a^b \psi'(x)dx = \psi(b) - \psi(a)$$

$$\forall[a, b] \ \in \mathbb{R}, \psi' \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}, dx)\}$$

$$D(x) = \{\psi \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}, dx)|x\psi \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}, dx)\}$$

per la buca infinitamente profonda in $\mathbb{R}^3$

$$D(H) = \{\psi \in H, \psi\ regolare, \psi(\pm\frac{a}{2}) = 0\}$$

Evoluzione temporale

$$U(t) = e^{-i\frac{tH}{\hbar}}$$

Nella visuale di Heisenberg

$$\psi \to \psi, A \to A^H(t) = U^+(t)AU(T)$$

$$\frac{dA^H(t)}{dt} = \frac{[A^H(t), H]}{i\hbar} = \frac{U^+(t)[A, H]U(t)}{i\hbar}$$

Quindi

$$\frac{\partial A^H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{d\langle A\rangle_\psi}{dt} = \frac{\langle[A, H]\rangle}{i\hbar}$$

Nella visuale di Shrodinger

$$\psi \to \psi(t) = U(t)\psi, A \to A$$

Traslazioni spaziali

$$U(\vec{a}) = exp(-\frac{1}{\hbar}\vec{a}\cdot\vec{P})\ , \quad \vec{x} \to \vec{x} + \vec{a}$$

$$U^+(a)xU(a) = x + a\ , \quad U(a)xU^+(a) = x - a$$

$$(U(a)\psi)(x) = \langle x|U(a)|\psi\rangle = \psi(x - a)$$

$$U(a)^+ = U(a)^-1 = U(-a)$$

Rotazioni

$$U(\phi) = e^{-i\phi\frac{L_z}{\hbar}}$$

$$U(\phi)^+ XU(\phi) = Xcos(\phi) - ysin(\phi)$$

$$U(\phi)^+ YU(\phi) = Ycos(\phi) + Xsin(\phi)$$

$$U(\phi)^+ ZU(\phi) = Z$$

Valor medio di H e problemi di dominio

Se la funzione d'onda è continua e derivabile almeno due volte (quindi $\in D(H)$) allora **il valor medio di H si può calcolare usando**

$$\langle H\rangle = (\psi, H\psi) = \int \psi * (x)(-\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x))dx$$

Se $H_\psi \notin D(H)$ (tipo non continua agli estremi) otterrei $\langle H^2\rangle = 0$ ma $E_n \simeq n^2$, $n > 0$ e la media di numeri positivi non può essere zero; il valor medio si calcola in questi caso come

$$\langle H^2\rangle = (H\psi, H\psi)\ oppure\ \langle H^2\rangle = \sum_n |c_n|^2 E_n^2$$

Valor medio X

Posso usare operatori a, a^+ oppure $\langle X\rangle_{\psi_t} = \int_D x\langle\psi_t|\psi_t\rangle$

Proprietà dei commutatori

$$[A, B] = AB - BA$$

$$[A, A] = 0$$

$$[A, B] = -[B, A]$$

Vale poi $\forall c \in \mathbb{C}$

$$[A, c] = 0$$

$$[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$$

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$$

$$[A, [B, C]] + [C[A, B]] + [B, [C, A]] = 0$$

Proiettori

Operatore parità $\mathcal{P}$

$$[H, P] = 0 \Rightarrow \langle[H, P]\rangle = 0$$

Siano ψ autofunzioni normalizzate, allora

$$\langle\psi|\mathcal{P}|\psi\rangle = \begin{cases} +1 & \psi\ pari \\ -1 & \psi\ dispari \end{cases}$$

Perturbazioni

Se mi viene data $H = H_0 + H'$ allora il termine perturbativo al primo ordine si calcola come $\langle E_n^0|H'|E_n^0\rangle$ e quella al secondo ordine $\sum_{m\neq n}\frac{|\langle E_n^0|H'|E_n^0\rangle|^2}{E_n^0 - E_m^0}$

Indeterminazioni

$\Delta H\Delta X = |\frac{\langle[X,H]\rangle}{2}|$, in generale $\Delta A\Delta B = |\ |$

Calcoli comodi

Coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = rsin\theta cos\phi \\ y = rsin\theta sin\phi \\ z = rcos\phi \end{cases}$$

Integrali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ x^n e^{-x} = n!$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ x\ sin(\beta x)e^{-\alpha^2 x^2} = \frac{\sqrt{\pi}\beta}{4\alpha}e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ x^{2n}e^{-\alpha x^2} = (-1)^n\frac{\partial^n}{\partial a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ a\,e^{-bx^2 + cx + d} = a\sqrt{\frac{\pi}{b}}e^{\frac{c^2}{4b} + d}$$

$$(F\psi)(P) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{iPx}{\hbar}}\psi(x)dx = \tilde{\psi}(P)$$

$$(F^{-1}\psi)(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{iPx}{\hbar}}\tilde{\psi(x)}dx$$

Ortogonale a uno stato

Se

$$|\psi\rangle = A(e^{i\alpha}|\psi_3\rangle + \sqrt{C}|\psi_2\rangle)$$

Allora l'ortogonale ad esso è

$$|\psi_\perp\rangle = A(e^{\cdot i\alpha}|\psi_2\rangle - \sqrt{C}|\psi_3\rangle)$$

Notazione BraKet e proprietà

Se

$$|\psi\rangle = Ae^{\frac{i\omega}{2}}|\psi_0\rangle$$

allora

$$\langle\psi| = Ae^{-\frac{i\omega}{2}}\langle\psi_0|$$

$$|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\beta\rangle + |\alpha\rangle$$

$$a(|\alpha\rangle + |\beta\rangle) = a|\alpha\rangle + a|\beta\rangle$$

$$\langle\beta|c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2\rangle = c_1\langle\beta|\alpha_1\rangle + c_2\langle\beta|\alpha_2\rangle$$

$$\langle c\beta|\alpha\rangle = c^*\langle\beta|\alpha\rangle$$

la definizione di norma è

$$\|a\| = \langle a|a\rangle$$

$$\langle\psi|\phi\rangle = \sum \psi_i^*\phi_i$$

Un operatore agisce come

$$A|\phi\rangle = \sum_{ij}|e_i\rangle\langle e_i|A|e_j\rangle\langle e_j|$$