

Riassunti del corso di Fisica Nucleare e Subnucleare

Aurora Leso

June 2021

Contents

1	Disclaimer	1
2	Fisica Nucleare	2
2.1	Ripasso	2
2.1.1	Potenziale centrale	2
2.1.2	Momento angolare	2
2.2	Unità e proprietà	2
2.2.1	Definizioni all'interno del nucleo	2
2.2.2	Massa nell'atomo	3
2.2.3	Carta dei nuclidi	4
2.3	Modelli	5
2.3.1	Modello a gas di Fermi	5
2.3.2	Modello a goccia di liquido	6
2.3.3	SEMF	7
2.3.4	Deutone	8
2.3.5	Modello a Shell	9
2.3.6	Modello a shell atomico	9
2.4	Modello a shell nucleare	9
2.4.1	Modello collettivo	10
2.5	Schema riassuntivo per i modelli nucleari	11
2.6	Reazioni nucleari	12
2.6.1	Fissione nucleare	12
2.6.2	Fusione nucleare	13
2.7	Decadimenti	14
2.7.1	Alpha	14
2.7.2	Beta	16
2.7.3	Gamma	19
2.8	Interazione radiazione-materia	20
2.8.1	sezione d'urto	20
2.8.2	Radiazioni EM	20
2.8.3	Particelle cariche	20

1 Disclaimer

2 Fisica Nucleare

2.1 Ripasso

2.1.1 Potenziale centrale

Se un potenziale $V(\vec{r})$ è tale che $V(\vec{r}) = V(r)$, $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ allora posso dividere l'Hamiltoniana in parte radiale + angolare, risolvendo il problema studiando una soluzione fattorizzata in parte radiale ad angolare del tipo $\Psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$ dove abbiamo riconosciuto in queste ultime le armoniche sferiche, ortogonali tra loro e la cui forma analitica dipende dai polinomi di Legendre e hanno parità $PY = (-1)^l Y$ dove si è ridotta la notazione da Y_{lm} a Y e basta. l, m sono **numeri quantici**, in particolare l è il **numero quantico orbitale** ed m è il **numero quantico magnetico**, che va da $-l$ a $+l$ per passi interi, essi vanno a caratterizzare gli autovalori del momento angolare.

2.1.2 Momento angolare

Ricordando come definiamo l'operatore T in campo centrale, ossia

$$T = \frac{\vec{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \underset{\text{coord sfer}}{=} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\vec{L}^2}{r^2} \right] \quad (1)$$

ho che $\vec{p}^2 = \vec{p}_r^2 + \frac{\vec{L}^2}{r^2}$. Questo operatore \vec{L} è il **momento angolare orbitale** e le sue componenti sono descritte da operatori differenziali (\vec{L}_i con i da 1 a 3, che sono tutte quantizzate e di spettro $m\hbar$) nelle componenti $(\theta, \phi) \in S^2$, che soddisfano l'algebra di Lie di $SO(3)$ e per cui i commutatori valgono

$$[L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k \quad [\vec{L}^2, L_i] = 0 \quad \forall i \quad (2)$$

Dal secondo commutatore evinco che posso trovare autofunzioni comuni a \vec{L}^2, L_i che sono proprio le armoniche sferiche.

I momenti angolari $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ si compongono secondo la relazione $|l_1 - l_2| \leq l \leq |l_1 + l_2|$.

2.2 Unità e proprietà

2.2.1 Definizioni all'interno del nucleo

Ricordiamo subito una relazione fondamentale, ossia $1eV = 1.6022 \cdot 10^{-19} J$.

Collocando centralmente il nucleo atomico, di $r \propto fm = 10^{-15}$, $E \simeq 8MeV$, ad energie inferiori troviamo gli **stati eccitati** mentre ad energie maggiori abbiamo i **gradi subnucleari**.

Utili le seguenti tabelle

Ordini di grandezza		
-	Scala nucleare	Scala atomica
Lunghezza	$fm (= 1 \times 10^{-15} m)$	$\text{\AA} (= 1 \times 10^{-10} m)$
Energia	MeV	eV
Conversioni utili		
$\hbar c$	$197.327 MeV fm$	$1973.27 eV \text{\AA}$
$e^2/4\pi\epsilon_0$	$1.44 MeV fm$	$14.4 eV \text{\AA}$

Particella	Massa (MeV/c^2)	Carica (e)	Spin (s)	Raggio ($\sqrt{\langle r_c^2 \rangle}$)	Vita media
Elettrone (e)	0.510998	-1	1/2	?	∞
Protone (p)	938.272	+1	1/2	$\sim 0.87 fm$	∞
Neutrone (n)	939.565	0	1/2	$\sim -0.1 fm$	$\sim 15 min$

Tutte e tre le particelle sopra elencate sono **fermioni** dato che hanno spin semintero. Interessante notare che l'elettrone ha raggio che si prospetta nullo, il protone certo fino al secondo decimale e il neutrone ha raggio negativo poichè ha carica complessiva nulla e deve esser fatto da componenti non neutre disposte in modo eterogeneo: pesando per carica i componenti, il raggio medio viene minore di zero. Vita media infinita di p ed e indicano che sono stabili, mentre il neutrone decade spontaneamente in protone+ altre cose. **Protoni e neutroni sono chiamati nucleoni**, e hanno massa molto simile.

Un elemento X della tavola periodica si indica come

$${}^A_Z X_N$$

Con A numero di massa pari a somma di protoni e neutroni, N numero di neutroni e Z numero di protoni, dunque $A=Z+N$.

2.2.2 Massa nell'atomo

In ogni processo nucleare vale la legge di conservazione per la carica q , per l'energia complessiva E e quindi per la massa m , e per il momento angolare \vec{J} nelle sue componenti orbitale e di spin.

Utile definire la **densità numerica di materia**, ossia il numero di massa A rapportato al volume di una sfera con raggio r , dunque si ha $\int \int_0^\infty \rho_m(r) r^2 dr d\Omega = A$, generalmente espressa in fm^{-3} e ha profilo

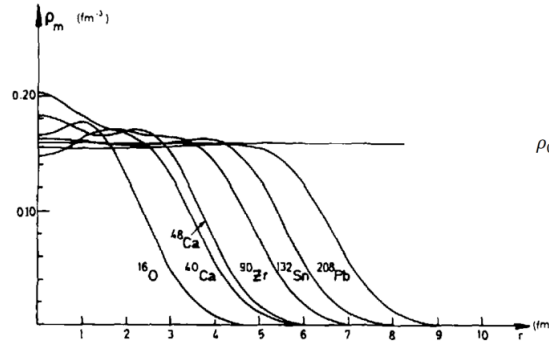


Figura 1.2: Profilo della densità di massa

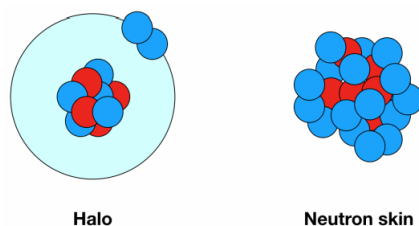
studiato mediante **electron scattering**, e si nota che

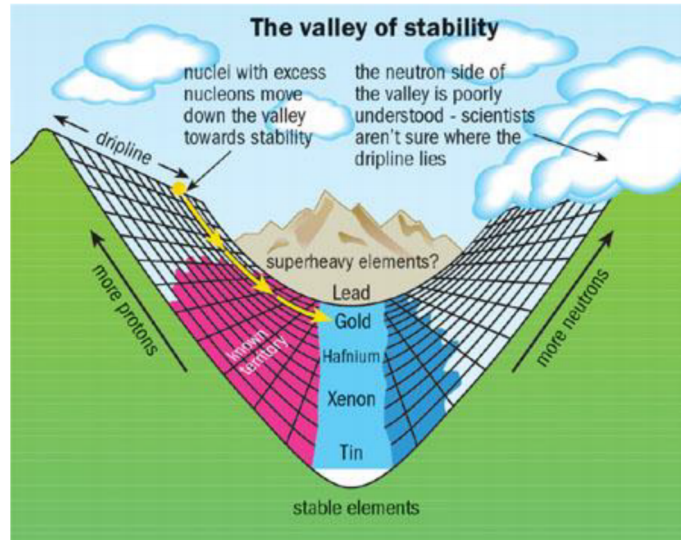
- A piccole distanze dal centro è costante, **densità di saturazione** e per ogni elemento $\rho_0 \simeq 0.15 - 0.2 \text{ fm}^{-3}$
- la pendenza di decrescenza è circa uguale per ogni elemento
- vale la **relazione di fermi** $r = r_0 \sqrt[3]{A}$, $r_0 \simeq 1.2 \text{ fm}$ dove r è la distanza dal centro del nucleo per cui la densità numerica è dimezzata rispetto al valore di saturazione. Aspettandoci $V \propto A$ dato che sperimentalmente per ogni A ho $\rho_0 \simeq \frac{A}{V}$ costante, allora $r \propto \sqrt[3]{A}$.

Si indica con **funzione di fermi** la Funzione $F(r) = \frac{1}{1+e^{r-r_0/a}}$ che si può parametrizzare per usarla nelle densità, ottenendo $\rho_m(r) = \frac{\rho_0}{1+e^{r-r_0/a}}$ dove ricordiamo che ρ_0 era la densità di saturazione.

Infine definiamo la **diffusività** come il parametro a che ci è uscito nell'equazione sopra, caratteristico di ciascun elemento e che è **indice di quanto rapidamente la densità vada a zero**, e si ha $\lim_{a \rightarrow 0} \rho_m(r) = \rho_0 \Theta(r_0 - r)$ dove ricordiamo che $\Theta(r)$ è la funzione di Heaviside. Due casi limite sono

- Effetto alone (**Halo**) per cui in nuclei leggeri la densità protonica va a zero velocemente mentre quella neutronica va giù più lenta, generando una zona di qualche femtometro dove ci sono solo neutroni sparsi.
- Effetto di pelle neutronica (**Neutron skin**). Per elementi pesanti si possono avere molti più neutroni che protoni, ma la densità centrale di saturazione è circa fissa e i neutroni in eccesso vanno a depositarsi sulla superficie nucleare creando una pelle neutronica che avvolge il nucleo.





Salendo i pendii la stabilità diminuisce, fino ai bordi detti **drip lines** di protone(superiore, sx, ben mappata) o neutrone(inferiore, dx, più fumosa) fatte dalle configurazioni nucleari per cui l'energia di separazione protonica o neutronica è nulla, determinanti il confine tra configurazioni di energia di legame positiva e quelle ignote al di fuori delle quali i nucleoni non sono tenuti assieme.

2.3 Modelli

2.3.1 Modello a gas di Fermi

E' un modello **statistico/quantistico a particelle indipendenti**, corretto in buona approssimazione soprattutto per A alto. Si basa sulle ipotesi

- Particelle costituenti il gas sono fermioni di spin $\frac{1}{2}$
- ogni nucleone subisce il potenziale di interazione generato dagli altri A-1 in forma di buca di potenziale 3D a simmetria sferica con larghezza pari al diametro nucleare
- il gas è quantistico e degenere: si suppone l'energia cinetica media delle particelle sia molto maggiore dell'energia termica ambientale, dunque i nucleoni non possono raggiungere stati eccitati e le particelle occupano gli stati a più bassa energia concessa.

Ricordiamo i risultati che abbiamo sulla **buca di potenziale 1D infinita**:

- Hamiltoniana

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \quad (3)$$

con potenziale nullo in $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ e infinito altrove

- Autovalori $E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ e autofunzioni

$$\Psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) & n \text{ dispari} \\ \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) & n \text{ pari} \end{cases} \quad (4)$$

Per generalizzare al caso 3D si ha semplicemente $E_n = E_n^x + E_n^y + E_n^z = \frac{\hbar^2}{8ma^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$ e come si nota per diverse combinazioni dei cari n_i posso ottenere gli stessi autovalori, ho dunque **stati isoenergetici** che posso considerare degeneri.

Immaginiamo ora di trattare gli n_i come un insieme continuo e definiamo $\rho(E)$ densità di stati che integrata in un certo range mi dia il numero di stati $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ che corrispondono a tali energie. Chiaramente, il numero di stati per un certo E è il **volume nel primo ottante del guscio sferico n-dimensionale di raggio n e spessore dn** $dN(E) = \frac{4\pi n^2 dn}{8}$ ma $E_n = \frac{\hbar^2}{8ma^2} n^2 \Rightarrow n dn = \frac{4ma^2}{h^2} dE$.

Ricordando che la funzione d'onda deve stare entro il volume della buca (a^3) e che la particella sta nel nucleo (di volume $\propto A$), allora $\rho(E)dE = dN(E) = V \frac{2^{\frac{5}{2}} m^{\frac{3}{2}} \pi}{h^3} \sqrt{E} dE$ quindi

$$\rho(E) \propto A\sqrt{E} \quad (5)$$

in termini di quantità di moto, poichè $E = \frac{p^2}{2m}$ allora $\rho(p) \propto Ap^2$. **Ma non sto considerando lo spin!** Poco male, basta aggiungere un fattore 2 davanti a dN.

Dato che nel nucleo ci sono A particelle e che per ogni livello di energia E_n ci sono 4 nucleoni (2p e 2n) allora il numero esatto di stati riempiti è pari al numero di particelle nel nucleo e ci sarà un valore massimo di energia, detta **energia di Fermi** E_F , con momento di Fermi associato $p_F = \sqrt{2mE_F}$. Questi rappresentano l'estremo superiore nell'integrazione del dN per il calcolo degli stati totali, infatti

$$Z(A - Z \text{ per neutronico}) = 2 \int_0^{p_F} \rho(p) dp = \frac{4}{9\pi} \frac{r_0^3}{h} A p_F^3$$

da cui invertendo trovo p_F^p e p_F^n nel caso rispettivamente protonico e neutronico. Dalle relazioni trovate si vede subito che ho dipendenza da $\frac{2Z}{A}$ per proton e $\frac{2(A-Z)}{A}$ per neutron, quindi nella valle di stabilità $Z \simeq N \simeq \frac{A}{2}$ quindi quei termini valgono 1 e il momento di Fermi, non dipendendo da essi, vale $\simeq 240 \text{ MeV}/c$ con $E_F \simeq 30 \text{ MeV}$. Per nuclei fortemente sbilanciati, la differenza tra energia di fermi neutronica e protonica c'è ma si aggira sui 4 MeV .

Per raffinare la trattazione, consideriamo ora la buca **finita**, con pareti alte $V_0 > E_F$. Definiamo

- **Energia di separazione protonica/neutronica** come l'energia da fornire ad un nucleo per liberare un protone o un neutrone, che sarà pari alla differenza di energia in massa del nucleo prima e dopo la rimozione del nucleone;
- **Binding energy** come la somma di tutti i contributi energetici necessari per tenere insieme i nucleoni e stabilizzare il nucleo, il cui valor medio si indica con B/A . E' circa costante per $A > 40$ ed è circa $7 - 8 \text{ MeV}$

queste due energie sono legate dalla relazione

$$S_P(A, Z) = B(A, Z) - B(A - 1, Z - 1) = \Delta B \quad (6)$$

Ed è lecito pensare che la buca sia finita con larghezza il diametro nucleare e altezza $V_0 = E_F + \frac{B}{A} \simeq 40 \text{ MeV}$.

Supponiamo che il numero di protoni sia poco meno della metà, scrivendolo in funzione di una x abbastanza piccola da farci sviluppare con Taylor possiamo espandere il valor medio dell'energia, calcolato come

$$\langle E_k \rangle = \frac{\int dN}{\propto} \frac{2Z}{A}^{\frac{5}{3}} + \frac{2(A-Z)}{A}^{\frac{5}{3}} \quad (7)$$

Gli ultimi termini si possono sviluppare come $(1-x)^{\frac{5}{3}}$ e $(1+x)^{\frac{5}{3}}$ trovando **un minimo a $2Z=A$** . Dunque mi aspetto che nuclei con $N=Z$ siano favoriti e ciò è una conseguenza diretta del principio di esclusione di Pauli. Imponendo la condizione di minimo trovo $\langle E_K \rangle \simeq 20 \text{ MeV}$, $\langle p \rangle \simeq 200 \text{ MeV}/c$. Riprendendo ora il Numero di stati trovati come integrazione di $\rho(p)dp$, vediamo che è pari al numero di nucleoni e che il fattore moltiplicativo se ignoriamo la differenza tra neutroni e protoni è sempre 4 (2 spin, 2 isospin) allora si semplifica A e trovo, invertendo, $p_F c = \underbrace{\left(\frac{A}{V}\right)^{\frac{1}{3}}}_{\rho_0} \left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \hbar c = \rho_0^{1/3} \left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{1/3} \hbar c$

2.3.2 Modello a goccia di liquido

E' un modello collettivo.

Identifichiamo il nucleo con una sfera di densità uniforme dentro e che si azzera in superficie. Supponiamo che

- esista un raggio minimo r_{int} tale per cui possiamo trascurare le interazioni tra particelle oltre esso. Quindi l'energia di legame è attrattiva a corto raggio, repulsiva per brevissime distanze e trascurabile oltre questo raggio di interazione.

- la materia nucleare sia incompressibile e che sussista una relazione lineare tra numero di portatori di massa A e il volume V
- l'energia di legame sia costante per nucleone, cosa che vogliamo dato che sperimentalmente si trova che la Binding energy è circa costante attorno agli 8 MeV per $A > 40$.

2.3.3 SEMF

La **formula semi empirica di massa** permette di esprimere la binding energy in funzione di alcuni parametri stimabili attraverso opportuni fit. Si compone di

- Termine di Volume. L'energia di legame complessiva è la somma delle energie che vincolano ciascun nucleone agli altri, dunque $B \propto A^2$. Ma l'energia di legame dovrebbe dipendere linearmente da A , ma grazie all'ipotesi di interazione a corto raggio $B = \frac{1}{2} \sum_{r < r_{int}} \langle U \rangle \propto A$ come voluto. Dunque questo contributo è

$$B_V = a_V A \quad (8)$$

ed è l'**unica energia legante**. Sperimentalmente $a_V \simeq 16 \text{ MeV} > 8 \text{ MeV}$ dunque mi attendo che gli altri contributi vadano ad abbassare questo risultato

- Termine di superficie. Geometricamente, i nucleoni in superficie sono legati a meno altri nucleoni dato che hanno meno particelle a distanza utile di interazione. Dato che il raggio nucleare è proporzionale alla radice cubica di A e la superficie scala come il raggio al quadrato,

$$B_S = -a_S A^{2/3} \quad (9)$$

- termine di Coulomb. Considerando che i protoni sono carichi, questi si respingeranno l'un l'altro favorendo la loro separazione e diminuendo l'energia di legame. Assumendo una distribuzione di carica uniforme nel nucleo, allora $\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3}$. Ma ad \vec{E} possiamo associare $u_E = \frac{\epsilon_0}{2} E^2$ densità di energia, possiamo trovare con Gauss quanto vale E e sommando le componenti avrò $U_E = \int u_E = \frac{3(Ze)^2}{20\pi\epsilon_0 R}$, contributo energetico **dipendente dalla carica e da $R \propto \sqrt[3]{A}$** . Questo termine avrà la forma

$$B_C = -a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad (10)$$

- termine di (a)simmetria. Allontanandosi dalla valle di stabilità i nuclei hanno energia di legame sempre minore: quindi se ho asimmetria tra numero di protoni e neutroni mi aspetto un contributo negativo alla binding energy. Possiamo distinguere in un contributo **di energia potenziale** e di **energia cinetica**.

Per il **contributo di energia potenziale**, distinguendo l'energia di interazione pp da nn da pn, e sperimentalmente si trova che quella tra nucleoni diversi è due volte quella tra nucleoni uguali. Ma sapevamo che la forza nucleare non dipende dalla carica, quindi non dovrebbe cambiare: tuttavia, dal punto di vista quantistico, sono fermioni a due stati di spin che non possono, per Pauli, condividere lo stesso autospazio di posizione e di spin (non avrò due p vicini con spin paralleli). Ma un p e un n possono star più vicini accoppiandosi per formare un sistema a $S=0$ (singlet) o $S=1$ (triplet), che sono quindi 4 canali diversi cosa che raddoppia il fattore di interazione.

Per il **termine cinetico** tornando al modello a gas di Fermi, ipotizziamo che attorno ad E_F i livelli energetici siano tutti equi spazati. Ponendo vicine le due buche di potenziale per p ed n, se voglio spostare due protoni nella buca dei neutroni devo occupare il livello superiore a quello già occupato, facendo fare un salto di ΔE a ogni protone, e per A fissato serve $E = \frac{(N-Z)^2}{8} \Delta E$ ma $\Delta E \propto \frac{dN}{\sqrt{E_F V}} \Rightarrow E = a \frac{(N-Z)^2}{A}$ con a costante. Ha la forma di quello del contributo potenziale! Concludiamo che **più asimmetria mi dà meno stabilità** e il contributo alla binding energy per l'asimmetria è

$$B_a = -a_a \frac{(N-Z)^2}{A} = -a_a \frac{(A-2Z)^2}{A} \quad (11)$$

- termine di Pairing. Legato a fenomeni sui **nuclei isobari**, sia ha che **per A dispari il profilo della Binding energy è una parabola, mentre per A pari sono due distinte**. Dobbiamo considerare infatti che tra due nucleoni si ha un' *interazione residua* che favorisce l'accoppiamento di particelle a

spin opposto per dare $S=0$. Nel caso più favorevole, detto **even-even**, per ogni nucleone si ha uno di spin opposto da accoppiare (A pari, N e Z pari); Se si ha A dispari (Z pari ed N dispari o viceversa), caso **odd even**, vi è un nucleone spaiato, mentre per A dispari, Z e N dispari, **odd-odd**, abbiamo accoppiamento n - p .

Questo porta ad un contributo

$$B_P = a_P f(A) \quad (12)$$

con $f(A)$ ancora ad oggi discussa, momentaneamente setta a $\pm \frac{1}{\sqrt{A}}$ mentre a_P è 12 MeV per even even, -12 MeV per odd-odd, 0 per odd-even.

Capiti i contributi, ipotizziamo ora che la massa nucleare sia la somma delle masse dei nucleoni cui viene sottratta la massa che ($E = mc^2$) serve per legare i nucleoni tra loro: allora possiamo stimare la massa totale del nucleo come $M(A, Z) = Zm_p + (A - Z)m_n - B(A, Z)$. Plottando i risultati, si vede che si hanno eccessi di stabilità sperimentale per i nuclei magici, ma il massimo della curva coincide con il massimo sperimentale che si ha per $A \sim 60$.

Notiamo poi che la massa nucleare per A fisso ha la forma di una parabola verso l'alto, detta **parabola di massa**:

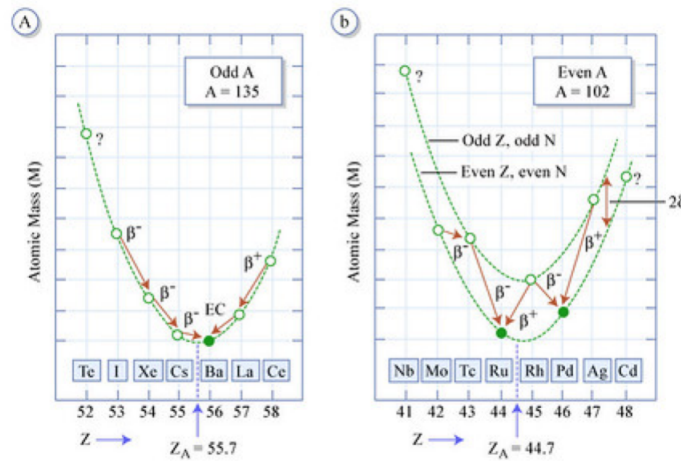


Figura 2.5: Massa nucleare in funzione di Z per A fissato dispari (a) e pari (b).

Guardando quella a sinistra, nel caso A dispari, noto subito che al crescere di Z si ha sovrabbondanza di protoni, dunque nuclei instabili che tenderanno a tornare verso il minimo trasformando protoni in neutroni (β^+ decay), mentre a sinistra dove ho meno protoni succede il contrario (β^- decay). Z_0 è **unico valore di isobaro stabile** e ogni altro isobaro evolve spontaneamente verso di lui, come conseguenza della SEMF. Più è grande il salto di energia, più veloce sarà il β decay. Guardiamo ora il caso a destra, con A pari. Abbiamo due parabole di energie diverse. Vediamo subito che il termine di pairing assume valori differenti per Z pari (E minore) o dispari (E maggiore), shiftando verticalmente i punti: quindi avremo dei salti tra le due parabole, e potrebbe esserci uno stato diverso dal minimo per il quale effettuare un decay sarebbe meno conveniente. Si evince subito che **non si hanno isobari stabili con Z dispari dato che ci sarà sempre un isobaro pari ad energia inferiore**, con eccezione per alcuni nuclei molto leggeri dove l'accoppiamento è significativo e le parabole sono molto vicine.

2.3.4 Deutone

E' il più piccolo (e unico stabile in natura) sistema legato di due nucleoni; ha energia di legame molto più piccola degli altri ($\simeq 2.224 \text{ MeV} \Rightarrow B/A = 1 \text{ MeV}$).

Matematicamente, ho sei coordinate per descrivere le particelle: togliendo i 3 vincoli per le traslazioni e 2 per le rotazioni, mi trovo con un grado di libertà. Potrò quindi descrivere il tutto in base alla distanza relativa tra i due nucleoni. Definendo il raggio del CM come metà della somma dei due raggi relativi di protone e neutrone, e la posizione relativa come differenza tra i due, ho Hamiltoniana $\hat{H} = \frac{\vec{P}_p^2}{2m_p} + \frac{\vec{P}_n^2}{2m_n} + V(\vec{r}_n, \vec{r}_p) = \frac{\vec{P}_C^2}{2M} + \frac{\vec{P}_r^2}{2\mu} + V(|\vec{r}_r|)$ con potenziale centrale: posso quindi separare energia del Centro di massa da energia nel

sistema del centro di massa, separando le autofunzioni per energia nel cm in radiale ed angolare (armoniche sferiche) ottenendo

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \underbrace{[V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}]_{V_{eff}}}_{V_{eff}} u(r) = E u(r)$$

Ricordando che voglio un potenziale a corto raggio, nel modello di Fermi con buca finita avrò equazione di Shrodinger sinusoidale nella buca e decadrà esponenzialmente fuori, dato che le soluzioni dell'equazione differenziale sono vincolate ad annullarsi a zero (no compenetrazione particelle) e infinito (nuclei comunque legati) oltre che debbano esser continue sul bordo della buca. Vediamo dunque che ho probabilità non trascurabile di avere un r fuori dalla buca, cioè p e n più distanti del raggio nucleare. Ovviamente, per $l=0$ ho lo stato fondamentale e trovo la soluzione annullando il potenziale centrifugo, oltre che cercando $E_j=0$ dato che voglio stati legati.

2.3.5 Modello a Shell

Ispirato alla fisica atomica, è un **modello quantistico** ove si hanno elettroni su gusci di valenza a diverse distanze dal nucleo, deriva dall'evidenza sperimentale che i nuclei magici hanno più stabilità di quanto previsto dalla SEMF. Tratta le interazioni tra tutti i nucleoni in campo medio, vedendo il core formato da A-1 nucleoni e aggiungendo l'A-esima particella con vettore posizione \vec{r} vedendo come interagiscono i due sotto effetto del campo medio $U(\vec{r})$ dato dalla somma delle interazioni tra tutti gli altri nucleoni. Si studia così una H a soli tre gradi di libertà della particella A-esima, e questo modello ci permette, a differenza di quello di Fermi, di avere info anche su alcuni stati eccitati.

2.3.6 Modello a shell atomico

Osservando i dati sperimentali, si vede che l'energia di ionizzazione cresce fino ad un massimo relativo, per poi decrescere repentinamente fino a un minimo relativo e poi ripetere lo schema: i picchi di stabilità sono in corrispondenza dei **gas nobili**, che immediatamente vediamo corrispondere ai nuclei magici.

Altra proprietà è che relazionando la soluzione all'equazione agli autovalori con la densità di carica radiale, che è la probabilità di trovare un elettrone ad una certa distanza dal nucleo, si vedono dei chiari picchi a valori di r corrispondenti al raggio medio dei gusci di valenza di vari livelli energetici. Ma per fare l'analogia con il nucleo devo ricordare che non abbiamo una specie ma due, p e n, e che l'equivalente dell'energia di ionizzazione è l'energia di legame protonica o neutronica, molto più grande della prima (10^5) ed è diversa per ogni isotopo, mentre la prima è definita solo sulla base di Z.

Vediamo sperimentalmente che

- in gruppi di nuclei isobari si hanno, per l'energia di legame, dei picchi sui nuclei magici, una decrescenza rapida e poi dei trend id salita e discesa come per l'energia di ionizzazione;
- Per nuclei even-even, esiste sempre un isotopo con N e Z magici tale che la differenza di energia tra stato fondamentale e primo stato eccitato è tanto più grande rispetto agli altri isotopi
- la sezione d'urto neutronica, che quantifica la propensione di un nucleo ad accogliere un neutrone ed è proporzionale alle dimensioni del nucleo stesso, per i numeri magici è molto minore rispetto ai nuclei vicini, cosa che evidenzia ancora la loro stabilità

Mi aspetto dunque un analogia!

2.4 Modello a shell nucleare

Definiamo **numero di fononi** il numero di **oscillazioni elementari**, o **modi normali**, del sistema quantistico in esame.

Mettiamoci in un potenziale 3D armonico, approssimandolo attorno al minimo come una buca parabolica di autovalori $E_n = (N + \frac{3}{2})\hbar\omega$ per sistemi di stessa *rigidità*, ossia con stesso $k = \mu\omega^2$. Chiaramente, per diverse combinazioni di n_i posso avere stesso autovalore e mi aspetto ci sia dunque una degenerazione energetica di tipo dimensionale. Passando in coordinate polari è facile vedere che la degenerazione è

$$\sum_l 2(2l+1) = (N+1)(N+2) \quad (13)$$

Che ci porta ad avere uno spettro dell'oscillatore armonico 3D del tipo

N	n	ℓ	Deg.	Tot. stati $E \leq E_N$
0	0	0	2	2
1	0	1	6	8
2	0 1	2 0	12	20
3	0 1	3 1	20	40
4	0 1 2	4 2 0	30	70
5	0 1 2	5 3 1	42	112

Ove ad ogni N si associa una shell che può contenere tanti nucleoni quanta la degenerazione. Notiamo che il numero di posti disponibili all'inizio sono i primi numeri magici: significa che indicano il numero di nucleoni che riempiono completamente i livelli energetici di $N=1,2,3$. Poi però si devia da questo standard: significa che le nostre ipotesi vanno bene solo vicino al minimo del potenziale, dove approssimarlo a una parabola è sensato. Per migliorare le stime usiamo un potenziale di **Woods-Saxon**:

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + \exp(\frac{r-R}{a})} \quad (14)$$

che è a *profilo di fermi* ed è proporzionale alla densità, cioè per grandi distanze dal nucleo la particella quasi non è interagente (per densità nulla potenziale nullo) e per r piccolo la particella sarà verso il centro del nucleo, stabilmente legata agli altri nucleoni, mentre nel mezzo si avrà una crescita più o meno rapida a seconda della dimensione del nucleo (nucleo più grande implica buca più dolce perchè mi aspetto più lunga interazione con nucleoni del core). A questo potenziale va aggiunto poi un contributo che interessi la repulsione protonica, oltre allo **spin-orbita**. Di fatto, i nucleoni a spin non nullo interagiscono con il moto relativo dei protoni attorno ad essi che genera un campo magnetico che a sua volta porta ad uno splitting delle righe spettrali, rimuovendone la degenerazione. E' un contributo positivo per $\vec{S} \parallel \vec{L}$, nullo se $l=0$ e negativo altrimenti.

Due utili definizioni sono quella di

- shell: livello energetico associato all'autovalore E_N a meno di correzioni S-O. Sono distinte da salti energetici dell'ordine dei 10 MeV.
- subshell: raggruppamenti di sottolivelli energetici ben individuati dalle correzioni S-O che distano tra loro $\sim 1\text{MeV}$. Può essere un singolo livello di particella singola o più livelli energeticamente molto prossimi.
- livelli di particella singola: singoli sottolivelli in cui si può collocare un nucleone.

Ora capiamo che è facile muoversi tra le subshell piuttosto che saltare ad uno stato successivo visto che serve molta più energia, e dunque viene giustificata la stabilità dei gusci.

Questo modello è molto funzionale per stato fondamentale e un sottoinsieme di livelli eccitati dei nuclei. Chiamiamo **chiusa** una shell che contiene il massimo dei nucleoni che può ospitare, e ha **momento angolare totale nullo**, dato che nel sottolivello si hanno $(2j+1)$ particelle e per ognuna c'è quella con m_j di segno opposto. La stabilità di un guscio completo si manifesta anche nella sua scarsa interazione con un campo magnetico. Estendendo il ragionamento, si ha che **per un nucleo con nucleoni che riempiono tutte le shell meno una, nella quale c'è un solo nucleone o le manca un nucleone per esser chiusa, è univocamente determinato valore e parità del suo momento angolare totale.** Nel caso le shell occupate siano tutte chiuse e non contribuiscono al J totale, nel caso ci sia un solo nucleone fuori dalle shell chiuse esso è l'unico disaccoppiato e quindi unico a spostare j dallo zero, nel caso manchi un solo nucleone per chiudere la shell qualunque sia il valore di m_j del nucleone che non ha la particella in grado di compensarlo, il valore di j è dato dallo stato occupato e lo stesso varrà per la parità.

2.4.1 Modello collettivo

Ha l'obiettivo di studiare **le prime eccitazioni del nucleo attraverso la sua geometria, trattandolo come un insieme e supponendo dunque che tutti i nucleoni partecipino simultaneamente ai**

modi vibrazionali del nucleo. Ipotizzo di avere il nucleo uguale ad una goccia di liquido estremamente denso e incompressibile, tale da avere una forma all'equilibrio.

Dobbiamo studiare dunque un'Hamiltoniana corrispondente a una goccia di fluido sollecitata che vibra, e i modi di vibrazione saranno quantizzati. Ricordando che la più semplice deformazione di una sfera è un solido con due proiezioni ellittiche ed una circolare, si avranno due semiassi di lunghezza uguale ed uno di lunghezza diversa (mettiamolo lungo z). Se quello su z è più lungo, il solido è **un ellissoide prolato**, al contrario si dice **ellissoide oblatto**.

Partendo dunque dalla parametrizzazione basic di una sfera, $R(\theta, \phi) = R_0 = \text{const}$, posso generalizzarla a un qualsiasi ellissoide aggiungendo termini correttivi in funzione delle armoniche sferiche del tipo

$$R(\theta, \phi) = R_0(1 + \alpha_{00}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda, \mu}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) Y_{\lambda}^{\mu}(\theta, \phi)) \quad (15)$$

Dove ipotizziamo subito $\alpha_{00} = 0$ per preservare il volume della sfera, dato che la nostra goccia non è comprimibile. Per gli altri contributi

- $\lambda = 1$ corrisponde a traslazioni spaziali, trascurati dato che riguardano eccitazioni estrinseche
- $\lambda = 2$ corrisponde a **vibrazione quadrupolare**, cioè fluttuazione come contrazione e dilatazione della sfera lungo gli assi principali
- $\lambda = 3, 4$ sono correzioni ottupolari, esadecupolari ecc. corrispondenti a deformazioni su assi secondari.

Nel caso di nuclei **even-even**, ove ci aspettiamo una simmetria per scambio di particelle, possiamo fermarci a $\lambda = 2$ e fare uno studio decente (pg xlvii).

2.5 Schema riassuntivo per i modelli nucleari

- **Modello a gas di Fermi:** tratta il nucleo come gas di particelle quantistiche che occupano stati energetici discreti degeneri nel modello della buca di potenziale infinita o finita, raffinando i conti. La natura fermionica garantisce che due sole particelle possano condividere lo stesso livello energetico. L'energia termica è trascurabile e dunque tutti i nucleoni occupano gli stati energetici ad energia più bassa, fino a quella massima che chiamiamo energia di Fermi. E' un **modello statistico** che ci permette di trovare che l'energia media dei nucleoni ha ordine di grandezza del MeV.
- **Modello a goccia di liquido:** modello collettivo che descrive l'insieme dei nucleoni come molecole in un fluido soggette a interazioni a corto raggio (alla Van der Waals) ipotizzando che energia media e densità siano uniformi. Nasce da osservazioni sperimentali.
- **SEMF:** formula che permette di approssimare bene l'energia di legame del nucleo partendo dai suoi costituenti. Consta di termine di volume (conta effetto della forza nucleare a corto raggio), termine di superficie (conta la minor interazione dei nucleoni esterni), termine di Coulomb (conta la repulsione elettrostatica p-p), termine di asimmetria (conta la diversa intensità tra interazioni pp piuttosto che nn piuttosto che np), termine di pairing (segno indefinito, conta la possibilità che p ed n possano accoppiarsi con nucleoni uguali, aumentando o diminuendo la simmetria)
- **Deutone:** presenta un unico stato legato. Si studia l'Hamiltoniana cambiando le coordinate e riducendo il problema da 6 a 1 coordinata, la differenza di posizione tra n e p, in ipotesi di potenziale centrale. Si usa una buca di potenziale finita in altezza e larghezza pari al raggio del Deutone stesso. **DA FINIRE**
- **Modello a shell nucleare:** vedendo che i nuclei magici sono più stabili delle predizioni della SEMF, analogamente al caso di modello a shell per l'atomo si studia l'effetto del potenziale generato dal core sull'ultimo nucleone rimasto, ipotizzando inizialmente potenziale armonico e poi della forma di Woods-Saxon aggiungendo il contributo di spin orbita .
- **Modello collettivo:** studia i primi livelli energetici del nucleo trattandolo come una goccia densa di fluido la cui geometria oscilla attorno alla forma sferica di equilibrio. Per l'Hamiltoniana si parametrizza con coordinate generalizzate ed armoniche sferiche. **DA FINIRE**

2.6 Reazioni nucleari

2.6.1 Fissione nucleare

Avviene per nuclei pesanti ($A > 60$) nei quali l'energia di legame scende rispetto al massimo; non avviene tuttavia per tutti i nuclei pesanti a causa della **barriera di fissione**, una barriera di potenziale ($\sim 6\text{MeV}$ per $A = 240$) *geometrico* che si crea nella deformazione di un sistema sferico e che cresce all'aumentare della deformazione, iniziando a diminuire solo vicino alla scissione: significa quindi che se il nucleo comincia ad allungarsi per scindersi, esso potrà anche non farlo e tornare alla sua configurazione originaria se non supera l'**energia critica**. La forma e l'altezza della barriera determinano la probabilità che avvenga **fissione spontanea**: per nuclei transuranici questa probabilità è molto elevata, ed è **per questo che la carta dei nuclidi si ferma ad $A \sim 240$!!**

- **Fissione spontanea.**

Prendiamo un **ellissoide prolato**, con un semiasse più lungo degli altri due ($a = c = R < b = R(1 + \epsilon)$). Ora possiamo scrivere

$$M(A, Z) = Nm_N + Zm_Z - B(A, Z) \quad (16)$$

per la sfera e

$$M(A, Z)_\epsilon = Nm_N + Zm_Z - B(A, Z)_\epsilon \quad (17)$$

Per l'ellissoide, quindi $\Delta M = M(A, Z) - M(A, Z)_\epsilon = B(A, Z)_\epsilon - B(A, Z) = \Delta B$ e avremo più stabilità per l'ellissoide se $\Delta B > 0$, quindi più elongazioni spontanee che favoriranno la fissione.

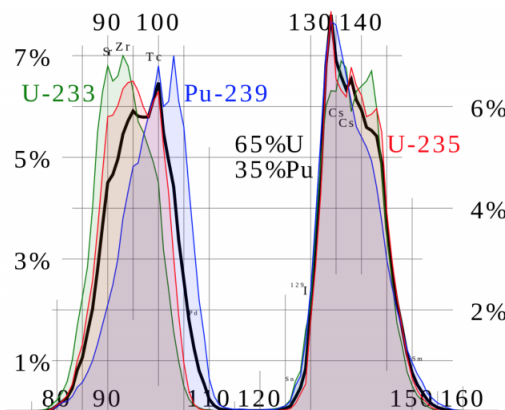
Prendiamo la SEMF termine a termine: I termini di volume di sfera ed ellissoide sono uguali (abbiamo assunto che il volume rimanesse uguale per incomprimibilità nel modello a goccia); i termini di superficie invece cambiano: la sfera è quella con superficie minima, quindi l'ellissoide avrà contributo superficiale maggiore. Sviluppando $\sqrt{1 + \epsilon} = 1 + \frac{\epsilon}{2} + \dots$ allora trovo il termine per l'ellissoide che sarà $a_S A^{\frac{2}{3}} (1 + \frac{2}{5}\epsilon^2)$. Per il termine di Coulomb, l'ellissoide avrà contributo inferiore in modulo dato che i protoni hanno distanza maggiore a cui mettersi e dunque minore interazione elettrostatica: la sua forma è $a_C \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} (1 - \frac{1}{5}\epsilon^2)$. Termine di simmetria e di pairing non dipendono dalla forma geometrica e quindi restano uguali nei due solidi.

Si ottiene dunque un $\Delta B > 0 \iff \frac{Z^2}{A} > \frac{2a_S}{a_C} \approx 50$, cioè **il sistema è stabile per deformazioni per $Z > 114, A > 270$, anche se in realtà affinando l'analisi si trova $\frac{Z^2}{A} > 35$ che riguarda tipo isotopi dell'uranio che hanno vite brevissime**. Importante ricordare che la fissione permette ai nuclei figli di esser molto più stabili, ma la rottura dei legami nella fissione libera tantissima energia.

- **Fissione indotta.**

Si inizia bombardando un nucleo pesante con un neutrone per generare un nucleo con numero atomico maggiore di uno rispetto all'originario: il bersaglio potrebbe dunque esser portato ad una condizione più favorevole alla fissione, portando alla scissione in più nuclei leggeri ed è perciò detta **fissione indotta**. Essa può dar luogo ad una reazione a catena che si auto alimenta e cresce esponenzialmente (come nelle bombe nucleari, mentre in lab ci sono dei nuclei leggeri che assorbono neutroni controllando la reazione).

Spesso i nuclei figli della fissione non sono stabili e in tempi brevi decadono rilasciando protoni (β^- decay), dato che la fissione spesso non genera nuclei simmetrici ma specie con $Z < N$ localizzate lungo il pendio inferiore della carta dei nuclidi. Guardiamo la curva che otteniamo relazionando la probabilità di trovare un nucleo di massa A come prodotto di fissione:



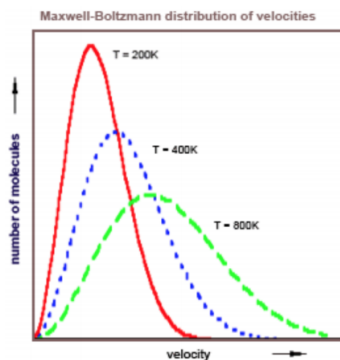
e vediamo subito che attorno ad $A = 235 \pm 4$ le reazioni simmetriche sono molto rare e cadono al minimo della curva, poi ho due picchi pronunciati.

2.6.2 Fusione nucleare

Detta anche **reazione termonucleare**, è il processo secondo cui **due nuclei leggeri si fondono per creare un nucleo più pesante e stabile**, e anch'essa libera energia, senza il rischio di prodotti indesiderati, cosa che la rende una fonte di energia (inferiore rispetto alla fissione) molto più pulita. Essa necessita di **un'elevata energia di innesco, atta a superare la repulsione coulombiana tra nuclei**.

Definiamo **Q-Value** la quantità di energia corrispondente al **bilancio netto di una reazione di fusione**, dato da $Q = -\Delta Mc^2 = (M_i - M_f)c^2$. Se $Q > 0$ allora la reazione sarà spontanea e il Q è l'energia liberata, per $Q < 0$ esso è il valore di energia da fornire per innescare la reazione non spontanea.

Anche in questo caso servirà superare un **barriera coulombiana** di potenziale, cui corrisponde **un'energia critica** di innesco, data dalla repulsione coulombiana tra i nuclei che ovviamente hanno carica positiva. Altra difficoltà deriva dal fatto che le nostre particelle sono un plasma (gas di particelle quasi totalmente ionizzato e globalmente neutro, che troviamo in genere ad altissime temperature e fornisce grande schermo dai campi elettrici) che segue quindi la **statistica di Maxwell-Boltzmann** secondo cui le velocità medie per nucleo si distribuiscono in *curve a campana*, e serve alta temperatura per ottenere le code di queste curve, che sono le particelle che hanno energia cinetica superiore alla soglia critica (assieme a quelle che la superano per *effetto tunnel*). **Perciò è utopia la fusione a freddo!**



Prendiamo ora il Sole, fatto al **75%** da idrogeno ionizzato. L'attrazione gravitazionale al suo interno è tanto intensa che l'H all'interno è super compresso e sotto una pressione tale da scaldarlo molto: le collisioni tra atomini H sono dunque tantissime! Gli urti danno origine a reazioni termonucleari che liberano energia fino al punto che il potenziale gravitazionale comprimente il nucleo compensa l'energia di fusione nello stesso, giungendo all'equilibrio e all'auto sostentamento.

Le reazioni nel Sole seguono la catena p-p:

- abbiamo una prima collisione ad alta energia tra due protoni che, non potendo creare un *di-protone* trasformano un protone in un neutrone generando l'emissione di un neutrino e un positrone, cosicché

neutrone e protone formano il Deuterio, liberando 1.44MeV di energia per l'annichilazione successiva del positrone.

- Il deuterio neonato è circondato da un mare di protoni, quindi la reazione successiva coinvolge deuterio e un protone che fondono a formare ${}^3\text{He}$ e liberando un γ (che essendo la stella desissima ci metterà tipo qualche centinaio di migliaia di anni per giungere alla superficie); avviene su un tempo brevissimo $\tau \sim 6\text{s}$ e libera 5.49MeV .
- Infine, l' ${}^3\text{He}$ fonde con un altro ${}^3\text{He}$ prodotto da un'altra catena analoga (che ha probabilità più bassa dello step precedente) liberando 12.85MeV e producendo un nucleo ${}^4\text{He}$ e due protoni liberi. Chiaramente, per avere alto rendimento le energie cinetiche dei protoni devono essere $\sim 10\text{keV}$, cosa che corrisponde ad un'energia termica di $E = k_B T \simeq 10^7 - 10^8\text{K}$, e a queste T il nucleo solare è fatto da **plasma**!

2.7 Decadimenti

Un **decadimento** è un **processo di reazione nucleare a più prodotti che ha come reagente un unico nucleo**. Quindi abbiamo un nucleo *madre* che emette energia/materia sotto forma di particelle trasformandosi in un *nucleo figlio*.

2.7.1 Alpha

Vengono **emessi 4 nucleoni, sotto forma di nucleo di ${}^4\text{He} = \alpha$** . Si genera il nucleo figlio più la α che ha carica +2 e in genere di $E \sim 5\text{MeV}$ poco penetrante e riguarda nuclei pesanti ($A > 200$).

Ha la forma

$${}^A_Z X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} Y + {}^4_2 \text{He} \quad (18)$$

Le α emesse hanno energie tipiche tra i 4 e gli 8 MeV, mentre i nuclei soggetti a decadimenti Alpha hanno vite medie altamente variabili, tra i microsecondi e le decine di milioni di anni. Ricordiamo subito che l' ${}^4\text{He}$ è il **primo nucleo doppio magico**

Le emissioni α sono **monocromatiche**, cioè esistono specifici valori di energia per ciascun decadimento: **maggiore è l'energia della α , maggiore sarà la differenza di energia tra lo stato nucleare di partenza e di arrivo**. Idealmente un nucleo potrebbe decadere α per andare in qualunque stato energetico purchè di minore energia rispetto a quello di partenza: è ragionevole pensare che maggiore sia lo scompenso energetico, maggiore sia la probabilità di avere decadimento, infatti la vita media per decadimenti con grandi salti è molto minore di quella a salti più piccoli.

Ricordandoci la definizione di **Q-Value**, e che per $Q > 0$ si ha emissione spontanea, si vede che si può ottenere una sua stima come misura dell'energia dell'Alpha emessa! Infatti se si ha $X \rightarrow Y + \alpha$ allora

$$\vec{P}_x = 0 = \vec{P}_y + \vec{P}_\alpha \quad E_x = M_x = K_y + M_y + K_\alpha + M_\alpha \Rightarrow K_y + K_\alpha = M_x - (M_y + M_\alpha) = Q \quad (19)$$

Quindi

$$Q = K_y + K_\alpha \sim K_\alpha \quad (20)$$

dove abbiamo trascurato il rinculo del nucleo figlio: l'energia della alpha sarà positiva solo per Q-val positivo, quindi nel processo parte dell'energia di massa iniziale diventa cinetica della alpha.

Andando a rivedere la grande differenza tra le vite medie delle particelle che effettuano questo decadimento, nei quali passano 24 ordini di grandezza, osserviamo che per un valore di energia della alpha fissato si ha una dipendenza della vita media da Z: **a Z maggiore corrisponde vita media più lunga** ed il profilo sperimentale per nuclei pari-pari con Z tra 90 e 100 è ben descritto dalla **legge empirica di Geiger-Nuttal**, secondo cui

$$\ln(\tau) \propto \frac{Z}{\sqrt{Q}} \quad (21)$$

Andiamo a vedere quale è la condizione per avere il decadimento: ricordando che deve essere $Q > 0$, con le predizioni della SEMF troviamo che ciò vale per $A > 60$, ma in realtà per nuclei così leggeri non si vede in natura un decadimento alpha, dato che altri decadimenti sono più convenienti.

Impostiamo allora il valore di soglia $Q \sim E_\alpha \in [4, 8]\text{MeV}$, e risolvendo ora troviamo $200 < A < 240$, sotto i 4 MeV i tempi di decadimento sono talmente lunghi che non si osservano.

Cerchiamo di spiegare il perchè di vite medie così lunghe nei decadimenti alpha; ipotizziamo di avere la particella α già fatta all'interno del nucleo: allora possiamo calcolare quanto ci mette mediamente ad uscire in modo molto semplice come

$$t = \frac{R}{v_\alpha} = \sqrt{\frac{m_\alpha c^2}{2E_\alpha}} \cdot R \approx 7 \cdot 10^{-22} s \quad (22)$$

Dove abbiamo messo $R \sim 10 fm, E_\alpha 4 MeV$.

E' una stima in contraddizione con i dati, dato che il nucleo interagisce con la particella e la rallenta. **Possiamo dire, in prima approssimazione, che nel nucleo prevalgono le forze nucleari** e quindi il potenziale sarà tipo la **buca finita** come nel modello a gas di Fermi, mentre **all'esterno l'interazione è dominata da quella coulombiana e scende quindi col classico profilo iperbolico**. Aggiungendo la condizione di continuità del potenziale e quindi il raccordo a $r=R$, troviamo

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r \leq R \\ \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} & r > R \end{cases}$$

da cui $B = V(R) = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R} \approx 30 MeV$, ma l' α ha energie sotto la decina di MeV!! Quindi **classicamente la particella non può uscire dal nucleo e ci dovrebbe essere completa stabilità nucleare**. Ma noi bravi fisici sappiamo dell'esistenza dell'**effetto tunnel**: particelle quantistiche possono attraversare una barriera di potenziale di energia maggiore rispetto a quella che ha a disposizione, mantenendo la propria energia. Questo poichè la particella la possiamo descrivere matematicamente con una funzione d'onda che dal lato incidente si riflette sulla barriera creando un'onda stazionaria, ma per continuità all'interno della barriera non si azzerava immediatamente ma decade esponenzialmente con la distanza con dipendenza da $k(r)$. Dall'altra parte della barriera ho un'altra onda stazionaria di ampiezza minore ma non nulla con conseguente probabilità non nulla di trovare la particella.

In questa trattazione dobbiamo **necessariamente assumere che la α sia già esistente nel nucleo e si muova con $E_\alpha = Q$ verso la barriera**. Introduciamo quindi il **fattore di preformazione P_α** che rappresenta la probabilità che la alpha esista nel nucleo.

Pensiamo che la funzione d'onda del nucleo padre sia $\Psi_A(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A)$ e che il sistema composto sia dato dalla composizione con prodotto tensore delle funzioni d'onda di nucleo figlio, alpha e moto relativo dei due prodotti, ossia $\Psi_{A-4} \otimes \Psi_\alpha \otimes \Phi(\vec{r}_\alpha)$. Allora il prodotto di pre-formazione è la sovrapposizione delle due funzioni d'onda ossia

$$P_\alpha = |\langle \Psi_\alpha | \Psi_{A-4} \otimes \Psi_\alpha \otimes \Phi(\vec{r}_\alpha) \rangle|^2 \quad (23)$$

e ci dice quanto è compatibile la funzione d'onda del nucleo padre con la sua scomposizione nel prodotto tensore tra funzione d'onda di alpha e nucleo figlio.

Tornando a come è fatto il potenziale, vediamo che si ha il massimo in R (di valore B), e abbiamo intersezione tra curva del potenziale e energia della alpha, in corrispondenza del raggio che chiamiamo b . Quindi per Q fissato abbiamo che la barriera di potenziale va da b a R le soluzioni standard si trovano per r fuori dalla barriera, dove classicamente si avrebbe riflessione e sono detti **punti di inversione del moto**. Infine abbiamo la relazione $\frac{B}{Q} = \frac{V(R)}{V(b)=\frac{b}{R}}$.

Approfondiamo un attimo il concetto di effetto tunnel. **Sappiamo che la probabilità della particella di energia classicamente insufficiente per oltrepassare la barriera di potenziale è data dal coefficiente di trasmissione T** , il cui valore approssimativo lo possiamo ottenere vedendo la barriera lunga L come spezzata in n barrierine di lunghezza dr , potendola trattare (se n grande) come insieme di barriere rettangolari alte $V(r)$, recuperando l'analisi per la barriera rettangolare al cui interno i termini oscillanti che scrivo come esponenziali complessi diventano reali e quindi si ottiene

$$k(r) = \sqrt{\frac{2m(V(r) - Q)}{\hbar^2}} \quad (24)$$

e le funzioni d'onda sono

$$\begin{cases} \Psi_\alpha(r) = e^{-k(r)r} \\ \Psi_\alpha(r + \delta r) = e^{-k(r)(r+\delta r)} \end{cases} \Rightarrow T_{r \rightarrow r+\delta r} = \left| \frac{\Psi_\alpha(r + dr)}{\Psi_\alpha(r)} \right|^2 = e^{-2k(r)dr} \quad (25)$$

E la probabilità che la particella attraversi la prima barriera sarà il coefficiente $T_1 = e^{-2k(R)\delta r}$ e così via. Per oltrepassare tutte le barriere, ho probabilità pari al prodotto di tutte le probabilità ossia $T = \prod_{j=1}^n T_j = \exp(-2 \sum_{j=1}^n k(r+j\delta r)\delta r) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp(-2 \int_{r_i}^{r_f} k(r)dr)$ e quest'ultimo integrale lo chiameremo **fattore**

di Gamow, che per $V(r) = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ vale $G_{Coulomb} = 2\alpha Z \sqrt{\frac{2mc^2}{Q}} [\arccos(\sqrt{\frac{Q}{B}} - \sqrt{\frac{Q}{B}(\sqrt{a - \frac{Q}{B}})})]$ con α costante di struttura fine

2.7.2 Beta

un nucleone cambia natura, acquistando o cedendo una carica elementare ed emettendo un leptone carico (e^- , e^+) e un neutrino o antineutrino. Le particelle emesse con il nucleo figlio sono molto più leggere e più penetranti delle precedenti. Il fine di questo decadimento è ottimizzare il rapporto $\frac{N}{Z}$ dell'atomo originario, muovendosi verso la valle di stabilità. Ha forma generale

β^-	β^+
$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$	$p \rightarrow n + e^+ + \nu$
${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + e^- + \bar{\nu}$	${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + e^+ + \nu$

Ricordiamo che il segno del β è concorde con il leptone prodotto: all'elettrone e antineutrino prodotto corrisponde il β^- , al positrone e neutrino il β^+ . Analogo processo è la cattura elettronica, del tipo

$$p + e^- \rightarrow n + \nu \quad (26)$$

Però sappiamo che un protone libero è super facile da trovare in natura dato che non decade spontaneamente (lo fa ma in tempi lunghissimi), mentre un neutrone decade β^- dopo circa 15 minuti, quindi trovarlo in natura è dura, molto più facile che stia nei nuclei dove mantiene il suo status per stabilità del sistema.

Il decadimento beta è il metodo tramite cui un nucleo decade verso un isotopo più stabile: generalmente sono i nuclei odd-odd a decadere sia β^+ che β^- , ma anche un even-even tipo il ${}^{14}\text{C}$ può decadere verso un even-odd conveniente.

Concentriamo le attenzioni sul decadimento β^- , secondo cui

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu} \quad (27)$$

Non possiamo ipotizzare che l'elettrone sia già presente dato che il nucleo è fatto solo di cariche positive, quindi dobbiamo per forza assumere che esso venga creato nel processo di decadimento. Troviamo, a differenza della α del decadimento precedente, che lo spettro dell'elettrone emesso è continuo, con un massimo per un fisso valore energetico e con un arresto in un punto chiamato end-point, pari al Q-value della reazione. Dato che vediamo che l'elettrone ha energia inferiore al Q-value, cosa che non dovrebbe essere se fosse un procedimento a due corpi, dobbiamo ipotizzare che il processo sia a tre corpi per giustificare la parziale perdita di energia dell'elettrone, che da qualche parte il pezzo mancante di energia deve esserci per conservazione.

- Teoria di Pauli:

egli introdusse l'ipotesi del neutrino, secondo cui oltre all'elettrone venisse prodotta anche la suddetta particella, con energia cinetica tale da colmare il gap tra Q-value e energia dell'elettrone emesso. Se il processo fosse a 3 corpi anziché 2, allora si spiegherebbe la distribuzione continua dell'energia. Inoltre, volendo $E_\nu = Q - T_e$ si richiede implicitamente che la massa del neutrino sia nulla, altrimenti si avrebbe una quota di energia di massa non nulla e non si avrebbe $E_{\nu=0} \Rightarrow T_e^{max} = Q$, cosa che i dati sperimentali confermano. Nel decadimento beta secondo ipotesi di Pauli si ha quindi

$${}^Z_A X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + e^-(e^-) + \nu(\bar{\nu}) \quad (28)$$

- Teoria di Fermi.

Dall'ultima equazione, Fermi decide di andare avanti per definire la curva spettrale del decadimento, facendo 4 ipotesi fondamentali. La prima è il poter trascurare l'interazione coulombiana tra elettrone e nucleo, valida almeno per nuclei leggeri; la seconda è quella di poter trascurare il rinculo del nucleo figlio, cosa valida per ogni nucleo dato che $m_e \ll m_X$; la terza è quella di considerare nulla la massa del neutrino, cosa validata a posteriori ($m_\nu < 2\text{keV} \ll m_e \approx 500\text{keV}$); l'ultima ipotesi è quella di considerare egualmente probabili tutte le possibili suddivisioni dell'energia

tra elettrone e neutrino.

Da queste ipotesi Fermi arriva a spiegare: **la forma continua degli spettri beta, la relazione tra vita media di decadimento ed energia massima Q di esso, la classificazione delle transizioni beta e la definizione di regole di selezione.** La teoria si basa sulla **Golden Rule** di Fermi,

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |\hat{H}_{f,i}|^2 \frac{dn}{dE} \quad (29)$$

ove $\lambda = \frac{1}{\tau}$ è la probabilità di transizione da stato i a stato f, mentre $M = \hat{H}_{f,i} = \langle \Psi_f | \Psi_i \rangle$ con

$$\begin{cases} \Psi_i = \Psi_X \\ \Psi_f = \Psi_Y \otimes \Psi_e \otimes \Psi_\nu \end{cases} \quad (30)$$

E \hat{H} è l'Hamiltoniana di interazione che favorisce la transizione $i \rightarrow f$ che fermi ricondusse all'interazione debole. Chiaramente le Ψ di X e Y sono stimabili dai modelli nucleari introdotti, mentre quelle di elettrone e neutrino no. Ipotizziamo abbiano forma di onda piana del tipo $\psi_{e,\nu} = C \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r})$, ricordiamo che dn/dE (detto **fattore cinematico** dato che determina la forma dell'energia cinetica dell'elettrone) è la **densità degli stati finali tra E ed E+dE** derivante dalla teoria del gas di Fermi.

Analizziamo la situazione: con il neutrino si ha ora $Q = T_e + E_\nu$ dove Q già contiene $m_e c^2$, ed $E_\nu = \sqrt{(m_\nu c^2)^2 + (cp_\nu)^2} = cp_\nu \Rightarrow p_\nu = \frac{E_\nu}{c} \Rightarrow T_e^{max} = Q = T_e + cp_\nu$ e l'ultima è massima, come atteso, se $E_\nu = 0$. Possiamo quindi scrivere $E_0 = E_e + E_\nu = T_e + m_e c^2 + cp_\nu \Rightarrow T_e + cp_\nu = Q = E_0 - m_e c^2$ e ricordando che $dN = V \frac{4\pi p^2}{h^3} dp$ sia per il neutrino che per l'elettrone, troverò

$$\frac{dn}{dE_0} = \left(\frac{4\pi V}{h^3 c^3} \right)^2 (Q - T_e)^2 p_e^2 dp_e \quad (31)$$

ed integrando trovo un profilo per il numero di stati conteggiati ad una data energia per l'elettrone, da confrontare con i risultati sperimentali. Si vede che il profilo cresce con p_e in modo parabolico dove $p_e = 0 = T_e$ con massimo sempre parabolico legato a $(Q - T_e)^2$ e va a zero per $Q = T_e = T_e^{max}$. Sostituendo tutto ciò nella regola di fermi trovo, se $p_e^{max} = 2m_e T_e^{max}$ e $M = \hat{H}_{f,i}$ con M non dipendente da p_e

$$\lambda \simeq C |M|^2 f(E_0) \quad (32)$$

con $f(E_0)$ integrale di Fermi che corrisponde ad un integrale in dp_e , di valori tabulati.

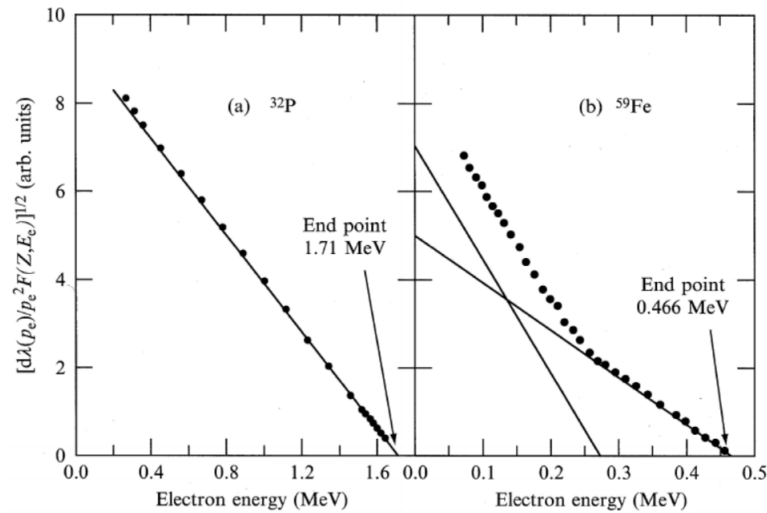
La formula 31 mostra una chiara simmetria in p_e , cosa che sperimentalmente non vale dato che la curva ha zone a maggior densità diverse per decadimenti β^+ e decadimenti β^- , notevoli soprattutto per nuclei pesanti. **Abbiamo infatti trascurato l'interazione elettrostatica con il nucleo!** Un elettrone prodotto nel nucleo sarà fortemente attratto da esso e perderà un bel po' di energia cinetica giungendo in superficie, mentre un positrone ne sarà accelerato avendo alla fine energia cinetica maggiore. I picchi dei conteggi saranno dunque spostati in direzioni opposte per i due tipi di decadimento beta, e per fare qualche conto più preciso dobbiamo considerare proprio il contributo coulombiano. **Il fattore correttivo è la funzione di Fermi**

$$F(Z_Y, E_e) \approx \frac{2\pi\eta}{1 - e^{-2\pi\eta}} \quad \eta = \mp \frac{Z_Y e}{\hbar v_e} \quad (33)$$

dove v_e è la velocità asintotica e η è il **parametro di Sommerfield**: se $\eta \ll 1$, $F \approx 1$ e il fattore si include nella regola d'oro di Fermi

$$d\lambda(p_e) = C |M|^2 F(Z_Y, E_e) (E_0 - E_e)^2 p_e^2 dp_e \Rightarrow K(E_e) = \sqrt{\frac{1}{F(Z_Y, E_e) p_e^2} \frac{d\lambda(p_e)}{dp_e}} \propto E_0 - E_e \quad (34)$$

detto **fattore di Kurie**, e il plot $K(E - e)vs E_e$ è il **plot di Fermi-Kurie**



Questo plot ci permette di **ottenere una stima precisa del Q-value dall'intercetta con l'asse x**. Vediamo anche una piega, detta *kink*, spiegata notando che per il nucleo disegnato si hanno due distinti decadimenti possibili, entrambi β^- ma verso livelli energetici diversi, e possiamo perciò trovare due diversi Q-value e un'approssimazione della probabilità di transizione come coefficiente della retta.

Dal grafico possiamo anche verificare che **la massa del neutrino è veramente approssimabile a zero**, dato che se $m_\nu \neq 0$ nel calcolo della densità di stati verrebbe meno la dipendenza quadratica da $E_0 - E_e$, la cui radice quadrata è il termine lineare del grafico. Quindi non sia ha più un andamento lineare di K nell'energia, ma lo sarà solo in prima approssimazione per basse energie, andando come $-y^2 = x$ vicino all'*end-point*, cadendo a zero quanto più grande è la massa del neutrino. Ma sperimentalmente i dati sono lineari fino all'*end-point*, dunque la massa del neutrino è nulla o quasi!!

Consideriamo ora le **transizioni multiple**, ossia il fatto che **esistano diversi livelli del nucleo figlio con energia inferiore tali per cui la probabilità che il decadimento avvenga su quel livello è non nulla**, verificando che comunque il livello con probabilità maggiore è quello a energia minore.

Dopo aver integrato la funzione di $d\lambda$, possiamo ricordarci che il fattore d fermi è tabulato e, riarrangiando,

$$f(Z, E_0)t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(2)}{C|M|^2} = \frac{K}{|M|^2} \quad (35)$$

con K costante. Possiamo **risalire alla stima della probabilità di transizione da stato iniziale a finale $|M|^2$ dal prodotto tra f e tempo di dimezzamento**, tutti valori tabulati detti **ft-values**. Si usa generalmente una scala logaritmica data la vastità del range su cui vivono i tempi di dimezzamento e, ricordando che il prodotto f e t è inversamente proporzionale al quadrato dell'elemento di matrice M, allora **le probabilità di transizioni sono tanto maggiori quanto minore è $\ln(f \cdot t)$** . Possiamo distinguere la transizioni in

- **transizioni super permesse**. vale $\log(ft) \approx 3 - 4$ che corrispondono a vite medie molto piccole e sono i più probabili in assoluto;
- **transizioni permesse** con $4 \leq \ln(ft) \leq 9$, che sono la maggior parte dei casi ad alta probabilità;
- **transizioni proibite** che sono le più improbabili (non impossibili), con il logaritmo fino a 20 circa.

Cerchiamo una giustificazione teorica a tutto ciò. L'elemento di matrice è

$$M = H_{f,i} = \langle \Psi_f | \hat{H} | \Psi_i \rangle = \int_V \Psi_f^*(\vec{r}) \hat{H} \Psi_i(\vec{r}) d\vec{r} \quad (36)$$

Ipotizzando di poter scrivere la funzione d'onda finale come prodotto tensore delle funzioni d'onda dei singoli prodotti, e di poter scrivere la funzione leptonica come onda piana $\Psi_{lep} \approx e^{-i\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar}}$, allora in modo molto a spanne per un elettrone di $E \sim 1\text{MeV}$, $p \sim 1.4\text{MeV}/c$, allora $\frac{p \cdot r}{\hbar} \approx 0.03 \ll 1 \Rightarrow e^{-i\frac{p \cdot r}{\hbar}} = 1 - i\frac{p \cdot r}{\hbar} + \dots \approx 1$ ed essendo $|\vec{L}| \propto |p||r| \simeq 0.03\hbar$, l'elettrone con energia ipotizzata dovrà avere $L=0$. Quindi **tranne pochi rari casi, elettrone e antineutrino sono emessi in condizioni di onda s**, e

$$\begin{array}{cc}
\text{Fermi} & \text{Gamow - Teller} \\
S = 0, L = 0 \rightarrow \Delta J = 0 & S = 1, L = 0 \rightarrow \Delta J = 0, \pm 1
\end{array}$$

infatti l'autofunzione associata a $L=0$ è una sola ed è l'armonica sferica costante. Avendo poi Ψ_{lep} costante con approssimazione di Taylor all'ordine zero, ne deriva che **l'elemento di matrice M non dipende dal momento angolare dei leptoni**. Questo avviene con **le trasformazioni permesse**.

Se il comportamento non fosse ben descrivibile in questa approssimazione, tipo se c'è un cambio di parità, bisogna sviluppare l'onda piana anche agli ordini successivi, con peso piccolo o nullo che porteranno a transizioni verso p,d,f. Considerando il nostro $|L| = 0.03\hbar \neq 0$ concludo proprio che qualche transizione verso stati con L non zero (transizioni proibite) debba esserci.

Fermi ipotizza la forma di $\hat{H} = g \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_e) \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_\nu)$, cioè **che l'interazione avvenga unicamente quando elettrone e neutrino si trovano sovrapposti**. g è la costante di Fermi e misura l'intensità dell'interazione, il cui valore si ricava sperimentalmente ed è dell'ordine $10^{-4} MeV fm^3$.

Posso ora calcolare l'elemento di matrice nelle varie ipotesi. Per le **transizioni permesse** si è detto che l'autofunzione leptonica è costante, e normalizzando si trova che **M è dato dalla sovrapposizione tra le funzioni d'onda dello stato prima e dopo il decadimento: più gli stati sono simili, tanto grande sarà la probabilità di transizione**. Le **transizioni super permesse** solo quelle del tipo $\Psi_i = \Psi_f$, dove M è massimo e il logaritmo di f per t è minimo, che **riguardano decadimenti beta tra nuclei speculari con $N=Z-1$ e viceversa**, dato che il nucleone convertito va ad occupare lo stesso livello energetico di particella singola nella buca di potenziale dell'altra specie di nucleone.

Abbiamo quindi visto che nelle transizioni permesse $L = 0$, ma abbiamo spin $1/2$ sia per e che per neutrino, e quindi mi aspetto che $S = 0, 1$. Chiameremo **transizioni di Fermi** quelle dove lo spin di elettrone e neutrino sono **antiparalleli e $S=0$ dunque**, le altre dove gli **spin sono paralleli e $S=1$** sono dette di **Gamow-Teller**.

Ricordando che la parità del sistema è del tipo $(-1)^L$, per $L=0$ sarà sempre $+1$ e la parità si conserva in entrambi i casi (F e G-T). Prendendo ora \vec{J} , vale Per le **transizioni proibite**, possiamo classificarle con il *numero dell'ordine di arresto dello sviluppo di Taylor*. Distinguiamo dunque

- Transizione primo proibita: si fa un'approssimazione più precisa che nelle transizioni permesse, del tipo $\Psi_{lep} = 1 - \frac{i\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar} = 1 - \frac{i}{\hbar} |\vec{p}| |\vec{r}| \cos(\theta)$ dove nel coseno rivediamo l'armonica sferica Y_1^0 di parità -1 : **introdurre una correzione al primo ordine implica l'aggiunta di un termine proporzionale ad un'armonica sferica che indica una transizione con inversione di parità**.

$$\begin{array}{cc}
\text{Fermi} & \text{Gamow - Teller} \\
S = 0, L = 1 \rightarrow \Delta J = (0), \pm 1 & S = 1, L = 1 \rightarrow \Delta J = 0, \pm 1, \pm 2 \\
\text{Ma per Fermi non } 0 \rightarrow 0 \text{ perchè } L = 1
\end{array}$$

- Transizione secondo proibita: lo sviluppo aggiunge il termine $(\frac{|\vec{p}| |\vec{r}|}{\hbar})^2 \cos^2 \theta$ e nel coseno quadro vediamo la combinazione di Y_2^0, Y_0^0 e mentre la seconda dava un contributo -1 alla parità, la prima darà un $+1$ e la parità non è invertita in transizioni secondo proibite.

$$\begin{array}{cc}
\text{Fermi} & \text{Gamow - Teller} \\
S = 0, L = 2 \rightarrow \Delta J = (0), (\pm 1), \pm 2 & S = 1, L = 2 \rightarrow \Delta J = (0), (\pm 1), (\pm 2), \pm 3 \\
\text{(Transizioni tra parentesi solo se possibili)}
\end{array}$$

2.7.3 Gamma

Non si ha una variazione del nucleo, ma si effettua una transizione energetica tra un suo stato eccitato ed uno inferiore emettendo radiazione EM ad alta energia. Il prodotto del decadimento in questione è molto penetrante. Segue lo schema

$${}_Z^A X^* \rightarrow {}_Z^A X + \gamma \quad (37)$$

che come notiamo **non cambia la natura isotopica del nucleo**, dato che la transizione è tra livelli energetici del nucleo senza variazioni di A . Da ciò deriva anche che l'energia del fotone emesso sarà la differenza di energia tra i due livelli iniziale e finale, e mi aspetterò uno spettro discreto con un picco sull'energia del gamma emesso e una larghezza legata alla risoluzione del detector.

Dalla meccanica quantistica sappiamo, per il principio di indeterminazione, che un certo stato energetico con vita media finita ha una *larghezza di stato* Γ intrinseca non nulla, seguendo la relazione

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \Gamma \approx \frac{\hbar}{2\tau} \quad (38)$$

da cui troviamo che lo spettro del decadimento gamma è effettivamente discreto.

Precisamente, non è vero che l'energia del fotone emesso è pari alla delta di energia tra i livelli del salto, dobbiamo dimostrare che l'energia di rinculo del nucleo è trascurabile come nel decadimento alpha. Semplicemente conservando l'energia si trova $\Delta E \sim eV \ll Mc^2 \sim 10^5 MeV$.

Ricordando che la radiazione EM corrisponde alla propagazione in fase di oscillazioni di un campo elettrico ed un campo magnetico ortogonali tra loro e che la sua forma si descrive con le leggi di Maxwell, posso vedere i campi elettrico e magnetico come l'uno generato dalla variazione dell'altro. Chiaramente, a seconda di come creiamo il primo campo variabile posso definire due tipologie di radiazione.

- Radiazione **di tipo E**: una carica oscillante genera il campo elettrico che poi induce campo magnetico;
- radiazione **di tipo M** in cui un momento magnetico oscillante genera un campo magnetico che poi induce un campo elettrico.

Entrambe devono comunque sottostare alle leggi di conservazione del sistema radiante (nucleo) e campo di radiazione (fotone) e si devono conservare parità e momento angolare. Dato che **non esistono fotoni di momento nullo, e non si osservano transizioni gamma tra stati di uguale J** , allora le radiazioni EM posso etichettarle in base al momento angolare del fotone come

- $L=1$ dipolo
- $L=2$ quadrupolo
- $L=3$ ottupolo
- $L \rightarrow 2^L$ -polo

Quindi **una generica radiazione gamma è definita da un termine che ne determina il tipo ed un termine che indica il termine dello sviluppo in multipoli**, identificando la **multipolarità delle transizioni** σL con $\sigma = E, M$ e $L = L_\gamma$. La parità delle transizioni EM è $P(EL) = (-1)^L$, $P(ML) = (-1)^{L+1}$ e la diversa parità si ha perchè il campo elettrico è un vettore, quello magnetico un vettore assiale.

FINIRE BENE LA PARTE SUI DIPOLI

2.8 Interazione radiazione-materia

2.8.1 sezione d'urto

2.8.2 Radiazioni EM

2.8.3 Particelle cariche