

Riassunti del corso di Fisica Nucleare e Subnucleare

Aurora Leso

June 2021

Contents

1	Disclaimer	1
2	Fisica Nucleare	2
2.1	Ripasso	2
2.1.1	Potenziale centrale	2
2.1.2	Momento angolare	2
2.2	Unità e proprietà	2
2.2.1	Definizioni all'interno del nucleo	2
2.2.2	Massa nell'atomo	3
2.2.3	Carta dei nuclidi	4
2.3	Modelli	5
2.3.1	Modello a gas di Fermi	5
2.3.2	Modello a goccia di liquido	6
2.3.3	SEMF	7
2.3.4	Deutone	8
2.3.5	Modello a Shell	9
2.3.6	Modello a shell atomico	9
2.4	Modello a shell nucleare	9
2.5	Modello collettivo	10
2.5.1	Nuclei even-even	11
2.5.2	Hamiltoniana di Bohr	11
2.6	Schema riassuntivo per i modelli nucleari	12
2.7	Reazioni nucleari	12
2.7.1	Fissione nucleare	12
2.7.2	Fusione nucleare	14
2.8	Decadimenti	14
2.8.1	Alpha	15
2.8.2	Beta	16
2.8.3	Gamma	20
2.8.4	Esempio con nuclei pari-pari di stime di Weisskopf	21
2.9	Interazione radiazione-materia	22
2.9.1	Sezione d'urto	22
2.9.2	Effetto fotoelettrico	22
2.9.3	Effetto Compton	22
2.9.4	Pair production	23
2.9.5	Coefficiente di attenuazione lineare	23
2.9.6	Particelle cariche	23
2.9.7	Formula di Bethe Block	24
3	Subnucleare	26
3.1	Unità Naturali	26
3.2	Interazioni fondamentali	26
3.3	Particelle fondamentali	28
3.3.1	Leptoni carichi	28
3.3.2	Quark	30
3.3.3	Adroni	31
3.4	Antiparticelle	31
3.5	Rivelatori di particelle	31
3.6	Strumentazione per particelle cariche	32
3.6.1	Spettrometro dipolare	32
3.6.2	Tracciatori	33

3.6.3	Emulsioni	33
3.6.4	Camere a nebbia	33
3.6.5	Camere a bolle	33
3.6.6	Rivelatori a gas	33
3.6.7	Rivelatori al silicio	33
3.7	PID	33
3.8	Strumentazione per particelle neutre	34
3.8.1	Sciame eletromagnetico	34
3.8.2	Calorimetri eletromagnetici	35
3.8.3	Sciame adronico	35
3.9	Rivelazione di neutrini	35
3.10	Il CMS	37
3.11	Collisioni	38
3.12	La sezione d'urto	39
3.12.1	Modello geometrico	40
3.12.2	Modello classico e quantistico	40
3.13	Collisioni in Quantum Field Theory (QFT)	41
3.14	Decadimenti	41
3.14.1	Formula di Breit-Wigner	41
3.14.2	Probabilità di decadimento	42
3.14.3	Misure di vita media	43
3.15	Simmetrie	44
3.15.1	Parità	44
3.15.2	Violazione di parità	44
3.15.3	Coniugazione di carica	45
3.16	Interazioni deboli e neutrini	45
3.16.1	Costante di fermi	45
3.16.2	Scoperta del neutrino elettronico	46
3.16.3	La scoperta del neutrino muonico	46
3.17	Decadimenti leptonici, semi-leptonici, adronici	47
3.17.1	Leptone tau	47
3.17.2	Quark top	47
3.17.3	Quark legati e decadimenti semi leptonici	48
3.17.4	Decadimenti leptonici dei pioni carichi	48
3.17.5	Decadimenti deboli adronici	48
3.18	Oscillazioni di sapore	48
3.18.1	Mesoni K neutri	48
3.18.2	Violazioni di simmetria CP	49
3.18.3	Esperimento di Christenson et al.	50
3.18.4	Asimmetria semi-leptonica	50
3.18.5	Asimmetria a due pioni	51
3.18.6	Violazione di CP	51

1 Disclaimer

2 Fisica Nucleare

2.1 Ripasso

2.1.1 Potenziale centrale

Se un potenziale $V(\vec{r})$ è tale che $V(\vec{r} = V(r), r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ allora posso dividere l'Hamiltoniana in parte radiale + angolare, risolvendo il problema studiando una soluzione fattorizzata in parte radiale ad angolare del tipo $\Psi(\vec{r}, \theta\phi) = R(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$ dove abbiamo riconosciuto in queste ultime le armoniche sferiche, ortogonali tra loro e la cui forma analitica dipende dai polinomi di Legendre e hanno parità $PY = (-1)^l Y$ dove si è ridotta la notazione da Y_{lm} a Y e basta. l, m sono **numeri quantici**, in particolare l è il **numero quantico orbitale** ed m è il **numero quantico magnetico**, che va da -1 a +1 per passi interi, essi vanno a caratterizzare gli autovalori del momento angolare.

2.1.2 Momento angolare

Ricordando come definiamo l'operatore T in campo centrale, ossia

$$T = \frac{\vec{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \underset{\text{coord sfer}}{\underbrace{\dots}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\vec{L}^2}{r^2} \right] \quad (1)$$

ho che $\vec{p}^2 = \vec{p}_r^2 + \frac{\vec{L}^2}{r^2}$. Questo operatore \vec{L} è il **momento angolare orbitale** e le sue componenti sono descritte da operatori differenziali (\vec{L}_i con i da 1 a 3, che sono tutte quantizzate e di spettro $m\hbar$) nelle componenti $(\theta, \phi) \in S^2$, che soddisfano l'algebra di Lie di $SO(3)$ e per cui i commutatori valgono

$$[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k \quad [\vec{L}^2, L_i] = 0 \quad \forall i \quad (2)$$

Dal secondo commutatore evinco che posso trovare autofunzioni comuni a \vec{L}^2, L_i che sono proprio le armoniche sferiche.

I momenti angolari $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ si compongono secondo la relazione $|l_1 - l_2| \leq l \leq |l_1 + l_2|$.

2.2 Unità e proprietà

2.2.1 Definizioni all'interno del nucleo

Ricordiamo subito una relazione fondamentale, ossia $1\text{eV} = 1.6022 \cdot 10^{-19}\text{J}$.

Collocando centralmente il nucleo atomico, di $r \propto fm = 10^{-15}\text{m}$, $E \simeq 8\text{MeV}$, ad energie inferiori troviamo gli **stati eccitati** mentre ad energie maggioriabbiamo i **gradi subnucleari**.

Utili le seguenti tabelle

Ordini di grandezza		
-	Scala nucleare	Scala atomica
Lunghezza	$fm (= 1 \times 10^{-15}\text{m})$	$\text{\AA} (= 1 \times 10^{-10}\text{m})$
Energia	MeV	eV
Conversioni utili		
$\hbar c$	197.327 MeV fm	1973.27 eV \AA
$e^2/4\pi\epsilon_0$	1.44 MeV fm	14.4 eV \AA

Particella	Massa (MeV/c^2)	Carica (e)	Spin (s)	Raggio ($\sqrt{(\vec{r}_c^2)}$)	Vita media
Elettrone (e)	0.510998	-1	1/2	?	∞
Protone (p)	938.272	+1	1/2	$\sim 0.87\text{ fm}$	∞
Neutron (n)	939.565	0	1/2	$\sim -0.1\text{ fm}$	$\sim 15\text{ min}$

Tutte e tre le particelle sopra elencate sono **fermioni** dato che hanno spin semintero.

Interessante notare che l'elettrone ha raggio che si prospetta nullo, il protone certo fino al secondo decimale e il neutrone ha raggio negativo poiché ha carica complessiva nulla e deve esser fatto da componenti non neutre disposte in modo eterogeneo: pesando per carica i componenti, il raggio medio viene minore di zero. Vita media infinita di p ed e indicano che sono stabili, mentre il neutrone decade spontaneamente in protone+ altre cose. **Protoni e neutroni sono chiamati nucleoni**, e hanno massa molto simile.

Un elemento X della tavola periodica si indica come



Con A numero di massa pari a somma di protoni e neutroni, N numero di neutroni e Z numero di protoni, dunque $A=Z+N$.

2.2.2 Massa nell'atomo

In ogni processo nucleare vale la legge di conservazione per la carica q , per l'energia complessiva E e quindi per la massa m , e per il momento angolare \vec{J} nelle sue componenti orbitale e di spin.

Utile definire la **densità numerica di materia**, ossia il numero di massa A rapportato al volume di una sfera con raggio r , dunque si ha $\int \int_0^\infty \rho_m(r) r^2 dr d\Omega = A$, generalmente espressa in fm^{-3} e ha profilo

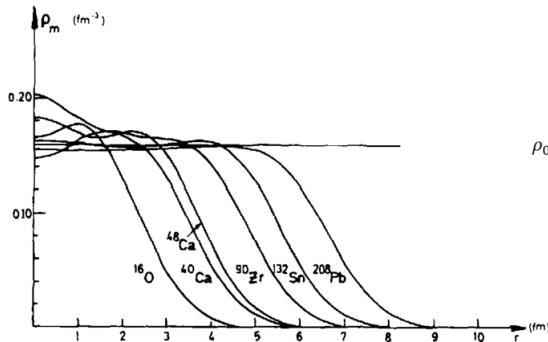


Figura 1.2: Profilo della densità di massa

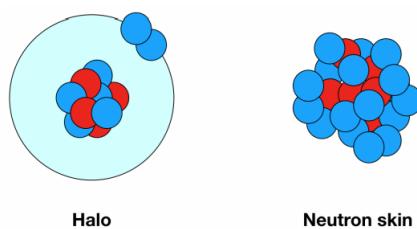
studiato mediante **electron scattering**, e si nota che

- A piccole distanze dal centro è costante, **densità di saturazione** e per ogni elemento $\rho_0 \simeq 0.15 - 0.2 fm^{-3}$
- la pendenza di decrescenza è circa uguale per ogni elemento
- vale la **relazione di fermi** $r = r_0 \sqrt[3]{A}$, $r_0 \simeq 1.2 fm$ dove r è la distanza dal centro del nucleo per cui la densità numerica è dimezzata rispetto al valore di saturazione. Aspettandomi $V \propto A$ dato che sperimentalmente per ogni A ho $\rho_0 \simeq \frac{A}{V}$ costante, allora $r \propto \sqrt[3]{A}$.

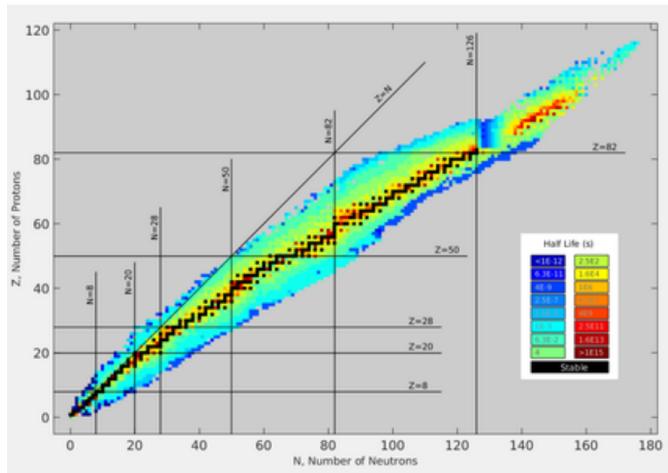
Si indica con **funzione di fermi** la Funzione $F(r) = \frac{1}{1+e^{r-r_0/a}}$ che si può parametrizzare per usarla nelle densità, ottenendo $\rho_m(r) = \frac{\rho_0}{1+e^{r-r_0/a}}$ dove ricordiamo che ρ_0 era la densità di saturazione.

Infine definiamo la **diffusività** come il parametro a che ci è uscito nell'equazione sopra, caratteristico di ciascun elemento e che è **indice di quanto rapidamente la densità vada a zero**, e si ha $\lim_{a \rightarrow 0} \rho_m(r) = \rho_0 \Theta(r_0 - r)$ dove ricordiamo che $\Theta(r)$ è la funzione di Heaviside. Due casi limite sono

- Effetto alone (**Halo**) per cui in nuclei leggeri la densità protonica va a zero velocemente mentre quella neutronica va più lentamente, generando una zona di qualche femtometro dove ci sono solo neutroni sparsi.
- Effetto di pelle neutronica (**Neutron skin**). Per elementi pesanti si possono avere molti più neutroni che protoni, ma la densità centrale di saturazione è circa fissa e i neutroni in eccesso vanno a depositarsi sulla superficie nucleare creando una pelle neutronica che avvolge il nucleo.



2.2.3 Carta dei nuclidi



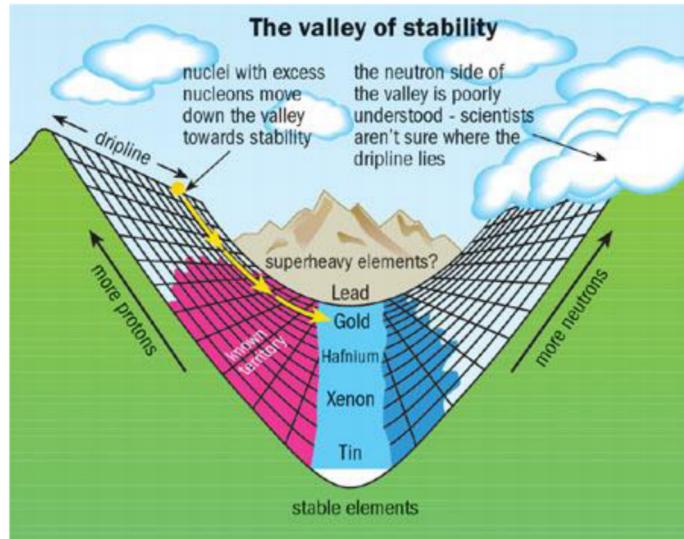
Detta anche **carta degli isotopi** o **carta di Segré**, ha come assi (di numeri interi) N(in x, da 0 a 177) e Z(in y, da 0 a 118). Definiamo

- **isotopi** elementi con stesso Z ma diverso A, nella carta dei nuclidi **stanno sulla stessa riga**.
- **isobari** hanno lo stesso numero di massa A, nella carta dei nuclidi stanno **sulla stessa diagonale secondaria**
- **Nuclei speculari**, hanno numeri di protoni e neutroni simmetrici
- **Isotonici** hanno stesso numero di neutroni N, dunque nella carta dei nuclidi sono **sulla stessa colonna**.
- **Isomeri** nuclei che con N,Z fissati si presentano in due stati energetici distinti di cui uno fondamentale e uno eccitato che poi decade lentamente detto **metastabile**.
- **vita media** τ il tempo necessario affinché il numero di nuclei si riduca di un fattore e, ricordando la relazione $N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$. Con **tempo di dimezzamento** si intende invece il tempo necessario affinché la popolazione di nuclei dimezzi, e si lega alla vita media con la relazione $T_{\frac{1}{2}} = \ln(2)\tau$.

Dalla carte vediamo che le caselle nere (**valle di stabilità**, stanno al centro della figura) sono corrispondenti ad isotopi particolarmente stabili, e al raffreddarsi dei colori la stabilità diminuisce fino al viola che corrisponde ad isotopi con vita media così breve da non presentarsi in natura. Fino a $Z \approx 40$ la valle di stabilità segue la bisettrice, deviando un po' a destra oltre tale valore: questo perché crescono i protoni causando repulsione coulombiana crescente tra essi e dunque la necessità di più neutroni per distanziarli e portare all'equilibrio. Oltre al $^{208}_{82} Pb$ i nuclei diventano troppo compatti e i protoni sono troppo vicini per avere davvero stabilità, quindi avremo ancora specie longeve mentre altre esistono come decadimento di specie più pesanti. Oltre ancora, non esistono più nuclei.

Per N o Z pari ho **i numeri magici**, che presentano isotopi di grande stabilità rispetto a quelli vicini, e a incroci di N e Z entrambi magici ho **numeri doppio magici**. Essi hanno composizione interna del nucleo particolarmente ordinata e dunque molto stabile.

Immaginiamo ora la carta come un grafico 3D di funzione $\frac{1}{\tau}$:



Salendo i pendii la stabilità diminuisce, fino ai bordi detti **drip lines** di protone(superiore,sx, ben map-pata) o neutrone(inferiore,dx, più fumosa) fatte dalle configurazioni nucleari per cui l'energia di separazione protonica o neutronica è nulla, determinanti il confine tra configurazioni di energia di legame positiva e quelle ignote al di fuori delle quali i nucleoni non sono tenuti assieme.

2.3 Modelli

2.3.1 Modello a gas di Fermi

E' un modello **statistico/quantistico a particelle indipendenti**, corretto in buona approssimazione soprattutto per A alto. Si basa sulle ipotesi

- Particelle costituenti il gas sono fermioni di spin $\frac{1}{2}$
- ogni nucleone subisce il potenziale di interazione generato dagli altri $A-1$ in forma di buca di potenziale 3D a simmetria sferica con larghezza pari al diametro nucleare
- il gas è quantistico e degenero: si suppone l'energia cinetica media delle particelle sia molto maggiore dell'energia termica ambientale, dunque i nucleoni non possono raggiungere stati eccitati e le particelle occupano gli stati a più bassa energia concessa.

Ricordiamo i risultati che abbiamo sulla **bucca di potenziale 1D infinita**:

- Hamiltoniana

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \quad (3)$$

con potenziale nullo in $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ e infinito altrove

- Autovalori $E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ e autofunzioni

$$\Psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) & n \text{ dispari} \\ \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) & n \text{ pari} \end{cases} \quad (4)$$

Per generalizzare al caso 3D si ha semplicemente $E_n = E_n^x + E_n^y + E_n^z = \frac{\hbar^2}{8ma^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$ e come si nota per diverse combinazioni dei cari n_i posso ottenere gli stessi autovalori, ho dunque **stati isoenergetici** che posso considerare degeneri.

Immaginiamo ora di trattare gli n_i come un insieme continuo e definiamo $\rho(E)$ densità di stati che integrata in un certo range mi dia il numero di stati $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ che corrispondono a tali energie. Chiaramente, il numero di stati per un certo E è il **volume nel primo ottante del guscio sferico n -dimensionale di raggio n e spessore dn** $dN(E) = \frac{4\pi n^2 dn}{8}$ ma $E_n = \frac{\hbar^2}{8ma^2} n^2 \Rightarrow ndn = \frac{4ma^2}{\hbar^2} dE$.

Ricordando che la funzione d'onda deve stare entro il volume della buca (\mathbf{a}^3) e che la particella sta nel nucleo (di volume $\propto A$), allora $\rho(E)dE = dN(E) = V \frac{\frac{5}{2}m^{\frac{3}{2}}\pi}{h^3} \sqrt{E}dE$ quindi

$$\rho(E) \propto A\sqrt{E} \quad (5)$$

in termini di quantità di moto, poichè $E = \frac{p^2}{2m}$ allora $\rho(p) \propto Ap^2$. Ma non sto considerando lo spin! Poco male, basta aggiungere un fattore 2 davanti a dN.

Dato che nel nucleo ci sono A particelle e che per ogni livello di energia E_n ci sono 4 nucleoni (2p e 2n) allora il numero esatto di stati riempiti è pari al numero di particelle nel nucleo e ci sarà un valore massimo di energia, detta **energia di Fermi** E_F , con momento di Fermi associato $p_F = \sqrt{2mE_F}$. Questi rappresentano l'estremo superiore nell'integrazione del dN per il calcolo degli stati totali, infatti

$$Z(A - Z \text{ per neutronico}) = 2 \int_0^{p_F^p} \rho(p)dp = \frac{4}{9\pi} \frac{r_0^3}{\hbar} Ap_F^p$$

da cui invertendo trovo p_F^p e p_F^n nel caso rispettivamente protonico e neutronico. Dalle relazioni trovate si vede subito che ho dipendenza da $\frac{2Z}{A}$ per proton e $\frac{2(A-Z)}{A}$ per neutron, quindi nella valle di stabilità $Z \simeq N \simeq \frac{A}{2}$ quindi quei termini valgono 1 e il momento di Fermi, non dipendendo da essi, vale $\simeq 240\text{MeV}/c$ con $E_F \simeq 30\text{MeV}$. Per nuclei fortemente sbilanciati, la differenza tra energia di fermi neutronica è protonica c'è ma si aggira sui 4MeV .

Per raffinare la trattazione, consideriamo ora la buca **finita**, con pareti alte $V_0 > E_F$. Definiamo

- **Energia di separazione protonica/neutronica** come l'energia da fornire ad un nucleo per liberare un protone o un neutrone, che sarà pari alla differenza di energia in massa del nucleo prima e dopo la rimozione del nucleone;
- **Binding energy** come la somma di tutti i contributi energetici necessari per tenere insieme i nucleoni e stabilizzare il nucleo, il cui valor medio si indica con B/A . È circa costante per $A > 40$ ed è circa $7 - 8\text{MeV}$

queste due energie sono legate dalla relazione

$$S_P(A, Z) = B(A, Z) - B(A - 1, Z - 1) = \Delta B \quad (6)$$

Ed è lecito pensare che la buca sia finita con larghezza il diametro nucleare e altezza $V_0 = E_F + \frac{B}{A} \simeq 40\text{MeV}$.

Supponiamo che il numero di protoni sia poco meno della metà, scrivendolo in funzione di una x abbastanza piccola da farci sviluppare con Taylor possiamo espandere il valor medio dell'energia, calcolato come

$$\langle E_k \rangle = \frac{\int dN \frac{2Z^{\frac{5}{3}}}{A} + \frac{2(A-Z)^{\frac{5}{3}}}{A}}{\infty} \quad (7)$$

Gli ultimi termini si possono sviluppare come $(1-x)^{\frac{5}{3}}$ e $(1+x)^{\frac{5}{3}}$ trovando **un minimo a $2Z=A$** . Dunque mi aspetto che nuclei con $N=Z$ siano favoriti e ciò è una conseguenza diretta del principio di esclusione di Pauli. Imponendo la condizione di minimo trovo $\langle E_k \rangle \simeq 20\text{MeV}$, $\langle p \rangle \simeq 200\text{MeV}/c$. Riprendendo ora il Numero di stati trovati come integrazione di $\rho(p)dp$, vediamo che è pari al numero di nucleoni e che il fattore moltiplicativo se ignoriamo la differenza tra neutroni e protoni è sempre 4 (2 spin, 2 isospin) allora si semplifica A e trovo, invertendo, $p_{Fc} = (\underbrace{\frac{A}{V}}_{\rho_0})^{\frac{1}{3}} (\frac{3\pi^2}{2})^{\frac{1}{3}} \hbar c = \rho_0^{1/3} (\frac{3\pi^2}{2})^{1/3} \hbar c$

2.3.2 Modello a goccia di liquido

E' un modello collettivo.

Identifichiamo il nucleo con una sfera di densità uniforme dentro e che si azzera in superficie. Supponiamo che

- esista un raggio minimo r_{int} tale per cui possiamo trascurare le interazioni tra particelle oltre esso. Quindi l'energia di legame è attrattiva a corto raggio, repulsiva per brevissime distanze e trascurabile oltre questo raggio di interazione.

- la materia nucleare sia incompressibile e che sussista una relazione lineare tra numero di portatori di massa A e il volume V
- l'energia di legame sia costante per nucleone, cosa che vogliamo dato che sperimentalmente si trova che la Binding energy è circa costante attorno agli 8 MeV per $A > 40$.

2.3.3 SEMF

La **formula semi empirica di massa** permette di esprimere la binding energy in funzione di alcuni parametri stimabili attraverso opportuni fit. Si compone di

- Termine di Volume. L'energia di legame complessiva è la somma delle energie che vincolano ciascun nucleone agli altri, dunque $B \propto A^2$. Ma l'energia di legame dovrebbe dipendere linearmente da A , ma grazie all'ipotesi di interazione a corto raggio $B = \frac{1}{2} \sum_{r < r_{int}} \langle U \rangle \propto A$ come voluto. Dunque questo contributo è

$$B_V = a_V A \quad (8)$$

ed è l'**unica energia legante**. Sperimentalmente $a_V \simeq 16 \text{ MeV} > 8 \text{ MeV}$ dunque mi attendo che gli altri contributi vadano ad abbassare questo risultato

- Termine di superficie. Geometricamente, i nucleoni in superficie sono legati a meno altri nucleoni dato che hanno meno particelle a distanza utile di interazione. Dato che il raggio nucleare è proporzionale alla radice cubica di A e la superficie scala come il raggio al quadrato,

$$B_S = -a_S A^{2/3} \quad (9)$$

- termine di Coulomb. Considerando che i protoni sono carichi, questi si respingeranno l'un l'altro favorendo la loro separazione e diminuendo l'energia di legame. Assumendo una distribuzione di carica uniforme nel nucleo, allora $\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3}$. Ma ad \vec{E} possiamo associare $u_E = \frac{\epsilon_0}{2} E^2$ densità di energia, possiamo trovare con Gauss quanto vale E e sommando le componenti avrà $U_E = \int u_E = \frac{3(Ze)^2}{20\pi\epsilon_0 R}$, contributo energetico **dipendente dalla carica e da $R \propto \sqrt[3]{A}$** . Questo termine avrà la forma

$$B_C = -a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad (10)$$

- termine di (a)simmetria. Allontanandosi dalla valle di stabilità i nuclei hanno energia di legame sempre minore: quindi se ho asimmetria tra numero di protoni e neutroni mi aspetto un contributo negativo alla binding energy. Possiamo distinguere in un contributo di **energia potenziale** e di **energia cinetica**.

Per il **contributo di energia potenziale**, distinguendo l'energia di interazione pp da nn da pn, e sperimentalmente si trova che quella tra nucleoni diversi è due volte quella tra nucleoni uguali. Ma sapevamo che la forza nucleare non dipende dalla carica, quindi non dovrebbe cambiare: tuttavia, dal punto di vista quantistico, sono fermioni a due stati di spin che non possono, per Pauli, condividere lo stesso autospazio di posizione e di spin (non avrà due p vicini con spin paralleli). Ma un p e un n possono star più vicini accoppiandosi per formare un sistema a $S=0$ (singlet) o $S=1$ (triplet), che sono quindi 4 canali diversi cosa che raddoppia il fattore di interazione.

Per il **termine cinetico** tornando al modello a gas di Fermi, ipotizziamo che attorno ad E_F i livelli energetici siano tutti equi spaziati. Ponendo vicine le due buche di potenziale per p ed n, se voglio spostare due protoni nella buca dei neutroni devo occupare il livello superiore a quello già occupato, facendo fare un salto di ΔE a ogni protone, e per A fissato serve $E = \frac{(N-Z)^2}{8} \Delta E$ ma $\Delta E \propto \frac{dN}{\sqrt{E_F V}} \Rightarrow E = a \frac{(N-Z)^2}{A}$ con a costante. Ha la forma di quello del contributo potenziale! Concludiamo che **più asimmetria mi da meno stabilità** e il contributo alla binding energy per l'asimmetria è

$$B_a = -a_a \frac{(N-Z)^2}{A} = -a_a \frac{(A-2Z)^2}{A} \quad (11)$$

- termine di Pairing. Legato a fenomeni sui **nuclei isobari**, sia ha che per **A dispari il profilo della Binding energy è una parabola, mentre per A pari sono due distinte**. Dobbiamo considerare infatti che tra due nucleoni si ha un' *interazione residua* che favorisce l'accoppiamento di particelle a

spin opposto per dare $S=0$. Nel caso più favorevole, detto **even-even**, per ogni nucleone si ha uno di spin opposto da accoppiare (A pari, N e Z pari); Se si ha A dispari (Z pari ed N dispari o viceversa), caso **odd even**, vi è un nucleone spaiato, mentre per A dispari, Z e N dispari, **odd-odd**, abbiamo accoppiamento n-p.

Questo porta ad un contributo

$$B_P = a_P f(A) \quad (12)$$

con $f(A)$ ancora ad oggi discussa, momentaneamente setta a $\pm \frac{1}{\sqrt{A}}$ mentre a_P è 12 MeV per even even, -12 MeV per odd-odd, 0 per odd-even.

Capiti i contributi, ipotizziamo ora che la massa nucleare sia la somma delle masse dei nucleoni cui viene sottratta la massa che ($E = mc^2$) serve per legare i nucleoni tra loro: allora possiamo stimare la massa totale del nucleo come $M(A, Z) = Zm_p + (A - Z)m_n - B(A, Z)$. Plotando i risultati, si vede che si hanno eccessi di stabilità sperimentale per i nuclei magici, ma il massimo della curva coincide con il massimo sperimentale che si ha per $A \sim 60$.

Notiamo poi che la massa nucleare per A fisso ha la forma di una parabola verso l'alto, detta **parabola di massa**:

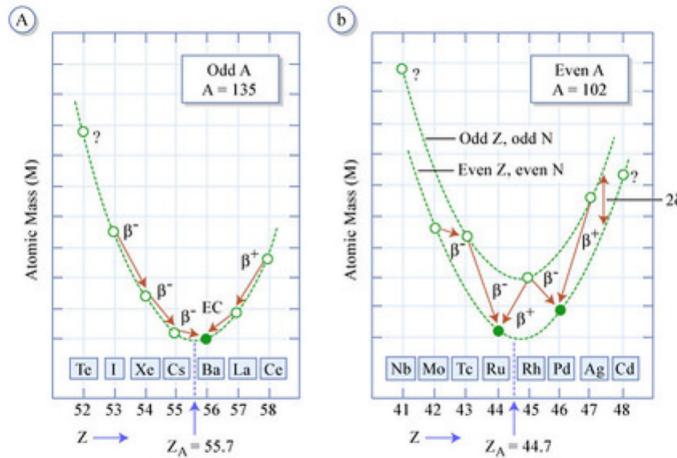


Figura 2.5: Massa nucleare in funzione di Z per A fissato dispari (a) e pari (b).

Guardando quella a sinistra, nel caso A dispari, noto subito che al crescere di Z si ha sovrabbondanza di protoni, dunque nuclei instabili che tenderanno a tornare verso il minimo trasformando protoni in neutroni (β^+ decay), mentre a sinistra dove ho meno protoni succede il contrario (β^- decay). Z_0 è **unico valore di isobaro stabile** e ogni altro isobaro evolve spontaneamente verso di lui, come conseguenza della SEMF. Più è grande il salto di energia, più veloce sarà il β decay. Guardiamo ora il caso a destra, con A pari. Abbiamo due parbole di energie diverse. Vediamo subito che il termine di pairing assume valori differenti per Z pari (E minore) o dispari (E maggiore), shiftando verticalmente i punti: quindi avremo dei salti tra le due parbole, e potrebbe esserci uno stato diverso dal minimo per il quale effettuare un decay sarebbe meno conveniente. Si evince subito che **non si hanno isobari stabili con Z dispari dato che ci sarà sempre un isobaro pari ad energia inferiore**, con eccezione per alcuni nuclei molto leggeri dove l'accoppiamento è significativo e le parbole sono molto vicine.

2.3.4 Deutone

E' il più piccolo (e unico stabile in natura) sistema legato di due nucleoni; ha energia di legame molto più piccola degli altri ($\simeq 2.224 \text{ MeV} \Rightarrow B/A = 1 \text{ MeV}$).

Matematicamente, ho sei coordinate per descrivere le particelle: togliendo i 3 vincoli per le traslazioni e 2 per le rotazioni, mi trovo con un grado di libertà. Potrò quindi descrivere il tutto in base alla distanza relativa tra i due nucleoni. Definendo il raggio del CM come metà della somma dei due raggi relativi di protone e neutrone, e la posizione relativa come differenza tra i due, ho Hamiltoniana $\hat{H} = \frac{\vec{P}_p^2}{2m_p} + \frac{\vec{P}_n^2}{2m_n} + V(\vec{r}_n, \vec{r}_p) = \frac{\vec{P}_C^2}{2M} + \frac{\vec{P}_r^2}{2\mu} + V(|\vec{r}_r|)$ con potenziale centrale: posso quindi separare energia del Centro di massa da energia nel

sistema del centro di massa, separando le autofunzioni per energia nel cm in radiale ed angolare (armoniche sferiche) ottenendo

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \underbrace{[V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}]_{V_{eff}}}_{u(r)} = Eu(r)$$

Ricordando che voglio un potenziale a corto raggio, nel modello di Fermi con buca finita avrò equazione di Shrodinger sinusoidale nella buca e decadrà esponenzialmente fuori, dato che le soluzioni dell'equazione differenziale sono vincolate ad annullarsi a zero (no penetrazione particelle) e infinito (nuclei comunque legati) oltre che debbano esser continue sul bordo della buca. Vediamo dunque che ho probabilità non trascurabile di avere un r fuori dalla buca, cioè p e n più distanti del raggio nucleare. Ovviamente, per $l=0$ ho lo stato fondamentale e trovo la soluzione annullando il potenziale centrifugo, oltre che cercando E_{j0} dato che voglio stati legati.

2.3.5 Modello a Shell

Ispirato alla fisica atomica, è un **modello quantistico** ove si hanno elettroni su gusci di valenza a diverse distanze dal nucleo, deriva dall'evidenza sperimentale che i nuclei magici hanno più stabilità di quanto previsto dalla SEMF. Tratta le interazioni tra tutti i nucleoni in campo medio, vedendo il core formato da $A-1$ nucleoni e aggiungendo l' A -esima particella con vettore posizione \vec{r} vedendo come interagiscono i due sotto effetto del campo medio $\mathbf{U}(\vec{r})$ dato dalla somma delle interazioni tra tutti gli altri nucleoni. Si studia così una H a soli tre gradi di libertà della particella A -esima, e questo modello ci permette, a differenza di quello di Fermi, di avere info anche su alcuni stati eccitati.

2.3.6 Modello a shell atomico

Osservando i dati sperimentali, si vede che l'energia di ionizzazione cresce fino ad un massimo relativo, per poi decrescere repentinamente fino a un minimo relativo e poi ripetere lo schema: i picchi di stabilità sono in corrispondenza dei **gas nobili**, che immediatamente vediamo corrispondere ai nuclei magici.

Altra proprietà è che relazionando la soluzione all'equazione agli autovalori con la densità di carica radiale, che è la probabilità di trovare un elettrone ad una certa distanza dal nucleo, si vedono dei chiari picchi a valori di r corrispondenti al raggio medio dei gusci di valenza di vari livelli energetici. Ma per fare l'analogia con il nucleo devo ricordare che non abbiamo una specie ma due, p e n , e che l'equivalente dell'energia di ionizzazione è l'energia di legame protonica o neutronica, molto più grande della prima (10^5) ed è diversa per ogni isotopo, mentre la prima è definita solo sulla base di Z .

Vediamo sperimentalmente che

- in gruppi di nuclei isobari si hanno, per l'energia di legame, dei picchi sui nuclei magici, una decrescenza rapida e poi dei trend di salita e discesa come per l'energia di ionizzazione;
- Per nuclei even-even, esiste sempre un isotopo con N e Z magici tale che la differenza di energia tra stato fondamentale e primo stato eccitato è tanto più grande rispetto agli altri isotopi
- la sezione d'urto neutronica, che quantifica la propensione di un nucleo ad accogliere un neutrone ed è proporzionale alle dimensioni del nucleo stesso, per i numeri magici è molto minore rispetto ai nuclei vicini, cosa che evidenzia ancora la loro stabilità

Mi aspetto dunque un'analogia!

2.4 Modello a shell nucleare

Definiamo **numero di fononi** il numero di **oscillazioni elementari**, o **modi normali**, del sistema quantistico in esame.

Mettiamoci in un potenziale 3D armonico, approssimandolo attorno al minimo come una buca parabolica di autovalori $E_n = (N + \frac{3}{2})\hbar\omega$ per sistemi di stessa *rigidità*, ossia con stesso $\mathbf{k} = \mu\omega^2$. Chiaramente, per diverse combinazioni di n_i posso avere stesso autovalore e mi aspetto ci sia dunque una degenerazione energetica di tipo dimensionale. Passando in coordinate polari è facile vedere che la degenerazione è

$$\sum_l 2(2l+1) = (N+1)(N+2) \quad (13)$$

Che ci porta ad avere uno spettro dell'oscillatore armonico 3D del tipo

N	n	ℓ	Deg.	Tot. stati $E \leq E_N$
0	0	0	2	2
1	0	1	6	8
2	0 1	2 0	12	20
3	0 1	3 1	20	40
4	0 1 2	4 2 0	30	70
5	0 1 2	5 3 1	42	112

Ove ad ogni N si associa una shell che può contenere tanti nucleoni quanta la degenerazione. Notiamo che il numero di posti disponibili all'inizio sono i primi numeri magici: significa che indicano il numero di nucleoni che riempiono completamente i livelli energetici di $N=1,2,3$. Poi però si devia da questo standard: significa che le nostre ipotesi vanno bene solo vicino al minimo del potenziale, dove approssimarla a una parabola è sensato. Per migliorare le stime usiamo un potenziale di **Woods-Saxon**:

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + \exp(\frac{r-R}{a})} \quad (14)$$

che è a *profilo di fermi* ed è proporzionale alla densità, cioè per grandi distanze dal nucleo la particella quasi non è interagente (per densità nulla potenziale nullo) e per r piccolo la particella sarà verso il centro del nucleo, stabilmente legata agli altri nucleoni, mentre nel mezzo si avrà una crescita più o meno rapida a seconda della dimensione del nucleo (nucleo più grande implica buca più dolce perchè mi aspetto più lunga interazione con nucleoni del core). A questo potenziale va aggiunto poi un contributo che interessi la repulsione protonica, oltre allo **spin-orbita**. Di fatto, i nucleoni a spin non nullo interagiscono con il moto relativo dei protoni attorno ad essi che genera un campo magnetico che a sua volta porta ad uno splitting delle righe spettrali, rimuovendone la degenerazione. È un contributo positivo per $\vec{S} \parallel \vec{L}$, nullo se $l=0$ e negativo altrimenti.

Due utili definizioni sono quella di

- shell: livello energetico associato all'autovalore E_N a meno di correzioni S-O. Sono distinte da salti energetici dell'ordine dei 10 MeV.
- subshell: raggruppamenti di sottolivelli energetici ben individuati dalle correzioni S-O che distano tra loro $\sim 1\text{MeV}$. Può essere un singolo livello di particella singola o più livelli energeticamente molto prossimi.
- livelli di particella singola: singoli sottolivelli in cui si può collocare un nucleone.

Ora capiamo che è facile muoversi tra le subshell piuttosto che saltare ad uno stato successivo visto che serve molta più energia, e dunque viene giustificata la stabilità dei gusci.

Questo modello è molto funzionale per stato fondamentale e un sottoinsieme di livelli eccitati dei nuclei. Chiamiamo **chiusa** una shell che contiene il massimo dei nucleoni che può ospitare, e ha **momento angolare totale nullo**, dato che nel sottolivello si hanno $(2j+1)$ particelle e per ognuna c'è quella con m_j di segno opposto. La stabilità di un guscio completo si manifesta anche nella sua scarsa interazione con un campo magnetico. Estendendo il ragionamento, si ha che **per un nucleo con nucleoni che riempiono tutte le shell meno una, nella quale c'è un solo nucleone o le manca un nucleone per esser chiusa, è univocamente determinato valore e parità del suo momento angolare totale**. Nel caso le shell occupate siano tutte chiuse e non contribuiscono al J totale, nel caso ci sia un solo nucleone fuori dalle shell chiuse esso è l'unico disaccoppiato e quindi unico a spostare j dallo zero, nel caso manchi un solo nucleone per chiudere la shell qualunque sia il valore di m_j del nucleone che non ha la particella in grado di compensarlo, il valore di j è dato dallo stato occupato e lo stesso varrà per la parità.

2.5 Modello collettivo

Ha l'obiettivo di studiare le prime eccitazioni del nucleo attraverso la sua geometria, trattandolo come un insieme e supponendo dunque che tutti i nucleoni partecipino simultaneamente ai

modi vibrazionali del nucleo. Ipotizzo di avere il nucleo uguale ad una goccia di liquido estremamente denso e incomprimibile, tale da avere una forma all'equilibrio.

Dobbiamo studiare dunque un'Hamiltoniana corrispondente a una goccia di fluido sollecitata che vibra, e i modi di vibrazione saranno quantizzati. Ricordando che la più semplice deformazione di una sfera è un solido con due proiezioni ellittiche ed una circolare, si avranno due semiassi di lunghezza uguale ed uno di lunghezza diversa (mettiamolo lungo z). Se quello su z è più lungo, il solido è **un ellissoide prolato**, al contrario si dice **ellissoide oblato**.

Partendo dunque dalla parametrizzazione basic di una sfera, $\mathbf{R}(\theta, \phi) = \mathbf{R}_0 = \text{const}$, posso generalizzarla a un qualsiasi ellissoide aggiungendo termini correttivi in funzione delle armoniche sferiche del tipo

$$\mathbf{R}(\theta, \phi) = \mathbf{R}_0(1 + \alpha_{00}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha *_{\lambda, \mu} (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) Y_{\lambda}^{\mu}(\theta, \phi)) \quad (15)$$

Dove ipotizziamo subito $\alpha_{00} = 0$ per preservare il volume della sfera, dato che la nostra goccia non è comprimibile. Per gli altri contributi

- $\lambda = 1$ corrisponde a traslazioni spaziali, trascurati dato che riguardano eccitazioni estrinseche
- $\lambda = 2$ corrisponde a **vibrazione quadrupolare**, cioè fluttuazione come contrazione e dilatazione della sfera lungo gli assi principali
- $\lambda = 3, 4$ sono correzioni ottupolari, esadecupolari ecc. corrispondenti a deformazioni su assi secondari.

2.5.1 Nuclei even-even

Nel caso di nuclei **even-even**, ove ci aspettiamo una simmetria per scambio di particelle, possiamo fermarci a $\lambda = 2$ e fare uno studio decente (pg xlvii). Nei nuclei non pari-pari la presenza di un nucleone spaiato non giustifica più la richiesta dell'ellissoide. Tornando al caso basic dei nuclei pari-pari e trascurando i casi ove $\lambda > 2$

$$\mathbf{R}(\theta, \phi) = \mathbf{R}_0(1 + \sum_{\mu=-2}^2 \alpha_{2,\mu} * Y_2^{\mu}(\theta, \phi)) \quad (16)$$

E avremo cinque coordinate generalizzate per parametrizzare la superficie, che vivono in uno spazio 5D. Possiamo ridurre le variabili osservando che le armoniche $Y_2^{\pm\mu}$ differiscono per una fase inglobabile nel termine di fase assoluto, e ruotando di opportuni angoli nello spazio delle coordinate generalizzate tramite un tensore di rango due al fine di allineare gli assi cartesiani a quelli dell'ellissoide nucleare. Così $\alpha_{2,\nu} = \sum_{\mu} \alpha_{2,\mu} D_{\mu,\nu}^2 \Rightarrow \alpha_{2,\pm 1} = 0$ dato che stiamo trattando autofunzioni pari in theta e phi, e $\alpha_{2,\pm 2} = \alpha_{2,2}$ per simmetria di riflessioni sull'ellissoide. Abbiamo solo due parametri, yay! Siamo quindi in 2D e per comodità settiamo $\alpha_{2,0} \parallel \hat{x}, \alpha_{2,2} \parallel \hat{y}$ e cambiamo le variabili in coordinate polari per giungere a $a_{20} = \beta \cos \gamma, \alpha_{22} = \frac{\beta}{\sqrt{2}} \sin \gamma$ dove β è **parametro di deformazione** ed è reale, mentre $\gamma \in S^1$ è la **deviazione dalla simmetria assiale dell'ellissoide**.

Si vede più o meno semplicemente che a meno di ridenominazione assiale troviamo la stessa figura che ruota di 120° e quindi possiamo studiare semplicemente che accade per $\gamma, \beta \in [0^\circ, 60^\circ]$. Fissando γ zero e modificando β vediamo subito che da esso dipende l'allungamento della forma, che è tanto più pronunciato quanto più β cresce. Vale $\beta = \sum_{\mu=-2}^2 |\alpha_{2,\mu}|^2$.

Fissiamo ora β e vediamo che succede a gamma: se cresce il suddetto cresce il contributo delle armoniche sferiche, la dipendenza da ϕ non sarà più nulla e l'ellissoide non sarà più allineato agli assi cartesiani, da cui vediamo che γ determina la deviazione dalla simmetria assiale.

2.5.2 Hamiltoniana di Bohr

Torniamo all'approssimazione in 5D e consideriamo un **potenziale armonico** descrivente una buca di potenziale parabolica in 5 dimensioni:

$$\hat{H} = T + V = \sum_{\mu=-2}^2 \left[\frac{|\pi_{\mu}|^2}{2B} + \frac{1}{2} C |\alpha_{\mu}|^2 \right] \quad (17)$$

dove vediamo analogia con il caso 3D, e in particolare B e C sostituiscono massa ridotta e costante elastica k, mentre i π_μ sono i momenti generalizzati al posto dei P tali che $[\alpha_\nu, \pi_\mu] = i\hbar\delta_{\mu,\nu}$ analogo al commutatore tra x e p. Possiamo scrivere comodamente

$$\hat{H} = \mathbf{T}_{vibrazionale}(\beta, \gamma) + \mathbf{T}_{rotazionale}(\theta_i) + V(\beta), V(\beta) = \frac{C}{2}\beta^2 \quad (18)$$

Mi aspetto che gli autovalori siano $E_n = (N + \frac{5}{2})\hbar\omega$, $N = \sum_{\mu=-2}^2 n_\mu = 2n_\beta + \tau$, $\omega = \sqrt{\frac{C}{B}}$ e gli autovalori non dipendono dalle coordinate angolari. Vediamo anche che N è somma di due contributi, uno radiale e uno angolare, che ricorda un po' la definizione di fononi con la degenerazione dimensionale annessa: come un fonone è analogo ad un quarto di onda sonora, ossia un'onda di pressione che deforma una membrana mettendola in vibrazione, analogamente immaginiamo di poter sommare i modi vibrionali per portare a strati superiori l'eccitazione.

Le deformazioni possono essere di tipo β , con fononi n_β per cui si ha una fluttuazione assiale per un semiasse solo, quindi lo sferoide si appiattisce o stira lungo un solo asse; oppure di tipo γ , con fononi n_γ per cui non si ha una simmetria assiale e l'effetto è quello di un ellissoide che si comprime in una direzione e si dilata nell'altra.

2.6 Schema riassuntivo per i modelli nucleari

- **Modello a gas di Fermi:** tratta il nucleo come gas di particelle quantistiche che occupano stati energetici discreti degeneri nel modello della buca di potenziale infinita o finita, raffinando i conti. La natura fermionica garantisce che due sole particelle possano condividere lo stesso livello energetico. L'energia termica è trascurabile e dunque tutti i nucleoni occupano gli stati energetici ad energia più bassa, fino a quella massima che chiamiamo energia di Fermi. E' un **modello statistico** che ci permette di trovare che l'energia media dei nucleoni ha ordine di grandezza del MeV.
- **Modello a goccia di liquido:** modello collettivo che descrive l'insieme dei nucleoni come molecole in un fluido soggetto a interazioni a corto raggio (alla Van der Waals) ipotizzando che energia media e densità siano uniformi. Nasce da osservazioni sperimentali.
- **SEMF:** formula che permette di approssimare bene l'energia di legame del nucleo partendo dai suoi costituenti. Consta di termine di volume (conta effetto della forza nucleare a corto raggio), termine di superficie (conta la minor interazione dei nucleoni esterni), termine di Coulomb (conta la repulsione eletrostatica p-p), termine di asimmetria (conta la diversa intensità tra interazioni pp piuttosto che nn piuttosto che np), termine di pairing (segno indefinito, conta la possibilità che p ed n possano accoppiarsi con nucleoni uguali, aumentando o diminuendo la simmetria)
- **Deutone:** presenta un unico stato legato. Si studia l'Hamiltoniana cambiando le coordinate e riducendo il problema da 6 a 1 coordinata, la differenza di posizione tra n e p, in ipotesi di potenziale centrale. Si usa una buca di potenziale finita in altezza e larghezza pari al raggio del Deutone stesso.
- **Modello a shell nucleare:** vedendo che i nuclei magici sono più stabili delle predizioni della SEMF, analogamente al caso di modello a shell per l'atomo si studia l'effetto del potenziale generato dal core sull'ultimo nucleone rimasto, ipotizzando inizialmente potenziale armonico e poi della forma di Woods-Saxon aggiungendo il contributo di spin orbita .
- **Modello collettivo:** studia i primi livelli energetici del nucleo trattandolo come una goccia densa di fluido la cui geometria oscilla attorno alla forma sferica di equilibrio. Per l'Hamiltoniana si parametrizza con coordinate generalizzate ed armoniche sferiche.

2.7 Reazioni nucleari

2.7.1 Fissione nucleare

Avviene per nuclei pesanti ($A > 60$) nei quali l'energia di legame scende rispetto al massimo; non avviene tuttavia per tutti i nuclei pesanti a causa della **barriera di fissione**, una barriera di potenziale ($\sim 6 \text{ MeV}$ per $A = 240$) *geometrico* che si crea nella deformazione di un sistema sferico e che cresce all'aumentare della deformazione, iniziando a diminuire solo vicino alla scissione: significa quindi che se il nucleo comincia ad allungarsi per scindersi, esso potrà anche non farlo e tornare alla sua configurazione originaria se non supera l'**energia critica**. La forma e l'altezza della barriera determinano la probabilità che avvenga **fissione**

spontanea: per nuclei transuranici questa probabilità è molto elevata, ed è per questo che la carta dei nuclidi si ferma ad $A \sim 240!!$

- Fissione spontanea.

Prendiamo un **ellissoide prolato**, con un semiasse più lungo degli altri due ($a = c = R < b = R(1 + \epsilon)$). Ora possiamo scrivere

$$M(A, Z) = Nm_N + Zm_Z - B(A, Z) \quad (19)$$

per la sfera e

$$M(A, Z)_\epsilon = Nm_N + Zm_Z - B(A, Z)_\epsilon \quad (20)$$

Per l'ellissoide, quindi $\Delta M = M(A, Z) - M(A, Z)_\epsilon = B(A, Z)_\epsilon - B(A, Z) = \Delta B$ e avremo più stabilità per l'ellissoide se $\Delta B > 0$, quindi più elongazioni spontanee che favoriranno la fissione.

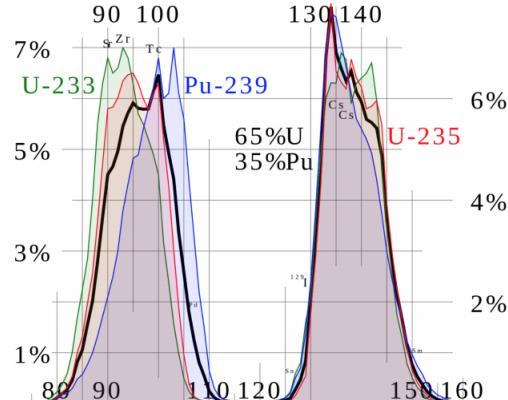
Prendiamo la SEMF termine a termine: I termini di volume di sfera ed ellissoide sono uguali (abbiamo assunto che il volume rimanesse uguale per incomprimibilità nel modello a goccia); i termini di superficie invece cambiano: la sfera è quella con superficie minima, quindi l'ellissoide avrà contributo superficiale maggiore. Sviluppando $\sqrt{1 + \epsilon} = 1 + \frac{\epsilon}{2} + \dots$ allora trovo il termine per l'ellissoide che sarà $a_S A^{\frac{2}{3}} (1 + \frac{2}{5} \epsilon^2)$. Per il termine di Coulomb, l'ellissoide avrà contributo inferiore in modulo dato che i protoni hanno distanza maggiore a cui mettersi e dunque minore interazione elettrostatica: la sua forma è $a_C \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} (1 - \frac{1}{5} \epsilon^2)$. Termine di simmetria e di pairing non dipendono dalla forma geometrica e quindi restano uguali nei due solidi.

Si ottiene dunque un $\Delta B > 0 \iff \frac{Z^2}{A} > \frac{2a_s}{a_C} \approx 50$, cioè il sistema è stabile per deformazioni per $Z > 114$, $A > 270$, anche se in realtà raffinando l'analisi si trova $\frac{Z^2}{A} > 35$ che riguarda tipo isotopi dell'uranio che hanno vite brevissime. Importante ricordare che la fissione permette ai nuclei figli di esser molto più stabili, ma la rottura dei legami nella fissione libera tantissima energia.

- Fissione indotta.

Si inizia bombardando un nucleo pesante con un neutrone per generare un nucleo con numero atomico maggiore di uno rispetto all'originario: il bersaglio potrebbe dunque esser portato ad una condizione più favorevole alla fissione, portando alla scissione in più nuclei leggeri ed è perciò detta **fissione indotta**. Essa può dar luogo ad una reazione a catena che si auto alimenta e cresce esponenzialmente (come nelle bombe nucleari, mentre in lab ci sono dei nuclei leggeri che assorbono neutroni controllando la reazione).

Spesso i nuclei figli della fissione non sono stabili e in tempi brevi decadono rilasciando protoni (β^- -decay), dato che la fissione spesso non genera nuclei simmetrici ma specie con $Z < N$ localizzate lungo il pendio inferiore della carta dei nuclidi. Guardiamo la curva che otteniamo relazionando la probabilità di trovare un nucleo di massa A come prodotto di fissione:



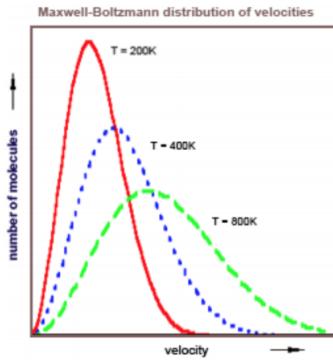
e vediamo subito che attorno ad $A = 235 \pm 4$ le reazioni simmetriche sono molto rare e cadono al minimo della curva, poi ho due picchi pronunciati.

2.7.2 Fusione nucleare

Detta anche **reazione termonucleare**, è il processo secondo cui **due nuclei leggeri si fondono per creare un nucleo più pesante e stabile**, e anch'essa libera energia, senza il rischio di prodotti indesiderati, cosa che la rende una fonte di energia (inferiore rispetto alla fissione) molto più pulita. Essa necessita di **un'elevata energia di innescio, atta a superare la repulsione coulombiana tra nuclei**.

Definiamo **Q-Value** la quantità di energia corrispondente al **bilancio netto di una reazione di fusione**, dato da $Q = -\Delta Mc^2 = (M_i - M_f)c^2$. Se $Q > 0$ allora la reazione sarà spontanea e il Q è l'energia liberata, per $Q < 0$ esso è il valore di energia da fornire per innescare la reazione non spontanea.

Anche in questo caso servirà superare un **barriera coulombiana** di potenziale, cui corrisponde **un'energia critica** di innescio, data dalla repulsione coulombiana tra i nuclei che ovviamente hanno carica positiva. Altra difficoltà deriva dal fatto che le nostre particelle sono un plasma (gas di particelle quasi totalmente ionizzato e globalmente neutro, che troviamo in genere ad altissime temperature e fornisce grande schermo dai campi elettrici) che segue quindi la **statistica di Maxwell-Boltzmann** secondo cui le velocità medie per nucleo si distribuiscono in *curve a campana*, e serve alta temperatura per ottenere le code di queste curve, che sono le particelle che hanno energia cinetica superiore alla soglia critica (assieme a quelle che la superano per *effetto tunnel*). **Perciò è utopia la fusione a freddo!**



Prendiamo ora il Sole, fatto al **75%** da idrogeno ionizzato. L'attrazione gravitazionale al suo interno è tanto intensa che l'H all'interno è super compresso e sotto una pressione tale da scaldarlo molto: le collisioni tra atomini H sono dunque tantissime! Gli urti danno origine a reazioni termonucleari che liberano energia fino al punto che il potenziale gravitazionale comprimente il nucleo compensa l'energia di fusione nello stesso, giungendo all'equilibrio e all'auto sostentamento.

Le **reazioni nel Sole seguono la catena p-p**:

- abbiamo una prima collisione ad alta energia tra due protoni che, non potendo creare un *di-protone* trasformano un protone in un neutrino generando l'emissione di un neutrino e un positrone, cosicché neutrone e protone formino il Deuterio, liberando **1.44MeV** di energia per l'annichilazione successiva del positrone.
- Il deuterio neonato è circondato da un mare di protoni, quindi la reazione successiva coinvolge deuterio e un protone che fondono a formare **3He** e liberando un γ (che essendo la stella desissima ci metterà tipo qualche centinaio di migliaio di anni per giunger alla superficie); avviene su un tempo brevissimo $\tau \sim 6s$ e libera **5.49MeV**.
- Infine, l' **3He** fonde con un altro **3He** prodotto da un'altra catena analoga (che ha probabilità più bassa dello step precedente) liberando **12.85MeV** e producendo un nucleo **4He** e due protoni liberi. Chiaramente, per avere alto rendimento le energie cinetiche dei protoni devono essere $\sim 10keV$, cosa che corrisponde ad un'energia termica di $E = k_B T \simeq 10^7 - 10^8 K$, e a queste T il nucleo solare è fatto da **plasma**!

2.8 Decadimenti

Un **decadimento** è un processo di reazione nucleare a più prodotti che ha come reagente un **unico nucleo**. Quindi abbiamo un nucleo *madre* che emette energia/materia sotto forma di particelle trasformandosi in un *nucleo figlio*.

2.8.1 Alpha

Vengono emessi 4 nucleoni, sotto forma di nucleo di ${}^4He = \alpha$. Si genera il nucleo figlio più la α che ha carica +2 e in genere di $E \sim 5MeV$ poco penetrante e riguarda nuclei pesanti ($A > 200$).

Ha la forma



LE α emesse hanno energie tipiche tra i 4 e gli 8 MeV, mentre i nuclei soggetti a decadimenti Alpha hanno vite medie altamente variabili, tra i microsecondi e le decine di milioni di anni. Ricordiamo subito che l' 4He è il primo nucleo doppio magico

Le emissioni α sono monocromatiche, cioè esistono specifici valori di energia per ciascun decadimento: maggiore è l'energia della α , maggiore sarà la differenza di energia tra lo stato nucleare di partenza e di arrivo. Idealmente un nucleo potrebbe decadere α per andare in qualunque stato energetico purchè di minore energia rispetto a quello di partenza: è ragionevole pensare che maggiore sia lo scompenso energetico, maggiore sia la probabilità di avere decadimento, infatti la vita media per decadimenti con grandi salti è molto minore di quella a salti più piccoli.

Ricordandoci la definizione di **Q-Value**, e che per $Q > 0$ si ha emissione spontanea, si vede che si può ottenere una sua stima come misura dell'energia dell'Alpha emessa! Infatti se si ha $X \rightarrow Y + \alpha$ allora

$$\vec{P}_x = 0 = \vec{P}_y + \vec{P}_\alpha \quad E_x = M_x = K_y + M_y + K_\alpha + M_\alpha \Rightarrow K_y + K_\alpha = M_x - (M_y + M_\alpha) = Q \quad (22)$$

Quindi

$$Q = K_y + K_\alpha \sim K_\alpha \quad (23)$$

dove abbiamo trascurato il rinculo del nucleo figlio: l'energia della alpha sarà positiva solo per Q-val positivo, quindi nel processo parte dell'energia di massa iniziale diventa cinetica della alpha.

Anando a rivedere la grande differenza tra le vite medie delle particelle che effettuano questo decadimento, nei quali passano 24 ordini di grandezza, osserviamo che per un valore di energia della alpha fissato si ha una dipendenza della vita media da Z: a Z maggiore corrisponde vita media più lunga ed il profilo sperimentale per nuclei pari-pari con Z tra 90 e 100 è ben descritto dalla legge empirica di Geiger-Nuttal, secondo cui

$$\ln(\tau) \propto \frac{Z}{\sqrt{Q}} \quad (24)$$

Andiamo a vedere quale è la condizione per avere il decadimento: ricordando che deve essere $Q > 0$, con le predizioni della SEMF troviamo che ciò vale per $A > 60$, ma in realtà per nuclei così leggeri non si vede in natura un decadimento alpha, dato che altri decadimenti sono più convenienti.

Impostiamo allora il valore di soglia $Q \sim E_\alpha \in [4, 8]MeV$, e risolvendo ora troviamo $200 < A < 240$, sotto i 4 MeV i tempi di decadimento sono talmente lunghi che non si osservano.

Cerchiamo di spiegare il perchè di vite medie così lunghe nei decadimenti alpha; ipotizziamo di avere la particella α già fatta all'interno del nucleo: allora possiamo calcolare quanto ci mette mediamente ad uscire in modo molto semplice come

$$t = \frac{R}{v_\alpha} = \sqrt{\frac{m_\alpha c^2}{2E_\alpha}} \cdot R \approx 7 \cdot 10^{-22}s \quad (25)$$

Dove abbiamo messo $R \sim 10fm$, $E_\alpha 4MeV$.

E' una stima in contraddizione con i dati, dato che il nucleo interagisce con la particella e la rallenta. Possiamo dire, in prima approssimazione, che nel nucleo prevalgono le forze nucleari e quindi il potenziale sarà tipo la buca finita come nel modello a gas di Fermi, mentre all'esterno l'interazione è dominata da quella coulombiana e scende quindi col classico profilo iperbolico. Aggiungendo la condizione di continuità del potenziale e quindi il raccordo a $r=R$, troviamo

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r \leq R \\ \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} & r > R \end{cases}$$

da cui $B = V(R) = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R} \approx 30MeV$, ma l' α ha energie sotto la decina di MeV!! Quindi classicamente la particella non può uscire dal nucleo e ci dovrebbe essere completa stabilità nucleare. Ma noi bravi fisici sappiamo dell'esistenza dell'effetto tunnel: particelle quantistiche possono attraversare una barriera di potenziale di energia maggiore rispetto a quella che ha a disposizione, mantenendo la propria energia. Questo poichè la particella la possiamo descrivere matematicamente con una funzione d'onda che dal lato incidente si riflette sulla barriera creando un'onda stazionaria, ma per continuità all'interno della

barriera non si azzerà immediatamente ma decade esponenzialmente con la distanza con dipendenza da $k(r)$. Dall'altra parte della barriera ho un'altra onda stazionaria di ampiezza minore ma non nulla con conseguente probabilità non nulla di trovare la particella.

In questa trattazione dobbiamo **necessariamente assumere che la α sia già esistente nel nucleo e si muova con $E_\alpha = Q$ verso la barriera**. Introdurremo quindi il **fattore di preformazione P_α** che rappresenta la probabilità che la alpha esista nel nucleo.

Pensiamo che la funzione d'onda del nucleo padre sia $\Psi_A(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A)$ e che il sistema composto sia dato dalla composizione con prodotto tensore delle funzioni d'onda di nucleo figlio, alpha e moto relativo dei due prodotti, ossia $\Psi_{A-4} \otimes \Psi_\alpha \otimes \Phi(\vec{r}_\alpha)$. Allora il prodotto di pre-formazione è la sovrapposizione delle due funzioni d'onda ossia

$$P_\alpha = |\langle \Psi_\alpha | P s i_{A-4} \otimes \Psi_\alpha \otimes \Phi(\vec{r}_\alpha) \rangle|^2 \quad (26)$$

e ci dice quanto è compatibile la funzione d'onda del nucleo padre con la sua scomposizione nel prodotto tensore tra funzione d'onda di alpha e nucleo figlio.

Tornando a come è fatto il potenziale, vediamo che si ha il massimo in R (di valore B), e abbiamo intersezione tra curva del potenziale e energia della alpha, in corrispondenza del raggio che chiamiamo b . Quindi per Q fissato abbiamo che la barriera di potenziale va da b a R : le soluzioni standard si trovano per r fuori dalla barriera, dove classicamente si avrebbe riflessione e sono detti **punti di inversione del moto**. Infine abbiamo la relazione $\frac{B}{Q} = \frac{V(R)}{V(b) - \frac{b}{R}}$.

Approfondiamo un attimo il concetto di effetto tunnel. **Sappiamo che la probabilità della particella di energia classicamente insufficiente per oltrepassare la barriera di potenziale è data dal coefficiente di trasmissione T** , il cui valore approssimativo lo possiamo ottenere vedendo la barriera lunga L come spezzata in n barrieree di lunghezza dr , potendola trattare (se n grande) come insieme di barriere rettangolari alte $V(r)$, recuperando l'analisi per la barriera rettangolare al cui interno i termini oscillanti che scrivo come esponenziali complessi diventano reali e quindi si ottiene

$$k(r) = \sqrt{\frac{2m(V(r) - Q)}{\hbar^2}} \quad (27)$$

e le funzioni d'onda sono

$$\begin{cases} \Psi_\alpha(r) = e^{-k(r)r} \\ \Psi_\alpha(r + \delta r) = e^{-k(r)(r + \delta r)} \end{cases} \Rightarrow T_{r \rightarrow r + \delta r} = \left| \frac{\Psi_\alpha(r + \delta r)}{\Psi_\alpha(r)} \right|^2 = e^{-2k(r)\delta r} \quad (28)$$

E la probabilità che la particella attraversi la prima barriera sarà il coefficiente $T_1 = e^{-2k(R)\delta r}$ e così via. Per oltrepassare tutte le barriere, ho probabilità pari al prodotto di tutte le probabilità ossia $T = \prod_{j=1}^n T_j = \exp(-2 \sum_{j=1}^n k(r + j\delta r)\delta r) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp(-2 \int_{r_i}^{r_f} k(r)dr)$ e quest'ultimo integrale lo chiameremo **fattore di Gamow**, che per $V(r) = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ vale $G_{Coulomb} = 2\alpha Z \sqrt{\frac{2mc^2}{Q}} [\arccos(\sqrt{\frac{Q}{B}} - \sqrt{\frac{Q}{B}}(\sqrt{a - \frac{Q}{B}}))]$ con α costante di struttura fine

2.8.2 Beta

un nucleone cambia natura, acquistando o cedendo una carica elementare ed emettendo un leptone carico (e^- , e^+) e un neutrino o antineutrino. Le particelle emesse con il nucleo figlio sono molto più leggere e più penetranti delle precedenti. Il fine di questo decadimento è ottimizzare il rapporto $\frac{N}{Z}$ dell'atomo originario, muovendosi verso la valle di stabilità. Ha forma generale

β^-	β^+
$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$	$p \rightarrow n + e^+ + \nu$
${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + e^- + \bar{\nu}$	${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + e^+ + \nu$

Ricordiamo che il segno del β è concorde con il leptone prodotto: all'elettrone e antineutrino prodotto corrisponde il β^- , al positrone e neutrino il β^+ . Analoghi processi sono la cattura elettronica, del tipo

$$p + e^- \rightarrow n + \nu \quad (29)$$

Però sappiamo che un protone libero è super facile da trovare in natura dato che non decade spontaneamente (lo fa ma in tempi lunghissimi), mentre un neutrone decade β^- dopo circa 15 minuti, quindi trovarlo in

natura è dura, molto più facile che stia nei nuclei dove mantiene il suo status per stabilità del sistema.

Il decadimento β è il metodo tramite cui un nucleo decade verso un isotopo più stabile: generalmente sono i nuclei odd-odd a decadere sia β^+ che β^- , ma anche un even-even tipo il ^{14}C può decadere verso un even-odd conveniente.

Concentriamo le attenzioni sul decadimento β^- , secondo cui

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu} \quad (30)$$

Non possiamo ipotizzare che l'elettrone sia già presente dato che il nucleo è fatto solo di cariche positive, quindi dobbiamo per forza assumere che esso venga creato nel processo di decadimento. Troviamo, a differenza della α del decadimento precedente, che lo spettro dell'elettrone emesso è continuo, con un massimo per un fisso valore energetico e con un arresto in un punto chiamato **end-point, pari al Q-value** della reazione. Dato che vediamo che l'elettrone ha energia inferiore al Q-value, cosa che non dovrebbe essere se fosse un procedimento a due corpi, dobbiamo ipotizzare che il processo sia a tre corpi per giustificare la parziale perdita di energia dell'elettrone, che da qualche parte il pezzo mancante di energia deve esserci per conservazione.

- **Teoria di Pauli:**

egli introdusse l'**ipotesi del neutrino**, secondo cui oltre all'elettrone venisse prodotta anche la suda detta particella, con energia cinetica tale da colmare il gap tra Q-value e energia dell'elettrone emesso. Se il processo fosse a 3 corpi anziché 2, allora si spiegherebbe la distribuzione continua dell'energia. Inoltre, volendo $E_\nu = Q - T_e$ si richiede implicitamente che la massa del neutrino sia nulla, altrimenti si avrebbe una quota di energia di massa non nulla e non si avrebbe $E_{\nu=0} \Rightarrow T_e^{max} = Q$, cosa che i dati sperimentali confermano. Nel decadimento β secondo ipotesi di Pauli si ha quindi

$$_A^Z X \rightarrow _{Z+1}^A Y + e^+(e^-) + \nu(\bar{\nu}) \quad (31)$$

- **Teoria di Fermi.**

Dall'ultima equazione, Fermi decide di andare avanti per definire la curva spettrale del decadimento, facendo 4 ipotesi fondamentali. La prima è il **poter trascurare l'interazione coulombiana tra elettrone e nucleo**, valida almeno per nuclei leggeri; la seconda è quella di **poter trascurare il rinculo del nucleo figlio**, cosa valida per ogni nucleo dato che $m_e \ll m_X$; la terza è quella di **considerare nulla la massa del neutrino**, cosa validata a posteriori ($m_\nu < 2keV \ll m_e \approx 500keV$); l'ultima ipotesi è quella di considerare **egualmente probabili tutte le possibili suddivisioni dell'energia tra elettrone e neutrino**.

Da queste ipotesi Fermi arriva a spiegare: **la forma continua degli spettri beta, la relazione tra vita media di decadimento ed energia massima Q di esso, la classificazione delle transizioni β e la definizione di regole di selezione**. La teoria si basa sulla **Golden Rule** di Fermi,

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |\hat{H}_{f,i}|^2 \frac{dn}{dE} \quad (32)$$

ove $\lambda = \frac{1}{\tau}$ è la probabilità di transizione da stato i a stato f, mentre $M = \hat{H}_{f,i} = \langle \Psi_f | \Psi_i \rangle$ con

$$\begin{cases} \Psi_i = \Psi_X \\ \Psi_f = \Psi_Y \otimes \Psi_e \otimes \Psi_\nu \end{cases} \quad (33)$$

E \hat{H} è l'Hamiltoniana di interazione che favorisce la transizione $i \rightarrow f$ che fermi ricondusse all'interazione debole. Chiaramente le Ψ di X e Y sono stimabili dai modelli nucleari introdotti, mentre quelle di elettrone e neutrino no. Ipotizziamo abbiano forma di onda piana del tipo $\psi_{e,\nu} = C \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r})$, ricordiamo che **dn/dE (detto fattore cinematico)** dato che determina la forma dell'energia cinetica dell'elettrone) è la **densità degli stati finali tra E ed E+dE** derivante dalla teoria del gas di Fermi.

Analizziamo la situazione: con il neutrino si ha ora $Q = T_e + E_\nu$ dove Q già contiene $m_e c^2$, ed $E_\nu = \sqrt{(m_\nu c^2)^2 + (cp_\nu)^2} = cp_\nu \Rightarrow p_\nu = \frac{E_\nu}{c} \Rightarrow T_e^{max} = Q = T_e + cp_\nu$ e l'ultima è massima,

come atteso, se $\mathbf{E}_\nu = \mathbf{0}$. Possiamo quindi scrivere $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_\nu = \mathbf{T}_e + \mathbf{m}_e c^2 + \mathbf{c} p_\nu \Rightarrow \mathbf{T}_e + \mathbf{c} p_\nu = \mathbf{Q} = \mathbf{E}_0 - \mathbf{m}_e c^2$ e ricordando che $dN = V \frac{4\pi p_e^2}{h^3} dp$ sia per il neutrino che per l'elettrone, troverò

$$\frac{dn}{dE_0} = \left(\frac{4\pi V}{h^3 c^3} \right)^2 (Q - T_e)^2 p_e^2 dp_e \quad (34)$$

ed integrando trovo un profilo per il numero di stati conteggiati ad una data energia per l'elettrone, da confrontare con i risultati sperimentali. Si vede che il profilo cresce con p_e in modo parabolico dove $p_e = 0 = T_e$ con massimo sempre parabolico legato a $(Q - T_e)^2$ e va a zero per $Q = T_e = T_e^{max}$. Sostituendo tutto ciò nella regola di fermi trovo, se $p_e^{max} = 2m_e T_e^{max}$ e $M = \hat{H}_{f,i}$ con M non dipendente da p_e

$$\lambda \simeq C|M|^2 f(E_0) \quad (35)$$

con $f(E_0)$ integrale di Fermi che corrisponde ad un integrale in dp_e , di valori tabulati.

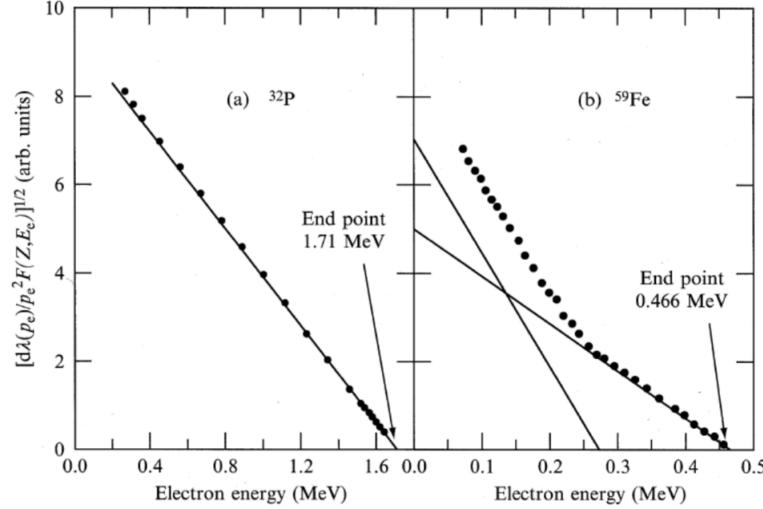
La formula 31 mostra una chiara simmetria in p_e , cosa che sperimentalmente non vale dato che la curva ha zone a maggior densità diverse per decadimenti β^+ e decadimenti β^- , notevoli soprattutto per nuclei pesanti. **Abbiamo infatti trascurato l'interazione elettrostatica con il nucleo!** Un elettrone prodotto nel nucleo sarà fortemente attratto da esso e perderà un bel po' di energia cinetica giungendo in superficie, mentre un positrone ne sarà accelerato avendo alla fine energia cinetica maggiore. I picchi dei conteggi saranno dunque spostati in direzioni opposte per i due tipi di decadimento beta, e per fare qualche conto più preciso dobbiamo considerare proprio il contributo coulombiano. **Il fattore correttivo è la funzione di Fermi**

$$F(Z_Y, E_e) \approx \frac{2\pi\eta}{1 - e^{-2\pi\eta}} \quad \eta = \mp \frac{Z_Y e}{\hbar v_e} \quad (36)$$

dove v_e è la velocità asintotica e η è il **parametro di Sommerfield**: se $\eta \ll 1$, $F \approx 1$ e il fattore si include nella regola d'oro di Fermi

$$d\lambda(p_e) = C|M|^2 F(Z_Y, E_e) (E_0 - E_e)^2 p_e^2 dp_e \Rightarrow K(E_e) = \sqrt{\frac{1}{F(Z_Y, E_e), p_e^2} \frac{d\lambda(p_e)}{dp_e}} \propto E_0 - E_e \quad (37)$$

detto **fattore di Kurie**, e il plot $K(E - e) vs E_e$ è il **plot di Fermi-Kurie**



Questo plot ci permette di **ottenere una stima precisa del Q-value dall'intercetta con l'asse x**. Vediamo anche una piega, detta *kink*, spiegata notando che per il nucleo disegnato si hanno due distinti decadimenti possibili, entrambi β^- ma verso livelli energetici diversi, e possiamo perciò trovare due diversi Q-value e un'approssimazione della probabilità di transizione come coefficiente della retta.

Dal grafico possiamo anche verificare che **la massa del neutrino è veramente approssimabile a zero**, dato che se $m_\nu \neq 0$ nel calcolo della densità di stati verrebbe meno la dipendenza quadratica da $E_0 - E_e$, la cui radice quadrata è il termine lineare del grafico. Quindi non sia ha più un andamento lineare

di K nell'energia, ma lo sarà solo in prima approssimazione per basse energie, andando come $-y^2 = x$ vicino all'*end-point*, cadendo a zero quanto più grande è la massa del neutrino. Ma sperimentalmente i dati sono lineari fino all'*end-point*, dunque la massa del neutrino è nulla o quasi!!

Consideriamo ora le **transizioni multiple**, ossia il fatto che **esistano diversi livelli del nucleo figlio con energia inferiore tali per cui la probabilità che il decadimento avvenga su quel livello è non nulla**, verificando che comunque il livello con probabilità maggiore è quello a energia minore.

Dopo aver integrato la funzione di $d\lambda$, possiamo ricordarci che il fattore d fermi è tabulato e, riarrangiando,

$$f(Z, E_0) t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(2)}{C|M|^2} = \frac{K}{|M|^2} \quad (38)$$

con K costante. Possiamo **risalire alla stima della probabilità di transizione da stato iniziale a finale $|M|^2$ dal prodotto tra f e tempo di dimezzamento**, tutti valori tabulati detti **ft-values**. Si usa generalmente una scala logaritmica data la vastità del range su cui vivono i tempi di dimezzamento e, ricordando che il prodotto f e t è inversamente proporzionale al quadrato dell'elemento di matrice M, allora **le probabilità di transizioni sono tanto maggiori quanto minore è $\ln(f \cdot t)$** . Possiamo distinguere le transizioni in

- **transizioni super permesse**. vale $\log(ft) \approx 3 - 4$ che corrispondono a vite medie molto piccole e sono i più probabili in assoluto;
- **transizioni permesse** con $4 \leq \ln(ft) \leq 9$, che sono la maggior parte dei casi ad alta probabilità;
- **transizioni proibite** che sono le più improbabili (non impossibili), con il logaritmo fino a 20 circa.

Cerchiamo una giustificazione teorica a tutto ciò. L'elemento di matrice è

$$M = H_{f,i} = \langle \Psi_f | \hat{H} | \Psi_i \rangle = \int_V \Psi_f^*(\vec{r}) \hat{H} \Psi_i(\vec{r}) d\vec{r} \quad (39)$$

Ipotizzando di poter scrivere la funzione d'onda finale come prodotto tensore delle funzioni d'onda dei singoli prodotti, e di poter scrivere la funzione leptonica come onda piana $\Psi_{lep} \approx e^{-i \frac{\vec{p}_e \cdot \vec{r}}{\hbar}}$, allora in modo molto a spanne per un elettrone di $E \sim 1 \text{ MeV}$, $p \sim 1.4 \text{ MeV}/c$, allora $\frac{p_e r}{\hbar} \approx 0.03 \ll 1 \Rightarrow e^{-i \frac{p_e r}{\hbar}} = 1 - i \frac{p_e r}{\hbar} + \dots \approx 1$ ed essendo $|\vec{L}| \propto |p||r| \simeq 0.03\hbar$, l'elettrone con energia ipotizzata dovrà avere $L=0$. Quindi **tranne pochi rari casi, elettrone e antineutrino sono emessi in condizioni di onda s**, e infatti l'autofunzione associata a $L=0$ è una sola ed è l'armonica sferica costante. Avendo poi Ψ_{lep} costante con approssimazione di Taylor all'ordine zero, ne deriva che **l'elemento di matrice M non dipende dal momento angolare dei leptoni**. Questo avviene con le **trasformazioni permesse**.

Se il comportamento non fosse ben descrivibile in questa approssimazione, tipo se c'è un cambio di parità, bisogna sviluppare l'onda piana anche agli ordini successivi, con peso piccolo o nullo che porteranno a transizioni verso p,d,f. Considerando il nostro $|L| = 0.03\hbar \neq 0$ concludo proprio che qualche transizione verso stati con L non zero (transizioni proibite) debba esserci.

Fermi ipotizza la forma di $\hat{H} = g \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_e) \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_\nu)$, cioè che l'interazione avvenga **unicamente quando elettrone e neutrino si trovano sovrapposti**. g è la costante di Fermi e misura l'intensità dell'interazione, il cui valore si ricava sperimentalmente ed è dell'ordine 10^{-4} MeV fm^3 .

Penso ora calcolare l'elemento di matrice nelle varie ipotesi. Per le **transizioni permesse** si è detto che l'autofunzione leptonica è costante, e normalizzando si trova che M è dato dalla **sovraposizione tra le funzioni d'onda dello stato prima e dopo il decadimento**: più gli stati sono simili, tanto grande sarà la probabilità di transizione. Le **transizioni super permesse** solo quelle del tipo $\Psi_i = \Psi_f$, dove M è massimo e il logaritmo di f per t è minimo, che **riguardano decadimenti beta tra nuclei speculari con N=Z-1 e viceversa**, dato che il nucleone convertito va ad occupare lo stesso livello energetico di particella singola nella buca di potenziale dell'altra specie di nucleone.

Abbiamo quindi visto che nelle transizioni permesse $L = 0$, ma abbiamo spin $1/2$ sia per e che per neutrino, e quindi mi aspetto che $S = 0, 1$. Chiameremo **transizioni di Fermi** quelle dove lo spin di elettrone e neutrino sono **antiparalleli e S=0** dunque, le altre dove gli spin sono **paralleli e S=1** sono dette di **Gamow-Teller**.

Ricordando che la parità del sistema è del tipo $(-1)^L$, per $L=0$ sarà sempre +1 e la parità si conserva in entrambi i casi (F e G-T). Prendendo ora \vec{J} , vale Per le **transizioni proibite**, possiamo classificarle con

<i>Fermi</i> $S = 0, L = 0 \rightarrow \Delta J = 0$	<i>Gamow – Teller</i> $S = 1, L = 0 \rightarrow \Delta J = 0, \pm 1$
---	---

il numero dell'ordine di arresto dello sviluppo di Taylor. Distinguiamo dunque

- Transizione primo proibita: si fa un'approssimazione più precisa che nelle transizioni permesse, del tipo $\Psi_{lep} = 1 - \frac{i\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar} = 1 - \frac{i}{\hbar} |\vec{p}| |\vec{r}| \cos(\theta)$ dove nel coseno rivediamo l'armonica sferica Y_1^0 di parità -1: **introdurre una correzione al primo ordine implica l'aggiunta di un termine proporzionale ad un'armonica sferica che indica una transizione con inversione di parità.**

<i>Fermi</i> $S = 0, L = 1 \rightarrow \Delta J = (0), \pm 1$	<i>Gamow – Teller</i> $S = 1, L = 1 \rightarrow \Delta J = 0, \pm 1, \pm 2$
--	--

Ma per Fermi non $0 \rightarrow 0$ perché $L = 1$

- Transizione secondo proibita: lo sviluppo aggiunge il termine $(\frac{|\vec{p}| |\vec{r}|}{\hbar})^2 \cos^2 \theta$ e nel coseno quadro vediamo la combinazione di Y_2^0, Y_0^0 e mentre la seconda dava un contributo -1 alla parità, la prima darà un +1 e la parità non è invertita in transizioni secondo proibite.

<i>Fermi</i> $S = 0, L = 2 \rightarrow \Delta J = (0), (\pm 1), \pm 2$	<i>Gamow – Teller</i> $S = 1, L = 2 \rightarrow \Delta J = (0), (\pm 1), (\pm 2), \pm 3$
---	---

(Transizioni tra parentesi solo se possibili)

2.8.3 Gamma

Non si ha una variazione del nucleo, ma si effettua una transizione energetica tra un suo stato eccitato ed uno inferiore emettendo radiazione EM ad alta energia. Il prodotto del decadimento in questione è molto penetrante. Segue lo schema

$${}^A_Z X^* \rightarrow {}^A_Z X + \gamma \quad (40)$$

che come notiamo **non cambia la natura isotopica del nucleo**, dato che la transizione è tra livelli energetici del nucleo senza variazioni di A. Da ciò deriva anche che l'energia del fotone emesso sarà la differenza di energia tra i due livelli iniziale e finale, e mi aspetterò uno spettro discreto con un picco sull'energia del γ emesso e una larghezza legata alla risoluzione del detector.

Dalla meccanica quantistica sappiamo, per il principio di indeterminazione, che un certo stato energetico con vita media finita ha una *larghezza di stato* Γ intrinseca non nulla, seguendo la relazione

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \Gamma \approx \frac{\hbar}{2\tau} \quad (41)$$

da cui troviamo che lo spettro del decadimento γ è effettivamente discreto.

Precisamente, non è vero che l'energia del fotone emesso è pari alla delta di energia tra i livelli del salto, dobbiamo dimostrare che l'energia di rinculo del nucleo è trascurabile come nel decadimento alpha. Semplificemente conservando l'energia si trova $\Delta E \sim eV \ll Mc^2 \sim 10^5 MeV$.

Ricordando che la radiazione EM corrisponde alla propagazione in fase di oscillazioni di un campo elettrico ed un campo magnetico ortogonali tra loro e che la sua forma si descrive con le leggi di Maxwell, posso vedere i campi elettrico e magnetico come l'uno generato dalla variazione dell'altro. Chiaramente, a seconda di come creiamo il primo campo variabile posso definire due tipologie di radiazione.

- Radiazione di tipo **E**: una carica oscillante genera il campo elettrico che poi induce campo magnetico;
- radiazione di tipo **M** in cui un momento magnetico oscillante genera un campo magnetico che poi induce un campo elettrico.

Entrambe devono comunque sottostare alle leggi di conservazione del sistema radiante (nucleo) e campo di radiazione (fotone) e si devono conservare parità e momento angolare. Dato che **non esistono fotoni di momento nullo, e non si osservano transizioni tra stati di uguale J** , allora le radiazioni EM posso etichettarle in base al momento angolare del fotone come

- L=1 dipolo
- L=2 quadrupolo
- L=3 ottupolo
- L → 2^L -polo

Quindi una generica radiazione è definita da un termine che ne determina il tipo ed un termine che indica il termine dello sviluppo in multipoli, identificando la multipolarità delle transizioni σL con $\sigma = E, M$ e $L = L_\gamma$. La parità delle transizioni EM è $P(EL) = (-1)^L, P(ML) = (-1)^{L+1}$ e la diversa parità si ha perché il campo elettrico è un vettore, quello magnetico un vettore assiale.

Analizziamo classicamente le cose: possiamo generare un dipolo elettrico oscillante con una coppia di elettrodi posti a distanza z tale che $\vec{d}(t) = q(t)z = \underbrace{q_0 z}_{=d} \cos(\omega t)$ la cui potenza emessa è $P(E1) \propto \omega^4 d^2$;

analogamente, se al posto degli elettrodi mettiamo una spira di sezione costante e con normale parallela a z in cui facciamo correre una corrente variabile, allora $\vec{\mu}(t) = I(t)\Sigma = \underbrace{I_0 \Sigma}_{=\mu} \cos(\omega t)$ con potenza emessa

associata $P(E1) \propto \omega^4 \mu^2$. Traducendo tutto in termini di multipolo, classicamente troviamo

$$P(\sigma L) = \frac{2c}{\epsilon_0} \frac{L+1}{L(2L+1)!!} \left(\frac{\omega}{c}\right)^{2L+2} \cdot (M(\sigma L))^2 \propto \omega^{2L+2} \cdot (M(\sigma L))^2 \quad (42)$$

Dove $(M(\sigma L))$ è l'ampiezza di oscillazione con momento L-esimo, che in ambito MQ è l'elemento di matrice calcolato tra stato iniziale e finale di un opportuno operatore di multipolo $O(\sigma L)$ descrivente la transizione. Dunque

$$M(\sigma L) = M_{if}(\sigma L) = \langle \Psi_f | O(\sigma L) | \Psi_i \rangle \quad (43)$$

Ed integrando l'operatore di quadrupolo elettrico sul volume a simmetria sferica si trova transizione nulla, mentre è maggiore di 0 per ellissoide prolato e minore di zero su ellissoide oblato.

Posto $B(\sigma L) = |M_{if}|^2$ la probabilità di transizione ridotta, otteniamo il tasso di transizione $T(\sigma L)$ dividendo la potenza per l'energia del singolo fotone $\hbar\omega$, che dunque corrisponde al numero di fotoni prodotti dalla sorgente per unità di tempo, e sarà $T = \lambda = \frac{1}{\tau}$. Per calcolare B senza giri complessi, ipotizziamo di descrivere il nucleo come un sistema a particelle indipendenti in accordo con il *modello a shell*, supponendo che la transizione tra stati coinvolga un solo nucleone: brutale ma siamo costretti. Otteniamo così le stime di Weisskopf,

$$\begin{aligned} B_{sp}(EL) &\simeq \frac{e^2}{4\pi} \left(\frac{3}{L+3}\right)^2 r_0^{2L} A^{2L/3} \propto \frac{r_0^{2L} A^{2L/3}}{(L+3)^2} \\ B_{sp}(ML) &\simeq \frac{e^2}{4\pi} \cdot 10 \left(\frac{\hbar}{m_p c}\right)^2 \left(\frac{3}{L+3}\right)^2 r_0^{2L-2} A^{2L/3} \propto \frac{r_0^{2L-2} A^{(2L-2)/3}}{(L+3)^2} \end{aligned}$$

da cui possiamo stimare la potenza emessa e poi $\lambda = \frac{1}{\tau}$, oltre che gerarchizzare le transizioni, tipo $\frac{B(ML)}{B(EL)} = 0.31 A^{-2/3}$ e quindi se $A \approx 100$ a parità di L le transizioni di tipo elettrico sono 100-1000 volte più probabili di quelle di tipo magnetico. Vale poi

$$T(\sigma L) \propto \left(\frac{\omega R}{c}\right)^{2L} = (kR)^{2L} \quad k = \frac{E_\gamma}{\hbar c} \quad (44)$$

ed il rapporto per T di due multipolarità successive è $\frac{T(\sigma(L+1))}{T(\sigma L)} \simeq \frac{(kR)^{2(L+1)}}{(kR)^{2L}} = (kR)^2 \approx 10^{-4}$ cioè aumentando L di uno si trova una transizione quattro ordini di grandezza meno probabile.

Le stime di Weisskopf sono utilissime in quanto se sperimentalmente troviamo che il tasso di transizione è molto più alto di quello che prevedono loro, allora è sensato pensare che nella transizione sia coinvolto più di un nucleone, mentre se è molto più inferiore è plausibile dire che la sovrapposizione tra stato iniziale e finale sia ridotta, quindi che i due stati sono molto diversi tra loro.

2.8.4 Esempio con nuclei pari-pari di stime di Weisskopf

Ci si aspetta che per nuclei even-even nel caso di singolo nucleone si dovrebbe avere un rapporto 1:1, cosa che si verifica sperimentalmente solo per pochi nuclei e spesso vicino ai double magic.

2.9 Interazione radiazione-materia

2.9.1 Sezione d'urto

E' un'osservabile in grado di quantificare l'interazione nei processi di collisione, che dimensionalmente è **un'area**. Si misura in **barn**, dove **1 barn = 100 fm²** cui corrisponde la sezione d'urto geometrica di un nucleo di medie dimensioni,

Prendiamo un fascio di N_i particelle e un bersaglio di N_b particelle: il flusso di particelle incidenti per unità di tempo e superficie è banalmente $\Phi_i = \frac{N}{\Delta\Sigma\Delta t} \frac{\Delta x}{\Delta x} = n_i v_i$ dove $n_i = \frac{N}{\Delta\Sigma\Delta x}$ è la densità numerica dei *proiettili*. Analogamente per i bersagli avremo il numero di particelle investite nell'unità di tempo pari a $\frac{N_b}{\Delta S} \frac{\Delta x}{\Delta x} = n_b \Delta x$. E' facile vedere che il flusso scala come $\Delta\Phi_i \propto -\Phi_i n_b \Delta x$, dato che più son densi i bersagli più si ridurrà il flusso, e lo stesso accade se lo spessore aumenta. **Ci si accorge che la costante di proporzionalità tra i due termini deve avere dimensioni di un'area, e la chiameremo proprio sezione d'urto!** Chiaramente non corrisponde alla sezione trasversale del fascio di bersagli in approssimazione di sferette rigide (quella la chiamiamo *sezione d'urto geometrica*): considerando un fascio di protoni che interagisce in forma EM con un bersaglio di nuclei, ad esempio, vediamo subito che il raggio di interazione per la forza coulombiana è decisamente più grande del raggio nucleare, e dunque la sezione d'urto non geometrica è più grande di quella geometrica!

Approfondiamo l'espressione del flusso, che in forma differenziale è $d\Phi_i = -\Phi_i \sigma n_b \Delta x$ che porge come soluzione $\Phi_i(x) = \Phi_0 e^{-n_b \sigma \Delta x}$.

2.9.2 Effetto fotoelettrico

Un fotone viene completamente assorbito da un atomo con conseguente cessione di tutta la sua energia ad un suo elettrone, che può uscire dall'atomo (lasciandosi alle spalle una lacuna) se l'energia del fotone è sufficiente. E' l'effetto dominante perγdi bassa energia, dai 10 eV alle centinaia di KeV.

Chiaramente l'elettrone è legato al nucleo da una certa binding energy B_e , che è pari all'energia di ionizzazione per elettroni di valenza, altrimenti per shell più interne è più elevata, e quindi la fotoemissione è meno probabile. **Chiaramente è un fenomeno a soglia**, dato che per energia delγsotto un certo valore l'elettrone non esce dall'atomo! In caso esca, avrà energia cinetica $T_e = E_\gamma - B_e$. Se è un elettrone di shell interna ad abbandonare l'atomo, alle sue spalle lascia una lacuna che può esser occupata da un elettrone di shell esterne con conseguente emissione di un fotone di lunghezza d'onda caratteristica (gamma caratteristici, radiazione di fluorescenza), oppure l'elettrone che salta può cedere la sua energia ad un elettrone più esterno e meno legato, che può esser emesso (radiazione di Auger).

E' un fenomeno che si manifesta solo se il fotone ha energia precisa perchè i fotoni emessi nelle successive transizioni abbiano energie pari alla differenza in energia tra livelli energetici dell'atomo in questione, e il picco che si osserva sperimentalmente si dice fotopicco.

Da osservazioni empiriche si conclude che la sezione d'urto per l'effetto fotoelettrico sia del tipo $\sigma_{fe} \propto \frac{Z^{4(5)}}{E_\gamma^3}$ dove non si è certi sulla potenza del numeratore. Osservando come varia la sezione d'urto in funzione dell'energia si trovano dei punti di discontinuità a *dente di sega* dati dal fatto che per tali energie ilγriesce a scalzare un elettrone della shell più interna con conseguente aumento della sezione d'urto perchè aumenta la probabilità di avere effetto fotoelettrico in quanto tutti gli elettroni possono essere potenzialmente espulsi.

2.9.3 Effetto Compton

Effetto di scattering in cui il fotone incidente non cede tutta la sua energia agli elettroni colpiti, ma continua ad esistere e post urto viene emesso con energia (e frequenza) diversa e ad un certo angolo dalla traiettoria originaria. Conservando energia e momento, più basiche conoscenze di goniometria, si giunge alla relazione

$$E_{\gamma'}(\theta) = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{e_\gamma}{mc^2}(1 - \cos(\theta))} \quad (45)$$

e scopriamo che per $\theta = 0^\circ$ il fotone uscente ha energia pari a quello che incide, che quindi idealmente prosegue indisturbato il suo percorso come se l'urto non fosse avvenuto, mentre per $\theta = 180^\circ$ il fotone emesso ha energia minima perchè quello incidente cede la massima energia possibile, che con un conticino semplice e ponendo $E_\gamma \rightarrow \infty$ ci pone il risultato $E_{\gamma'} = 256 \text{ keV}$ che è il limite superiore alla cessione di

energia per effetto Compton. Nel mezzo, tra 0 e 256 keV, lo spettro Compton è continuo (a base ovviamente limitata). Vale per fotoni di energie intermedie, tra qualche centinaio di keV a qualche MeV

2.9.4 Pair production

Fenomeno in cui un fotone si disintegra in una coppia positrone elettrone, seguita dall'annichilazione del positrone con un altro elettrone e conseguente emissione di due fotoni in direzioni opposte(che nella materia ordinaria hanno energia 511 keV). Il bilancio netto sono due γ prodotti, dato che un elettrone si forma e uno si annichila con il positrone. E' un processo che non avviene nel vuoto, per la necessità sia di avere della carica in grado di suscitare la produzione della coppia, sia per la necessità di avere massa per conservare l'impulso dato il leggero rinculo che subisce. Ha elevata soglia di energia, dunque vale solo per γ molto energetici (tipo più di 5 MeV).

2.9.5 Coefficiente di attenuazione lineare

Aumentando la risoluzione del detector, mentre la spalla Compton non cambia, il fotopicco si stringe in larghezza: ciò dimostra che effettivamente corrisponde ad un valore discreto!

Possiamo cercare una relazione analitica per esprimere l'intensità di un fascio che si avvicina ad un bersaglio di una certa densità, in funzione della distanza x in esso percorsa. L'intensità di un fascio collimato di fotoni è il numero di incidenti. che nell'infinitesimo spessore cala proporzionalmente alla densità n di atomi nello strato e alla sezione d'urto. Troviamo

$$dI = -n\sigma I dx \Rightarrow I(x) = I_0 e^{-\mu x} \text{ con } \mu = \sigma n, \sigma = \sigma_{fe} + \sigma_{Compton} + \sigma_{pair \ production}$$

con μ coefficiente di attenuazione lineare che, essendo altamente variabile, può esser espresso in forma $\mu_{mass} = \frac{\mu}{\rho}$, spessore $= d = \rho x$ detto coefficiente di attenuazione di massa e per il quale abbiamo ri definito lo spessore, che in questo modo varia poco anche per materiali molto diversi, e vale $I(x) = I_0 e^{-\mu_{mass} d}$. Per riuscire a capire quanta è effettivamente la radiazione depositata in un substrato, è utile considerare lo spessore di dimezzamento, cioè dopo quanto l'intensità si riduce del fattore **1/2**, definita come $I(x_{1/2}) = \frac{I_0}{2} \Rightarrow x_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\mu}$

2.9.6 Particelle cariche

L'effetto principale dello sbattere di particelle cariche con la materia è quello di ionizzare i suoi atomi, fatto dal quale prendono il nome di **radiazione ionizzante**. La ionizzazione è un fenomeno a soglia, generalmente comunque inferiore all'energia media di particelle α o β , da cui deriva che servono spessori non banali per bloccare completamente una radiazione ionizzante!

Per studiare la radiazione ionizzante esistono diverse tattiche, ma tutte hanno in comune il fatto di far incidere la radiazione su una regione attiva del rivelatore in cui essa rilascerà tutta o quasi la sua energia. Parte di essa verrà data agli elettroni per fuggire dai nuclei, dunque al passaggio di radiazione si associa una consistente produzione di elettroni liberi che, con un campo elettrico, vengono fatti driftare e raccolti da elettrodi generando un segnale di corrente rilevabile.

Nel caso di radiazione γ la ionizzazione è singola per ogni fotone, dato che ha interazioni a singolo evento, mentre i prodotti molto più pesanti (tipo derivati del decadimento alpha) sono in grado di ionizzare migliaia di elettroni continuando il suo percorso praticamente indisturbati dagli urti (basterà osservarne la traccia per studiarle). Notevole che lo scattering tra α e atomi avvenga principalmente con gli elettroni, dato che i nuclei sono confinati in regioni molto più piccole della nube elettronica che li circondano.

La scia di elettroni ionizzati al passaggio della alpha potrebbero ricevere energia sufficiente da ionizzare a loro volta, e saranno per gli amici chiamati **raggi Delta**.

Guardando un esempio di tracciamento di alpha emesse da una sorgente di **^{226}Ra** , si vede che le scie si interrompono nel mezzo: questo poichè le alpha, per le collisioni, ad una certa perdono tutta la loro energia e si fermano. La lunghezza della traccia si chiama **range** e dipende dalla carica, energia e massa sia della particella incidente che del materiale attraversato.

2.9.7 Formula di Bethe Block

Permette di spiegare come si struttura la perdita di energia di una particella che attraversa la materia, ed ha la forma complessissima

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{4\pi Z\rho N_A}{Am_e v^2} \left[\ln\left(\frac{2m_e v^2}{I}\right) - \ln(1 - \beta^2) - \beta^2 \right] \quad (46)$$

Dove ρ, Z, A sono del materiale attraversato, I è l'energia necessaria per la ionizzazione di un atomo nel mezzo, e z, v, β riguardano la particella incidente.

Questa formula descrive la perdita di energia per unità di lunghezza della radiazione incidente, detta stopping power, che ha dimensioni di una forza.

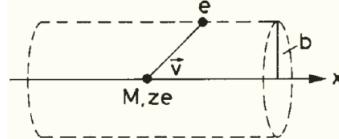
Analizziamo i termini:

- Il primo termine, $(\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0})^2$, ricorda un'interazione coulombiana: evidenzia che la cessione energetica avviene principalmente per via elettromagnetica.
- vediamo una dipendenza lineare in Z e una quadratica in z : diverse configurazioni proiettile bersaglio possono avere curve di stopping power decisamente diverse.
- nel secondo fattore si ha una dipendenza da v nel primo termine tra quadre, mentre nel secondo da β : il primo pezzo deriva da considerazioni classiche, la parte finale da conti relativistici e sono rilevanti solo per velocità notevoli.

Lo stopping power è definito solo per sostanze elementari, in molecole e composti si farà la media di SP dei costituenti. Inoltre, **esso non dipende dalla massa della particella ma solo dalla sua carica.**

Trascuriamo le correzioni relativistiche e troviamo classicamente un'approssimazione della formula (40).

Prendiamo una particella di massa M con moto lungo x e velocità v e supponiamo che gli elettroni nel mezzo siano liberi ed in quiete, con posizione relativa rispetto alla particella incidente sul piano ortogonale ad x data dai parametri di impatto b .



Dopo l'urto la quantità di moto dell'elettrone varia e ci aspettiamo che per simmetria la variazione $\Delta\vec{p}$ sia ortogonale ad x ed è data dal teorema dell'impulso

$$\Delta p_{\perp} = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\perp} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e E_{\perp} dt$$

Con campo elettrico generato dalla particella in moto ad una distanza b dall'asse del cilindro, che calcolo usando Gauss:

$$\Phi(E) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\perp} (2\pi b) dx \underset{\text{Gauss}}{=} \frac{ze}{\epsilon_0} \quad (47)$$

Che buttata nell'equazione prima produce

$$\Delta p_{\perp} = \frac{e}{2\pi b} \frac{ze}{\epsilon_0} \frac{1}{v}$$

Dalla variazione della quantità di moto vedo facilmente l'**energia ceduta al singolo elettrone con parametro d'impatto b** , dato che $\Delta E(b) = \frac{(\Delta p)^2}{2m_e}$. L'energia persa dalla particella totalmente sarà la somma dei contributi trasferiti, che nella corona cilindrica di raggio b e spessore db lungo x sono $N_e = n(2\pi b)dbdx$, $n = \frac{\rho}{A} N_A Z$.

Scrivendo ora in forma differenziale la relazione trovata per ΔE cambiata di segno per indicare la cessione della particella incidente e non più l'energia acquisita dall'elettrone, troviamo

$$-dE_t(b) = dEN_e = \left(\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{1}{b^2 \frac{1}{2} m_e v^2} Z \frac{\rho}{A} N_A (2\pi b) db dx$$

Che, integrando su tutti i valori possibili di b ci da tutta l'energia persa per urto con gli elettroni.

Gli estremi b_{max} , b_{min} non sono 0 e infinito. Non possiamo avere 0 per l'**effetto di Zitterbewegung** dell'elettrone, per il quale l'elettrone non lo possiamo localizzare in una sfera più piccola di quella avente per raggio la lunghezza Compton, e non possiamo avere infinito perchè per grandi b il tempo di interazione non è più $\frac{dx}{v}$ ma tiene conto di b stesso, diventando $t \approx \frac{b}{v}$, che se è eccessivo supera come ordine di grandezza il periodo di rivoluzione dell'elettrone, al quale non sarà possibile cedere energia. Si ha dunque $b_{max} = \frac{v}{\langle \nu \rangle}$ con ν frequenza dell'orbita dell'elettrone.

Sostituendo il tutto si trova la formula di Bethe-Block senza correzioni relativistiche, come anticipato. Se le velocità non sono troppo alte, **più una particella è veloce meno energia rilascia nel mezzo, e a parità di energia cinetica maggiore la carica maggiore l'interazione**. Il profilo della curva di BB è dunque iperbolico a basse energie e ha poi una risalita relativistica per energie più elevate. Ciò porta ad un minimo nello *stopping power*. Quest'ultimo si può esprimere in funzione dello spessore di penetrazione nel mezzo, secondo una curva la cui area è proprio l'energia rilasciata dalla particella ionizzante nel materiale, detta **curva di Bragg**. Essa ha un'iniziale crescita, dato che al diminuire dell'energia aumenta il potere frenate, fino al picco (fantasiosamente detto *picco di Bragg*) dove la particella si ferma, con conseguente ripidissima discesa a zero dello Stopping Power stesso. **in corrispondenza del picco di Bragg, la particella raggiunge una profondità dove cede il massimo della sua energia per unità di lunghezza**. Possiamo vedere dal grafico che la distanza percorsa in x , detta **range della particella**, si ottiene come $R = \int_{E_0}^0 \frac{dE}{dE/dx}$

3 Subnucleare

3.1 Unità Naturali

Chiaramente il KMS (*kilogrammo-metro-secondo*) non è un sistema comodo per le grandezze subnucleari: non è divertente dire "LA MASSA DELL'ELETTRONE è NOVE PUNTO UNDICI PER DIECI ALLA MENO TRENTUNO CHILOGRAMMI", fa molto più figo dire "0.511 MEGA ELETTRONVOLT", ed è pure più corto. Allora introduciamo le **Unità Naturali**, o **Unità di Planck**, ove le quantità \hbar, c sono poste uguali a 1 e sono adimensionali, quindi scriviamo

$$\begin{aligned} 1 &= [\hbar] = [t][E] \implies [t] = [E]^{-1} = eV^{-1} \\ 1 &= [c] = [\ell]/[t] \implies [\ell] = [t] = eV^{-1} \\ E_R &= m \cdot c^2 = m \cdot 1 \implies [m] = [E] = eV \\ E^2 &= (pc)^2 + (mc^2)^2 \implies [p] = [E] = eV \end{aligned}$$

	SI	UN
\hbar	$1.055 \times 10^{-34} Js$	1
c	$2.997 \times 10^8 m/s$	1
eV	$1.6 \times 10^{-19} J$	$1 eV$

abbiamo subito che $\hbar c = 197 MeV fm$, $1 eV^{-1} = 6.56 \cdot 10^{-16} s$, $1 fm = 5.08 GeV^{-1}$.

Per le quantità elettromagnetiche

$$E_B = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_B} \Rightarrow \left[\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right] = 1(UN) \quad (48)$$

e dividendo per $\hbar c$ che tanto è adimensionale, $-2 \frac{r_B E_B}{\hbar c} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \alpha \approx \frac{1}{137}$ che è la **costante di struttura fine**, grandezza adimensionale in questo sistema ma anche nel SI.

Dato che il rapporto tra e^2 e $4\pi\epsilon_0$ è adimensionale, possiamo trovare un sistema ove entrambi i termini lo sono:

- Sistema **di Heavyside-Lorentz**: $\epsilon_0 = 1, e = \sqrt{4\pi\alpha}$
- Sistema di **Gauss**: $4\pi\epsilon_0 = 1, e = \sqrt{\alpha}$

3.2 Interazioni fondamentali

Le forze che regolano tutti i processi fisici sono quattro, ossia

- Forza gravitazionale
- Forza di interazione nucleare debole
- Forza elettromagnetica
- Forza di interazione nucleare forte

Vediamo subito che $\frac{U_G}{U_{EM}} = \mathcal{O}(10^{-40})$ e che quindi la forza gravitazionale è trascurabile. Abbiamo

$$F_W \ll F_{EM} \ll F_S \quad (49)$$

Ma non possiamo misurare direttamente queste forze, quindi ci basiamo sui seguenti criteri per affermare questa serie di disuguaglianze:

- **Sezione d'urto.**

E' una misura della probabilità che avvenga una reazione, e si osserva che a parità di energia del CM $\sqrt{s} = 10 GeV$ allora

$$\sigma(pp \rightarrow X) \simeq 40 mb \quad \sigma(e^+e^- \rightarrow X) \simeq 40 nb \quad \sigma(\nu N \rightarrow X) \simeq \mathcal{O}(0.1 pb) \quad (50)$$

Dove il primo è per S, il secondo per EM e il terzo per W. Deduciamo dunque, dato che ci sono 4 o più ordini di grandezza di salto tra un fenomeno e l'altro, che la forza S è decisamente più intensa (la probabilità associata è maggiore), quella EM è una via di mezzo e quella W è molto meno probabile.

- **Tempi di decadimento.**

Maggiore τ , minore la frequenza con cui avviene il decay e minore la forza associata. Nel decay Alpha abbiamo forza S, nel beta W (c'è il neutrino), nel gamma ovviamente EM (c'è il fotone). Guardando gli esempi sottostanti notiamo che passando da un decay all'altro si cambiano anche 8 ordini di grandezza, e i decay della forza forte sono 8 volto più frequenti di quelli EM ad indicare la sua intensità maggiore.

- $\pi^0 \xrightarrow{\gamma} \gamma\gamma$ (EM). Questa particella decade al 98% in due fotoni. La vita media associata a questo decadimento è $\tau = \mathcal{O}(10^{-16} \text{ s})$.
- $\pi^+ \xrightarrow{\beta} \mu^+ \nu$ (W). Questa particella decade al 99% in muone e neutrino. La vita media associata a questo decadimento è $\tau = \mathcal{O}(10^{-8} \text{ s})$.
- $\rho^0 \xrightarrow{\alpha} \pi^+ \pi^-$ (S). Questa particella decade al 100% in due π . La vita media associata a questo decadimento è $\tau = \mathcal{O}(10^{-24} \text{ s})$.

- **Energie di legame.**

Utilizzando pratiche **spettroscopiche**, l'interazione EM ha un ordine di grandezza per le proprie energie di legame dell'elettronvolt, mentre la S del MeV o oltre.

Vediamo alcune schede riassuntive sulle interazioni

- EM force

Scheda dell'interazione elettromagnetica

- **Due cariche fondamentali:** +, -
 - **Quanto di campo:** fotone (γ)
 - $m = 0$;
 - $q = 0$;
 - $\tau = +\infty$;
 - Simbolo: $\sim\sim$;
 - **Costante di accoppiamento:** $\alpha = e^2 / (UN) = \frac{1}{137}$
- In particolare le proprietà del fotone fanno sì che non vi siano termini di accoppiamento tra fotoni.

- Weak force

Scheda dell'interazione debole

- **Quanti di campo:** W^+, W^-, Z^0
 - $m(W^+) = m(W^-) = 80.385 \pm 0.015 \text{ GeV}$;
 - $m(Z^0) = m(W^-) / \cos(\theta_W) = 91.1876 \pm 0.0021 \text{ GeV}$;
 - $q(W^+) = +e, q(W^-) = -e, q(Z^0) = 0$;
 - $\tau = \mathcal{O}(10^{-24} \text{ s})$;
 - Simbolo: $--$;
- **Costante di accoppiamento:** $\alpha_W = \alpha / \sin^2(\theta_W) \simeq 4.5\alpha$

Vediamo subito che abbiamo tre quanti, di cui uno neutro e una coppia antiparticella-particella. I due W carichi interagiscono con lo Z^0 ; secondo il **modello di Glashow-Weinberg-Salam** le masse delle tre particelle sono in relazione ad un angolo detto **angolo di Weinberg** che determina anche la costante di accoppiamento e vale $\sin^2 \theta_W = 1 - (\frac{m_W}{m_Z})^2 = 0.2229 \pm 0.0003$.

La costante α_W è maggiore della α , cosa che ci insospettisce dato che la forza dovrebbe esser più debole. Ed infatti lo è: un gamma che si muove nel vuoto si propaga all'infinito e lo possiamo descrivere come onda piana $A_\mu = \epsilon_\mu e^{ikx}$, che sbattuta nell'equazione di D'Alambert $\partial_\rho \partial^\rho A_\mu = 0 \Rightarrow -k_\rho k^\rho A_\mu = 0 \Rightarrow m_\gamma^2 = k_\rho k^\rho = 0$ dove la contrazione del quadrirettore k_ρ con se stesso mi da la massa del fotone. Ma nella weak force i portatori di campo non hanno massa nulla, e questa equazione va modificata in $(\partial_\rho \partial^\rho + m^2) W_\mu = 0$, che in approssimazione di onda piana mi porta $-(k_\rho k^\rho + m^2) W_\mu = 0 \Rightarrow m_W^2 = k_\rho k^\rho = m^2$ e anche le classiche equazioni di Laplace e Poisson statiche diventano diverse, del tipo $(\nabla^2 - m^2) V' = 0, (\nabla^2 - m^2) V' = -\rho = -\sqrt{\alpha_W} \delta^3(0)$ e quest'ultima ha come soluzione il **potenziale di Yukawa**

$$V'(r) = \frac{\sqrt{\alpha_W}}{r} e^{-m_W r} \quad (51)$$

Che è uno smorzamento del potenziale elettrostatico con costante di decay spaziale $\lambda = \frac{1}{m_W} \approx 0.0025 \text{ fm}$. Ne deduciamo che le **forze deboli sono a cortissimo raggio**, e due particelle interagiscono con questa forza solo a brevissima distanza.

- Strong force

Scheda dell'interazione forte

- Tre cariche fondamentali "di colore": Red, Green, Blue
- **Quanti di campo:** 8 gluoni (g)
 - $m = 0$
 - $q = 0$ (mentre la carica delle cariche di colore è non nulla)
 - $\tau = \infty$;
 - Simbolo: una molla (a rappresentare il potenziale a grandi distanze, vedasi sotto);
- **Costante di accoppiamento:** $\alpha_S \simeq (10 - 100) \times \alpha$

Vediamo che i gluoni hanno carica nulla evita media infinita, quindi non interagiscono con i fotoni, interagendo tra loro e accoppiandosi con le cariche di colore. Abbiamo **forte dipendenza di α_S dall'energia, Libertà asintotica a zero**, secondo cui il potenziale di interazione forte cresce linearmente con la distanza, ed è trascurabile a piccole distanze, per cui gluoni e quark si comportano come particelle libere. L'energia cinetica va a infinito poiché $E_k \propto p = \frac{\hbar}{\lambda}$. Infine abbiamo **Schiavitù infrarossa**, il corrispettivo a grandi distanze della libertà asintotica: dato che a grandi distanze l'energia $U(r)$ va ad infinito, essa vincola le particelle fortemente e l'energia cinetica va a zero.

Dobbiamo infine avere **un'ipotesi di confinamento**, dato che logicamente supponiamo che una particella abbia energia limitata: se E_0 è l'energia a disposizione del sistema, il potenziale $U(r) = kr$ non può superare questa soglia, ed esisterà un raggio massimo $r = \frac{E_0}{k}$ tale per cui il sistema di due particelle si rompe in un sistema a quattro particelle generando una nuova coppia quark e antiquark, facendo sì di avere un sistema con due nuove forze a interazione di raggio più corto e all'aumentare della distanza tra le due particelle il processo si ripete a cascata finché E_0 è sufficiente. Questa ipotesi è supportata dal fatto che **non si osservano quark liberi in natura, e nemmeno gluoni liberi**. Abbiamo quindi il postulato

Postulato 6.1 — del confinamento. Sono osservabili solo stati a carica di colore complessiva nulla (**adroni**). Le interazioni nucleari sono quindi viste come un'equivalente delle forze di Van der Waals nella Quantum Chromodynamics (QCD) (ossia forze non dovute a una differenza di carica netta ma sbilanciamenti di carica di colore ad ordini successivi).

E la QCD stessa afferma che le costanti di accoppiamento dipendono in modo diverso dall'energia complessiva coinvolta nell'interazione (*Running coupling constants*), variazione che potrebbe subire brusche deviazioni dall'andamento lineare per la presenza di particelle di massa enorme, (*TeV, particelle super simmetriche*, non osservate anche se abbiamo raggiunto ad LHC le regioni dove dovrebbero bazzicare.) così da esser unificate in un'unica costante attorno ai **10¹⁵ GeV**

3.3 Particelle fondamentali

Chiamiamo le particelle menzionate precedentemente **bosoni di gauge**, che corrispondono ai mediatori di campo fondamentali, e le altre **particelle di materia**.

3.3.1 Leptoni carichi

Sono **Elettrone, muone, tau**. Sono **fermioni puntiformi**, cosa che deduciamo dal loro spin semi intero e dal fattore giromagnetico che nella teoria di Dirac sarebbe 2 ma nella QED presentano un termine correttivo del permille. Seguono le caratteristiche

Particelle di materia				
Puntiformi	Leptoni neutri (W)		Saporì leptonici: e, μ, τ	
	Leptoni carichi (W+EM)			
	Quark (W+EM+S)			
Stati aggregati (Adroni) (W+EM+S)	Mesonì (bosoni)	Pseudoscalari: $J^\pi = 0^-$	Saporì adronici: Isospin, stranezza, bellezza, incanto, top	
		Vettori: $J^\pi = 1^-$		
	Barioni (fermioni)	$J^\pi = \frac{1}{2}^+$		
		$J^\pi = \frac{3}{2}^+$		

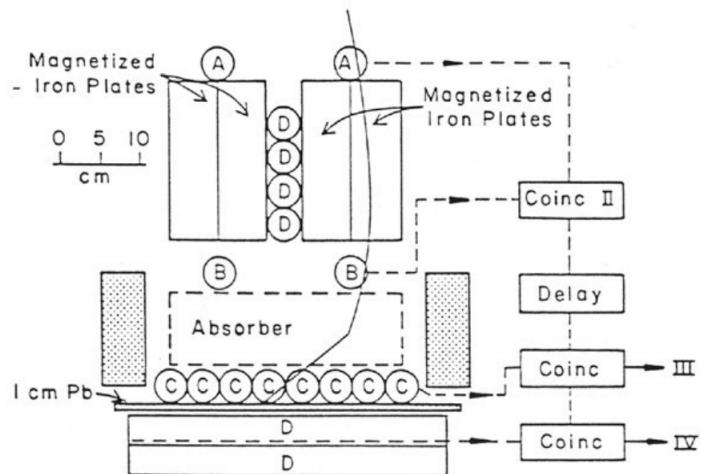
Dove notiamo che la vita dell'elettrone è infinita: ad oggi esiste solo un limite inferiore ad essa, ottenuta dall'esperimento **Borexino** in cui si trovò $\tau_e > 6.6 \cdot 10^{28}$ anni (se consideriamo che l'universo ne ha circa 13,82 miliardi, siamo legittimati a dire che è infinita.)

Nel suddetto esperimento si osservò per circa 1 anno una quantità di $\sim 270\text{ton}$ di liquido scintillante, con l'attesa che il fotone emesso abbia energia pari circa alla metà della massa dell'elettrone (quindi $\approx 250\text{MeV}$), ma su quell'energia non venne osservato alcun picco significativo, da cui si derivò che il decadimento non era spontaneo.

La stabilità dell'elettrone è comprovata dalla stabilità della materia e si può pensare o che l'elettrone, essendo particella carica più leggera, non decade perché altrimenti verrebbe meno la conservazione della carica, oppure al contrario la conservazione della carica ha come conferma il fatto sperimentale che l'elettrone non decade.

Il **muone**, invece, è stato scoperto come conseguenza dell'interazione tra nuclei nelle zone alte dell'atmosfera e raggi cosmici, i quali producono una catena di reazioni e decadimenti detta **sciame adronico**, dato che anche pochi raggi producono tantissime particelle, tante delle quali hanno vita media troppo breve per esser rivelate al suolo. Arrivano comunque neutrini, gamma rays, elettroni e i famigerati muoni.

Un esperimento in merito lo studio dei raggi gamma è il **Pancini-Piccioni-Conversi (1942)**, il quale consisteva di due piastre magnetizzate di polarizzazione variabile che indirizzavano un gran numero di muoni cosmici verso un assorbitore molto denso in grado di rallentarli fino ad arrestarli. Qui avveniva un decadimento a riposo del tipo $\mu \rightarrow e + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ e, osservando l'elettrone emesso, si potevano avere informazioni sul muone iniziale. Segue lo schema:



vediamo che ci sono due contatori Geiger in A,B che verificano il corretto passaggio della particella nel focalizzatore e registrano il *tempo di coincidenza diretta* relativo all'arrivo, a riposo nell'assorbitore; un terzo contatore Geiger in C registra l'emissione di un elettrone associato al *tempo di coincidenza ritardata* (tipico ritardo nell'emissione). Infine, un quarto contatore in D è posto dopo una spessa lastra di Piombo e verifica che la particella emessa sia effettivamente un elettrone (se è un'altra particella non avrebbe energia sufficiente a superare la lastra) e determina il rumore di fondo. Supponendo che il ritardo $\Delta t = t_C - t_{AB}$ segua una legge del tipo $f(t) = \exp(-\frac{\Delta t}{T})$ si può interpolare e stimare la vita del muone ($\tau_\mu \approx 2.2\mu\text{s}$). Il **tau**, come il muone decade al 100% in elettrone con emissione di neutrino ed antineutrino, ci si aspetta

esista una particella più pesante che in un decadimento di forma uguale cada in muone e in elettrone. Negli esperimenti a SLAC si osservò inoltre che $e^+ + e^- \rightarrow e^\pm + \mu^\mp$ non soddisfaceva il bilanciamento di carica e moto, dunque si ipotizzò che la catena fosse $e^+ + e^- \rightarrow \tau^+ + \tau^- \rightarrow e^\pm + \mu^\mp + 4\nu$ senza rivelazione dei neutrini.

Negli anni 70 si arrivò a fare esperimenti su energie del CM $\sqrt{s} \approx 5\text{GeV}$ che produssero un segnale sufficientemente sopra il rumore a conferma dell'esistenza del τ . Questi esperimenti si basavano su un sistema di camere a fili cilindriche atte a rivelare particelle cariche con sistemi di barriere di materiali densi (come per il μ) al fine di determinare natura o energia delle particelle prodotte in base alle loro proprietà di penetrazione. La massa del τ si stima con *fit cinematici* sui prodotti di decadimento, che sono estremamente difficili a causa della scarsa praticità della stima dei parametri relativi ai neutrini emessi.

Un'alternativa, ad oggi, è data dallo *scan* della reazione in soglia: si prendono vari valori di \sqrt{s} in collisione $e^+ + e^-$, si osserva che la sezione d'urto ha un profilo proporzionale a β^2 di emissione di τ ed invertendo la conservazione dell'energia si ha

$$\sigma(e^+ + e^- \rightarrow \tau^+ + \tau^-) \propto \beta^2 = \frac{p^2}{s} = 1 - \frac{4m_\tau^2}{s} \quad (52)$$

Interpolando si trova la massa del τ .

Per quanto riguarda i **leptoni neutri**, si hanno i nostri bff **neutrini** corrispondenti ai tre leptoni carichi:

Leptoni neutri (neutrini)				
-	m	spin	g	T (s)
ν_e	< 1 eV	1/2	0	∞
ν_μ	< 1 eV	1/2	0	∞
ν_τ	< 1 eV	1/2	0	∞

che hanno sorgenti naturali nelle stelle, nei raggi cosmici, nelle supernove, nei relitti del Big Bang, o sorgenti artificiali nei reattori e negli acceleratori.

Possiamo organizzare i leptoni in tre famiglie come doppietti di isospin debole di diverso sapore leptonicco

$$\begin{pmatrix} \nu_{e,L} \\ e_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_{\mu,L} \\ \mu_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_{\tau,L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$$

3.3.2 Quark

ultima classe di particelle puntiformi, di essi non abbiamo sensibilità diretta ma la loro esistenza è inconfutabile e vale per essi l'ipotesi di confinamento. Esistono, dal punto di vista dell'interazione forte, 6 quark, che congiuntamente a tre possibilità i colore e carica, danno 18 particelle distinte detti **sapori adronici**. Per l'interazione debole invece

$$\left[\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix} \right] \quad \begin{matrix} \rightarrow & q = 2/3 \\ \rightarrow & q = -1/3 \end{matrix}$$

Utile la tabella sottostante, ricordando che ogni quark ha il suo friend antiquark \bar{q} con identiche caratteristiche ma carica di segno opposto.

-	$m^* (\text{MeV})$	q	Sapore
u	1	2/3	$I_3^S = 1/2$
d	4	-1/3	$I_3^S = -1/2$
c	1500	2/3	$c = 1$
s	100	-1/3	$s = -1$
t	175×10^3	2/3	$t = 1$
b	4500	-1/3	$b = -1$

La loro massa è indicativa e coerente col modello usato, dato che non l'abbiamo pesato!

3.3.3 Adroni

Si dividono in

- **Meson:** $q\bar{q}$, sono bosoni ottenuti dal legame quark-antiquark, che essendo a spin entrambi semintero, la loro unione darà una particella di spin S=0 (stato di **singololetto**, mesoni **pseudoscalari**) o S=1(stato di **tripletto**, mesoni **vettori**)
- **Barioni:** q_1, q_2, q_3 sono fermioni dati dalla composizione di tre quark, a spin totale $\frac{1}{2}$ o $\frac{3}{2}$.

Un particolare esempio di **mesone** è il **pionne** π , scoperto dopo esser stato teorizzato. Nel 1932 Yukawa propose che, come le interazioni tra leptoni possono esser descritte da cessione ed assorbimento da parte di due diverse correnti di un quanto di campo EM (γ), analogamente l'interazione forte potrà esser rappresentata come una *corrente di neutrone* ed una *di protone* che si scambiano un quanto di campo forte. Ricordando che la forza forte è decisamente più intensa di quella EM ma che le interazioni tra nucleoni sono dell'ordine del *fm*, una forma di potenziale soddisfacente è il **potenziale di Yukawa**

$$V_\gamma(r) = \frac{g}{r} e^{-mr} \quad (53)$$

che si annulla a distanze elevate mentre per valori piccoli la costante di accoppiamento g è maggiore di quella EM e la forza forte è più intensa. Questo potenziale sembra quindi essere caratteristico di tutte le forze e, per il nostro caso, se riusciamo a dare una stima del raggio di interazione riusciremo a stimare la massa del pionne.

Se riconosciamo il nostro π come mediatore della forza tra neutrone e protone, potremmo ipotizzare

- **Interazione elastica (nn,pp):** le particelle mantengono la propria natura post-interazione, e si scambiano un pionne neutro π^0 .
- **Interazione di scambio di carica np:** la particella che emette il quanto è un neutrone che acquista dunque carica positiva diventando protone, dunque per conservazione il quanto di campo sarà un pionne negativo π^-
- **Interazione per scambio di carica pn:** la particella emettente il quanto è il protone che acquista carica negativa diventando neutrone, e dunque il quanto emesso sarà un pionne positivo π^+

cioè il pionne deve potersi presentare in tre forme e la terna (π^0, π^+, π^-) si chiama **tripletto di isospin forte**. Il π venne scoperto nel 1942 con un esperimento ad alta quota nelle Ande, che utilizzava delle emulsioni: la pellicola, sensibile al passaggio delle particelle, mostra delle nette deviazioni non riconducibili a rotazioni di campi magnetici. Questa forma si ha infatti perchè il materiale frena la particella incidente fino ad arrestarla, ove essa decade a riposo. Nello specifico la doppia deviazione si ha perchè la particella della figura è un π^+ che decade al **99%** come segue

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad (54)$$

e, dato che l'emulsione traccia le particelle cariche, il neutrino non è rivelato e viene emesso lungo stessa direzione e verso opposto del muone, il quale delinea invece il secondo tratto della traccia, per poi decadere

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$$

dove ancora perdiamo i neutrini e troviamo la traccia del positrone.

A questo punto possiamo determinare la natura dei prodotti in base alla loro energia, che a sua volta si stima del numero di *bolle* per unità di lunghezza che lasciano le reazioni nell'emulsione.

3.4 Antiparticelle

L'equazione di Dirac del 1923 è a quattro termini le cui soluzioni prevedono sia che ci sia lo spin, sia che esistano particelle ad energia negativa, dette **antiparticelle**. Esse condividono con le corrispondenti particelle gli stessi parametri fisici "meccanici", ma hanno opposto sapore e carica elettrica in modulo uguale ma segno opposto. Ovviamente, le particelle neutre hanno come antiparticella se stesse!!

3.5 Rivelatori di particelle

Sono una classe di strumentazione atta a dare evidenza dell'esistenza e delle proprietà delle particelle sopra citate. La **PID**, *particle identification*, studia la massa della particella spesso ricavandola da grandezze dinamiche ed elettriche, la carica e la sua direzione, che ci permettono di dire che particella è e classificare il decay che l'ha prodotta.

3.6 Strumentazione per particelle cariche

Se vogliamo studiare particelle cariche, si parte dalla nota formula di Bethe-Block:

$$\left\langle -\frac{dE}{dX} \right\rangle = K z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 W_{max}}{I^2} \right) - \beta^2 - \frac{\delta(\beta\gamma)}{2} \right]$$

in cui si osserva che X non è una lunghezza, ma dimensionalmente è lunghezza per densità del mezzo. Dato che la curva dipende dalla carica z della particella ionizzante e dalla sua velocità, ma non dalla sua massa o dal suo momento, è una **curva universale, che non dipende dalla natura della particella ionizzante ma solo dalla sua interazione con il materiale**. Ricordiamo poi che

$$W_{max} = \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{1 + 2\gamma \frac{m_e}{M} + (\frac{m_e}{M})^2} \quad (55)$$

ad esso corrisponde la massima energia trasferibile dalla particella al mezzo per singola collisione.

Analizziamo l'andamento a zone :

- A basse velocità si ha una forte ionizzazione che prosegue fino a $\beta\gamma \approx 2$
- attorno a $\beta\gamma \approx 2$ la particella è sufficientemente lenta e ha un grande tempo di interazione, dunque cede il massimo della sue energia.
- a velocità più alte diminuisce il tempo di interazione per cui si ha una **risalita relativistica** nella curva, legata alla contrazione della lunghezza del mezzo che ne aumenta la densità (back to concetti di *relatività*), e dunque la particella incontra più bersagli.
- Oltre $\beta\gamma \approx 100$, si ha una **regione di saturazione** in cui la **carica di polarizzazione nel dielettrico attraversato, per la disomogeneità del campo data dalle cariche ionizzate, induce un effetto di schermo che riduce la crescita della curva**.

Guardiamo un attimo il primo membro, ossia $\Delta = \frac{dE}{dX}$: esso va calcolato tenendo conto della distribuzione statistica dell'energia del proiettile, che nel nostro caso è la **Curva di Landau** che ha però delle code ad alte energie (zero ad infinito) che danno fluttuazioni nella stima dei valori medi, dato che la media viene facilmente modificata anche da una sola particella molto più energetica. Si usa dunque la mediana o la media troncata.

Nella pratica, la particella ionizzante passa in una zona e, in condizioni normali, produce coppie elettron-ione che si ricombinano in atomi neutri, cosa che impedirebbe la rivelazione. Allora si introduce un campo elettrico in grado di produrre ionizzazione secondaria e drift delle cariche in direzioni opposte, evitando la ricombinazione. Queste poi sono raccolte da due elettrodi. Se oltre all'elettrico si mette un campo magnetico, si possono avere info sulla carica della particella vedendo il raggio di curvatura (almeno la direzione), da cui si ricava anche il suo momento $p = r_L q B$. Se si stima anche la quantità di carica prodotta, si ottiene un ordine di grandezza dell'energia ceduta dalla particella al mezzo e dunque la sua velocità, da cui con PID si trova anche la massa.

3.6.1 Spettrometro dipolare

La particella incidente

- attraversa in primis una successione di rivelatori (*trackers*) poco spessi che ne determinano approssimativamente la traiettoria per interpolazione;
- entra in una regione lunga L in cui c'è un campo magnetico fissato, e se è carica essa subirà forza centripeta che ne modificherà il moto.
- all'uscita ci sono altri rivelatori che tracciano il percorso lineare dopo il magnete dipolare, e studiando l'angolo ϕ tra moto lineare e dopo passaggio nel mezzo, si trova il momento della particella come $p = r_C q B$. Se il raggio del ciclotrone è $r_C = L \sin(\theta) \approx L\theta$ per angoli piccoli, allora se ricordiamo che B, L, q sono noti con precisione elevatissima, vale $\sigma_p = \frac{p^2}{qBL} \sigma_\theta$ e **l'errore relativo sulla stima del momento aumenta linearmente con il momento stesso**. In realtà l'angolo di deflessione ha un altro contributo di errore che si propaga su p, dato che la particella interagisce con il materiale di

supporto e con i rivelatori, cosa che modifica la sua traiettoria (*multiple scattering*). Si ha dunque che tanto materiale produce stime accurate ma con deflessioni multiple, poco materiale riduce le deflessioni multiple ma aumenta l'errore relativo sul momento dato che non viene fermato. Agli esperti la scelta su che fare.

3.6.2 Tracciatori

Sono i *trackers* sopra menzionati, che possono essere non elettronici tipo le emulsioni e le camere a nebbia o bolle, o elettronici come camere a fili, TPC. Bella, no more questions about it.

3.6.3 Emulsioni

Sono fatte da **pellicole impressionabili e altamente sensibili**. La loro densità è tale che i prodotti di ionizzazione sono imprigionati e non danno ricombinazione. Costano poco e hanno ottima risoluzione (diciamo sul μm) ma sono usa e getta.

3.6.4 Camere a nebbia

Sono **contenitori di gas in condizioni sovrasature**, per cui al passare della radiazione ionizzante si rompe l'equilibrio metastabile in cui sono tenute le particelle del gas innescando la loro condensazione, che si vede dunque molto bene. ESEMPI

3.6.5 Camere a bolle

Sulla scia di quelle a nebbia, ma al loro interno si creano condizioni per cui **un liquido viene tenuto in equilibrio metastabile con il proprio vapore, sottoposto a cicli periodici di espansione-compressione**. Questi cicli servono poichè se la parte di espansione è in fase con il passaggio di radiazione, si fanno delle bolle attorno agli atomi ionizzati che ne rilevano il passaggio, mentre la fase di compressione funge da reset. Ha il vantaggio di essere un mezzo molto denso e funge da bersaglio per la radiazione incidente, quindi non servono 3 componenti, proiettile bersaglio e rivelatore, ma solo 2 dato che le ultime sono la stessa cosa. Ha risoluzione discreta (10-100 μm) m ha il limite di avere un *trigger* esterno, deve lavorare a bassa frequenza e non c'è elettronica, si fa a mano contando le tracce. E giù di diottrie.

3.6.6 Rivelatori a gas

Sono **il più semplice esempio di rivelatori elettronici**. La zona interessata al passaggio di particelle è permeata da un campo elettrico che porta gli elettroni e gli ioni a diffondere, seguendo le linee di campo fino a depositarsi su fili anodici o catodici di raccolta. Il segnale può poi esser amplificato modulando le linee di campo. Se si guarda il profilo della corrente in funzione della ddp tra elettrodi, ha la forma di un segnale a crescita esponenziale che va in saturazione: infatti, a basse tensioni il campo non è abbastanza per impedire ricombinazioni e non si raccolgono particelle, mentre per alte tensioni la corrente comunque non supera una soglia massima, zona dove potremmo avere rottura del dielettrico. Si lavora quindi in mezzo, in regime *proporzionale*, dove appunto il segnale è proporzionale all'energia. ESEMPIO GEIGER,DERIVA,TPC

3.6.7 Rivelatori al silicio

Sono formati da **diodi sottili polarizzati inversamente e completamente svuotati**. Al passaggio della particella si forma un gran numero di coppie elettrone lacuna e gli elettroni, mossi da una ddp, vengono raccolti da alcune strisce di materiale drogato p^+ collegate capacitivamente con l'elettronica di lettura, mentre nel piano inferiore del diodo si collocano delle strisce drogate n^+ per la raccolta delle lacune. Ha **ottima risoluzione, (10 μm), alta velocità di lettura**, ma costa molto ed è **molto denso**, quindi per bassi valori del momento la risoluzione peggiora parecchio.

3.7 PID

Trovata la particella ionizzante, bisogna capire chi è come è e che vuole. Generalmente basta assegnare il corretto valore di massa alla particella stessa.

In genere i leptoni sono facili da riconoscere, dato che elettrone e positrone sono assorbiti da calorimetri EM mentre il muone è molto penetrante, Distinguere p , π , K è complicato dato che serve procedere a misure di velocità da cui trovare la massa e poi l'impulso.

Un primo modo per trovare la velocità è misurare il **tempo di volo** della particella, efficace soprattutto se la particella è lenta.

Altro metodo prevede la misura dell'energia lasciata dalla particella nel tracciatore per poi invertire Bethe-Block e trovare $\beta\gamma$ e poi la massa $m = \frac{p}{\beta\gamma}$. Vediamo da Bethe-Block che a bassi impulsi il valore di dE/dx è circa costante sui 16 keV/cm, ma per valori del momento successivi a quello del MIP i punti sperimentali sono confusi.

Infine, si può sfruttare l'**effetto Cherenkov**, per il quale una particella può viaggiare NEL MEZZO a velocità superiori alla luce, possibile solo in mezzi trasparenti e con indice di rifrazione n dove la luce va come c/n (Se in τ la particella percorre $v\tau = \beta c\tau$ e la luce $\tau c/n$. (Di fatto, la particella si propaga orizzontalmente e a seguito dell'interazione con la materia genera radiazione luminosa che viene emessa in modo coerente sotto forma di onda d'urto, generando un fronte d'onda piano. La congiungente al fronte d'onda è normale ad esso e si individua un triangolo rettangolo per cui vale $\beta = (n\cos\theta)^{-1}$ dove l'angolo è costante. La luce si dispiega con un cono con vertice sulla particella e se si trova l'angolo si trova la velocità. Così funzionano i **radiatori Cherenkov**.

Alternativa è lo studio della produzione di particelle in soglia: studiando il valore di energia della particella tale per cui si osserva il passaggio da uno stato di non emissione ad uno stato di emissione luminosa, si trova la natura della particella stessa.

E' frequente l'utilizzo di **tecniche combinate**, dato che ognuna si svolge su range di impulso specifici. ESEMPIO DELPHI DEL CERN

3.8 Strumentazione per particelle neutre

Vengono generalmente rivelate da assorbitori densi in cui depositano tutta la loro energia generando degli sciami di particelle secondarie: questo è causato dal fatto che per l'elevata densità del mezzo, le particelle incidenti rallentano e si fermano nel calorimetro, così la loro energia cinetica viene ceduta al mezzo dove avvengono reazioni che producono tante particelle registrabili. Possiamo avere la produzione di **fotoni ed elettroni, che danno sciami elettromagnetico**, oppure **muoni, che non danno nessuno sciami**.

3.8.1 Sciami elettromagnetico

Deriva dalla combinazione di

- *Bremsstrahlung*, nota come radiazione di frenamento, legata all'emissione di fotoni da parte dell' e^\pm che entra nel calorimetro ed interagisce con i nuclei presenti, ed è la principale causa di perdita di energia per $E_e > 10\text{ MeV}$. Infatti vediamo che la frequenza di collisione per frenamento è circa costante su tutto il range di energie, mentre è dominante ad alte energie. Osserviamo dunque che

$$-\frac{1}{E} \frac{dE}{dx} \simeq \text{const} \Rightarrow E(x) = E_0 \exp(-\frac{x}{\chi_0}) \quad (56)$$

dove $\chi_0 \simeq \frac{716.4A}{Z(Z+1\ln(287/\sqrt{Z}))} \frac{g}{cm^2}$ è la **lunghezza di radiazione del fenomeno di assorbimento**, cioè corrisponde alla distanza in questa comodissima unità di misura (g/cm^2) necessaria ad irradiare un fattore $1/e$ dell'energia delle particelle entranti, ed è legata alle caratteristiche del materiale.

- **produzione di coppie** dovuta a fotoni abbastanza energetici che si spartiscono in una coppia di particelle di massa non nulla, con $E_\gamma > 2m$ come limite inferiore all'energia dei gamma suddetti. Possiamo qualitativamente descrivere il fenomeno tramite il **tasso di disintegrazione**, che segue la legge

$$\frac{dN}{N} = -\frac{7}{9} \frac{dX}{\chi_0} \Rightarrow N(X) = N_0 \exp(-\frac{7}{9} \frac{X}{\chi_0}) \quad (57)$$

Lo sciamo EM si verifica se un fotone o un e^\pm molto energetico incide su un mezzo bello denso; a seconda della natura della particella incidente, essa darà luogo a produzione di coppie o emissione di frenamento, generando nuove particelle molto energetiche che ripeteranno il processo fino a che le ultime particelle prodotte avranno energia sotto la soglia e fermeranno lo sciamo, continuando ad interagire con il materiale tipo come Compton o fotoelettrico.

ESEMPIO

Possiamo determinare spannometricamente il numero di componenti di uno sciamo con **l'approssimazione B di Rossi**: trattiamo il sistema come deterministico assumendo lo sviluppo dello sciamo sia solo longitudinale e che con cadenza regolare percorrendo ogni χ_0 ogni particella produca il fenomeno atteso splittandosi in due particelle di energia esattamente metà. Varrò quindi che lo sciamo si blocca se

$$E_n = \frac{E_0}{2^n} < E_{soglia} \quad n\chi_0 \propto L \quad (58)$$

Dove L è **la lunghezza di assorbimento**, indicante quanto dovrebbe esser lungo un rivelatore per cogliere la maggior parte dello sciamo (tutto è impossibile dato che è un esponenziale decrescente e quindi si annulla solo all'infinito).

Definiamo **lunghezza della traccia \mathcal{L}** la somma dei tratti percorsi da ciascuna particella carica **dello sciamo**, che sarà proporzionale al numero di particelle presenti: dato che esse non emettono per frenamento, con rivelatori appositi possiamo vedere qual è l'energia rilasciata per la ionizzazione dalle tracce cariche ed ottenere una stima di \mathcal{L} da cui otteniamo E_0 .

3.8.2 Calorimetri elettromagnetici

Sono **rivelatori distruttivi**, che **assorbono tutta l'energia E_0 della particella incidente e rilasciano un segnale proporzionale all'energia della particella stessa**. sono strumenti lineari formati da un **mezzo sensibile** generalmente trasparente per vedere le tracce.

Quando un e^\pm interagisce con il mezzo, rilascia un fotone per emissione di frenamento che sbatte sulle pareti del rivelatore dove troviamo dei **fotomoltiplicatori** fatti da piccoli tubi ad alta tensione ove il fotone causa emissione di un fotoelettrone il quale, accelerato dalla ddp, genera una valanga ionizzando le particelle neutre contenute nel tubo. Questo, unito all'emissione secondaria di elettroni per urti con le pareti, fa sì che un singolo fotoelettrone possa generare molte cariche elettriche che possono dare un segnale in corrente rilevabile. Dato che i fotoelettroni sono in corrispondenza 1:1 con i fotoni emessi, si dice generalmente che le cariche seguono una *statistica di fotoelettroni*. Quindi frenando l'elettrone con un mezzo denso si può registrare un segnale elettrico legato alla sua presenza. La risoluzione dei calorimetri EM è legata alla statistica fotoelettronica, e dato che maggiore è l'energia dell'elettrone incidente, maggiore è il numero di fotoelettroni emessi nel fotomoltiplicatore, allora $\frac{\sigma(E)}{E} \propto \frac{\sigma(N_{phe})}{N_{phe}} = \frac{1}{\sqrt{N_{phe}}} \propto \frac{1}{\sqrt{E}}$ al quale si aggiunge in quadratura l'errore legato al rumore di fondo dell'elettronica ed un termine costante. Supponendo l'errore stocastico sia tanto maggiore quanto maggiore è il segnale S prodotto, allora $\frac{\sigma(E)}{E} = \frac{S}{\sqrt{E}} \otimes \frac{N_{phe}}{E} \otimes c$ cioè **l'errore relativo sulla stima dell'energia è inversamente proporzionale all'energia stessa, e la miglior risoluzione si ha per particelle più energetiche**.

ESEMPI DI CALORIMETRI

3.8.3 Sciami adronico

Se consideriamo adroni carichi e neutri, essi interagiscono fortemente con i nuclei, e le collisioni sono per lo più urti anelastici tra i cui prodotti abbiamo particelle instabili che decadono in pioni, che decadono a loro volta, tipo $\pi^+ \rightarrow \gamma + \gamma$, e mediamente un terzo dell'energia della particella originaria viene prima o poi assegnata a π^0 che prima o poi si smezzano nei due gamma. Questo prodotto finale è detta **componente elettromagnetica dello sciamo adronico**, che viene sommata alla componente adronica dello sciamo. La legge per lo sciamo adronico è comunque esponenziale e del tipo

$$N(X) = N_0 \exp(-\frac{X}{\lambda}) \quad (59)$$

dove λ è la **lunghezza di interazione** dipendente dal materiale e di ruolo analogo alla χ_0 dello sciamo EM, anche se l'unica relazione tra loro è che $\lambda \gg \chi_0$ da cui si deriva che gli sciami adronici si propagano per lunghezze maggiori di quelli EM, quindi i rivelatori di adroni dovranno esser per forza più grossi. Le macchine in questione, detti **calorimetri adronici**, analizzano uno sciamo con varie possibilità di decadimento ed inevitabilmente si hanno più fluttuazioni che causano una **pessima risoluzione**.

3.9 Rivelazione di neutrini

I neutrini si identificano da interazioni in corrente della forma

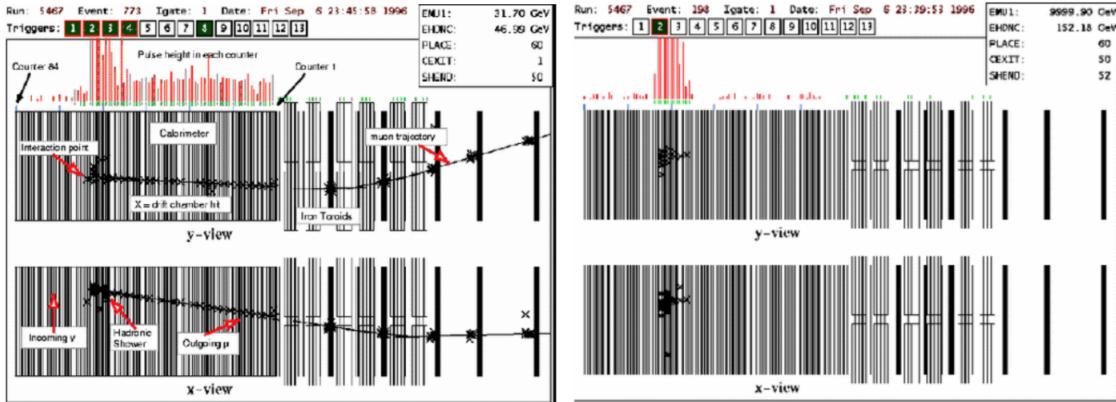
$$\begin{array}{ll} \nu_e + n \rightarrow p + e^- & \bar{\nu}_e + n \rightarrow p + e^+ \\ \nu_\mu + n \rightarrow p + \mu^- & \bar{\nu}_\mu + n \rightarrow p + \mu^+ \end{array}$$

dove l'interazione con un neutrino permette la ricostruzione del corrispondente leptone carico.

Possiamo rivelare un neutrino vedendo se c'è un suo prodotto di reazione, e dato che l'elettrone è più veloce generalmente cerchiamo lui: la *thumb rule* da seguire in questi casi è dunque **che per rivelare un neutrino si cerca evidenza del suo leptone carico**. Notando che **la sezione d'urto legata all'interazione neutrino-materia è piccolissima**, deduciamo che **un rivelatore di neutrini deve avere un volume notevole di materiale attivo**.

Un esempio di rivelatore di neutrini è quello dell'esperimento **Super Kamiokande** giapponese, che usa 5000 tonnellate di acqua distillata, legato allo studio di neutrini prodotti nell'atmosfera per interazione con i raggi cosmici e dei neutroni che arrivano direttamente dal Sole. Collocato in profondità sotto terra così che la roccia schermi la maggior parte delle altre particelle più interagenti, si basa sul fatto che i neutrini arrivano nell'acqua e, interagendo con gli adroni pesanti nel bacino, per interazione di corrente si trasformano in elettroni o muoni carichi. Essi per conservazione posseggono quasi tutta l'energia del neutrino iniziale e supera la velocità della luce nell'acqua, dando effetto Cherenkov. Come sappiamo, studiando l'angolo di apertura del cono Cherenkov possiamo risalire all'energia dell'elettrone/muone e di conseguenza a quella del neutrino incidente, determinandone l'origine. Sappiamo infatti che i neutrini atmosferici sono muonici e hanno energie sul GeV, mentre quelli solari sono elettronici ed hanno energie sul MeV.

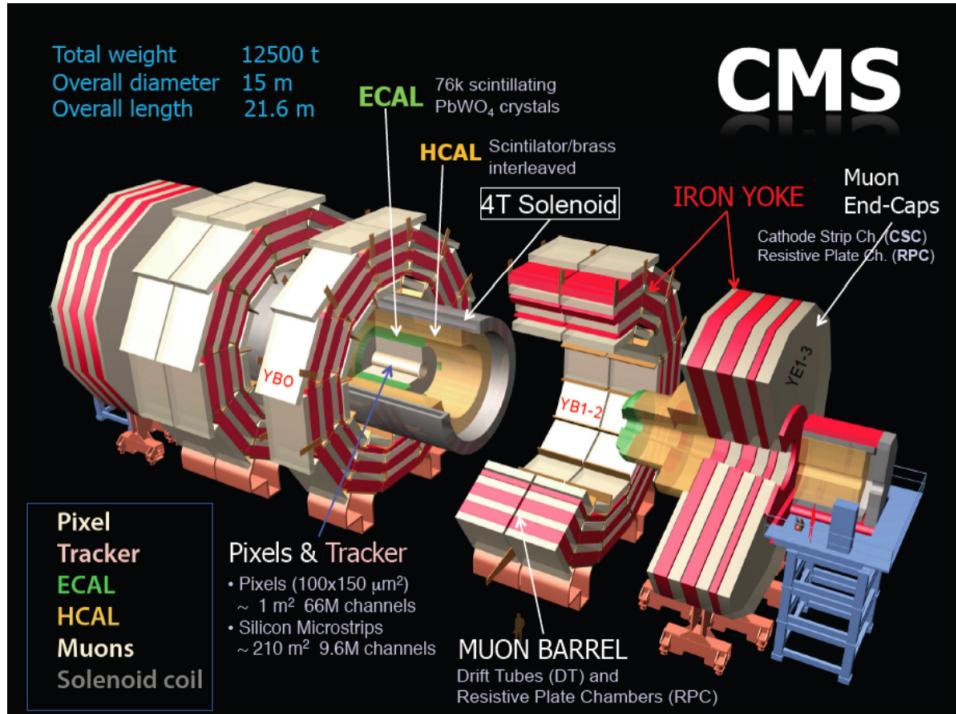
Altro esempio di rivelatore per neutrini è **NuTeV**, ossia *Neutrinos At the Tevatron*, esperimento del **FermiLab** consistente di una lunga struttura composta da strati di ferro e materiale scintillante, una camera a deriva a formare un calorimetro, un toroide come spettrometro muonico. L'idea di base è data dal fatto che, essendo la sezione d'urto per interazioni neutrino-adrone molto piccola, si considerano fasci incidenti molto popolati in cui occasionalmente si aveva interazione neutrino materia con trasformazione del neutrino nel suo leptone carico con conseguente formazione di uno sciame EM nella camera a deriva, il quale permetteva la rivelazione della collisione. Chiaramente, i muoni emessi possono comunque esser studiati dato che abbiamo il rivelatore muonico dopo! Guardiamo gli esempi:



Vediamo come la traccia energetica (rossa) si estenda per gran parte della regione dell'apparato di misura nel primo caso, e solo nella prima regione nel secondo. Questo poiché nel primo caso l'andamento costante nella seconda regione, dove c'è lo spettrometro muonico, è legata alla presenza di un muone che vi transita, mentre nel secondo caso si hanno solo elettroni e tau che sono assorbiti dal calorimetro, fenomeno più raro e legato alla presenza di **correnti deboli neutre** che nascono dall'urto elastico tra neutrino e bersaglio. Essa corrisponde al fatto che un neutrino urta una particella ferma ed interagisce con essa mediante un bosone di gauge neutro (Z^0) e, ricordando che i neutrini non vengono direttamente rivelati, non abbiamo traccia diretta del loro moto ma solo del fatto che un tot di energia viene ceduta alla particella bersaglio che dunque viene accelerata. Se il neutrino è parecchio energetico esso può anche dare un urto a grande energia con il nucleone che produce disintegrazione in diverse particelle (*Deep Inelastic Scattering*) dando luogo ad uno sciame adronico, la cui componente EM si arresta dopo pochi metri per l'azione del calorimetro.

3.10 Il CMS

Il *Compact Muon Solenoid* sta al CERN e venne costruito per osservare il bosone di Higgs (fatto), cercare particelle con massa superiore al TeV (non troppo per ora), cercare materia oscura (still non troppo), studiare interazioni standard di energie sul TeV e misurare i vertici secondari di decadimento con grande precisione. Notiamo subito che per questi grandi obiettivi serve una risoluzione enorme, una grande ermeticità e la possibilità di effettuare rivelazioni veloci per i muoni. Quindi avremo un campo davvero potente, dell'ordine dei 4T, e il nostro rivelatore avrà tracciatori al silicio ed un calorimetro a cristalli per l'aumento della risoluzione. La struttura segue:



dove vediamo che il tubo centrale in cui avviene la reazione studiata è circondato da trackers che determinano la posizione dei prodotti e poi, andando verso l'esterno, troviamo un calorimetro EM per lo studio di leptoni carichi ed uno adronico per lo studio delle particelle pesanti e, da ultimo, un solenoide ENORME (fatto da materiale superconduttore, NbTi, per gli amici Niobio Titanio) di volume **400m³** davvero ENORME che genera un campo magnetico di 3.8 T immagazzinando nel suo volume ENORME un'energia GRANDISSIMA di $\approx 2.5 \cdot 10^9 J$. Ancora più esternamente si trovano altri strumenti.

I **tracciatori interni** sono tavoletti di Silicio molto sottili (tenute a -10°) e tali da garantire una precisione della decina di micron sulla posizione di impatto per particelle cariche, tutto per la struttura interna di queste tavole che permette di avere una lettura basata circa su ottanta milioni di canali attivi.

Il calorimetro elettromagnetico consta di 76000 cristalli scintillanti di **PbWO₄** (Wolframato di piombo, per gli amici stolzite) che fungono sia da assorbitori di fotoni ed elettroni che da rivelatori, oltre ad esser progettati per assorbire solo parzialmente le altre particelle cariche più pesanti.

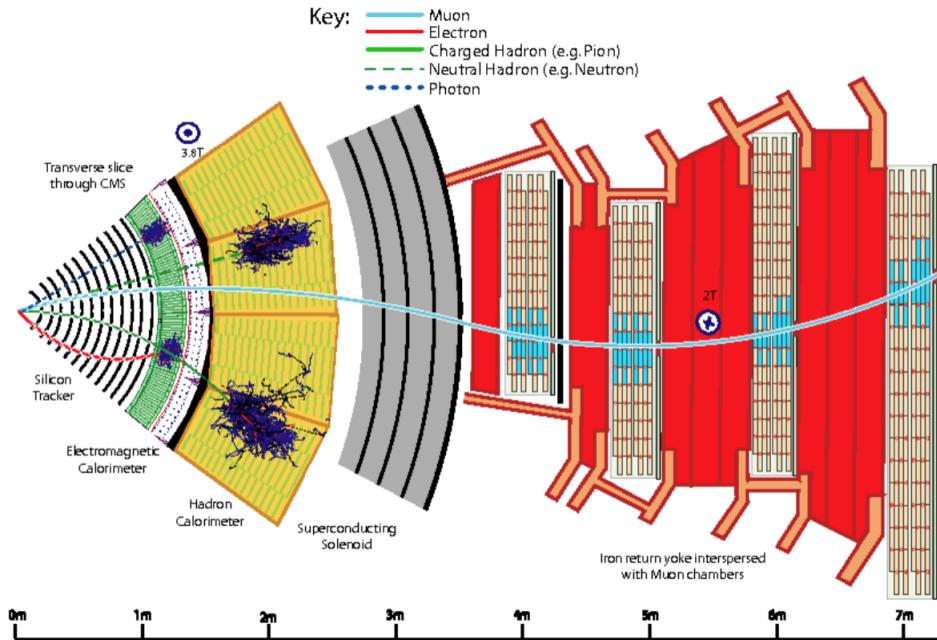
Il calorimetro adronico è uno strumento a campionamento fatto da una lega di ottone che funge da assorbitore ed un rivelatore dato da 70000 piastre di plastica scintillante che permette di ricostruire la struttura degli sciami adronici con risoluzione del $\sigma(E)/E \approx 100\% / E$.

LE camere per muoni esterne tracciano il passaggio dei muoni, le uniche particelle rilevabili che possono attraversare indenni tutto il rivelatore. Sono collocate in una pesante struttura di Ferro magnetizzato che chiude le linee di campo magnetico, che si è qui ridotto ai 2 T, intrappolando i muoni carichi.

Quindi se la particella gettata nelle grinfie del CMS è

- Un fotone, questo va dritto fino al calorimetro EM dove produce uno sciame EM e viene assorbito;

- un elettrone, come per il fotone ma curva nella regione dei tracciatori per la presenza di campo magnetico;
- un adrone neutro (tipo il neutrone) oltrepassa in moto rettilineo calorimetro EM e viene intrappolato in quello adronico, producendo uno sciame;
- un adrone carico (protone) fa come il precedente ma curva in direzione opposta all'elettrone nella regione di trackers;
- un muone, è abbastanza poco interagente da oltrepassare entrambi i calorimetri e raggiungere il solenoide, dove inverte la curva del proprio moto, viene tracciato ed eventualmente arrestato dall'azione di camere muoniche.



3.11 Collisioni

Con il termine **collisione** si intende ogni **processo a due corpi** a,b presenti in uno stato iniziale che interagiscono dando luogo ad uno stato finale dove si può avere

- due corpi c,d diversi da quelli iniziali
- due corpi uguali a quelli iniziali
- tre corpi o più

Consideriamo solo **urti binari**. Troviamo subito che in un urto **si conservano E, p, j ed alcuni numeri quantici elementari (la carica Q per esempio)**. Supponiamo inoltre che il tempo di collisione sia molto minore del tempo di misura (cioè differenza tra istante in cui si misura lo stato iniziale e quello in cui si rivela lo stato finale), così possiamo **trattare le particelle come non interagenti al tempo di misura e associare la trattazione in forma di onda piana**. Se le particelle possiamo vederle come libere, allora l'Hamiltoniano associato avrà un termine principale legato al moto di particella libera ed un termine perturbativo per le interazioni, che consta di uno sviluppo in serie di potenze delle costanti di accoppiamento $\alpha, \alpha_W, \alpha_S$.

Come sistemi di riferimento useremo **quello del centro di massa CM e quello a fixed target frame FT**: il primo lo conosciamo, abbiamo le due particelle iniziali che si muovono l'una verso l'altra con impulso uguale in modulo e opposto in segno, e il secondo è quello in cui il bersaglio è fermo.

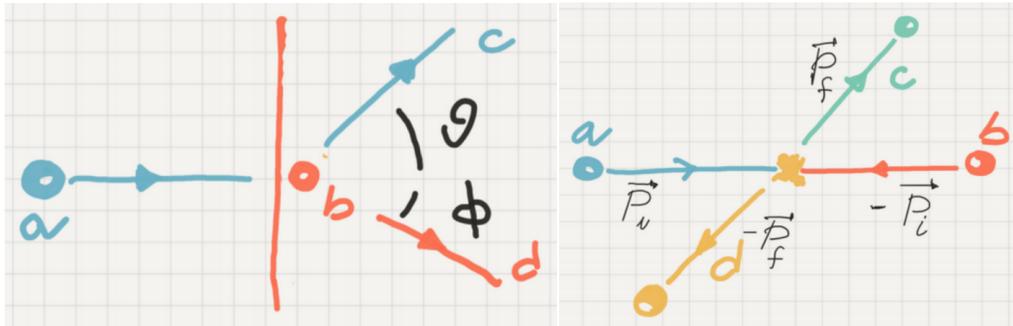


Figura 7.9: Rappresentazione dei sistemi di riferimento

FT	CDM
$\mathbf{p}_a = \left(\sqrt{p_a^2 + m_a^2}, 0, 0, p_a \right)$	$\mathbf{p}_a = \left(\sqrt{p_i^2 + m_a^2}, 0, 0, p_i \right)$
$\mathbf{p}_b = (m_b, 0, 0, 0)$	$\mathbf{p}_b = \left(\sqrt{p_i^2 + m_b^2}, 0, 0, -p_i \right)$
$\mathbf{p}_c = \left(\sqrt{p_c^2 + m_c^2}, 0, p_c \sin(\theta), p_c \cos(\theta) \right)$	$\mathbf{p}_c = \left(\sqrt{p_f^2 + m_c^2}, 0, p_f \sin(\theta), p_f \cos(\theta) \right)$
$\mathbf{p}_d = \left(\sqrt{p_d^2 + m_d^2}, 0, p_d \sin(\phi), p_d \cos(\phi) \right)$	$\mathbf{p}_d = \left(\sqrt{p_f^2 + m_d^2}, 0, -p_f \sin(\theta), -p_f \cos(\theta) \right)$

dove ricordiamo che $\mathbf{p} = (E = \sqrt{p^2 + m^2}, px, py, pz) = (E, \vec{p})$ è il **quadrimpulso relativistico**. Ricordiamo la definizione di **variabili di Mandelstam**, che sarebbero

$$\begin{cases} s = (p_a + p_b)^2 \\ t = (p_a - p_c)^2 \\ u = (p_a - p_d)^2 \end{cases}$$

che sono tre invarianti relativistici: in particolare s , nel CM, è determinata solo dalla somma in quadratura delle energie delle particelle prima e dopo l'urto. dato che i momenti sono nulli. Dunque \sqrt{s} è **energia nel riferimento del CDM ed è detta massa invariante M del sistema**. Nell'ipotesi di masse trascurabili, inoltre,

$$s + t + u = \sum m_i^2 + \sum m_f^2 = 0 \Rightarrow u = -(s + t) \quad (60)$$

L'obiettivo degli esperimenti è generalmente quello di misurare con buona precisione parametri quali la **frequenza di collisione ν** , cioè il numero di collisioni medio per unità di tempo per ogni particella del fascio incidente su un bersaglio: essa è legata alla **sezione d'urto inclusiva σ_{tot}** , collegata a sua volta alla probabilità che il proiettile effettui un urto qualsiasi con il bersaglio.

Possiamo anche definire una **sezione d'urto parziale** legata cioè alla probabilità che un certo processo di collisione avvenga, a seconda dei prodotti ottenuti. Osservando che la **sezione d'urto è additiva**, allora **deriviamo che la sezione d'urto totale è la somma di quelle parziali**

$$\sigma_{tot} = \sum \sigma_{i_{parz}} \quad (61)$$

Parliamo infine di **sezione d'urto differenziale** $\frac{d^2\sigma}{d\theta dE}$ se andiamo a vedere la distribuzione della sezione in funzione dell'angolo di emissione e dell'energia.

La **teoria** si occupa invece di stimare i valori che l'esperimento misura da un set di N parametri significativi Θ_i , permettendo a posteriori di confermare i risultati empirici con le previsioni teoriche e, se alcuni non sono noti, di determinarli. Permette infine di imporre vincoli sulle interpretazioni dei risultati e di definire le info estraibili dall'esperimento sulla struttura dell'interazione.

3.12 La sezione d'urto

E' il principale indicatore della probabilità che avvenga una collisione specifica o in generale che avvenga una collisione, ed è un parametro additivo.

3.12.1 Modello geometrico

prendiamo un fascio mono energetico di particelle puntiformi con sezione Σ e densità n_b (numero di particelle per unità di volume) incidente sulla normale di una regione contenente N_t centri diffusori fermi trattabili come sfere di sezione σ e distanti in modo da non oscurarsi a vicenda (ipotesi di *sistema non denso*, così un atomo del fascio inciderà su un target solo evitando *scattering multipli*). Chiameremo $\langle \vec{v} \rangle$ la velocità media del fascio.

Consideriamo un tempo dt di interazione, in cui raggiungono il foglio di centri diffusori solo le particelle contenute nel cilindro di base Σ e altezza $v \cdot dt$: avremo un numero di proiettili $dN_b = n_b dV = n_b \sigma \vec{v} dt$. Possiamo stimare la probabilità che la collisione avvenga come rapporto tra l'area coperta dai bersagli e quella investita dal fascio, ossia

$$P_{coll} = \frac{N_t \sigma}{\Sigma} \quad (62)$$

Da cui il numero atteso di collisioni per secondo diventa

$$R_t = \frac{dN_{coll}}{dt} = \frac{dN_b}{dt} P_{coll} = (n_b \langle \vec{v} \rangle \Sigma) \left(\frac{\sigma}{\Sigma} N_t \right) \quad (63)$$

da cui

$$\sigma = \frac{R_t}{n_b \langle \vec{v} \rangle N_t} \quad (64)$$

Dove, noti i termini a denominatore per configurazione sperimentale, l' R_t lo possiamo ottenere facendo incidere fasci di diversa sezione su varie regioni del foglio di bersagli e misurando il numero medio di collisioni (meglio usare tanti fasci incidenti così la precisione sale!).

La sezione del bersaglio corrisponde all'area efficace atta all'impatto tra sfere rigide, quindi se i proiettili non sono puntiformi ma hanno il loro raggetto, correggeremo la σ considerando come sezione quella che ha per raggio la somma dei raggi di bersaglio e proiettile. Ricordiamo che la sezione d'urto si misura in barn, e che **1 barn = 100 fm²**.

La sezione d'urto della formula (61) è funzione di quantità misurabili, e la possiamo esprimere anche in funzione della **luminosità \mathcal{L}** , cioè **il flusso di particelle incidenti in un processo di collisione**, che vale

$$\mathcal{L} = \frac{R_t}{\sigma} \frac{1}{cm \cdot s} \quad (65)$$

e per **urto di sfere rigide con bersaglio**

$$\mathcal{L} = n_b \langle \vec{v} \rangle N_t \quad (66)$$

e per collisione di due fasci frontali

$$\mathcal{L} = \frac{N_1 N_2}{\Sigma} f \quad (67)$$

con **f frequenza di collisione**.

3.12.2 Modello classico e quantistico

: sappiamo che $V(r) \propto r^{-1}$, da cui deriva che **tutte le particelle interagiscono, ed avremo probabilità di collisione del 100%**, ma l'intensità dell'interazione e l'angolo di deviazione sono governati da una statistica dipendente dall'angolo casuale tra proiettile puntiforme e bersaglio. Per la sezione d'urto, iniziamo stimando il numero di particelle deviate per unità di angolo solido $d\Omega = \sin(\theta) d\theta d\phi$ (usiamo simmetria sferica) per ogni nucleo diffusore

$$\frac{dN}{d\Omega} = -\frac{1}{2\pi \sin(\theta)} \frac{dN}{db} \frac{db}{d\theta} \quad (68)$$

con **b parametro di impatto**, cioè la distanza perpendicolare al moto tra proiettile e asse passante per il centro del bersaglio, a grande distanza dal nucleo. Prendiamo le interazioni per mezzo di forza eletrostatica.

Supponendo distribuzione uniforme di proiettili nel fascio, possiamo vedere che il numero N_f di particelle deflesse ad un angolo tra $\theta, \theta + d\theta$ è pari al numero di particelle N_i che hanno parametro di impatto iniziale tra $b, b + db$ che sarà il flusso incidente per l'area della corona circolare ($2\pi b db$), cioè $N_i(b) = \Phi \pi b^2 \Rightarrow \frac{dN_i}{db} = \Phi 2\pi b$. Analogamente, sussiste la relazione

$$b(\theta) = \frac{zZe^2}{2E} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (69)$$

e, recuperando la definizione di sezione d'urto differenziale, troviamo

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d}{d\Omega} \left(\frac{N_f}{\Phi} \right) = \frac{1}{\Phi} 2\pi b \frac{db}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta} \frac{db}{d\theta} \quad (70)$$

cosa valida per ogni fascio uniforme di proiettili su bersaglio a simmetria cilindrica, che sbattuta in (65) ci da

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{zZ\alpha}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad (71)$$

dove vediamo un'evidente divergenza in 0 del seno alla quarta.

Vediamo ora **quantomeccanicamente** che succede. Dopo una serie di conti scomodi che implicano l'utilizzo della **golden Rule** di Fermi, la **densità degli stati**, l'utilizzo di funzioni d'onda sotto forma di onde piane armoniche e il calcolo di elementi di matrice M, troviamo

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{zZ\alpha}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad (72)$$

identico all'approccio classico!

3.13 Collisioni in Quantum Field Theory (QFT)

Parte decisamente magica, in corso di comprensione e studio.

3.14 Decadimenti

3.14.1 Formula di Breit-Wigner

Ricordiamo che **un decadimento è un processo di reazione che ha per reagente una singola particella e**, dato un N_0 di particelle, vale la classica legge $N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ con τ vita media del decay stesso.

Prendiamo una particella isolata e libera di stato $|\Psi\rangle$, allora

$$H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle = m|\Psi\rangle \quad \text{rest frame} \quad (73)$$

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iHt}|\Psi(0)\rangle = e^{-imt}|\Psi(0)\rangle \quad (74)$$

$$A(t) = \langle \Psi(t) | \Psi(0) \rangle \Psi_0 e^{imt} \quad (75)$$

dove l'ultima è l'ampiezza di probabilità che si abbia una transizione dallo stato iniziale indicato dalla Ψ_0 alla Ψ_t , che possiamo anche scrivere come trasformata di Fourier

$$\tilde{A}(E) = FT[A(t)] = \int_0^\infty A(t) e^{-iEt} dt = \tilde{A}_0 \delta(m - E) \quad (76)$$

cioè abbiamo visto che è la trasformata di un esponenziale pari ad una delta di Dirac. Vediamo però subito che se H è Hermitiano, l'energia della particella è reale e la soluzione a Shrodinger è un'onda piana nello spazio dei parametri cui è associato un parametro ben definito di energia nello spazio delle fasi, che **non rappresenta uno stato instabile, il quale sarebbe misurabile in un certo intervallo di tempo dell'ordine della sua vita media**. Dunque le **particelle soggette a decay sono rappresentate da stati instabili**, ed in accordo con il principio di indeterminazione $\Delta t \Delta E \simeq 1 \Rightarrow \gamma = \Delta E \simeq \frac{1}{\Delta t} \simeq \frac{1}{\tau}$ dove γ è l'incertezza associata all'energia di uno stato instabile. Ci convinciamo facilmente che uno stato soggetto a decadimento non possa avere energia ben definita, dovrà avere un'incertezza non nulla, e la sua distribuzione nello spazio dei parametri E non sarà più una delta ma una funzione continua con dispersione legata a γ che chiameremo **larghezza dello stato**. C'è anche la distribuzione formale, (ma devo interiorizzarla ancora R.I.P.) con cui si dimostra $\gamma = \frac{1}{\tau}$.

Facciamo una precisazione: di per sé **il decadimento rappresenta un processo invertibile**, dato che per esser un avvenimento fisico deve conservare tutto quel che generalmente si conserva (carica, energia, numeri quantici...) quindi l'Hamiltoniana rappresentazione dell'evoluzione di uno stato di particella singola che decade **deve essere nel complesso hermitiano**, cosa che **garantisce l'unitarietà del processo e dunque la sua reversibilità**. Dividiamo il processo in due fasi:

- quella in cui la particella smette di esistere

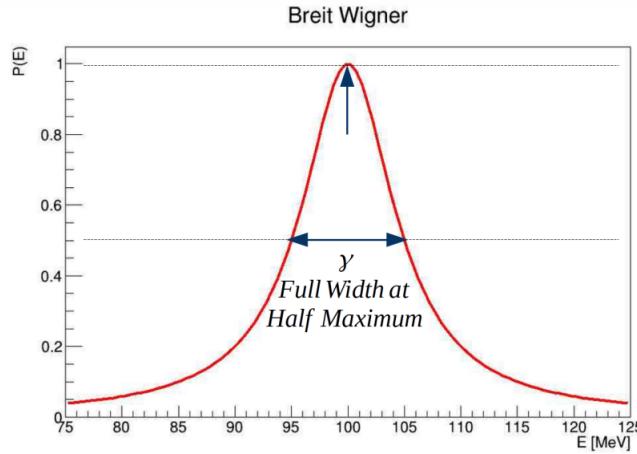
- quella in cui si generano i prodotti

chiaramente creazione e scomparsa non sono fenomeni reversibili, e i due processi saranno descritti da operatori non hermitiani (sensato, un decay spontaneo nasce da stato instabile descritto da operatore non hermitiano), ma la composizione dovrà esser hermitiana.

Andiamo a vedere l'ampiezza di probabilità di transizione: ad essa si associa una grandezza coniugata nello spazio dei parametri data dalla sua trasformata di Fourier,

$$\tilde{P}(E) = |\tilde{A}(E)|^2 = \frac{\gamma^2/4}{(m - E)^2 + \gamma^2/4} \quad (77)$$

detta **funzione di Breit-Wigner**, che in approssimazione non relativistica ha la forma:



il cui profilo ricorda una gaussiana con **picco sull'energia a riposo**, ove la funzione ha valore 1. Notiamo che è **definita positiva e ha andamento quasi simmetrico**, oltre che per $m = \pm \frac{\gamma}{2} \Rightarrow \tilde{P} = \frac{1}{2}$, cioè la *FWHM* (*full width at half maximum*) è proprio γ . Evidenziamo poi che l'**andamento è quello caratteristico di un fenomeno di risonanza** che giunge al massimo per $E = m$.

Deduciamo dunque che γ è **una misura di risoluzione della massa**, quindi più è alta meno sarà definita la massa della particella prima del decadimento. Ricordando che la condizione di instabilità impone di avere una fluttuazione in energia non nulla, deduciamo che questo corrisponde al dire che non siamo troppo certi del valore della massa della particella (o analogamente su quale sia il sistema di riferimento dove essa è a riposo).

Con le correzioni relativistiche, nella teoria dei propagatori della QFT la formula diventa

$$\tilde{P}_{rel}(s) = \frac{s\gamma^2}{(s - m^2)^2 + m^2\gamma^2} \quad (78)$$

e dato che $s = \sqrt{E}$ si ha dipendenza quadratica dall'energia.

3.14.2 Probabilità di decadimento

Vedendo il decadimento come un urto a solo corpo (un po' filosofico), il termine γ dei conti precedenti svolge ruolo analogo alla sezione d'urto dei decadimenti, dato che è il parametro caratteristico da cui dipende la probabilità di transizione da stato iniziale a finale. Ridefiniamo la forma differenziale come

$$d\Gamma = \frac{1}{2m} |M|^2 d\rho \quad (79)$$

dove Γ non è costante in diversi sistemi di riferimento (se ho due sdr $\Sigma, \Sigma' \Rightarrow \tau' = \gamma\tau \Rightarrow \Gamma' = \frac{1}{\tau'} = \frac{1}{\gamma\tau} = \frac{\Gamma}{\gamma}$). A seconda del decadimento studiato, abbiamo diversi scenari possibili:

- Particelle (tipo il muone) che decadono secondo una sola legge al **100%** dei casi, quindi noto il τ è facile stimare i parametri della previsione teorica;

- Particelle che possono decadere in molti modi, ognuno dei quali avrà la propria teoria con i propri parametri, e la probabilità complessiva che la particella \mathbf{X}_0 in stato iniziale decaduta è data dalla somma delle larghezze parziali su tutti gli scenari possibili di stato finale f , divisi per il numero di particelle emesse e per il loro tipo. Forse è più chiaro in formule:

$$\Gamma_{tot} = \Gamma = \sum_1^N \Gamma_f \quad \Gamma_f = \Gamma(\mathbf{X}_0 \rightarrow f) \quad (80)$$

Definiamo **Branching fraction** il rapporto $\frac{\Gamma_f}{\Gamma_{tot}} = B_r$ e notiamo che la somma di tutti questi B_r darà ovviamente l'unità.

3.14.3 Misure di vita media

Per stimare la vita media possiamo procedere sia in modo diretto che indiretto: è di fatto più facile misurare quantità più grandi dato che la stima finale sarà più precisa. La nostra situazione è *win-to-win* dato che i grandi τ possiamo misurarli direttamente, mentre per valori piccoli del suddetto si avranno grandi Γ e potremo misurare questi ultimi. Abbiamo diverse pratiche di misura diretta:

- Conteggio:** noto il numero di particelle nello stato iniziale N_0 andiamo a contare il numero di particelle ad un certo istante dopo quello iniziale. Ricordando che le particelle non decadute diminuiscono di un fattore e ad ogni periodo, con poche misure possiamo trovare il valore di τ . Per una stima più cazzuta possiamo interpolare l'espressione lineare seguente (e cacciare fuori la pendenza, che sarà la nostra vita media)

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right) = -\frac{t}{\tau} \quad (81)$$

cosa che in genere funziona se la particella in questione ha dimensioni confrontabili a quelle della fisica nucleare.

- Studio di decadimenti di particelle a riposo:** si rallenta la particella fino a fermarla, per mettersi nel suo *rest frame*, facendo poi una misura diretta (tipo con un cronometro) del tempo che ci vuole a vedere i prodotti del decadimento che, essendo la particella ferma, sarà proprio il tempo di decadimento ($\gamma = 1$, dilatazione dei tempi nulla). Si istogramma poi l'insieme dei tempi di decadimento rilevati e si fitta tenendo conto del limite risolutivo: il valore atteso stimato dal fit sarà la vita media. È una tecnica usata solo per μ, π, K che hanno vite dell'ordine dei **10ns** e con gli strumenti odierni otteniamo stime sufficientemente precise.
- Misura di lunghezza di volo:** se la vita media è dell'ordine del ns o del fs, allora si misura il **cammino spaziale percorso dalla particella prima di decadere spontaneamente**. Essa è pari al prodotto tra velocità della particella e tempo di moto nel sistema di riferimento considerato (t'), che nel sistema di riferimento solidale alla particella sarà $t = \frac{t'}{\gamma}$, quindi

$$L = v \cdot t' = \beta c \cdot \gamma t \Rightarrow t = \frac{L}{\beta c \gamma} = \frac{Lm}{cp} \quad \beta = \frac{p}{E}, \gamma = \frac{E}{m} \quad (82)$$

quindi da una traccia ben delineata del volo della particella ed una rivelazione accurata dei momenti delle particelle in stato finale, la cui somma vettoriale ci dà l'impulso della particella nello stato pre decadimento, e nota la sua massa, troviamo la vita media. Si ha dunque

$$N(L) \underset{c=1}{=} N_0 \exp\left(-\frac{Lm}{p\tau}\right) \Rightarrow \ln\left(\frac{N(J)}{N_0}\right) = -\frac{m}{p\tau} L$$

ESEMPI

Ora vediamo misure indirette della vita media, chiamate **misure di larghezza di stato**, che possono svolgersi in più modi:

- Misura in formazione:** si lavora per collisioni di particelle di cui sono noti i possibili risultati dell'urto: se abbiamo $a + b \rightarrow X$, al variare di \sqrt{s} possiamo vedere come cambia la frequenza con cui un certo X è prodotto. Se la distribuzione segue Breit-Wigner, allora per corrispondenza tale sarà anche il profilo della sezione d'urto, proporzionale alla probabilità.
- Misura in produzione:** si tracciano i prodotti di decadimento dello stato iniziale a riposo e si ricostruisce il picco in corrispondenza della massa invariante usando $M = \sqrt{\sum \mathbf{p}_f^2} = \sqrt{\sum \mathbf{E}_f^2 - (\sum \vec{p}_f)^2}$

Vediamo da subito che per avere misure decenti della larghezza di uno stato ci servono strumenti ad altissima risoluzione, altrimenti sovrastimeremmo l'incertezza sul valore centrale della distribuzione della massa invariante (che ce lo dà la FWHM). ESEMPI

3.15 Simmetrie

Le proprietà di invarianza sotto l'azione di opportune traslazioni si manifestano nel **teorema di Noether**, e ricordando che

- Dall'invarianza per traslazione temporale deriva la conservazione dell'energia
- Dall'invarianza per traslazione spaziale deriva la conservazione della quantità di moto
- Dall'invarianza per traslazione angolare deriva la conservazione del momento angolare

deriviamo che la **conservazione delle grandezze meccaniche è conseguenza dell'omogeneità ed isotropia di spazio e tempo**. Definiamo **sistema levogiro** un sistema di riferimento cartesiano i cui assi seguono la *regola della mano destra*, mentre definiremo **sistema destrogiro** quello che (COLPO DI SCENA) segue la *regola della mano sinistra*.

3.15.1 Parità

La parità ci permetterà di indicare il passaggio da un sistema di riferimento consuetudinario **levogiro ad uno destrogiro**, dato che questa operazione si dice *scambio di parità* (o solo **parità**) ed è rappresentata da un operatore che agisce sugli assi cartesiani come

$$P(\Sigma) = P(r, \theta, \phi) = (r', \theta', \phi') = (r, \pi - \theta, \pi + \phi) \quad (83)$$

Consideriamo il momento angolare \vec{L} , dato dal prodotto di due vettori: allora

$$P(\vec{L}) = \vec{L}' = \vec{r}' \times \vec{p}' = (-\vec{r}) \times (-\vec{p}) = \vec{L} \quad (84)$$

dove abbiamo usato che la parità agisce su un vettore cambiandolo di segno, e da cui deduciamo che **il momento angolare ha la stessa rappresentazione nei due sistemi**. Ocio però: geometricamente vediamo \vec{L} puntare in due direzioni diverse, ma il segno rimane lo stesso perché tipo se $\vec{L} = (0, 0, L)$ che punta dritto su \hat{z} , cambiando sistema esso punterà in \hat{z}' che in realtà corrisponde al verso negativo di \hat{z} .

In altre parole, la **parità simmetrizza i vettori assiali attraverso l'origine, e queste quantità sono dunque dette pseudovettori o appunto vettori assiali**. Per loro vale

$$A\vec{V}' = P(A\vec{V}) = +A\vec{V}$$

e alcuni di loro sono momento angolare, momento torcente, spin... Definiamo invece **vettore** se esso sotto azione di parità inverte il proprio segno, mantenendo la sua orientazione spaziale ma invertendo la sua rappresentazione. Quindi un **vettore assiale** inverte la propria orientazione spaziale conservando la propria rappresentazione.

Sulla linea d'onda delle precedenti definizioni, chiamiamo **scalari** le grandezze che derivano da prodotto scalare tra due vettori o due vettori assiali, mentre chiameremo **pseudo-scalari** quelle ottenute da prodotto scalare tra vettore e vettore assiale. SERIE DI ESEMPI

3.15.2 Violazione di parità

L'interazione EM conserva la parità, e anche la forza forte. Tuttavia, per la forza W la situazione si complica. Analizziamo il **paradosso θ, τ** , pseudonimi di due fermioni che hanno circa stessa massa, stessa carica, e stesso spin, che si osservano decadere debolmente l'una in uno stato di parità +1 e l'altra in -1; a posteriori queste θ, τ abbiamo trovato esser la stessa particella, K^+ che decade secondo due diversi modi in due stati finali con opposta parità:

$$\begin{aligned} K^+ \rightarrow \pi^0 + \pi^+ &\implies p(K^+) = p(\pi^0)p(\pi^+)(-1)^0 = p^2(\pi) = (-1)^2 = +1 \\ K^+ \rightarrow \pi^0 + \pi^0 + \pi^+ &\implies p(K^+) = p(\pi^0)p(\pi^0)p(\pi^+)(-1)^0 = p^3(\pi) = (-1)^3 = -1 \end{aligned}$$

3.15.3 Coniugazione di carica

Consiste nel **trasformare una particella elementare nella corrispondente antiparticella**, con conseguente inversione di

- carica
- numero barionico
- sapore leptonico
- sapore adronico
- terza componente di isospin forte
- terza componente di isospin debole

Questa coniugazione è rappresentabile da un operatore **C** che agisce sulle funzioni d'onda delle particelle con un fattore moltiplicativo (l'autovalore c). Vale che applicare due volte C implica ottenere lo stato della particella iniziale, quindi

$$C|f\rangle = c|\bar{f}\rangle \quad C^2|f\rangle = C(c|\bar{f}\rangle) = c^2|f\rangle = |f\rangle \Rightarrow c = \pm 1$$

queste particelle complessivamente neutre possono essere bosoni di Gauge, mesoni pseudoscalari, mesoni vettori (mesoni perchè $s=0$, vettori perchè il loro stato cambia segno con la parità).

Dobbiamo ora assegnare il corretto autovalore di coniugazione di carica ad ogni particella, e possiamo procedere in due modi:

- Consideriamo il caso del fotone: la coniugazione di carica applicata all'elettrone ci restituisce il positrone, da cui deduciamo che applicare C comporta l'inversione di \vec{E} e quindi il fotone avrà $c_\gamma = -1$. Da qui possiamo ricavare quello del piona, dato che al **98%** esso decade in due fotoni e quindi avremo +1. ESEMPI

3.16 Interazioni deboli e neutrini

3.16.1 Costante di fermi

Ricordiamo che, nella teoria di Fermi, la larghezza di uno stato si esprime come

$$d\Gamma = C|M|^2 F(Z, E_e) (E_0 - E_e)^2 p_e^2 dp_e$$

con **F** legato alla specifica transizione nucleare studiata. Ricordiamo che nella teoria di fermi, che è una **teoria efficace** (sfrutta osservazioni empiriche), l'**interazione è il prodotto di tre termini**, ossia una corrente nucleare (determinata dal nucleo prima e dopo l'interazione), una corrente leptonica (determinata da leptone e neutrino con cui il nucleo interagisce) ed un termine che descrive l'interazione vera e propria.

In prima approssimazione il termine di interazione viene supposto costante, con valore determinato dalla **costante di Fermi**, tale che l'elemento di matrice associato all'interazione sarà

$$M_{fi} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} j_{lep}^\lambda j_{\lambda, nuc}$$

dove, ricordando $\Gamma \propto |M|^2$, allora G_F non è adimensionale, ma vale $[G_F] = GeV^{-2}$. Vale dunque

$$\frac{1}{\tau} = \Gamma \propto G_F^2 \times f \rightarrow [f] \frac{GeV}{GeV^{-4}} = GeV^5 \quad (85)$$

ed in generale $\Gamma \propto G_F^2 E_0^5$, dove E_0 rappresenta l'energia liberata nel processo di interazione, ossia la differenza di energia a riposo di stato iniziale e finale:

$$\Gamma = \int_0^{p_{e,max}} d\Gamma(p_e) \propto G_F^2 \int_0^{p_{e,max}} p_e^2 (E_0 - E_e)^2 dp_e \simeq G_F^2 E_0^5 \quad (86)$$

e vediamo che la proporzionalità è legata ad un fattore moltiplicativo che cambia in base alla transizione: nel caso di una super permessa ($0^+ \rightarrow 0^+$), in cui non si ha cambiamento di spin, in approssimazione ultra-relativistica

$$\Gamma \simeq \frac{G_F^2 E_0^5}{30\pi^2}$$

Ipotizziamo ora che il nucleo figlio abbia rinculo trascurabile, e che quindi tutta l'energia emessa venga divisa tra elettrone ed antineutrino:

$$E_0 = \Delta m = m_N - m'_N = E_e + E_\nu$$

Esempi sono il decadimento β^+ del ^{14}O in ^{10}C , fenomeni per cui il tempo di vita medio si aggira sul secondo, e notiamo che l'approssimazione ultra relativistica è corretta solo in prima approssimazione dato che si libera energia solo di qualche MeV. Per decadimenti più rapidi, tipo quello del $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ che vive sui **2.2μs**, la larghezza dello stato per Fermi è

$$\Gamma = \frac{G_F^2 E_0^5}{192\pi^3}$$

ed è molto utile per la stima della costante di Fermi: sappiamo che la massa del muone è circa E_0 e la conosciamo con grande precisione, così come sperimentalmente troviamo bene la larghezza dello stato, quindi invertendo troviamo $G_F = 1.16637877(6) \cdot 10^{-5} Gev^{-2}$.

Vediamo come interpretare la teoria di Fermi: nota la teoria quantistica di campo per le interazioni W , la parte di interazione altro non è che lo scambio tra correnti di un bosone di gauge carico W^+ ; nell'interazione EM avevamo il fotone scambiato che rappresentava il canale di interazione per il calcolo dell'elemento di matrice, legato al quadrato del reciproco della differenza tra quadrimpulsi $q = p_N - p_{N'}$. Ma nelle interazioni deboli il W^+ non ha massa nulla, quindi a denominatore si aggiunge un m_W^2 e, dato che esso è generalmente molto maggiore del q sopra citato, il termine rappresentativo dell'interazione che per EM dava luogo a *canale s* e *canale t*, qui è circa costante, infatti $\frac{1}{q^2 + m_w^2} \simeq \frac{1}{m_w^2} = const.$

Osservando i diagrammi di Feynmann per interazioni EM vediamo che ai vertici compaiono contributi $\sqrt{\alpha}$ che in UN è $\sqrt{\alpha} = e$, e sostituendo a quei vertici l'analogo di carica delle interazioni deboli otteniamo

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \left(\frac{g}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{g^2}{8m_W^2}$$

e possiamo stimare g con ottima precisione, anche se solitamente si stima l'**angolo di Wienberg**, per il quale si ha

$$\sin^2(\theta_W) = \frac{e^2}{g^2} = 0.231554 \quad (87)$$

Infine, con la teoria di Fermi, se possiamo esprimere due processi di interazione mediante uno stesso *blocco di interazione*, ci attendiamo che il valore teorico rimanga valido per entrambi: è il caso in cui si riadattano le correnti invertendo il verso delle frecce, oppure considerando urti che differiscono per una particella in stato iniziale e la corrispondente antiparticella in stato finale. ESEMPIO

3.16.2 Scoperta del neutrino elettronico

Prendiamo la collisione

$$\nu_e + N \rightarrow e^- + N'$$

ove $\sigma = \mathcal{O}(10^{-38}) cm^2$.

E' un decadimento rarissimo, che si considerò per cercare le prime tracce di neutrini, infatti la sezione d'urto minuscola fa sì che un processo del genere si osservi solo se utilizzati dei rivelatori enormi e sorgenti super intense. Quale sorgente di neutrini migliore c'è rispetto al Sole? Ricordiamo infatti che nella catena di reazioni che avvengono nel nucleo solare, si ha la produzione di una coppia di neutrini e 20 Mev di energia (oltre al gamma ecc. che ora non ci interessano), ed abbiamo dunque il rapporto $\frac{1\nu}{10MeV}$. Tenendo conto della quantità di energia che investe la Terra ogni secondo, troviamo che il flusso di neutrini è $\Phi(\nu) \simeq 10^{11} \nu cm^{-2}s^{-1}$.

Però abbiamo un problema: i neutrini che ci arrivano hanno spettro energetico da qualche centinaio di keV alle decine di MeV, e sono pure coinvolti in diversi processi che danno allo spettro una struttura molto varia. Diventa quindi ovvio valutare la possibilità di studiare neutrini prodotti da una sorgente artificiale, in grado di garantire tanti neutrini nel range di energie che ci interessa. ESEMPIO

3.16.3 La scoperta del neutrino muonico

Ci si chiede: **ma esiste un neutrino diverso per ciascun leptone o c'è un unico neutrino per tutti?** Rispondiamo alla domanda considerando il decadimento del pion carico, che produce

$$p + {}^4Be \rightarrow \pi^\pm + X \quad \pi \rightarrow \mu + \nu(99\%)$$

se il neutrino fosse universale, allora potrà produrre un muone od un elettrone con ugual probabilità, altrimenti se il neutrino è specifico del muone produrrà al **100%** il muone:

$$\nu + N \rightarrow e + N'(\text{sciami}) \quad \nu + N \rightarrow \mu + N'(\text{tracce penetranti})$$

e confrontando le reazioni possiamo calcolare $R = \frac{\#\text{sciami}}{\#\text{tracce}}$ che varrà 1 se il neutrino è universale, 0 se è specifico.

Negli anni 60, nei laboratori di Brookhaven, un fascio di protoni di 15 GeV venne fatto incidere su un bersaglio di Berillio producendo pioni. Questi vennero incanalati in un *tunnel di decadimento* lungo circa 21 m, lungo cui la maggior parte di essi decadevano. Alla fine di essi si colloca uno schermo di Ferro di 13.5 m che assorbiva la quasi totalità dei prodotti di reazione, a meno dei più penetranti che non vengono quasi toccati. Alla fine si colloca un rivelatore che osserva i neutrini ed i loro prodotti di reazione, realizzato come un convertitore di 10 ton di Alluminio intersecato a dei contatori (camere a scintillazione, contenitori di gas non troppo denso in un alto campo elettrico che fotografano la scarica che genera il passaggio di una particella carica circa immediatamente). Altri rivelatori sono posti alle parti per scartare i segnali provenienti da altre sorgenti, tipo i raggi cosmici.

Nell'esperimento si analizzarono 3.5×10^{17} collisioni, da cui si selezionarono solo 113 eventi, 34 riconducibili a tracce dovute al passaggio di un muone e 6 sciami EM, eventi compatibili con il fondo atteso.

Si conclude che **ogni leptone possiede il proprio neutrino**.

3.17 Decadimenti leptonici, semi-leptonici, adronici

3.17.1 Leptone tau

Abbiamo già visto come il decay beta sia in forma uguale a quello del muone, che ricordiamo essere $\mu^- \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e$, con larghezza di stato $\Gamma = \frac{1}{\tau_\mu} = \frac{G_F^2 E_0^5}{192\pi^3}$.

Studiando il τ si trovano decadimenti identici in forma a quelli del muone, anche se il primo è decisamente più massivo e ha molteplici stati finali: di questi consideriamo quelli in cui si crea un elettrone e neutrino corrispondente, oppure muone e neutrino corrispondente.

Prendiamo

$$\Gamma(\tau \rightarrow \nu_\tau + e^- + \bar{\nu}_e) = \frac{G_F^2 m_\tau^2}{192\pi^3} = \frac{1}{\tau_\tau} \mathcal{B}(\tau \rightarrow \nu_\tau + e^- + \bar{\nu}_e) \quad (88)$$

con \mathcal{B} branching ratio. Per l'altro decay, con il muone, si ha una forma analoga con 192 al posto del 193 che compare a denominatore.

Tutto ciò è fondamentale per verificare l'*universalità dell'interazione debole*, secondo cui possiamo affermare che le considerazioni fatte sul muone valgono per il tau e anche per tutti i decadimenti leptonici, cosa che implica implicitamente che si abbia la stessa costante di interazione in ogni decay W, ossia vale che $g = \sqrt{\alpha_W}$ universalmente.

Sperimentalmente questa ipotesi si valida con errore inferiore al per mille, e quindi **si accetta l'ipotesi di universalità delle interazioni deboli in corrente carica**, per quella neutra le cose si complicano, ma non ci hanno detto come):

3.17.2 Quark top

Nel caso del muone avevamo $m_\mu \ll m_W$, ed il mediatore di campo debole coinvolto nel processo è generalmente una particella virtuale, cosa che comporta che il decadimento del muone sia complessivamente poco frequente, ed infatti abbiamo vita media alta, dell'ordine del microsecondo, con conseguente larghezza di stato bassina.

Esistono però particelle con massa decisamente superiore a quella del bosone W, e possiamo lecitamente attenderci che il mediatore sia una particella reale che poi decade nei suoi modi tipici: tra queste troviamo il **quark top**, con massa $m_t > 2m_W$. Esso segue decadimento W e quindi avrà molteplici possibilità di stato finale, la maggior parte dei quali presenta la produzione di un quark Beauty ad una coppia quark-antiquark oppure antileptone-neutrino. Inoltre ha tempo caratteristico di decadimento molto più breve del muone ($\mathcal{O}(10^{-24})s$), che è molto minore del *tempo di adronizzazione*, cioè il tempo impiegato per legarsi ad altri quark e formare un adrone. Quindi ad oggi **non esistono adroni con quark top come componente**, né in natura né creati in laboratorio, dato che esso decade prima di formare uno stato legato, e diremo che **il quark Top decade come un quark libero**.

3.17.3 Quark legati e decadimenti semi leptonici

Anche gli altri quark possono decadere in particelle più leggere: prendiamo tipo il Beauty. Come nel muone abbiamo massa iniziale piccina, cosa che implica tempo di decadimento lungo il quale a sua volta permette al quark di combinarsi con altri quark e dare adroni. A differenza del Top, tutti gli altri quark **decadono come non liberi, cioè all'interno di adroni che essi stessi formano: il decadimento dei quark legati è dunque la ragione di espressione dei decadimenti beta deboli di adroni**.

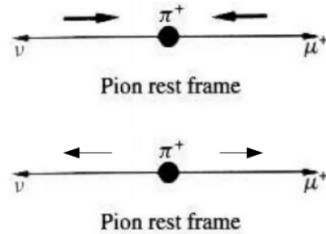
In questi decadimenti abbiamo un quark che decade, sperimentalmente troviamo che decade il quark più pesante, mentre gli altri non decadono e perciò li chiameremo *quark spettatori*.

3.17.4 Decadimenti leptonici dei pioni carichi

Ricordiamo il decadimento del π^- , che cade al **99%** in muone più antineutrino muonico? Ecco questo è un esempio di **decadimento leptonico puro, dato che un adrone decade in due soli leptoni come stato finale, neutrini esclusi**. Dalla teoria della costatante di Fermi sappiamo che $\rho_l \propto (m_\pi^2 - m_l^2)^2$ e, calcolando il rapporto tra probabilità di decadere verso un elettrone o verso un muone, si ha

$$\frac{\rho(\pi \rightarrow \mu + \nu_\mu)}{\rho(\pi \rightarrow e + \nu_e)} = \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2}{(m_\pi^2 - m_e^2)^2} \approx 0.18$$

che si verifica anche sperimentalmente: è quindi strano pensare che il pion preferisca decadere verso il muone, dato che sembrerebbe svantaggiato nel farlo. Però, troviamo giustificazione di ciò nell'**elicità**: consideriamo il π^+ , mesone pseudo-scalare con $J^P(\pi^+) = 0^-$. Da ciò abbiamo che, per avere J nullo, $S = \mathbf{0} \Rightarrow s_z(l) = -s_z(\nu_l)$ e quindi le due particelle finali dovranno avere stessa elicità (l'antiparticella avrà moto virtuale opposto a quello reale, il segno meno sparisce). Studiando il *rest frame* del pion, i prodotti di decadimento si allontanano dal centro e possiamo avere



ricordando che **abbiamo interazione debole**, allora abbiamo massima violazione di parità ed i neutrini possono avere solo elicità negativa, quindi la configurazione corretta è la prima delle due, cosa che determina una corrente fermionica in stato finale in cui si ha inversione dell'elicità con conseguente

$$|M|^2 \propto (1 - \beta^2) = \frac{1}{\gamma^2} \propto \frac{E_l^2}{E_\pi^2} \approx \frac{m_l^2}{m_\pi^2}$$

e abbiamo $\Gamma_l \propto \rho |M|^2 \simeq 1.23 \cdot 10^{-4}$ Quindi il fenomeno si spiega **considerando la soppressione ad alte energie per fenomeni che comportano inversione di elicità**.

3.17.5 Decadimenti deboli adronici

Nel caso si abbiano neutrini in stato finale, la cosa è semplice: essi sono sensibili solo a interazioni deboli, quindi tali devono essere. Se non ci sono neutrini, allora si può verificare l'eventuale violazione di isospin, stranezza o altri numeri quantici di sapore, osservando la larghezza di stato e cercando di classificarlo in un range compatibile con i decadimenti deboli.

3.18 Oscillazioni di sapore

3.18.1 Mesoni K neutri

I mesoni K sono le due particelle appartenenti all'ottetto di mesoni pseudo-scalari definiti come

$$|K^0\rangle = |d\bar{s}\rangle \quad J^P = 0^- \quad I_3 = -\frac{1}{2} \quad S = +1 \quad (89)$$

$$|\bar{K}^0\rangle = |s\bar{d}\rangle \quad J^P = 0^- \quad I_3 = +\frac{1}{2} \quad S = -1 \quad (90)$$

caratterizzati da stessa massa e carica nulla, con diversi numeri quantici di stranezza e di Isospin. Essendo particella e antiparticella sappiamo che gli stati che li descrivono possono essere trasformati l'uno nell'altro tramite operazioni di coniugazione di carica e parità, quindi esiste un operatore **CP** tale che

$$CP|K^0\rangle = +|\bar{K}^0\rangle \quad CP|\bar{K}^0\rangle = +|K^0\rangle \quad (91)$$

I decadimenti *flavour specific* (metà dei casi), decadimenti semi-leptonici in cui i modi di decadimento delle particelle sono tali da caratterizzare lo stato iniziale, sono appunto fondamentali per riconoscere la particella in stato iniziale: se supponiamo di avere un fascio indistinto di K neutri, non sappiamo cioè se è K^0 o \bar{K}^0 , basta guardare i prodotti di decadimento e se abbiamo dei l^+ allora sarà decaduto un K^0 , se abbiamo l^- sarà decaduto invece il \bar{K}^0 .

Possiamo avere anche decadimenti comuni, cioè tali per cui le due particelle danno gli stessi prodotti finali, ed è dunque impossibile capire quale K era quello che è decaduto. Tutti i decay di questo tipo sono stati osservati in onda s, cioè con L=0, da cui deriviamo che gli autovalori di CP per gli n pioni in stato finale si ottiene

$$CP|n\pi\rangle = c^n(\pi)(-1)^{L=0}|n\pi\rangle \quad (92)$$

da cui, dato che $c(\pi^0) = 1, p(\pi) = -1$

$$CP|n\pi\rangle = \begin{cases} CP|2\pi\rangle = +1|2\pi\rangle \\ CP|3\pi\rangle = -1|3\pi\rangle \end{cases} \quad (93)$$

Chiamiamo $|K^0\rangle, |\bar{K}^0\rangle$ **autostati di sapore e autostati di produzione** dato che sono autostati di stranezza e terza componente di Isospin (infatti rappresentano stati che sono prodotti in interazioni forti o EM i quali sappiamo conservare le suddette quantità).

La presenza di stati finale permette ai Kaoni di operare il fenomeno dell'**oscillazione**, cioè tipo il \bar{K}^0 può decadere in uno stato comune, facciamo il $\pi^+\pi^-$, scambiando un bosone W^+ e gluoni, e quest'ultimo potrà ricombinarsi per restituire uno stato iniziale, che potrebbe essere anziché l'iniziale \bar{K}^0 , il K^0 , quindi i pioni si scambiano un W^- . La cosa può continuare a ripetersi e dunque lo stato oscilla dall'una all'altra configurazione, trasformando una particella nella sua antiparticella e viceversa. Notiamo però che le interazioni tra quark legate a questo fenomeno implicano lo scambio di bosoni W, corrispondenti a interazioni deboli, per le quali si conserva la stranezza, ma

$$K^0 \rightarrow \bar{K}^0 \Rightarrow \Delta S = -2 \quad \bar{K}^0 \rightarrow K^0 \Rightarrow \Delta S = +2$$

e viene violata la conservazione della stranezza. APPROCCIO FORMALE

3.18.2 Violazioni di simmetria CP

Tra le ipotesi della trattazione formale precedente si ha la **conservazione della simmetria CP**. Cerchiamo di capire se è un fatto sperimentale o se è valida sempre.

In primis notiamo che il nostro universo è fatto prevalentemente di materia e non di antimateria, cosa che possiamo giustificare dicendo che post Big-Bang deve esserci stata una qualche asimmetria tra barioni ed antibarioni. Asimmetria che il fisico russo Sakharov giustifica con quattro condizioni:

- **violazione del numero barionico:** nel mondo abbiamo più barioni che antibarioni, quindi deve esser variato;
- **Violazione della coniugazione di carica:** ci sono più particelle che antiparticelle;
- **Violazione di CP:** per le particelle soggette a Weak interactions (WI) non basta la coniugazione per definire l'antiparticella, dato che ad esempio un antineutrino non inerte si ottiene per coniugazione ed inversione di parità di un neutrino
- **Transizione in condizione di non-equilibrio termico:** per ragioni legate al teorema CPT

Ad oggi tali condizioni non sono state tutte verificate: non c'è alcuna evidenza della violazione del numero barionico nelle reazioni tra particelle; la due è verificata già dall'esperimento Wu; la tre sembra esser in controtendenza rispetto alle considerazioni precedenti, dato che l'ipotesi di conservazione di CP è stata sfruttata nella formazione delle funzioni d'onda, nei processi di decadimento e nell'ipotesi di definizione simmetrica dell'Hamiltoniana. Strano, cadrebbero tutte le considerazioni fatte prima!

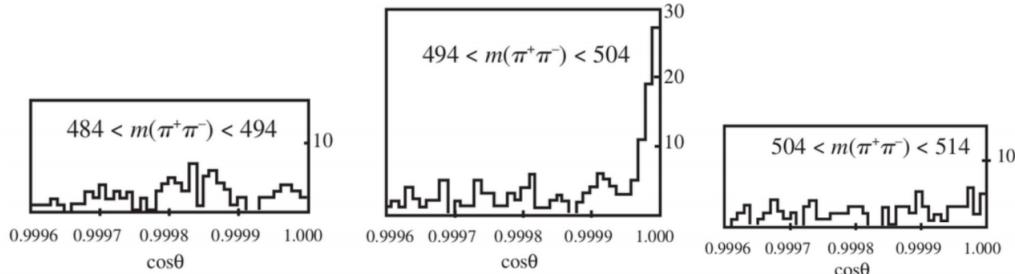
3.18.3 Esperimento di Christenson et al.

Prova che la simmetria di CP è violata. L'obiettivo è quello di dimostrare che \mathbf{K}_L può decadere in due pioni, e non solo nella configurazione a tre pioni come suggerito prima. Per avere un fascio di \mathbf{K}_L si sfrutta la differenza di vita media tra esso e il \mathbf{K}_S , che decadono prima: mettendo il rivelatore ad una certa distanza si avranno quindi solo i \mathbf{K}_L . A 20 m dal punto di produzione si mette dunque un aggeggio che collima il fascio di \mathbf{K}_L , agevola il processo di decadimento in \mathbf{He} e traccia i prodotti di decadimento lungo due assi ben determinati tramite un magnete (curva le particelle e ci permette di stimare il momento), possiede poi con una serie di camere a scintillazione per il *tracking* ed un radiatore Cherenkov che funge da *trigger*. Così certifichiamo il passaggio di una particella, ne troviamo la traiettoria, carica e quantità di moto.

Se la simmetria CP fosse conservata, allora $|\mathbf{K}_L\rangle$ sarebbe autostato di CP con autovalore -1 , e cadrebbe solo in tre pioni che si ripartirebbero l'energia del \mathbf{K}_L in modo circa casuale, conservando comunque energia e quantità di moto. Se avessimo solo due pioni, questi avrebbero momenti uguali ed opposti. Studiando l'angolo θ tra la direzione della somma dei momenti di π^+, π^- e quella del fascio incidente di momento \vec{p}_L , allora

$$\vec{p}_{\pi^+, \pi^-} \cdot \vec{p}_L = |\vec{p}_{\pi^+, \pi^-}| |\vec{p}_L| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{p}_{\pi^+, \pi^-} \cdot \vec{p}_L}{|\vec{p}_{\pi^+, \pi^-}| |\vec{p}_L|} \quad (94)$$

nel caso dei tre pioni avremo casualità dell'angolo, mentre con due pioni dovrebbe aggirarsi su $\cos \theta \simeq 1$ entro l' 1σ , dato che $\vec{p}_{\pi^+, \pi^-} \parallel \vec{p}_L$. Vediamo le osservazioni sperimentali:



a parte i due grafici estremali che sono analisi di controllo del fondo combinatorio, vediamo che in quello centrale che contiene energie del CM prossime alla massa del \mathbf{K}_L i conteggi hanno un picco di rapporto segale/rumore di circa $4 : 1$ per il coseno pari ad uno, con incertezza dell'ordine di 10^{-5} . Il *branching ratio* del decadimento è stimato essere $\mathcal{B} = \frac{\Gamma(\mathbf{K}_L \rightarrow \pi^+ + \pi^-)}{\Gamma(\mathbf{K}_L \rightarrow X)} = (0.20 \pm 0.04)\%$.

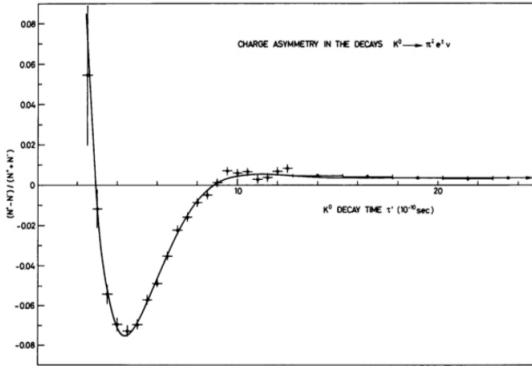
L'esperimento prova dunque la violazione della simmetria CP

3.18.4 Asimmetria semi-leptonica

Verifichiamo quanto detto per la ricostruzione dello stato iniziale dai prodotti del decay semi-leptonico dei K.

Possiamo definire una **asimmetria semi leptonica** sulla base dei conteggi effettuati ad un certo $t > 0$ dei modi di decadimento di un fascio di particelle soggette ad oscillazioni di sapore, che troveremo avere un andamento oscillante nel tempo smorzato da un esponenziale, trovando $P(t) \propto N$ e che l'asimmetria a tempi lunghi si annulla. Quest'ultima affermazione ha senso dato che per $t \gg 2\tau_S$ tutti gli stati $|\bar{K}_S\rangle$ decadono, lasciando solo i \mathbf{K}_L . Dunque abbiamo conteggi di valor atteso uguale e asimmetria nulla.

Sperimentalmente si ha



deve vediamo che

- A bassi t l'asimmetria segue le previsioni teoriche, mostrando l'andamento oscillatorio smorzato esponenzialmente;
- Ad alti t l'asimmetria sembra esser costante senza assumere valore nullo: da ciò deduciamo che anche quando vi è la sola presenza di \mathbf{K}_L vi sarà un termine preferito che comporta maggiori conteggi di una delle due direzioni tra \mathbf{K}^0 e $\bar{\mathbf{K}}^0$.

3.18.5 Asimmetria a due pioni

Con lo stesso obiettivo di prima, ossia quello di verificare la violazione di simmetria CP, supponiamo di avere uno stato iniziale con sia \mathbf{K}^0 che $\bar{\mathbf{K}}^0$, entrambi in grado di decadere in due pioni. Contiamo nel tempo il numero di volte N che il \mathbf{K}^0 decade in $\pi\pi$ e il numero di volte \bar{N} in cui è il $\bar{\mathbf{K}}^0$ a decadere $\pi\pi$, definendo il nuovo termine di asimmetria (2π) come

$$A_{2\pi} = \frac{N_{2\pi}(t) - \bar{N}_{2\pi}(t)}{N_{2\pi}(t) + \bar{N}_{2\pi}(t)} \quad (95)$$

se la simmetria CP fosse conservata ci aspetteremmo equiprobabilità per i due decadimenti, quindi $N = \bar{N}$, ma con $t \gg \tau_S$ si vede invece che il numero di conteggi per i due diversi Kaoni diverge, aumentando il contributo di asimmetria considerato.

Si osserva inoltre che per t alti sopravvivono solo i \mathbf{K}_L , indice a favore dello sbilanciamento nelle componenti $|\mathbf{K}^0\rangle, |\bar{\mathbf{K}}^0\rangle$ in $|\mathbf{K}_L\rangle$

3.18.6 Violazione di CP

In definitiva, ci sono diverse prove a favore del fatto che **la simmetria CP viene violata**, e ciò accade nella costruzione della funzione d'onda dato che $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$, con \mathbf{p} peso di $|\mathbf{K}^0\rangle$ e \mathbf{q} peso dell'altro. Le corrette definizioni dei mesoni $\mathbf{K}_S, \mathbf{K}_L$ sono

$$|\bar{\mathbf{K}}_S\rangle = \frac{(1+\epsilon)|\mathbf{K}^0\rangle + (1-\epsilon)|\bar{\mathbf{K}}^0\rangle}{\sqrt{2(1+|\epsilon|^2)}} = \frac{|K_+\rangle + \epsilon|K_-\rangle}{\sqrt{(1+|\epsilon|^2)}} \\ |\bar{\mathbf{K}}_L\rangle = \frac{(1+\epsilon)|\mathbf{K}^0\rangle - (1-\epsilon)|\bar{\mathbf{K}}^0\rangle}{\sqrt{2(1+|\epsilon|^2)}} = \frac{\epsilon|K_+\rangle + |K_-\rangle}{\sqrt{(1+|\epsilon|^2)}}$$

con $\epsilon \in C$ tale che $|\epsilon| = (2.228 \pm 0.001) \times 10^{-3}$, $\phi_\epsilon = 43.5^\circ \pm 0.5^\circ$. Da cui **concludiamo che gli autostati dell'Hamiltoniano**, ossia $|\bar{\mathbf{K}}_S\rangle, |\bar{\mathbf{K}}_L\rangle$ **non coincidono con gli autostati di parità**, che sono $|K_+\rangle, |K_-\rangle$. Infine evidenziamo che un'analisi approfondita del \mathbf{K}^0 mostra una violazione diretta della simmetria CP dato che non è nulla la probabilità di osservare

$$K_+ \rightarrow 3\pi \quad K_- \rightarrow 2\pi$$

che comporta altri termini di asimmetria non nulli.