Riassunti per l'esame di analisi 3

Aurora Leso

June 2021

Contents

1 Varietà differenziali

1.1 Varietà con un'equazione

Se ho

$$g(x,y) = pol(x,y,z) \tag{1}$$

1.1.1 Punti critici di g e la loro natura, dire quali insiemi di livello sono curve regolari

Per determinare i punti critici pongo

$$\nabla g = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) = (0,0,0) \tag{2}$$

e risolvo il sistema.

Per la loro natura, semplicemente calcolo l'hessiano

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Dove ci ricordiamo che

- det>0 tr$>0 \Rightarrow$ punto di minimo locale stretto
- det>0 tr$<0 \Rightarrow$ punto di massimo locale stretto
- det$<0 \Rightarrow$ punto di sella
- det=0 niente prego e spero

Le superfici di livello $g(x,y) = \alpha$ sono tutte regolari meno le S_α tali che mettendo un punto critico dentro l'espressione trovo l'α incriminato. interessante nel caso io abbia (x,y,z) e stia esplicitando (x(y,z)) allora $\dot{x}_y = \frac{\frac{d}{dy}}{\frac{d}{dx}}, \dot{x}_z = \frac{\frac{d}{dz}}{\frac{d}{dx}}$

1.1.2 Si provi che la superficie di livello S di g contenente P è ovunque regolare, la si parametrizzi in P fino all'ordine quadratico e si determini in due modi il piano tangente affine a S in P

E' regolare se non è tra quelle con punti critici, basta semplicemente calcolare il gradiente nel punto dato, vedere quale delle due coordinate è diversa da zero e esprimerla in funzione dell'altra (o delle altre se ho (x,y,z)). Fatto ciò, vado a derivare nelle coordinate "interne" e pongo le derivate uguali a zero. Troverò dei valor per $\dot{x}, \ddot{x}$ e esprimerò $x(y) = x_0 + \dot{x}(y - y_0) + \frac{1}{2}\ddot{x}(y - y_0)^2$.

Per il piano tangente affine semplicemente tronco al primo ordine lo sviluppo oppure calcolo

$$\nabla g(P)(x - x_0, y - y_0) = (0,0) \tag{4}$$

1.1.3 Determinare gli estremi assoluti di g su K insieme compatto

Prima di tutto se K compatto e g ivi continua gli estremi assoluti esisteranno per Weierstrass.
Poi posso usare Lagrange:

- Scrivo la condizione dell'insieme come equazione (tipo $x^2 + y^2 - 1 = f(x)$) e trovo $L = g(x,y) - \lambda f(x)$
- annullo le derivate di L rispetto alle coordinate (x,y) e rispetto a λ per trovare i punti critici.
- Controllo sugli estremi dell'insieme, tipo degli angoli.
- Sostituisco i punti nell'espressione di g per vedere quali sono i minimi e massimi assoluti.

Più semplicemente, se K lo visualizzo con facilità, posso disegnarlo e i punti critici interni sono quelli dello studio in genere richiesto al punto 1, gli altri li trovo mettendomi sui bordi e sostituendo i vincoli nell'espressione di g, derivando e trovando punti e infine vedo i vertici che sono sicuramente critici.

1.1.4 Determinare gli estremi assoluti di f funzione data su Γ curva di livello chiarendone la natura

Si tratta di annullare il determinante di

$$\begin{bmatrix} \nabla g \\ \nabla f \end{bmatrix} \tag{5}$$

Cioè vedo se sono paralleli e magheggio raccogliendo per vedere se lo sono. Semplicemente moltiplico la prima componente del primo gradiente per la prima del secondo gradiente e sottraggo il prodotto tra le seconde componenti dei due gradienti. Poi impongo il passaggio g(x,y)=k con k trovato sostituendo il punto dato. Poi per vedere il carattere dei punti trovati, semplicemente scrivo f nella parametrizzazione comoda controllando quale variabile posso esplicitare, derivo due volte controllando che la derivata prima sia zero e guardo il segno della derivata seconda. Se la derivata 2 è positiva sarà un minimo locale stretto, se è negativa sarà un massimo locale stretto, se è nulla una sella.

1.2 Da forma grafico a forma cartesiana o parametrica

Se mi viene data $z = f(x, y)$, per passare in **forma parametrica** uso un sistema di coordinate tipo cilindriche $\gamma(\rho, \theta) = (\rho cos\theta, \rho sin\theta, z(\rho, \theta))$ dove sapendo la relazione per z basta sostituire come ho scritto x e y. Per trovare il grafico dalla parametrica, mi basta scrivere z=$\phi(x, y)$

1.3 Data una curva parametrica $(x(t), y(t), z(t))$

1.3.1 Calcolare la retta tangente in P

Basta derivare la parametrizzazione data in t applicandola al punto dato, e la retta sarà $(x_P, y_P, z_P) + \lambda(\frac{\partial_{x(t)}}{\partial t}(P), \frac{\partial_{y(t)}}{\partial t}(P), \frac{\partial_{z(t)}}{\partial t}(P))$

1.3.2 Parametrizzare

Dal gradiente vedo quale delle tre tra x(t),y(t),z(t) è diversa da zero, esprimo t(y) e derivo la y=f(t) rispetto ad y trovando le derivate di t.

1.3.3 Determinare gli estremi assoluti (esistono?) di f(x, y, z)

Basta dire che il tratto di curva dato è immagine di un compatto tramite funzione continua quindi per Weierstrass esistono gli estremi. Poi compongo la f con come era data la γ, la derivo e trovo. Infine vedo quanto vale negli estremi la γ e controllo il valore di f in essi.

1.4 Varietà con due equazioni

Se mi trovo una cosa del tipo

$$g(x, y) = (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z)) \tag{6}$$

1.4.1 Mostrare che l'insieme di livello Γ di g contenente P è una curva regolare all'intorno di P, esibirne una parametrizzazione locale e calcolarne la retta tangente affine in P.

In questo caso pongo ancora il gradiente di g nullo ma avrà la forma dello Jacobiano

$$J_g = \begin{bmatrix} \partial x_1 & \partial y_1 & \partial z_1 \\ \partial x_2 & \partial y_2 & \partial z_2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

guardo (o semplicemente dico) che ha rango massimo sostituendo le coordinate del punto. Allora $g(P) = (x_1, y_1)$ è regolare intorno a P. Guardo quale minore ha determinante diverso da zero, cioè è non singolare, e le due coordinate alle colonne corrispondenti le esprimo in funzione dell'altra. Esplicito tipo rispetto a x, scrivendo y(x), z(x), derivo e pongo le derivate uguali a zero per trovare $\dot{y_x}, \dot{z_x}, \ddot{z_x}, \ddot{y_x}$. Alla fine la parametrizzazione sarà

$$(x, y_0 + \dot{y}(x - x_0) + \frac{1}{2}\ddot{y_x}(x - x_0)^2 + o(x^2), z_0 + \dot{z}(x - x_0) + \frac{1}{2}\ddot{z_x}(x - x_0)^2 + o(x^2)) \tag{8}$$

Per la retta tangente affine blocco al primo ordine le due espressioni di y e z oppure calcolo

$$J_g(P)(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (0, 0, 0) \tag{9}$$

1.4.2 Si provi che la superficie di livello S di g contenente P è ovunque regolare, la si parametrizzi in P fino all'ordine quadratico e si determini in due modi il piano tangente affine a S in P

1.4.3 Determinare gli estremi assoluti di g su K insieme compatto

1.4.4 Determinare gli estremi assoluti o i punti stazionari di f funzione data su Γ curva di livello chiarendone la natura

Impongo la condizione di Lagrange per cui

$$rk \begin{bmatrix} \nabla f \\ \nabla g_1 \\ \nabla g_2 \end{bmatrix} < 3$$

Cioè annullo il determinante. **Metto poi a sistema con le componenti in forma x,y,z della mia g uguali al valore che ottengo se sostituisco il punto P che era nella curva di livello**

Per vedere la natura dei punti, compongo f nella parametrizzazione di Γ attorno ai punti. Quindi calcolo gli Jacobiani, vedo i minori non singolari, esplicito, faccio le derivate controllando che quelle prime siano nulle, poi guardo le derivate seconde. Se la derivata 2 è positiva sarà un minimo locale stretto, se è negativa sarà un massimo locale stretto, se è nulla una sella.

1.5 Quando mi viene dato qualcosa di strano tipo un paraboloide sopra un triangolo

1.5.1 Parametrizzare S e dS

In questo caso scrivo il triangolo come serie di disequazioni e il paraboloide S che sarà tipo $z = f(x, y)$ lo vedo parametrizzato da $\gamma = (x, y, f(x, y))$. Se mi viene dato un punto, per il calcolo di dS vedo se questo sta su un lato del triangolo che quindi mi farà scrivere $y = f(x)$ e quindi $(x, f(x), g(x))$.

1.6 Calcolare spazi tangenti affini

Per quello sul paraboloide basta calcolare $(P + u\frac{d\gamma}{dx}(P) + v\frac{d\gamma}{dy}) = (x_P + uA, y_P + vB, z_P + uC + Fd)$

1.6.1 Estremi di una funzione f su S

Scompongo nella parte interna, nei pezzi di bordo e nei vertici. All'interno vedo dove i gradienti di f e dell'espressione $(z - f(x, y))$ sono paralleli; sui bordi compongo f con la parametrizzazione e la derivo, mentre se il bordo è tipo $x = 0$ basta metterlo nella parametrizzazione vecchia tipo $(0, y, f(y))$ e derivare la composizione di f con essa. No, non ho capito come si fa.

1.6.2 Esprimere l'area con un integrale

Data $f = z(x, y)$ che si proietta sul triangolo T nel piano (x,y) allora l'area è esprimibile con $A = \int_T \sqrt{1 + ||\nabla f||^2 dxdy}$

2 Calcolo di aree e cose magiche su figure 2D

2.1 Curva polare

Se mi viene data una curva in forma polare del tipo

$$\rho(\theta) = f(\theta) \tag{10}$$

Allora l'area. se siamo nel primo quadrante, sarà

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\rho(\theta))^2 d\theta \tag{11}$$

Per l'inerzia attorno ad x si calcola

$$\mu \int x^2 dxdy = \int (\rho cos\theta)^2 \rho d\rho d\theta = \int d\theta \int_0^{\rho(\theta)} \rho^2 cos^2\theta d\rho \tag{12}$$

dove integro da 0 fino all'espressione che mi viene data di $\rho(\theta)$ per la parte radiale.

2.2 Curva non polare

Se è semplice ok, se l'area è molto simile a un pezzo di cerchio posso trovare l'area scrivendo una funzione di ρ e usando le formule $\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}(\rho)^2 d\theta$

2.3 Inerzia

Si calcola rispetto all'asse y

$$I = \mu \int x^2 dxdy \tag{13}$$

e rispetto a x come

$$I = \mu \int y^2 dxdy \tag{14}$$

2.4 Baricentro

Si calcola come

$$x_G = \frac{1}{Area}\int xdxdy \qquad y_G = \frac{1}{Area}\int ydxdy \tag{15}$$

2.5 Integrazione su insiemi con Tonelli-Fubini

Se ci viene detto di vedere se una certa funzione è calcolabile sulla nostra area, prima dico che uso T-F se ha segno costante e quindi calcolo come integrale iterato, poi

- controllo se contiene grandi porzioni di "zero". In tal caso probabilmente divergerà. Mi creo quindi un sottoinsieme comodo su cui integrare perchè se diverge su tale sottoinsieme divergerà sicuramente su tutto.
- se non sembra patologica, integro sull'area o per sottrazione di aree (a meno che le suddette non siano patologiche) altrimenti sull'area intera tipo per fili.

Se mi viene richiesto di discutere al variare di α, allora trovo un integrale che dipende solo da $x^{\alpha+n}$ e se l'integrale include lo zero pongo $\alpha + n > -1$ se include infinito $\alpha + n < -1$

3 Figure e bestemmie 3D

3.1 Calcolo di Volumi

3.1.1 Guldino

Quando ho l'area nel piano (x,z) allora posso ruotare di mezzo giro attorno all'asse z e trovare il volume come

$$V = \frac{\pi}{2} \int xdxdz = \frac{\pi}{2} X_G \cdot A \tag{16}$$

Guldino attorno ad un'altra retta tipo (y=r) di superficie A

$$V = Area(A) 2\pi (r - y_G)$$

Mentre **l'area sempre per Guldino** di qualcosa con perimetro L che ruota attorno all'asse y(o z) di angolo $\frac{\pi}{2}$

$$\frac{\pi}{2} \int xdl \tag{17}$$

Per il dl lo calcolo come elemento lineare, scrivendo $(x, f(x))$ e $dl = \sqrt{1 + \frac{df}{dx}}$, notando che x la scriverò in funzione della parametrizzazione se serve. Se non ho la lunghezza la calcolo come $|\gamma(x)|$ cioè se ho (x,f(x)) allora derivo le componenti e faccio somma quadratica.

3.1.2 Fili

In questo caso mi basta vedere la proiezione del solido tipo sul piano (x,y) quindi ponendo uguali le equazioni in z, esprimere z in funzione di x e y e poi vedere l'altezza del solido (che è la z) integrando sulla base B e magari settando x e y in coordinate comode $(rcos\theta, rsin\theta)$

3.1.3 Fette

Scelgo una coordinata lungo la quale muovermi e vedo se tagliando il solido perpendicolarmente ad essa esce qualcosa di fattibile. Scrivo quindi le altre coordinate in funzione di quella su cui integrerò, quindi avrò integrale in una sola coordinata. Tipo se ho un dischetto vedo qual è il raggio e integro nella coordinata in cui ho espresso il raggio.

3.2 Volume con Gauss

Scelgo un campo che abbia divergenza 1 e calcolo il flusso uscente.

3.3 Aree laterali

Se posso usare Guldino, allora semplicemente calcolo la lunghezza del tratto che faccio girare e calcolo

$$A = \frac{\pi}{2} \int Ldx \tag{18}$$

3.4 Gauss

Calcolo il $\nabla F(x, y, z) = dx^2 + dy^2 + dz^2$ e trovo $\Phi_F(V) = \nabla F(x, y, z)V$. Ora devo verificare il teorema calcolando i flussi attraverso le varie superfici. Prima controllo se c'è qualcosa = 0 nella definizione di F. tipo (0,y,0) mi darà flussi nulli su tutti i piani paralleli a (y,z) e (x,y). Poi sui piani è semplice perchè il flusso sarà tipo

$$\int (0, y, 0)(0, -1, 0)dxdz \tag{19}$$

mentre le superfici le devo parametrizzare. Poi derivo la parametrizzazione e faccio il conto

$$\int det \begin{bmatrix} Fx & dx_1 & dx_2 \\ Fy & dy_1 & dy_2 \\ Fz & dz_1 & dz_2 \end{bmatrix} d_1 d_2 \tag{20}$$

Alcuni esempi sono

- Cono di raggio base r
$$(rcos(\theta), rsin(\theta), f(r)) \tag{21}$$
dove la $f(r)$ la trovo esprimendo la retta che lega z e x nelle coordinate impostate.
- Cilindro di raggio base r
$$(rcos\theta, rsin\theta, z) \Rightarrow d\sigma = rd\theta dz \tag{22}$$
Se il cilindro è tagliato da un piano, allora nell'integrale in dz devo ricordarmi che z va da 0 a $f(\theta)$. Chiaramente, se il cilindro è di rotazione attorno ad x allora la parametrizzazione sarà $(x, acos\theta, asin\theta)$
- Paraboloide parallelo a z con $z = Ax^2$
$$(xcos\theta, xsin\theta, Ax^2) \tag{23}$$
Oppure $(x, y, f(x^2, y^2))$ devo prima scrivere così, impostare l'integrale in x,y e solo dopo aver fatto più passaggi passoin coordinate cilindriche integrando ρ da 0 al raggio e θ da 0 a $\frac{\pi}{2}$
- Toroide di raggio totale (differenza raggi corone) r dove ϕ è la coordinata nel piano (x,z)
$$(rcos^2\phi cos\theta, rcos^2\phi sin\theta, rsin\phi cos\phi) \tag{24}$$
- Sfera
$$(rcos\theta sin\phi, rsin\theta sin\phi, rcos\phi) \Rightarrow d\sigma = r^2 sin\phi d\theta d\phi \tag{25}$$
dove usiamo θ per l'angolo di rotazione e ϕ che va da z in giù verso x.
- coperchio dato da retta $z = a - x$, allora la parametrizzazione è $(x, y, a - x)$ trovo $d\sigma = \sqrt{2}dxdy$ e integro sulla proiezione sul piano xy

3.5 Kelvin-Stokes

Calcolo
$$\nabla \times F = det \begin{bmatrix} i & j & k \\ dx & dy & dz \\ Fx & Fy & Fz \end{bmatrix} = (Fx, Fy, Fz) \tag{26}$$
Poi ci darà una faccia e trovo
$$\Phi_F(C) = \int \begin{bmatrix} Fx & dx_1 & dx_2 \\ Fy & dy_1 & dy_2 \\ Fz & dz_1 & dz_2 \end{bmatrix} \tag{27}$$
Ora calcolo la circuitazione lungo la superficie data parametrizzando ogni lato nel suo piano e stando attenta a mettere tutto in una coordinata, quindi avrò solo integrali 1D. Così integro poi in verso **antiorario**.

3.6 Green

Dato un piano (tipo xz) e un campo (tipo (2z,0,0)) vedo il campo come campo piano delle coordinate di mio interesse (x,z nel mio caso) e (2z,0)=(f,g)
$$\int (\frac{dg}{dx} - \frac{df}{dz}) = circuitazione = \int (f, g)(dx, dz)$$
Per calcolare con Green l'area della componente T di dE sul piano $y = 0$ si tratta di calcolare $\int_{dT} xdz$ in senso antiorario.

4 Equazioni differenziali teoria generale

4.1 Determinare gli equilibri e le curve integrali dell'equazione.

Scrivo la forma come $\omega = p(x,y)dx + q(x,y)dy$ e gli equilibri li trovo mettendo a zero sia p che q.
Vedo se è esatta ponendo $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$ se è vera è esatta altrimenti no. Posso trovare una curva integrale vedendo il risultato di $\frac{1}{q}(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x})$, se è funzione solo di x allora x=0 è curva integrale e un fattore integrante è $exp(\int f(x)dx) = g(x)$ quindi $g(x)\omega = exp(\int f(x)dx)\omega$ è esatta. Ora moltiplico la ω per la g(x) trovata, integrando poi le due derivate parziali e ponendo la costante in funzione di x se integro quella che deriva y per poi derivarla e scoprire quanto è la costante. Trovate le F(x,y) allora le curve integrali sono $F(x,y) = k$.

4.2 Esibire a scelta un sistema piano autonomo all'intorno di $(x(0), y(0)) = (a, b)$ associato all'equazione totale, e risolvere per esso il problema di Cauchy con questo dato iniziale.

Dopo aver trovate l curve integrali $F(x,y) = k$, semplicemente sostituisco il punto dato e vedo qual è il mio valore di k, invertendo poi per scrivere $y = f(x)$.
Per la soluzione al problema di Cauchy scrivo che

$$\begin{cases} \dot{x} = -q(x,y) \\ \dot{y} = p(x,y) \end{cases} \tag{28}$$

Poi integro semplicemente una e l'altra ricordarmi di imporre il passaggio nel punto dato, così trovo solo qualcosa che dipende da t del tipo $(x,y) = (f(t), g(t))$. **Ocio che gli integrali sono in t non in x e y, quindi separo le variabili.**

4.3 Analizzare a priori esistenza-unicità, crescenza, convessità, simmetrie e costanza delle soluzioni e invarianza temporale.

Guardo se davanti alle y' ho 1, se così non che l'equazione non è in forma normale. Annullando il fattore davanti alla y', supponendo sia tipo $(t - 3y^2(t))$, troverò un certo $t_0 = 3y^2(t_0)$ e dopo aver annullato la y' vedo quanto deve esser y per fare soluzione.

Se sono fuori dal caso non normalizzabile, allora normalizzo e avrò esistenza ed unicità locale, non globale perchè non ho dominio illimitato.

A questo punto divido in intervalli comodi la t; poi guardo dove la y' è nulla, maggiore di zero che porta a soluzioni crescenti e minore di zero che darà soluzioni decrescenti. **Ho invarianza temporale solo se l'equazione è autonoma**

4.4 Caso equazione autonoma

4.4.1 Considerazioni esistenza e unicità

Se **y non ha dipendenza da t** allora **l'equazione è autonoma ed è garantita l'invarianza temporale dello spazio delle soluzioni: ragioneremo pertanto con dati iniziali in t = 0.**

Post normalizzazione, posso scrivere l'equazione $y = f(y)$ come $(\dot{y}, \dot{p} = \ddot{y}) = (p, f(y)) = F(y,p)$ e se $(p, f(y))$ è $\mathcal{C}^\infty$ allora esistenza e unicità locale sono assicurate per ogni dato iniziale (y_0, y_0') ma se avevo qualcosa che annullava il termine davanti ad y' allora non posso dire nulla sull'esistenza globale. Vado poi a vedere le soluzioni costanti, quindi quelle che hanno nullo il termine y'. **Nel caso io abbia trovato dei punti** $(t_0, y(t_0))$ allora le uniche soluzioni saranno le costanti.

4.4.2 Integrale primo

So che l'integrale primo, posto $\ddot{y} = h(y)$ è $\frac{1}{2}\dot{y}^2 - \int h(y)dy = \frac{1}{2}p^2 - \int h(y)dy$ e il ritratto in fase è dato dal conto precedente posto uguale a k. Con k trovato sostituendo il punto dato in $\frac{1}{2}\dot{y}^2 - \int h(y)dy = \frac{1}{2}p^2 - \int h(y)dy$

4.5 Trovare le soluzioni dell'equazione

Se il punto dato è un equilibrio allora si ha la soluzione costante che è l'equilibrio stesso. Scrivo la ω associata con polinomi $\omega = p(y,t)dy + q(y,t)dt$, dove la p è il coefficiente davanti alla y' e q è la parte

a destra dell'uguale cambiata di segno. Se è esatta allora trovo facilmente la primitiva F(x,y). Fatto ciò so che le curve di livello sono le $F(x, y) = k$, imponendo il passaggio nel punto dato trovo la k e con Dini vedo se esplicitare y o x.
Se non posso trovare una forma finita come in $k = -1 \Rightarrow y^3 - ty - 1 = 0$ allora trovo uno sviluppo derivando e ponendo a zero con passaggio nel punto.

4.6 Caso con sistema

4.6.1 Cosa dire a priori su esistenza e unicità delle soluzioni? Calcolare equilibri e integrale primo.

Posso dire che ha esistenza e unicità locale per ogni dato di Cauchy se il secondo membro è una funzione $\mathcal{C}^1$, ma globalmente non posso dire nulla se non è sublineare, Fuori dagli equilibri posso semplificare il sistema (se $y = 0$ è equilibrio divido per esempio tutto per y), e trovo gli equilibri annullando i termini a destra. Per l'integrale primo scrivo la $\omega = bdx - ady$ uso il trucchetto di prima per veder se trovo qualcosa non dipendente da x ($\frac{1}{b}(\frac{db}{dy} - \frac{d(-a)}{dx}) = f(y)$)e trovo la corrispondente forma esatta moltiplcando per $exp(\int f(y)dy)$

5 Equazioni differenziali

5.1 Dominio a priori

In quella one line, dico che è lineare a coefficienti costanti e dunque il dominio è quello del termine costante.

5.2 Calcolo integrale primo

Dato

$$(\dot{x}, \dot{y}) = (f(x, y), g(x, y)) \tag{29}$$

Allora associo

$$\omega = (g(x, y)dx - f(x, y)dy) = 0 \tag{30}$$

Vedo se è esatta, cioè se $\frac{df}{dx} = -\frac{dg}{dy}$ e allora la primitiva F soddisfa $\frac{dF}{dx} = f, \frac{dF}{dy} = -g$, da una tiro fuori l'integrazione più la costante in funzione dell'altra e poi la derivo nell'altra e trovo la costante. Le traiettorie sono le $F(x, y) = k$ se il discriminante è minore di zero sono iperboli.

5.3 Caso con matrice e soluzione particolare

Se ci mettiamo nell'ipotesi

$$\boldsymbol{(\dot{x}, \dot{y}) = A(x, y) + b(t)}$$

Con A matrice, quello che devo fare è in primis calcolare la soluzione dell'omogenea, trascurando il $\boldsymbol{b(t)}$, quindi:

- Calcolare gli autovalori e gli autovettori della matrice A. Ricordiamo che gli autovalori si calcolano come

$$\boldsymbol{det \begin{bmatrix} a-\lambda & d & e \\ f & b-\lambda & g \\ h & j & c-\lambda \end{bmatrix} \overset{!}{=} 0} \tag{31}$$

mentre per gli autovettori

$$\boldsymbol{\begin{bmatrix} a-\lambda_1 & d & e \\ f & b-\lambda_1 & g \\ h & j & c-\lambda_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \overset{!}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \tag{32}$$

A questo punto, **se gli autovalori sono reali** semplicemente la mia risolvente della parte omogenea sarà

$$\boldsymbol{\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} v_{1_1} & e^{\lambda_2 t} v_{2_1} & e^{\lambda_3 t} v_{3_1} \\ e^{\lambda_1 t} v_{1_2} & e^{\lambda_2 t} v_{2_2} & e^{\lambda_3 t} v_{3_2} \\ e^{\lambda_1 t} v_{1_3} & e^{\lambda_2 t} v_{2_3} & e^{\lambda_3 t} v_{3_3} \end{bmatrix}} \tag{33}$$

Se **gli autovalori sono complessi coniugati** invece, tipo $\boldsymbol{\lambda_{1,2} = a \pm ib}$ allora troverò un autovettore $\boldsymbol{v_1}$ per uno dei due, diciamo $\boldsymbol{\lambda_1}$ e la soluzione sarà data da

$$\boldsymbol{Im(v_1 e^{\lambda_1 t}) \qquad Re(v_1 e^{\lambda_1 t})} \tag{34}$$

che genererà

$$\boldsymbol{\Phi(t) = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Im_1 + Re_1 \\ Im_2 + Re_2 \end{bmatrix}} \tag{35}$$

Ricordando che in genere la Im e la Re sono pure moltiplicate per un fattore e alla qualcosa. Se gli autovalori sono **complessi non coniugati** allora trovo gli autovettori corrispondenti e la soluzione dell'omogenea sarà

$$\boldsymbol{\begin{cases} Ae^{\lambda_1 t} v_{1_1} + Be^{\lambda_2 t} v_{2_1} \\ Ae^{\lambda_1 t} v_{1_2} + Be^{\lambda_2 t} v_{2_2} \end{cases}}$$

Cui sommo le particolari.

Se trovo un **autovalore doppio**, allora $\boldsymbol{N = A - (\lambda)}\mathbb{I}$ è nilpotente e la risolvente è data da

$$\boldsymbol{\Phi(t) = e^{tA} = e^{\lambda t}(\mathbb{I} + tN)} \tag{36}$$

- Trovare la soluzione particolare. **Se 0 non è autovalore della matrice associata all'omogenea** posso facilmente ragionare per somiglianza. Tipo se è polinomiale setto una soluzione della forma

$$\begin{bmatrix} a+bt \\ c+dt \end{bmatrix}$$

e impongo

$$\begin{bmatrix} b = roba\ data \\ d = roba\ data \end{bmatrix} \tag{37}$$

Così trovo le costanti e sono a posto(metodo di somiglianza). **Se 0 è autovalore del sistema** allora le regole sono più complesse.

- **potrebbe esser richiesto ora un sistema con tre righe (x,y,z)** Allora posso vedere se le prime due non dipendono da z, trovare le soluzioni e poi buttarle nella terza per trovare z.

Se il problema è del tipo

$$A\ddot{y} + B\dot{y} + Cy + D = C(t) \tag{38}$$

Allora devo

- mettere $\lambda^2 = \ddot{y}, \lambda = \dot{y}, 1 = y$ e porre =0 la parte a destra, per poi trovare le radici. Se sono complesse, sarà tipo $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}...$ e poi le scrivo prendendo solo le parti reali se richiesta soluzione reale. Per il calcolo delle radici complesse scrivo $\lambda = r(cos\theta + isin\theta)$ e trovo le radici come $\sqrt[n]{r}cos(\frac{\theta+k2\pi}{n}) + isin(\frac{\theta+k2\pi}{n}))$ con k da 0 a n-1

- per la soluzione costante si ragiona circa come prima. **Attenzione ai casi risonanti, cioè se devo cercare la particolare per qualcosa che avevo nell'omogenea**. Se ho qualcosa di complesso e mi compare un seno o un coseno lo scrivo come esponenziali e vedo se ci sono casi risonanti. **Nel caso in cui io abbia radici complesse e ho un seno, lo scrivo come $Im(Ae^{\lambda t})$** e cerco la soluzione per $Ae^{\lambda t}$ per poi prenderne solo la parte immaginaria. Se è risonante aggiungo t davanti alla formuletta del caso.

- le soluzioni finali saranno $y(t) = Ae^{\lambda_1 t} + ...$ al variare di A,B ecc.

5.4 Altro caso con $\dot{z} + p(t)z = q(t)$

In questo caso trovo $P(t) = \int p(t)dt$ e calcolo

$$z(t) = e^{-P(t)} \int (e^{P(t)} q(t)dt) + C \tag{39}$$

5.4.1 Regole per la soluzione particolare

Dopo aver scomposto la parte non omogenea in una serie di vettori con polinomiali separati da sin/cos eccetera, allora

- polinomio grado n. Ricerco della forma $at^n + ...$ Se zero è soluzione, allora il polinomio sarà $t(at^n + ...)$

- esponenziale $Ae^{\lambda t}$ cerco della forma $ce^{\lambda t}$ ma se λ era autovalore allora siamo in un caso risonante e allora dovrò cercare soluzioni del tipo $cte^{\lambda t}$, se il mio autovalore era doppio allora cerco $ct^2e^{\lambda t}$

- $Acos(\omega t) + Bsin(\omega t)$ o uno dei due e basta, cerco comunque soluzioni del tipo tipo $c_1cos(\omega t) + c_2sin(\omega t)$

- $e^{\lambda t}(Acos(\omega t)+Bsin(\omega t))$ allora cerco $e^{\lambda t}(c_1cos(\omega t)+c_2sin(\omega t))$ e nel caso risonante $te^{\lambda t}(Acos(\omega t)+ Bsin(\omega t))$ allora cerco $e^{\lambda t}(c_1cos(\omega t) + c_2sin(\omega t))$. Vale anche se ho solo seno o solo coseno e la soluzione comunque probabilmente li avrà entrambi.

- $e^{\lambda t}p(t)$ avrà soluzione $e^{\lambda t}q(t)$ e in caso risonante aumento di uno il grado del polinomio q(x)

Dopo aver ipotizzato le soluzioni, allora le derivo e risolvo il sistema per somiglianza delle costanti, ricordandomi che nel sistema tolgo le parti non omogenee che non ho considerato.

5.5 Metodo variazione delle costanti

Se la particolare $b(t)$ è strana, la soluzione per essa la trovo come $\phi(t)c(t)$ dove ϕ era la risolvente dell'omogenea e $c'(t) = \phi^-1(t)b(t)$ dove l'inverso di matrice si calcola come

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \Rightarrow \phi^-1 = \frac{1}{det(\phi)} \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix} \tag{40}$$

Quindi poi integro quel che trovo per tirare fuori la $c(t)$ e la particolare sarà $\phi(t)c(t)$.

5.6 Descrivere il sistema lineare del I ordine associato all'equazione, ed esibirne una risolvente.

Per esprimere il tutto come sistema lineare del primo ordine pongo $Y' = AY + b(t)$ con $Y = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}$, A matrice dei coefficienti in colonna per ciascun grado, b(t) termine particolare che era ciò che trovavo a destra dell'uguale. Chiaramente uso $(u, v, w) = (y, \dot{y}, \ddot{}) \Rightarrow (\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}) = (v, w, equazione(u, v))$.

La **risolvente sarà il Wronskiano**, che costruisco mettendo nella prima riga tutte le soluzioni che avevo trovato ($e^{\lambda t}$) e sotto le derivate prime e seconde in colonna. Poi semplicemente so anche che $e^{tA} = W(t)W(0)^{-1}$
Questo lo posso usare nel metodo **di variazione delle costanti** calcolando il determinante e se abbiamo

$$W = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{41}$$

tutte funzioni di t, allora la particolare se avevo termine f(t) è data da $\tilde{y} = c_1(t)A(t) + c_2(t)B(t)$ dove trovo $c_1'(t) = \frac{-B(t)f(t)}{det(W)}, c_2'(t) = \frac{A(t)f(t)}{det(W)}$

5.7 Esponenziale di matrice

Trovata la risolvente $\Phi(t)$, l'esponenziale della matrice A associata al sistema è

$$e^{tA} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}$$

Sappiamo inoltre che la matrice dei coefficienti A è data da

$$A = \Phi(t)\Phi(t)^{-1}$$

6 Integrali comodi

coseno

$$\boldsymbol{I_n = \int cos^n(\theta)d\theta = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{(2n-1)(2n-3)...}{2n(2n-2)(2n-4)...}}$$