

Misura dell'effetto Zeeman normale nelle righe del Neon

Per una breve introduzione teorica sull'effetto Zeeman nel Neon si rimanda alla dispensa *zeeman_effect_physics_guide.pdf* disponibile sulla pagina moodle del corso o a dispense equivalenti che possono facilmente essere reperite in rete.

1. Le caratteristiche dell'apparato sperimentale

Vediamo innanzitutto qualche valutazione preliminare per capire di cosa abbiamo bisogno per poter misurare l'effetto Zeeman in laboratorio.

La lampada a disposizione è una lampada a scarica in gas di Neon (in regime di bagliore) che, con poche centinaia di Volts applicati ai suoi capi, ci permette di vedere un filamento di luce rossa, composta principalmente da una serie di transizioni tra gli stati 3p e 2p del Neon, nella regione tra 580 e 700 nm.

In particolare siamo interessati alla transizione da 585.3 nm $^1S_0 \rightarrow ^1P_1$, cioè una transizione tra stati con spin $S=0$ e $\Delta J = \Delta L = 1$. Lo spin 0 dei due stati garantisce lo splitting Zeeman "normale" in presenza di un campo esterno B, caratterizzato dalla differenza di energia

$$\Delta E_{zee} = \pm \mu_B B \quad 1.1$$

essendo $g_l = 1$ e $m = \pm 1$ (split dei livelli dello stato di arrivo, quello con $J=1$). Lo splitting in 3 dello stato di arrivo determina quindi la comparsa di 3 transizioni di lunghezza d'onda molto vicina. Il Neon presenta anche altre righe dove è possibile osservare l'effetto (visibile anche con l'apparato del laboratorio), ma questa è la più intensa.

Il campo magnetico disponibile in laboratorio arriva fino a circa 0.5 T. Vediamo che separazione di righe ci aspettiamo in corrispondenza di un campo di questa intensità. Ricordiamo comunque che l'effetto Zeeman è associato a campi esterni piccoli rispetto al campo magnetico interno, quindi, anche disponendo di magneti più performanti, non si potrebbero utilizzare campi molto più intensi di questo.

$$\Delta E_{zee_max} = \mu_B B = \frac{9.3 \times 10^{-24} J}{T} \cdot 0.5 T = 4.6 \times 10^{-24} J = \frac{4.6 \times 10^{-24} J}{1.6 \times 10^{-19} C} \approx 3 \times 10^{-5} eV$$

Abbiamo una separazione dell'ordine di 10^{-5} eV, da confrontare con l'ordine di grandezza della separazione dei livelli atomici che è l'eV. Ci aspettiamo quindi una variazione molto piccola di lunghezza d'onda. Per $\lambda = 600$ nm:

$$\Delta \lambda_{zee} = \frac{\lambda^2}{hc} \Delta E_{zee} = \frac{600^2 nm^2}{1240 eV nm} 3 \times 10^{-5} eV \sim 8 \times 10^{-3} nm$$

Considerata la polarizzazione delle righe, sfruttando la visione lungo la direzione di B possiamo "sopprimere" la transizione centrale e vedere solo due transizioni separate da $\Delta \lambda = 2 \Delta \lambda_{zee} = 1.6 \times 10^{-2}$ nm.

Per una lunghezza d'onda di 600 nm serve quindi un potere risolvante:

$$R > \frac{\lambda}{\Delta \lambda} = \frac{600 nm}{1.6 \times 10^{-2} nm} \sim 36000$$

Per misurare bene lo splitting ci servirà quindi uno strumento con un potere risolvante dell'ordine di 100k. I prismi comuni hanno poteri risolvanti tra 100 e 1000, quindi molto al di sotto di quello che ci serve. Anche con i reticoli si arriva tipicamente intorno ai 10000, quindi servirà un dispositivo disperdente ad hoc: noi useremo la lamina di Lummer-Gehrcke.

2. La lamina di Lummer-Gehrcke

In laboratorio utilizzeremo la Lamina di Lummer-Gehrcke *un dispositivo interferenziale ad elevata risoluzione in un limitato range di lunghezze d'onda*. La lamina, un piano di vetro a facce perfettamente parallele, fu ideata inizialmente da Lummer e successivamente perfezionata da Gehrcke con l'introduzione di un piccolo prisma per facilitare l'ingresso della luce.

Il funzionamento della lamina è schematizzato nella figura sottostante: un fascio di luce entra nel dispositivo attraverso il prisma (a) e subisce una serie di riflessioni multiple all'interno della lamina. Parte della luce esce ad ogni riflessione, generando una serie di fasci paralleli che interferiscono producendo un'immagine sul piano focale di una lente (b) simile a quella di un reticolo di diffrazione

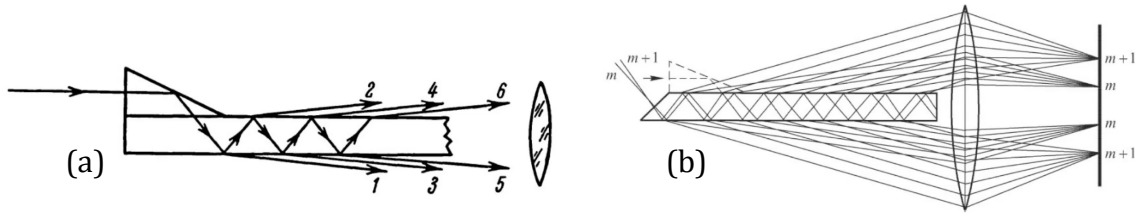


Figura 1: schema di funzionamento della lamina di Lummer-Gehrcke: (a) ingresso e propagazione della luce nella lamina e (b) produzione dei massimi di interferenza dei fasci di luce emergenti dalla lamina.

Ricaviamo ora la relazione di interferenza per la lamina, con riferimento alla Fig. 2:

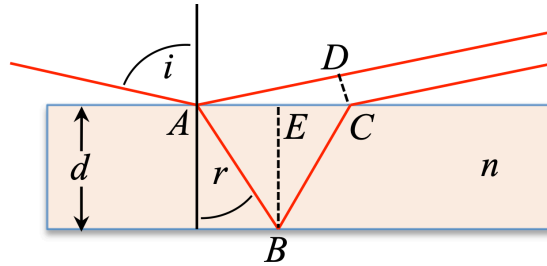


Figura 2: dettaglio del cammino ottico nella lamina.

Calcoliamo la differenza di cammino ottico Δx tra i percorsi dei due raggi quando si ritrovano paralleli in C e D:

$$\Delta x = n\overline{AB} + n\overline{BC} - \overline{AD} = 2n\overline{AB} - \overline{AD} \quad 2.1$$

$$\overline{AB} = \frac{d}{\cos(r)} \text{ e } \overline{AD} = \overline{AC} \cos\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = \overline{AC} \sin(i) = \overline{AC} \cdot n \sin(r) \quad 2.2$$

$$\overline{AC} = 2\overline{AE} = 2d \tan(r) \quad 2.3$$

$$\Rightarrow \Delta x = \frac{2nd}{\cos(r)} - 2nd \frac{\sin^2(r)}{\cos(r)} = \frac{2nd}{\cos(r)} (1 - \sin^2(r)) = 2nd \cos(r) \quad 2.4$$

La **condizione di interferenza costruttiva** è quindi:

$$2nd \cos(r) = m\lambda \quad 2.5$$

ovvero, in funzione di i : $2nd\sqrt{1 - \sin^2(r)} = 2nd\sqrt{1 - \frac{\sin^2(i)}{n^2}} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2(i)}$

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2(i)} = m\lambda \quad 2.5b$$

Vediamo ora il **potere risolvante R** : si può dimostrare che, analogamente ai reticoli di diffrazione, se i fasci emergenti fossero tutti di pari intensità il potere risolvante della lamina vale $R = P \cdot m$, dove P è il numero di fasci emergenti che interferiscono e m è l'ordine di interferenza.

Possiamo stimare approssimativamente il potere risolvante atteso considerando una lamina di tipiche dimensioni ($L = 100 \text{ mm}$, $d = 4 \text{ mm}$) con indice di rifrazione $n = 1.5$:

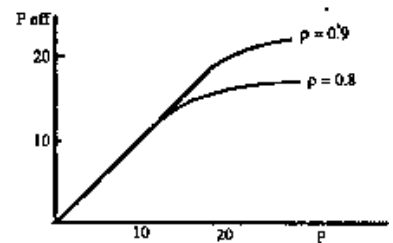
$$m = \frac{2d}{\lambda} \sqrt{n^2 - 1} \sim \frac{2d}{\lambda} \sim 13000$$

dove abbiamo approssimato per difetto $\sqrt{n^2 - 1} = 1.1 \sim 1$. Il numero dei fasci emergenti si può stimare come rapporto tra la lunghezza L e il segmento AC :

$$P = \frac{L}{AC} = \frac{L}{2d \tan(r)} \sim \frac{L}{2d} \sim 12$$

avendo considerato $i \sim 90^\circ$ (si lavora infatti in condizione di luce quasi radente) che porta $\tan(r) = 0.9 \sim 1$, quindi ancora un'approssimazione per difetto.

Moltiplicando troviamo $R \sim 170000$, cioè ben oltre il valore minimo calcolato in precedenza. In realtà i fasci emergono dalla lamina via via più deboli, per cui nella formuletta $R = Pm$ si usa sostituire P a un P_{eff} leggermente inferiore, ma questo non pregiudica il fatto di ottenere un potere risolvante più che adeguato.



Prima di poter affermare con certezza di essere in grado di osservare l'effetto Zeeman dobbiamo però verificare un'ultima cosa: in un dispositivo disperdente il **range di lunghezza d'onda utile ($\Delta\lambda_{r.u.}$)** che possiamo esplorare cala all'aumentare di m . E qui stiamo lavorando ad alti valori di m !

Se consideriamo due lunghezze d'onda vicine λ_1 e λ_2 , il $\Delta\lambda_{r.u.}$ rappresenta la massima differenza ($\lambda_2 - \lambda_1$) tale che il massimo di ordine m di λ_2 va a sovrapporsi al massimo di ordine $m+1$ di λ_1 . Quando questo succede non siamo più in grado di assegnare in modo chiaro le righe nello spettro alla lunghezza d'onda che le ha prodotte. Si può stimare nel modo seguente:

$$\Delta\lambda_{r.u.} = \frac{d\lambda}{di} \cdot \Delta i_{m \rightarrow m+1} \quad 2.6$$

Possiamo ricavarne una stima se trascuriamo la dipendenza di n dalla lunghezza d'onda:

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2(i)} = m\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2d}{m} \sqrt{n^2 - \sin^2(i)} \Rightarrow \frac{d\lambda}{di} = -\frac{d}{m} \frac{\sin(2i)}{\sqrt{n^2 - \sin^2(i)}} \quad 2.7$$

$$4d^2[n^2 - \sin^2(i)] = m^2\lambda^2 \Rightarrow -4d^2 \cdot 2 \sin(i) \cos(i) di = 2m\lambda^2 dm \Rightarrow \frac{di}{dm} = -\frac{m\lambda^2}{2d^2 \sin(2i)} \quad 2.8$$

$$\Delta\lambda_{r.u.} \sim \frac{d\lambda}{di} \cdot \frac{di}{dm} \cdot (\Delta m = 1) = \frac{\lambda^2}{2d} \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \quad 2.9$$

Con le approssimazioni di prima su i e n otteniamo:

$$\Delta\lambda_{r.u.} \sim \frac{\lambda^2}{2d} = \frac{(600 \text{ nm})^2}{2 \cdot 4 \text{ mm}} = 0.05 \text{ nm}$$

cioè circa 3 volte la separazione Zeeman calcolata all'inizio. Quest'ultimo calcolo ci conferma la possibilità di misurare correttamente lo split Zeeman con la lamina di Lummer.

Un calcolo più accurato per $\Delta\lambda_{r.u.}$ porta la seguente espressione:

$$\Delta\lambda_{r.u.} = \frac{\lambda^2}{2d} \cdot \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{n^2 - \sin^2 i - n\lambda \frac{dn}{d\lambda}} \quad 2.10$$

3. L'apparato di misura del laboratorio

L'apparato sperimentale disponibile in laboratorio è schematizzato nella figura seguente:

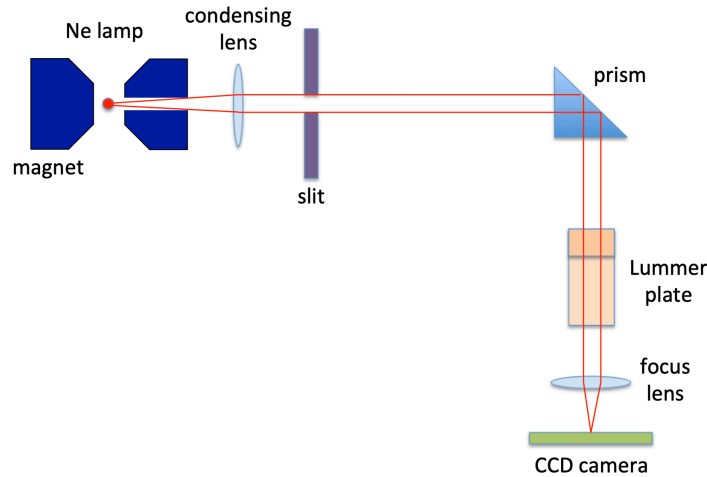


Figura 3: schema dell'apparato sperimentale

Una lampada al Neon è inserita all'interno di un magnete, forato lungo l'asse, in modo da poter vedere la luce emessa parallelamente al campo B. Il cono di luce emesso dalla sorgente viene "parallelizzato" da una prima lente (chiamata qui *lente condensante*) e fatto passare da una fenditura di apertura variabile. La luce entra quindi in un prisma che la fa ruotare di 90° e la divide nelle sue componenti principali. Il fascio entra quindi nella lamina di Lummer-Gehrcke e viene finalmente focalizzato sul dispositivo ottico di lettura (un CCD monodimensionale) attraverso la *lente di camera*.

I dettagli tecnici e le procedure per eseguire l'esperimento sono disponibili nella Scheda dell'esperienza presente sul computer di controllo e su moodle. Riportiamo qui a titolo di esempio l'immagine sul CCD della riga 585.3 nm in assenza di campo (a) e con campo a 0.5 T (b). Sono chiaramente visibili i massimi di interferenza per i diversi ordini m che permettono di determinare il $\Delta\lambda_{r.u.}$. La successiva accensione del campo (parallelo all'asse di vista) determina lo splitting in due dei massimi, dalla cui apertura si ricava allo splitting Zeeman $\Delta\lambda_{zee}$.

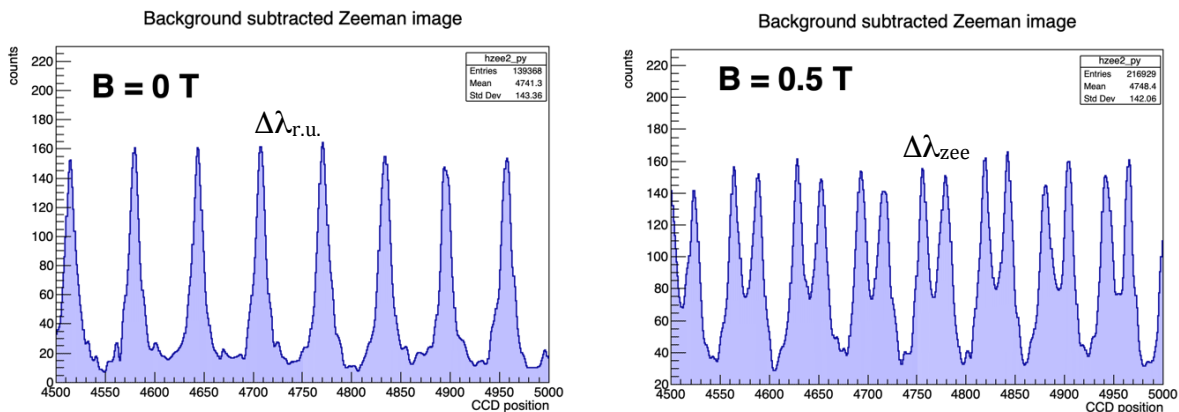


Figura 4: massimi di interferenza per la riga a 585.3 nm prodotti dalla lamina (a) e splitting Zeeman degli stessi massimi per effetto del campo magnetico (b).

Per concludere vediamo come ricavare una stima dell'angolo di incidenza a partire dai dati sperimentali. In base alla 2.8 abbiamo:

$$\Delta i \sim \frac{di}{dm} \cdot (\Delta m = 1) = - \frac{m\lambda^2}{2d^2 \sin(2i)}$$

D'altra parte (2.5b):

$$m = \frac{2d}{\lambda} \sqrt{n^2 - \sin^2(i)} \sim \frac{2d}{\lambda} \sqrt{n^2 - 1} \rightarrow \Delta i \sim - \frac{\lambda^2}{2d^2 \sin(2i)} \frac{2d}{\lambda} \sqrt{n^2 - 1} = - \frac{\lambda \sqrt{n^2 - 1}}{d \sin(2i)}$$

$$\Delta i \sim - \frac{\lambda \sqrt{n^2 - 1}}{d \sin(2i)} \quad 3.1$$

Se la focale della lente di camera è f , ci aspettiamo che Δi porti sul piano focale un'apertura tra i massimi $\Delta x \sim f \cdot \Delta i$ che, nota la dimensione del pixel, può essere stimata a partire dalla distanza tra due picchi consecutivi nello spettro del CCD.